

УДК 528.21

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОИДА НА ЛОКАЛЬНОЙ ТЕРРИТОРИИ

канд. техн. наук, доц. **О.Н. ПИСЕЦКАЯ**  
(Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки);  
д-р техн. наук, проф. **А.С. ЯРМОЛЕНКО**  
(Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия)

*Рассмотрены результаты исследований по определению моделей геоида и квазигеоида на локальной территории с использованием различных методов. Определены задачи по разработке локальной модели геоида с использованием доступных измерений на земной поверхности. Отмечено, что построение локальной системы высот с использованием метода коллокации выполняются путем аппроксимации линейных уравнений, но возможно использование полиномов.*

**Ключевые слова:** геоид, нормальная высота, спутниковые измерения, аномалии высот, локальный квазигеоид, гравиметрические сети, метод коллокации.

На практике встречаются различные методы построения моделей геоида: астрономо-геодезический, гравиметрический, совместное использование GNSS-измерений и нивелирных сетей, совместное использование гравиметрии и спутниковой альтиметрии, спутниковая градиентометрия [1].

Возможность использования того или иного метода зависит от наличия исходных данных, в качестве которых могут быть приняты все доступные точные геодезические измерения. При этом особое внимание уделяется результатам нивелирования.

Целью данного исследования выступает анализ состояния изученности вопроса определения моделей геоида и квазигеоида на локальной территории. Выявление направления построения адекватной по точности модели.

Основные задачи – *изучить возможности и особенности вычисления нормальных высот по результатам спутниковых измерений; выполнить анализ построения моделей геоида и квазигеоида на локальную территорию с использованием различных методов; поставить конкретные задачи решения проблемы вывода локальной модели геоида с использованием доступных измерений на земной поверхности.*

**Основная часть.** Высоты, полученные по материалам геометрического нивелирования, относятся к системе нормальных высот. Результатом спутниковых измерений являются геодезические высоты. Используя результаты спутникового нивелирования определяется нормальная высота как разность геодезической высоты и высоты квазигеоида [2].

В [3] рассмотрена методика вычисления нормальных высот по результатам спутниковых измерений без привлечения гравиметрических съемок на основе зависимости геодезической высоты от значений декартовых координат, с учетом параметров отсчетного эллипсоида. Но при переходе от общеземной системы координат к национальной референцной системе координат возникает задача их преобразования по совмещенным пунктам. В геодезических сетях кроме случайных ошибок пунктов существуют искажения их положения, вызванные различными причинами. Поэтому вычисленные параметры преобразования также будут отягощены такими ошибками. Кроме этого, необходимо учитывать и погрешность радиуса кривизны первого вертикала, которая будет присутствовать в вычисляемых нормальных высотах [3].

В данной работе описан алгоритм вычисления нормальных высот по результатам высокоточных спутниковых измерений с вычислением параметров оформляющей поверхности. Такая поверхность наиболее близка к изучаемой поверхности в данном районе и может быть описана математическими уравнениями. Но при передаче нормальных высот на десятки километров неизбежно появление расхождения между оформляющей поверхностью и реальной поверхностью квазигеоида, что указывает на необходимость привлечения результатов гравиметрических съемок для достижения высокой точности определения нормальных высот. В [4] исследуется возможность определения квазигеоида на территории Вьетнама.

Приведены вычисления ортометрической высоты ( $H_p$ ) на основе геопотенциального числа ( $C_p$ ):

$$H_p = \frac{C_p}{g}, \quad (1)$$

где  $\bar{g}$  – среднее значение модуля силы тяжести, получаемое из геометрического нивелирования и гравиметрии по формуле (2).

$$\bar{g} = \frac{1}{H_p} \int_L^{(P)} g dH. \quad (2)$$

Здесь  $L$  – точка пересечения криволинейной векторной линии реального потенциала силы тяжести с поверхностью геоида;  $P$  – точка на земной поверхности.

В данной работе отмечено, что положение векторной линии реального геопотенциала и значение силы тяжести на ней можно указать приближенно, что приводит к приближенности ортометрических высот, а точные вычисления можно производить только в рамках определенной модели геопотенциала (нормального потенциала  $U$ ), соблюдая ряд условий:

- 1) модуль реальной силы тяжести  $g$  заменяется модулем нормальной силы тяжести  $\gamma$ ;
- 2) за начальную точку принимается точка пересечения векторной линии нормального потенциала с поверхностью эллипсоида;
- 3) конечная точка выбирается на той же векторной линии так, чтобы геопотенциальное число осталось без изменения.

Таким образом, и в данной работе отсутствует строгое решение проблемы высот из-за невозможности строгого определения  $\bar{g}$ .

Данные условия приводят к заключению, что для вычисления аномалии высоты необходимо знать нормальное поле и возмущающий потенциал, а также значение потенциала на той поверхности, которая принята за геоид. При этом необходимо, чтобы исходные для моделирования данные с достаточной плотностью равномерно покрывали всю Землю.

Если использовать аномалии высот, вычисляемые по гравиметрическим данным, получим глобальный квазигеоид, соответствующий общеземному эллипсоиду и уровенной поверхности, которая наилучшим образом аппроксимирует усредненную топографическую поверхность моря.

Нормальная высота может быть получена из формулы

$$h_p = H_p^y + \zeta_p, \quad (3)$$

где  $h_p$  – геодезическая высота, определенная с помощью GPS/ГЛОНАСС;  $\zeta_p$  – гравиметрическая аномалия высоты.

Совокупность точек, полученных указанным методом, определяет единую систему высот и является ее носителем. При этом нивелирные сети – высокоточное средство распространения системы нормальных высот относительно всей указанной совокупности точек, что приводит к деформации масштабного коэффициента высот и смещению получаемого локального квазигеоида относительно соответствующей глобальной поверхности на определенную величину [4].

Отмечено, что при использовании данного метода необходимо вводить поправки в геодезические высоты, определенные относительно референц-эллипсоида, который отличается от общеземного.

Приведенные в материалах статьи [4] апробированы с указанием, что устанавливается определенное соответствие между аномалиями высот геометрическими и гравиметрическими, что уточняет отчетную поверхность высот. Данная коррекция (калибровка) приводит к изменениям аномалий силы тяжести и, как следствие, к изменению аномалий высот. Следует отметить, что территория Вьетнама разбивалась на 30 районов и для каждого района использовалась своя ковариационная модель. Для определения гравиметрических аномалий использовались наземные значения аномалий силы тяжести в свободном воздухе. Указано, что для определения локального квазигеоида необходимо развитие гравиметрии и нивелирования.

Работа [5] отражает результаты вычислений и их точностные характеристики с заключением о целесообразности использования гравитационной модели EGM2008 для уточнения квазигеоида на исследуемой территории. Следует отметить, что для построения модели аномалий силы тяжести на территории Вьетнама использовались результаты многолетних наземных измерений силы тяжести на суше [6], помимо использования спутниковых альтиметрических данных. Среднее квадратическое отклонение определения высоты геоида этой модели составило приблизительно 0,4 м, что говорит о необходимости проведения дальнейших исследований по построению моделей гравитационного поля Земли для территории Вьетнама. Поставлена задача по созданию алгоритма вычисления чистых аномалий силы тяжести ( $\Delta g$ ) и аномалий высот ( $\zeta$ ) ρ θροζλόηξβύνηεμ μξδελθ EGM2008 на исследуемую территорию, что позволит уточнить модель с использованием данных наземных и спутниковых измерений, а также вычислить аномалии высот и силы тяжести в любой точке с помощью методов интерполяции [6].

В [7] рассмотрены задачи по уравниванию государственных высотных сетей I и II класса для получения модели геоида путем преобразования измеренных превышений в разности геопотенциальных величин  $dC_{ij}$  в нормальном гравитационном поле эллипсоида.

Превышения в разности геопотенциальных величин  $dC_{ij}$  в нормальном гравитационном поле эллипсоида определим следующим образом:

$$dC_{ij} = \left[ \bar{\gamma}_{ij} - 0,1543 \cdot 10^{-6} \bar{H}_{ij} + (g - \gamma)_{ij} \right] h_{ij}. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{\gamma}_{ij}$  – среднее значение ускорений нормальной силы тяжести между марками  $i$  и  $j$ ;  $\bar{H}_{ij}$  – средняя нормальная высота;  $(g - \gamma)_{ij}$  – среднее значение аномалий силы тяжести между марками  $i$  и  $j$ ;  $h_{ij}$  – измеренное превышение между марками  $i$  и  $j$  в реальном гравитационном поле Земли [7].

Но измеренное превышение находится в средней приливной системе, а должно соответствовать нулевой приливной системе, что требует введения поправки  $\delta dC_{ij}$  в разность геопотенциальных величин  $dC_{ij}$ :

$$\delta dC_{ij} = -0,28841(\sin^2 B_j - \sin^2 B_i) - 0,00195(\sin^4 B_j - \sin^4 B_i), \quad (5)$$

где  $B_i$ ,  $B_j$  – геодезические широты марок  $i$  и  $j$ .

На основании материалов данной работы, отмечено, что при использовании геоида есть возможность повышения точности локального квазигеоида, гравитационного поля Земли на локальной территории, что позволит модернизировать государственную высотную систему локальной территории [7].

В материалах исследования по построению модели геоида на территорию Республики Бенин [8] рассмотрено построение модели геоида с использованием спутниковых наблюдений на пунктах нивелирных и гравиметрических сетей с известными ортометрическими высотами, полученными из нивелирования. Указано, что на территории Республики Бенин были получены высоты геоида в отдельных хаотично расположенных точках нивелирной сети, по которым требовалось восстановить поверхность геоида на всю территорию страны. Точность такого геоида будет зависеть от степени совпадения области применения используемой математической зависимости и области расположения опорных точек, свойств математической зависимости, характера расположения опорных точек и точности исходных данных [8].

Решение задачи осуществлялось способом сплайн-аппроксимации функции двух переменных с использованием сплайнов с дифференциальным функционалом качества. Преимущество данного способа заключается в достаточно хороших результатах при невысокой плотности опорных точек с исключением резких пиков или провалов в восстанавливаемой функции. В решении были задействованы нивелирные и гравиметрические пункты [8].

На территории Республики Беларусь исследована методика создания локальной модели высот квазигеоида геометрическим методом на основе глобальных гравитационных моделей Земли с применением спутниковых наблюдений. Методика апробирована на территории города Минска и его окрестностей без привлечения гравиметрических данных [9].

В данном случае суть геометрического метода заключалась в оптимальном комбинировании разнородных высот с целью выполнения детализации и корректировки глобальной модели высот квазигеоида методом среднеквадратической коллокации.

Основная задача коллокации – прогнозирование непрерывной поверхности с использованием дискретных наблюдений.

Математическая модель используемой функции представлена уравнением:

$$l = Ax + t + n, \quad (6)$$

где  $l$  – вектор измерений;  $Ax$  – параметрическая модель;  $t$  – вектор сигналов в точках измерений;  $n$  – вектор шума в точках измерений.

В материалах статьи [9] приведен реализованный алгоритм вычислений.

По результатам проведенных исследований отмечено, что вычисленное отклонение нормальных высот с использованием данной модели дает более точные результаты по отношению к аналогичным данным, полученным по результатам вычислений с использованием модели EGM2008.

Экспериментальным путем установлено, что для создания модели высот квазигеоида на территорию Республики Беларусь с точностью, соответствующей современным требованиям, необходима достаточно густая сеть пунктов с известными геодезическими и нормальными высотами, что практически выполнить нецелесообразно, и для возможности использования данной модели необходимо развитие гравиметрической сети на территории республики [9].

К предложенному методу исследований в статье [9] следует внести некоторые уточнения.

Метод коллокаций не предполагает наличия систематических ошибок, аномалии должны быть центрированными, т.е. математическое ожидание  $\Delta\zeta$  должно равняться нулю:

$$M[\Delta\zeta] = 0. \quad (7)$$

В материалах [9]

$$M[\Delta\zeta] = Ax, \quad (8)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (9)$$

или

$$x = \begin{pmatrix} B \\ L \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\Delta\zeta_{\text{ген}} = \Delta\zeta - Ax, \quad (11)$$

где  $A$  – коэффициенты уравнения, а остальные обозначения соответствуют принятым в [9].

Далее с учетом уточнений производится решение по поиску центрированных аномалий.

**Заключение.** На основе даже неполного анализа в настоящей работе ставятся следующие задачи:

1. В работе [10] доказано, что при плотности чистых аномалий силы тяжести один пункт на 10 квадратных километров возможно определение высоты глобального геоида (квазигеоида) над эллипсоидом с точностью 3 мм. Но при этом необходима такая плотность указанных аномалий по всей Земле, что к настоящему времени недостижимо. Однако при наличии данных геометрического нивелирования, геодезических высот, других точных геодезических измерений (смешанных аномалий силы тяжести, аномального потенциала и др.) на локальной территории возможно определение высот геоида над эллипсоидом с данной миллиметровой точностью.

2. Необходимо также обобщить задачу интерполяции высот геоида над эллипсоидом с использованием модели EGM2008 методом коллокации с учетом того, что на ограниченной территории известны неоднородные данные. Например, в части пунктов известны аномалии высот  $\zeta$ , а на остальной части – уклонения отвесных линий  $\xi$ ,  $\eta$ , аномалии силы тяжести, превышения между точками (по нормальным, геодезическим высотам), значения аномального потенциала.

Следует отметить, что построение локальной системы высот с использованием метода коллокации выполняются путем аппроксимации линейных уравнений, но возможно использование полиномов [11]. Данная операция – приспособление модели EGM2008 к локальной территории, названная калибровкой, выполняется по разности измеренных и вычисленных высот, но возможно ее применение на основе иных данных, приведенных в начале этого пункта.

3. Из-за недостатка исходных данных (в данном случае гравиметрических) использование аппроксимирующих функций (сферических, шаровых) в глобальном масштабе может приводить к искажению результатов (сглаживанию). Поэтому в соответствии с предложением профессора Ю.М. Неймана следует разрабатывать такую методику построения точного геоида, при которой данные гравиметрических измерений, выполненные с низкой плотностью пунктов, не имели отрицательного влияния на результаты, получаемые с использованием измерений, выполненных на территориях с высокой плотностью расположения гравиметрических пунктов. При этом должны применяться другие аппроксимирующие функции, отличные от сферических и шаровых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гофман-Велленгоф, Б. Физическая геодезия / Б. Гофман-Велленгоф, Г. Мориц ; пер. с англ. Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой ; под ред. Ю.М. Неймана. – М. : Изд-во МИИГАиК, 2007. – 426 с.
2. Лазарев, Г. Е. Основы высшей геодезии : учеб. пособие для техникумов / Г.Е. Лазарев, Е.М. Самошкин. – М. : Недра, 1980. – 424 с.

4. Кравчук, И.М. Особенности вычисления нормальных высот по результатам спутниковых измерений / И.М. Кравчук // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2010. – № 4. – С. 35–40.
5. Нейман, Ю.М. Локальный квазигеоид изолированной территории / Ю.М. Нейман, Фам Хоанг Лан // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2010. – № 5. – С. 31–36.
6. Ву Хонг Куонг. Результаты вычисления аномалий высот и аномалий силы тяжести по спутниковым измерениям на территории Вьетнама / Ву Хонг Куонг // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4. – С. 8–13.
7. Ву Хонг Куонг. Исследование моделей гравитационного поля Земли по наземным и спутниковым измерениям / Ву Хонг Куонг // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 1. – С. 20–25.
8. Ха Минь Хоа. Развитие государственной высотной системы Вьетнама на основе использования локальной модели геоида / Ха Минь Хоа // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 2. – С. 10–13.
9. Жосмин М. Йессуру. Построение моделей геоида на территорию Республики Бенин / Жосмин М. Йессуру // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 6. – С. 13–17.
10. Ларионов, А.А. Создание локальной модели высот квазигеоида геометрическим методом / А.А. Ларионов, Н.И. Рудницкая // Земля Беларуси. – 2016. – № 1. – С. 36–41.
11. Писецкая, О.Н. Определение фигуры Земли с использованием GPS-измерений : дис. ... канд. техн. наук : 25.00.32 / О.Н. Писецкая. – Новополоцк, 2007. – 124 л.
12. Абакушина, М.В. Оценка точности моделей гравиметрического геоида в континентальных районах / М.В. Абакушина, В.Б. Непоклонов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 6. – С. 17–23.

Поступила 11.04.2018

## THE DEFINITIONS OF THE GEOID ON THE LOCAL TERRITORY

*O. PISETSKAYA, A. YARMOLENKO*

*The results of determining of the geoid and quasi-geoid models on the local area with using of the different methods have been considered. The tasks of developing a local geoid model with using of the available measurements on the Earth's surface have been defined. It is noted that the construction of a local system of heights using the collocation method is performed by approximating linear equations, but it is possible to use polynomials.*

**Keywords:** *geoid, normal height, satellite measurements, anomalies of heights, local quasi-geoid, gravimetric network, collocation method.*