Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Республиканский институт высшей школы

ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ: НАЦИОНАЛЬНЫЙ И МЕЖДУНАРОДНЫЙ АСПЕКТЫ

Электронный сборник статей
международной научно-практической конференции,
посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета

(Новополоцк, 8-9 февраля 2018 г.)

Под редакцией
Ю. П. Голубева, Н. А. Борейко

Новополоцк
2018

УДК 378(082)

Инновационные подходы в образовательном процессе высшей школы: национальный и международный аспекты [Электронный ресурс] : электронный сборник статей международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета, Новополоцк, 8-9 февр. 2018 г. / Полоцкий государственный университет ; под. ред. Ю. П. Голубева, Н. А. Борейко. – Новополоцк, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Представлены результаты новейших научных исследований, посвященных различным аспектам организации образовательного процесса высшей школы в инновационной среде, а именно: проблемам проектирования и реализации компетентностно-ориентированных образовательных программ в учреждениях высшего образования, возможностям использования информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе, вопросам педагогики и методики высшего образования.

Предназначен для научных и педагогических работников высшей школы, будет полезен студентам, магистрантам и аспирантам университетов педагогических специальностей.

Сборник включен в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3141814304 от 05.02.2018.

Компьютерный дизайн *М. С. Мухоморовой*
Техническое редактирование *Т. А. Дарьяновой*, *О. П. Михайловой*
Компьютерная верстка *Д. М. Севастьяновой*

211440, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, Беларусь
тел. 8 (0214) 39 40 46, e-mail: n.boreiko@psu.by

ISBN 978-985-531-584-2

УДК 378

ИННОВАЦИОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИЗЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О. В. Голубева, *зав. кафедрой технологий программирования, канд. физ.-мат. наук, доц.*
С. Г. Ехилевский, *декан факультета информационных технологий, д-р техн. наук*
Н. А. Гурьева, *доц. кафедры технологий программирования, канд. физ.-мат. наук*
А. В. Субботин
Полоцкий государственный университет

Практически всегда принятие глобальных решений (управленческих, транспортно-логистических, технических, научно-мировоззренческих, военно-политических и пр.) связано с поисками компромисса. Как следствие, математические модели, описывающие сущностно нетривиальные явления, не имеют точных решений. Причина в том, что сами модели не вполне корректны, либо осознанно (из соображений простоты[1]), либо в связи с отсутствием адекватного понятийного языка и, как следствие, математического аппарата[2]. Есть также неидеальные задачи, в которых ошибки априори неизбежны (например, проверки статистических гипотез). В них можно лишь минимизировать издержки, связанные с отсутствием точных решений. В связи с изложенным в математике и информатике актуальна задача поиска псевдорешений, отражающих упомянутый выше компромисс. Проиллюстрируем этот «инструмент» математического моделирования на примере систем линейных алгебраических уравнений:

$$AX = B \text{ есть} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В связи с поставленной задачей нас не интересует совместно заданная система уравнений или нет, так как любую систему уравнений мы всегда можем решить приближённо, то есть найти её псевдорешения.

Одним из способов нахождения псевдорешений системы является метод наименьших квадратов. Согласно этому методу находят такие псевдорешения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, при которых функция

$$F(X) = |AX - B|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right|^2$$

[1] Например, приближение статистической зависимости корреляционой, а последней ее линейной или нелинейной регрессией.

[2] Использование в статистической физике эргодической гипотезы для «объяснения» существенно квантовых феноменов классическими средствами.

имеет наименьшее значение. Построим функцию $F(x)$ для заданной задачи:

$$F(X) = (x_1 + x_4 - 4)^2 + (x_2 + x_4 + 4)^2 + (x_3 + x_4 - 4)^2 = {x_1}^2 + 2x_1x_4 + 3{x_4}^2 - 8x_1 + {x_2}^2 + 2x_2x_4 + 8x_2 + {x_3}^2 + 2x_3x_4 - 8x_3 - 8x_4 + 48.$$

Найдём частные производные $F(X)$ по x_1, x_2, x_3 и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4, \\ x_2 = -4 - x_4, \\ x_3 = 4 - x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Решив полученную систему, найдем множество псевдорешений

$$X = \{4 - x_4, -4 - x_4, 4 - x_4, x_4\}^T.$$

Заметим, что первые три уравнения последней системы можно трактовать как параметрическое задание прямой в трехмерном пространстве, где в качестве параметра X_4 может фигурировать время. При этом упомянутая прямая – траектория равномерного движения точки со скоростью

$$v = \sqrt{\dot{x}_1(x_4)^2 + \dot{x}_2(x_4)^2 + \dot{x}_3(x_4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Отметим, что нахождение псевдорешений с помощью метода наименьших квадратов сводится к матричному уравнению вида $A^*AX = A^*B$, где матрица A^* – матрица, полученная из матрицы A транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряжённые. Так как матрица A действительная, то $A^* = A^T$.

Информация обо всех псевдорешениях содержится в радиус-векторе минимальной длины, заканчивающемся на множестве псевдорешений. Чтобы его определить, найдем такое псевдорешение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, при котором функция $\Phi(X) = |X|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$ имеет наименьшее значение. Такое псевдорешение называется нормальным, ибо кратчайшее расстояние до некривого объекта (заданного системой линейных уравнений) измеряется по «перпендикуляру» (в данном случае к упомянутой выше траектории). Найдём нормальное псевдорешение, составив функцию $\Phi(X) = |X|^2 = (4 - x_4)^2 + (-4 - x_4)^2 + (4 - x_4)^2 + x_4^2 = 4x_4^2 - 8x_4 + 48.$
Из условия ее минимума получаем $\Phi'(X) = 8x_4 - 8, 8x_4 - 8 = 0, \text{или } x_4 = 1.$
Значит $X^0 = (3, -5, 3, 1)^T$ – нормальное псевдорешение. Его можно найти и из соотношения $X^0 = A^+B$, где A^+ – псевдообратная матрица матрицы A.

Любая модель наиболее проста в системе координат, учитывающей симметрию описываемого явления. Поэтому дальнейшим шагом решения задачи будет нахождение проекции нормального псевдорешения на подпространство правых сингулярных векторов матрицы A.

Согласно определению левые сингулярные векторы матрицы линейного преобразования A – собственные векторы матрицы AA^*, а, соответственно правые сингулярные векторы – собственные векторы матрицы A^*A.

Найти собственные векторы линейного оператора – решить матричное уравнение вида $(A - \lambda E)X = 0$, где λ – соответствующее вектору X собственное значение матрицы A.

Решив матричное уравнение в виде системы однородных уравнений

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

получим множество собственных векторов (левых сингулярных базисов) заданной матрицы AA^*:

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, где $f_1, f_2, f_3 -$ левые сингулярные векторы этой матрицы.

Аналогично отыщем множество правых сингулярных векторов

$e_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,3)^T, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T, e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^T, e_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)^T$.

Определим сингулярные числа как решение следующих матричных уравнений:

$$Ae_i = \rho f_j \text{ и } A^* f_j = \rho e_i,$$

где e_i, f_j — соответственно правые и левые сингулярные векторы, ρ – сингулярные числа исходной матрицы. Для матрицы A данной системы множество сингулярных чисел $\rho_1 = 2,\ \rho_2 = \rho_3 = 1$.

Векторы e_i образуют ортонормированный базис в пространстве $X^{(4)}$. Это значит, что X^0 можно представить разложением

$$X^0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4.$$

Обозначим через $X^1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ проекцию X^0 на подпространство $X^{(3)}$, определяемое векторами e_1, e_2, e_3: X^1.

Умножим обе части равенства (*) скалярно на векторы e_1, e_2, e_3. Учитывая ортонормированность базиса получим $\left(X^0, e_i\right) = \left(e_i, e_i\right) a_i = a_i$, или $a_1 = 2\big/\sqrt{3}$, $a_2 = -8\big/\sqrt{2}$, $a_3 = -8\big/\sqrt{6}$.

Заметим, что $\left|X^1\right| = \left(2\big/\sqrt{3}\right)^2 + \left(-8\big/\sqrt{2}\right)^2 + \left(-8\big/\sqrt{6}\right)^2 = 44 = 3^2 + (-5)^2 + 3^2 + 1^2 = \left|X^0\right|$, ибо $a_4 = \left(X^0, e_4\right) = \frac{1}{2}(3-5+3-1) = 0$, то есть, в базисе правых сингулярных векторов, учитывающих симметрию задачи, нормальному псевдорешению отвечает начальный момент «времени» $a_4 = 0$, а не промежуточный $x_4 = 1 \neq 0$ как в исходном базисе.

Таким образом, на примере систем линейных алгебраических уравнений продемонстрирована идеология и способы построения псевдорешений. Их описание оптимизировано переходом к базису правых сингулярных векторов, учитывающих симметрию задачи. Для четырехмерного случая найдена проекция нормального псевдорешения на подпростарнство трех декартовых координат. Предложены наглядные интерпретации полученных результатов.