

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДИК

*д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ, канд. техн. наук, доц. Г.Е. ГОЛОВАНЬ, М.Г. ГЛЕБКО
(Полоцкий государственный университет)*

Приведено сравнение результатов оценки точности определения площадей при заданной точности измерений с использованием различных методик. Одна из методик заключается в применении методов нелинейного программирования путем минимизации целевой функции для оптимального плана. Показано, что эффект от применения нелинейных методов составляет до 50 %. Обсуждаются вопросы уравнивания плановых геодезических сетей, не содержащих исходных пунктов. При этом сравниваются две методики оценки точности, основанных на использовании двух различных вспомогательных матриц R. Доказано, что одна из методик приводит к неверным результатам оценки точности. Исследования выполнены на примерах геодезических сетей триангуляции, трилатерации, линейно-угловой триангуляции и полигонометрии. Эти построения наиболее часто используются в землеустройстве при вычислении и оценке точности определения площадей. Расчеты выполнялись на Pentium III по программам OZENKA2 и RIAD1. Продолжительность времени вычислений не превосходит 60 с для количества определяемых пунктов до 150.

Введение. Проектирование и оценка точности определения площадей для геодезического производства сегодня является актуальным вопросом. Рассматриваются случаи, когда сети не содержат исходных пунктов.

1. Предвычисление точности измерений в геодезической сети при заданной точности определения площади земельного участка. При проектировании плана измерений возникает вопрос определения такой точности измерений углов и длин линий, которая обеспечивала бы определение площади земельного участка с заданной точностью $M_{p_{дон}}$.

В качестве целевой функции выберем следующую:

$$\Phi(Y) = |M_p - M_{p_{дон}}|, \quad (1)$$

где величина Y содержит не только стандарты измерений, но и вектор X , включающий в себя координаты пунктов по границе площади. Для того что бы воспользоваться функцией (1), необходима программа по вычислению точности определения площади m_p при заданной геометрии участка и величин σ_β и σ_S .

Допустим, дана линейно-угловая сеть, предназначенная для определения площади с ошибкой $M_{p_{дон}}$ в соответствии с Инструкцией о построении геодезических сетей. Назначим $\sigma_{\beta 0}$ и $\sigma_{S 0}$ и вычислим по программе M_{p_0} с применением формул, опубликованных в [1].

Если $M_{p_0} \leq M_{p_{дон}}$, то задача по проектированию не возникает; если $M_{p_0} > M_{p_{дон}}$ – становится актуальной. В последнем случае будем находить план измерений, отыскивая минимум целевой функции (1), что соответствует условию:

$$M_{p_0} \leq M_{p_{дон}}. \quad (2)$$

Известно, что при $\sigma_2 \leq \sigma_1$ имеем $M_{p_2} \leq M_{p_1}$, следовательно, надо искать оптимальное значение σ в соответствии с неравенством (2). Наши исследования показали, что σ оптимальное можно найти градиентным методом спуска, используя формулы:

$$\sigma_{j+1} = \sigma_j - \lambda_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right)_j; \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{\Phi_j}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\varepsilon} \Phi_{\varepsilon} - \Phi_{-\varepsilon}, \quad (5)$$

где ε – малый шаг дифференцирования, причем $\varepsilon = \sigma_j / 10$, а $\Phi_{\varepsilon} = \Phi(\sigma_j \pm \varepsilon)$.

Для линейно-угловой сети должны быть известны σ_{β} и σ_s , но мы предлагаем искать σ_{β} по формулам (3) – (5), полагая, что

$$\sigma_{\beta} = \frac{\sigma_s \cdot \rho''}{S_{ср.}}, \quad (6)$$

где $\rho'' = 206265$; $S_{ср.}$ – средняя длина стороны.

Предложенные выше формулы справедливы для любых несвободных, свободных (опирающихся на 2 исходных пункта) и нуль-свободных геодезических сетей, не имеющих ни одного исходного пункта.

Приведем несколько примеров по обработке плановых геодезических сетей триангуляции, трилатерации и линейно-угловой сети триангуляции и полигонометрии.

Обработка нуль-свободной триангуляции:

$\sigma_{\beta_0} = 10''$	$M_{p_{дон.}} = 300 \text{ м}^2$	$\Phi_0 = 139,2 \text{ м}^2$
$\sigma_{\beta_{\varepsilon}} = 11''$	$\sigma_{\beta_{-\varepsilon}} = 9''$	
$\Phi_{\varepsilon} = 142,9 \text{ м}^2$	$\Phi_{\beta_{-\varepsilon}} = 135,5 \text{ м}^2$	
$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\beta}} = 37,1$	$\lambda = 0,1$	
$\sigma_{\beta_{опт.}} = 10'' - 4,7'' = 5,3''$	$M_{p_{дон.}} = 285 \text{ м}^2$	

Обработка нуль-свободной трилатерации:

$\sigma_{s_0} = 30 \text{ мм}$	$M_{p_{дон.}} = 50 \text{ м}^2$	$\Phi_0 = 5,893 \text{ м}^2$
$\sigma_{\varepsilon} = 31 \text{ мм}$	$\sigma_{-\varepsilon} = 29 \text{ мм}$	
$\Phi_{\varepsilon} = 7,756 \text{ м}^2$	$\Phi_{-\varepsilon} = 4,030 \text{ м}^2$	
$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_s} = 1,863$	$\lambda = 1,7$	$\sigma_{s_{опт.}} = 27 \text{ мм}$

Обработка нуль-свободной триангуляции:

$\sigma_s = 30 \text{ мм}$	$M_{p_{дон.}} = 10 \text{ м}^2$	$\Phi_0 = 45,213 \text{ м}^2$
$\sigma_{\varepsilon} = 31 \text{ мм}$	$\sigma_{-\varepsilon} = 29 \text{ мм}$	
$\Phi_{\varepsilon} = 47,037 \text{ м}^2$	$\Phi_{-\varepsilon} = 43,389 \text{ м}^2$	
$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_s} = 1,824$	$\lambda = 3,58$	$\sigma_{s_{опт.}} = 30 \text{ мм} - 24,8 = 5,2 \text{ мм}$

$$\sigma_{\beta}'' = \frac{5,2 \text{ мм} \cdot 206265''}{1000000 \text{ мм}} = 1,1''.$$

2. Уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей с использованием псевдообратных матриц. Согласно теории уравнивания свободных сетей задача решается не только при условии $V^T PV = \min$, но и при $X^T X = \min$ [2]. Под свободной сетью понимают геодезическую сеть, в которой заданы координаты только двух пунктов, находящихся на концах исходной стороны [3].

Применим вышеуказанную теорию к нуль-свободным сетям. Под нуль-свободной сетью понимают геодезическую сеть, в которой матрица коэффициентов уравнений поправок $V = AX + L$ имеет столбцевой дефект ранга больше нуля [4]. Подключение при уравнивании дополнительного условия $X^T X = \min$

приводит к единственному решению: $X = -N^+ L$, где $N^+ = (A^T P A)^+ -$ соответствующая псевдообратная матрица.

Как отмечается в [2], в этом случае получаются несмещенные оценки параметров и наилучшие характеристики точности положения пунктов, относительно принятой системы отсчета, которая задается известными координатами пунктов сети.

Матрица N^+ определяется из выражения [2]:

$$(A^T P A)^+ = (A^T P A + R^T R)^{-1} - R^T (R R^T R R^T)^{-1} R, \quad (7)$$

где $A^T P A = N$, а R для линейно-угловой сети:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \dots & -y_m & x_m \end{pmatrix} \quad (8)$$

и для угловой сети

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \dots & -y_m & x_m \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_m & y_m \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где x_i, y_i – координаты пунктов относительно центральной точки сети: $x_{cp.} = \sum \frac{x_i}{k}$; $y_{cp.} = \sum \frac{y_i}{k}$.

Наши исследования подтвердили, что матрица (8) не применима для уравнивания сетей триангуляции. Однако матрица (9) может быть использована для любых геодезических сетей, причем во всех случаях минуя матрицу (8). В результате составление программы значительно упрощается.

Подтвердим сказанное экспериментальными вычислениями.

На рисунке 1 изображена нуль-свободная геодезическая сеть треугольников со следующими исходными данными: $S_{cp.} = 1000$ м, $\sigma_s = 30$ мм, $\sigma_\beta = 2''$.

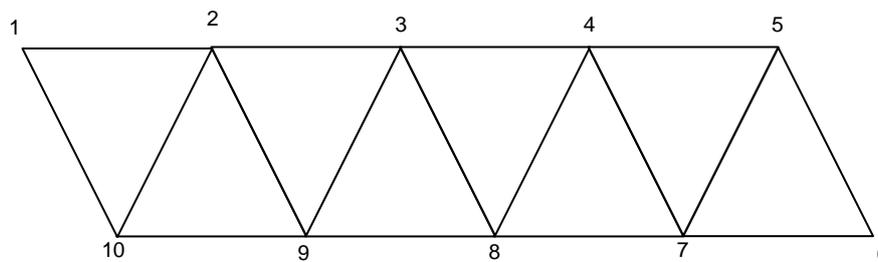


Рис. 1. Нуль-свободная геодезическая сеть треугольников

В таблице 1 приведены результаты оценки точности площади фигуры 1, 2, ..., 10, 1, показанной на рисунке 1, с применением матриц (8) и (9).

Таблица 1

Результаты обработки первого примера

№ п/п	Вид сети	M_p по (8), м ²	M_p по (9), м ²
1	Триангуляция без измеренных сторон	–	11,8
2	Триангуляция с измеренной стороной	231,0	11,8
3	Трилатерация	55,9	42,8
4	Линейно-угловая	54,7	11,3

На рисунке 2 изображена нуль-свободная линейно-угловая геодезическая сеть.

Длины сторон S_1 и S_2 приведены в таблице 2 при тех же точностных характеристиках.

В таблице 3 приведены результаты оценки точности определения площади с номерами 1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 15, 14, 13, 9, 5, 1 (см. рис. 2).

В результате проведенного эксперимента мы доказали, что матрица (9) в противоположность утверждению в [2] является универсальной и может быть использована для любых геодезических сетей.

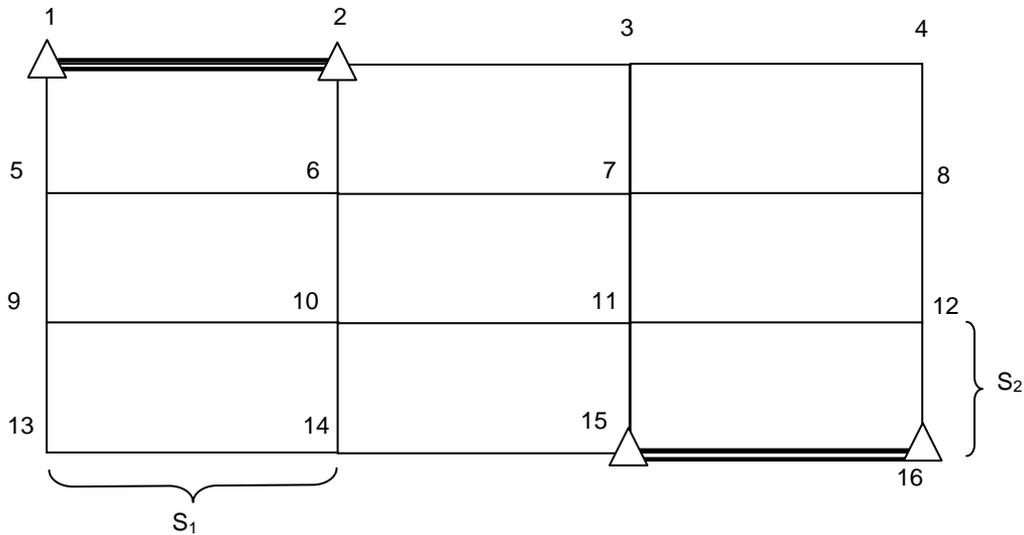


Рис. 2. Нуль-свободная линейно-угловая сеть

Таблица 2

Длины измеренных сторон

№ п/п	S_1 , м	S_2 , м
1	1000	1000
2	1000	500
3	1000	250
4	2000	250
5	3000	250

Таблица 3

Результаты обработки второго примера

№ п/п	M_p по (8), м ²	M_p по (9), м ²
1	135,7	19,7
2	117,8	69,5
3	113,0	98,6
4	229,5	221,8
5	358,4	353,0

Из таблиц 2 и 3 видно, что во всех случаях выполняется неравенство:

$$m_{p(8)} > m_{p(9)}, \quad (10)$$

но говорить о том, что применение матрицы (8) ошибочно, преждевременно.

Рассмотрим **пример** [1].

Найти среднюю квадратическую ошибку определения площади m_S для четырех построений, показанных на рисунке 3, при длинах сторон $C_1 = 100$ м (площадь $S = 10000$ м²), $\sigma_S = 0,02$ м, $\sigma_\beta = 20''$.

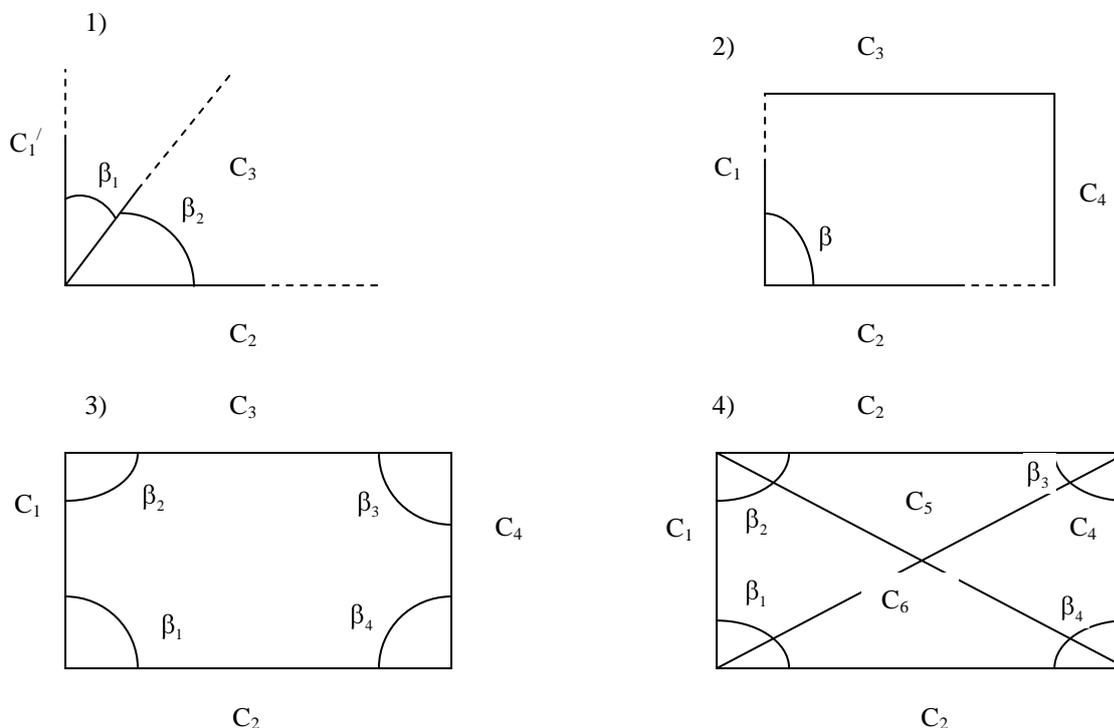


Рис. 3. Схемы свободных геодезических сетей

По специально составленной программе для первых трех примеров получено $m_S = 1,78$ м²; $1,73$ м²; $1,48$ м². Для четвертого примера $m_S = 1,19$ м².

Проведем дополнительные исследования: $C = 1000$ м (площадь $S = 1 \cdot 10^6$ м²), $\sigma_S = 0,02$ м, $\sigma_\beta = 5''$, и получим соответственно $m_S = 200$ м², $17,3$ м², $16,1$ м², $12,5$ м².

При $C = 10\,000$ м, $S = 10^8$ м², $\sigma_S = 0,05$ м, $\sigma_\beta = 1''$ имеем $m_S = 476$ м², 433 м², 394 м², 304 м².

При $C = 20\,000$ м, $S = 4 \cdot 10^8$ м², $\sigma_S = 0,05$ м, $\sigma_\beta = 1''$ имеем $m_S = 1173$ м², 866 м², 835 м², 641 м².

На основе выполненных исследований можно сделать следующие **выводы**:

- 1) формула (1) является наилучшей при проектировании геодезических сетей на ЭВМ;
- 2) сети трилатерации оказались наиболее точными при определении и оценке точности площадей;
- 3) неравенство (5) показывает, что формула (9) является наилучшей при уравнивании нуль-свободных плановых геодезических сетей;
- 4) геодезические построения, показанные на рисунке 3, не следует применять в землеустройстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левданский, П.М. Оценка точности определения площадей из обработки нуль-свободных плановых геодезических сетей / П.М. Левданский, В.И. Мицкевич, В.Г. Стержанов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГ АиК, 25.11.02, № 788. – ГД 02.
2. Шароглазова, Г.А. Применение геодезических методов в геодинатике: учеб. пособие / Г.А. Шароглазова. – Новополоцк: ПГУ, 2002. – 192 с.
3. Яковлев, Н.В. Практикум по высшей геодезии: учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев, Н.А. Беспалов, В.П. Глумов / М.: Недра, 1982. – 368 с.
4. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.

Поступила 06.04.2009