

МИНИМАЛЬНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ ПОГРЕШНОСТИ*Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов (Полоцкий государственный университет),**Н.К. Волосова (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)*

Предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27 точечным шаблоном. Численно проверена устойчивость алгоритма к разрывам первого рода граничных условий на гранях параллелепипеда. Получено разложение невязки задачи в общем виде для неравномерной сетки через производные четного порядка от решения и правой части уравнения и четного порядка по каждой из трех переменных. Написана программа на основе построенного алгоритма и принципа сжатых отображений для явной формулы простой итерации. Решен точно тестовый пример и проведено сравнение его решения с численным решением, которое подтверждает шестой порядок погрешности для формул полученного алгоритма.

Ключевые слова: *трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде, неоднородно-краевая задача Дирихле, принцип сжатых отображений*

Введение

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде с краевыми условиями Дирихле. Известны разностные схемы для уравнения Пуассона с погрешностью второго порядка в двухмерной области А.А. Самарского[1], с погрешностью четвертого порядка на равномерной сетке К.Н. Волкова [2], также схемы большего порядка на прямоугольнике и на равномерной сетке[4]. Во всех случаях для тестирования алгоритма необходимы примеры с точными аналитическими решениями[3]. Однако, как показано в работе[1,стр.57], для схем второго порядка в задаче уравнения Пуассона на плоскости удается достичь равномерно непрерывной нормы погрешности $3 \cdot 10^{-3}$ при делении сторон прямоугольника на 160 частей. Отметим работу[11] с формулами для трехмерного лапласиана.

В данной работе предложен простой алгоритм решения трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с использованием минимального симметричного шаблона для аппроксимации(27 узлов) и достижения равномерно непрерывной нормы погрешности 10^{-9} при делении ребра параллелепипеда на 60 частей и с аппроксимацией шестым порядком погрешности. Сложность трехмерной задачи по сравнению с двухмерной задачей заключается в быстром росте количества вычислений и в увеличении общего числа узлов. Например, 10000 узлов на прямоугольнике и 1000000 узлов в параллелепипеде. По сравнению с работой[4], в котором использовались два шаблона, граничный и внутренний на прямоугольнике с 8 порядком погрешности, в данной работе использование одного универсального шаблона позволяет экономить число и время вычислений в $n^3(3^3 + 5^3)/3^3 = 5.6n^3$ число раз за счет выбора 1 шаблона, но с 6 порядком погрешности. Кроме того, нужно учитывать, что использование двойного шаблона увеличивает число вычислений в 2-3 раза в каждом узле и уменьшает быстродействие. В работе использована модифицированная формула бинома Ньютона – тринома Ньютона.

Полученный алгоритм численного решения трехмерной задачи для уравнения Пуассона может быть применен в различных областях механики[5], кристаллографии, стеганографии[6], для численных задач математической физики, содержащих трехмерный оператор Лапласа, например, волновое уравнение[7,11,14].

Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для трехмерного уравнения Пуассона в параллелепипеде для достаточно гладкого решения $u(x, y, z)$ как функции трех переменных:

$$\begin{cases} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z), x \in (a, b), y \in (c, d), z \in (e, r) \\ u(a, y, z) = \mu_1(y, z), u(b, y, z) = \mu_2(y, z), (y, z) \in [c, d] \times [e, r] \\ u(x, c, z) = \mu_3(x, z), u(x, d, z) = \mu_4(x, z), (x, z) \in [a, b] \times [e, r] \\ u(x, y, e) = \mu_5(x, y), u(x, y, r) = \mu_6(x, y), (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (1)$$

В задаче(1) $f(x, y, z)$ - неоднородная правая часть уравнения Пуассона в параллелепипеде $[a, b] \times [c, d] \times [e, r]$, $\mu_1(y, z), \mu_2(y, z), \mu_3(x, z), \mu_4(x, z), \mu_5(x, y), \mu_6(x, y)$ - неоднородные краевые условия, (x, y, z) - координаты точки. Обозначим внутреннее и граничное множества задачи(1) $\Omega = (a, b) \times (c, d) \times (e, r), \partial\Omega = [c, d] \times [e, r](x = a, b) \cup [a, b] \times [e, r](y = c, d) \cup [a, b] \times [c, d](z = e, r)$

В классической постановке задач математической физики необходимо требовать непрерывности граничных условий на пересечении их областей определения, т.е. в непрерывность краевых условий на 12 ребрах для параллелепипеда, например,

$$\mu_1(0, z) = \mu_3(0, z), \forall z \in [e, r]$$

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) на шаблоне, содержащем минимальное количество узлов и покрывающем всю область параллелепипеда. Ясно, что 27 точечный шаблон, который содержит коробка со сторонами $2h_1, 2h_2, 2h_3$ и решает поставленную задачу с минимальным числом узлов в шаблоне. Такой шаблон является универсальным как на границе рассматриваемого параллелепипеда, так и внутри данной области и покрывает параллелепипед объема $(b-a)(d-c)(r-e)$ ”кирпичиками” с объемом $8h_1h_2h_3$.

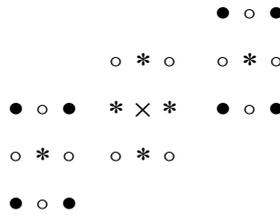


Рис.1 Классификация 27 узлов куба (параллелепипеда) по расстоянию от центра и свойствам симметрии соответственно(1,6,12,8) узлов.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 6 центральных узлах граней куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2}) \quad (2)$$

Доказательство. Объединяя попарно противоположные узлы на каждой координатной оси относительно центра (m, n, k) , учитывая, что в силу симметрии сохраняются только частные производные четной степени по соответствующей координате, получим

$$\begin{aligned}
& u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k}) + (u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k}) + (u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) = \\
& 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2}) + 2u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} \right) + O(h_2^{2p+2}) + 2u_{m,n,k} + \\
& 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_3^{2p+2}) = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{1}{(2l)!} \left(h_1^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + h_2^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + h_3^{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h_1^{2p+2} + h_2^{2p+2} + h_3^{2p+2})
\end{aligned}$$

Что завершает доказательство формулы(2) Леммы 1. В частности для равномерной сетки получим из(2) формулу(3)

$$u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1} = 6u_{m,n,k} + 2 \sum_{l=1}^p \frac{h^{2l}}{(2l)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2l}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial z^{2l}} \right) + O(h^{2p+2}) \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 12 узлах - серединах ребер куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$\begin{aligned}
& u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} = \\
& = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\
& + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) \quad (4)
\end{aligned}$$

Доказательство. Сгруппируем в формуле (4) суммы 3 четверок узлов, расположенных в плоскостях параллельных граням куба (параллелепипеда) и проходящих через центральный узел (m, n, k) . Для каждой четверки узлов разложим в ряд Тейлора сумму четырёх узловых значений, например, в узлах плоскости Oxy получим разложение по формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}
A &= u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n+1,k} = 4u_{m,n,k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (-h_2)^{l-s} + \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} (-h_1)^s (h_2)^{l-s} \right) + \\
& + O\left(\sum_{i=0}^{2p+1} (h_1^{2p+1-i} h_2^i)\right) = \\
& = 4u_{m,n,k} + \sum_{l=1}^{2p} \sum_{s=0}^l \frac{C_l^s}{l!} (h_1)^s (h_2)^{l-s} \frac{\partial^l u}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \left((-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 \right)
\end{aligned}$$

Так как

$$(-1)^{s+l-s} + (-1)^s + (-1)^{l-s} + 1 = (-1)^l (1 + (-1)^s) + (-1)^s + 1 = ((-1)^s + 1)(1 + (-1)^l) = \begin{cases} 4, s = 2s_1 \wedge l = 2l_1 \\ 0, s = 2s_1 + 1 \vee l = 2l_1 + 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{И } (s_1 \rightarrow s, l_1 \rightarrow l) \text{ получим } A = 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i})\right).$$

$$\text{Так как } \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} = \frac{(2l)!}{(2l)!(2s)!(2l-2s)!} = \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!}, \text{ то последняя формула примет вид}$$

$$u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n+1,k} = 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i})\right) \quad (6)$$

Две четверки узлов и суммы узловых значений решения в соответствующих узлах в плоскостях Oxz , Oyz имеем ту же симметрию и формулы разложения аналогично(6), меняя циклически индексы, и складывая все 12 узловых значений получим, что

$$\begin{aligned} & 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_2^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_1^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \\ & + 4u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{h_2^{2s} h_3^{2l-2s}}{(2s)!(2l-2s)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) = \\ & = 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + h_1^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + h_2^{2s} h_3^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + \\ & + O\left(\sum_{i=0}^{p+1} (h_1^{2p+2-2i} h_2^{2i} + h_2^{2p+2-2i} h_3^{2i} + h_3^{2p+2-2i} h_1^{2i})\right) \end{aligned}$$

Лемма 2 и формула (4) доказаны. В частности, для равномерной сетки получим формулу (7)

$$= 12u_{m,n,k} + 4 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{s=0}^l \frac{1}{(2s)!(2l-2s)!} \left(\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial z^{2l-2s}} + \frac{\partial^{2l} u}{\partial y^{2s} \partial z^{2l-2s}} \right) + O(h^{2p+2}) \quad (7)$$

Рассмотрим модифицированную формулу Ньютона (8):

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, C_n^{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} \quad (8)$$

Доказательство формулы(8).

Введем переменные

$k_1 = j|_0^i \in [0, i], k_2 = i - j|_0^i \in [i, 0], k_3 = n - i, k_1 + k_2 + k_3 = j + i - j + n - i = n$, поскольку $i \in [0, n]$, то области изменения переменных $k_1 \in [0, n], k_2 \in [n, 0], k_3 = n - i \in [n, 0]$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i (a+b)^i c^{n-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_n^i C_i^j a^j b^{i-j} c^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_n^i C_i^j a^j b^{i-j} c^{n-i} = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{i!(n-i)! j!(i-j)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n \\ 0 \leq k_2 \leq n \\ 0 \leq k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} C_n^{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}, C_n^{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}. \text{ Формула(8) доказана.} \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$, тогда для суммы узловых значений решения в 8 вершинах куба (параллелепипеда) справедлива формула разложения в ряд Тейлора с центром в узле (m, n, k)

$$u_{m-1, n-1, k-1} + u_{m-1, n-1, k+1} + u_{m-1, n+1, k-1} + u_{m-1, n+1, k+1} + u_{m+1, n-1, k-1} + u_{m+1, n-1, k+1} + u_{m+1, n+1, k-1} + u_{m+1, n+1, k+1} = 8u_{m, n, k} +$$

$$+ 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l+1 \\ 0 \leq s_2 \leq l+1 \\ 0 \leq s_3 \leq l+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = l+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right) \quad (9)$$

Доказательство. Разложим в формуле(9) сумму 8 узловых значений в ряд Тейлора в точках, совпадающих с вершинами куба (параллелепипеда) относительно центрального узла (m, n, k) . Воспользуемся модифицированной формулой бинома Ньютона

$$(a + b + c)^n = \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq n \\ 0 \leq s_2 \leq n \\ 0 \leq s_3 \leq n \\ s_1 + s_2 + s_3 = n}} C_n^{s_1, s_2, s_3} a^{s_1} b^{s_2} c^{s_3}, n \in N, \quad C_n^{s_1, s_2, s_3} = \frac{n!}{s_1! s_2! s_3!}, s_1 + s_2 + s_3 = n \quad (9)$$

Подставляя восемь раз (8) в левую часть(9), учитывая $\frac{C_n^{s_1, s_2, s_3}}{n!} = \frac{n!}{n! s_1! s_2! s_3!} = \frac{1}{s_1! s_2! s_3!}, s_1 + s_2 + s_3 = n$, получим относительно центрального узла (m, n, k)

$$u_{m-1, n-1, k-1} + u_{m-1, n-1, k+1} + u_{m-1, n+1, k-1} + u_{m-1, n+1, k+1} + u_{m+1, n-1, k-1} + u_{m+1, n-1, k+1} + u_{m+1, n+1, k-1} + u_{m+1, n+1, k+1} = 8u_{m, n, k} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1 + s_2 + s_3} + (-1)^{s_1 + s_2} + (-1)^{s_1 + s_3} + (-1)^{s_1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{s_2 + s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 \right) + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = 2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right)$$

Так как

$$\begin{aligned} & (-1)^{s_1 + s_2 + s_3} + (-1)^{s_1 + s_2} + (-1)^{s_1 + s_3} + (-1)^{s_1} + (-1)^{s_2 + s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 = (-1)^{s_1} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + \\ & (-1)^{s_1 + s_3} \left((-1)^{s_2} + 1 \right) + (-1)^{s_2} + 1 = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + (-1)^{s_3} + (-1)^{s_1 + s_3} + 1 \right) = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} \left(1 + (-1)^{s_3} \right) + \right. \\ & \left. 1 + (-1)^{s_3} \right) = \left((-1)^{s_2} + 1 \right) \left((-1)^{s_3} + 1 \right) \left((-1)^{s_1} + 1 \right) = \begin{cases} 8, s_1 = 2s_1' \wedge s_2 = 2s_2' \wedge s_3 = 2s_3' \\ 0, s_1 = 2s_1' + 1 \vee s_2 = 2s_2' + 1 \vee s_3 = 2s_3' + 1 \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

То, упрощая последнюю формулу, и возвращаясь к переменным $s_1' \rightarrow s_1, s_2' \rightarrow s_2, s_3' \rightarrow s_3, l' \rightarrow l$

получим $l = s_1 + s_2 + s_3 = 2(s_1' + s_2' + s_3') = 2l', s_1' \rightarrow s_1, s_2' \rightarrow s_2, s_3' \rightarrow s_3, l' \rightarrow l$

$$\sum_{l=1}^{2p} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{C_l^{s_1, s_2, s_3}}{l!} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \frac{\partial^l u}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \left((-1)^{s_1 + s_2 + s_3} + (-1)^{s_1 + s_2} + (-1)^{s_1 + s_3} + (-1)^{s_1} + (-1)^{s_2 + s_3} + (-1)^{s_2} + (-1)^{s_3} + 1 \right) +$$

$$+ O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq 2p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2p+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = 2p+1}} h_1^{s_1} h_2^{s_2} h_3^{s_3} \right) = 8 \sum_{l=1}^p \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3}}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O \left(\sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq p+1 \\ 0 \leq s_2 \leq p+1 \\ 0 \leq s_3 \leq p+1 \\ s_1 + s_2 + s_3 = p+1}} h_1^{2s_1} h_2^{2s_2} h_3^{2s_3} \right) \quad (11)$$

Добавляя к(11) $8u_{m,n,k}$, получим формулу(9). **Лемма 3** доказана. В частности, на равномерной сетке формула(11) переходит в формулу(12)

$$u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1} =$$

$$= 8u_{m,n,k} + 8 \sum_{l=1}^p h^{2l} \sum_{\substack{0 \leq s_1 \leq l \\ 0 \leq s_2 \leq l \\ 0 \leq s_3 \leq l \\ s_1 + s_2 + s_3 = l}} \frac{1}{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s_1} \partial y^{2s_2} \partial z^{2s_3}} + O(h^{2p+2}) \quad (12)$$

Лемма 4. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^4(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^2(\Omega)$, тогда трехмерное уравнение Пуассона накладывает уравнение связи на линейную комбинацию производных четвертого порядка от решения уравнения Пуассона: “Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов от смешанных производных в линейной комбинации”.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его вторые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_x^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \end{cases} \quad (13)$$

Где символ $u_{(2)x}^{(4)}$ обозначает частную производную 4 порядка 2 порядка по переменной x и 2 порядка по y.

Тогда для линейной комбинации вторых производных получим с учетом(13)

$$Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz} = A \left(u_x^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + B \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) + C \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \right) =$$

$$= Au_x^{(4)} + Bu_y^{(4)} + Cu_z^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)}(A+B) + u_{(2)x}^{(4)}(A+C) + u_{(2)y}^{(4)}(B+C) \quad (14)$$

Из последней формулы следует, что $(A)+(B)+(C) = \frac{1}{2}((A+B)+(A+C)+(B+C))$.

То есть сумма коэффициентов при несмешанных частных производных равна половине суммы коэффициентов при смешанных производных в линейной комбинации производных четвертого порядка от решения уравнения Пуассона. **Лемма 4** доказана.

Как было показано в леммах 1-3 аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27 точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка, а, следовательно, и производные четного порядка от правой части. Поэтому линейная комбинация производных четвертого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых при 4 степени шага сетки. Т.е. утверждение леммы 4 учитывает общий случай разложения в ряд Тейлора для 27 точечного шаблона.

Лемма 5. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^6(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^4(\Omega)$, тогда трехмерное уравнение Пуассона накладывает уравнение связи на линейную комбинацию производных шестого порядка от решения уравнения Пуассона: “Сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной $u_{(2)x}^{(6)} u_{(2)y}^{(6)} u_{(2)z}^{(6)}$ равна половине суммы коэффициентов от несимметричных смешанных производных шестого порядка линейной комбинации от решения уравнения Пуассона”.

Доказательство. Используя уравнение Пуассона, найдём его четвертые частные производные от правой части

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = u_x^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{yy} = u_{(2)x}^{(4)} + u_y^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \\ f_{zz} = u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} + u_z^{(4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x^{(4)} = u_x^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} \\ f_{(2)x}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \\ f_{(2)x}^{(4)} = u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \\ f_y^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \\ f_{(2)y}^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \\ f_z^{(4)} = u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_z^{(6)} \end{cases} \quad (15)$$

Тогда для линейной комбинации четвертых производных от правой части уравнения Пуассона получим

$$Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)x}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_z^{(4)} = A \left(u_x^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} \right) + B \left(u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} \right) +$$

$$C \left(u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} \right) + D \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_y^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + E \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) + F \left(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_z^{(6)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= Au_x^{(6)} + Du_y^{(6)} + Fu_z^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)}(A+B) + u_{(4)x}^{(6)}(D+B) + u_{(2)x}^{(6)}(C+F) + u_{(4)x}^{(6)}(C+A) + \\
&+ u_{(2)y}^{(6)}(E+F) + u_{(4)y}^{(6)}(D+E) + u_{(2)x}^{(6)}(B+C+E)
\end{aligned} \tag{16}$$

Из последней формулы следует, что

$$(A)+(D)+(F)+(B+C+E) = \frac{1}{2}((A+B)+(D+B)+(C+F)+(C+A)+(E+F)+(D+E)),$$

то есть сумма коэффициентов для несмешанных частных производных и коэффициента при симметричной смешанной производной $u_{(2)x}^{(6)}$ равна половине суммы коэффициентов от несимметричных смешанных производных шестого порядка линейной комбинации от решения уравнения Пуассона. **Лемма 5** доказана.

Как было показано в леммах 1-3 аппроксимация трех различных сумм узловых значений решения на 27 точечном шаблоне содержит частные производные от решения только четного порядка. Поэтому линейная комбинация производных шестого порядка и четного порядка по каждой из координат является общим видом разложения в ряд Тейлора для слагаемых при 6 степени шага сетки. Т.е. утверждение леммы 5 учитывает общий случай разложения суммы узловых значений функций для 27 точечного шаблона.

Теорема 1. Пусть решение задачи(1) принадлежит классу функций $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$ и неоднородная правая часть уравнения $f(x, y, z) \in C^{2p-2}(\Omega)$, тогда симметричный 27 точечный шаблон на равномерной сетке обеспечивает аппроксимацию 3 мерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности $O(h^6)$. Более того, невозможно получить порядок невязки 27 точечным шаблоном выше шестого. Имеет место разностное уравнение для трёхмерного уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15} u_{mnk} + \frac{7}{15} (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + \right. \\
&+ u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + \\
&+ u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) = f_{mnk} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) + \\
&+ \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6)
\end{aligned} \tag{17}$$

Замечание 1. Правая часть формулы(17) за вычетом f_{mnk} равна невязке уравнения Пуассона и в двухмерном случае для прямоугольника переходит в формулу

$$\frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) [4, стр.73].$$

Доказательство. Заметим, что в силу уравнения Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

операции в правой и левой частях уравнения Пуассона принадлежат одинаковому классу гладкости, и поскольку $f(x, y, z) \in C^{2p-2}(\Omega)$, то решение имеет класс гладкости на две единицы больше, чем правая часть уравнения $u(x, y, z) \in C^{2p}(\Omega)$.

Оператор Лапласа, как и уравнение Пуассона, является линейным оператором относительно неизвестной функции, поэтому возможно аппроксимировать лапласиан квадратурной формулой линейной относительно узловых значения, используя все 27 узлов шаблона u_{mnk} :

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \right. \\ & + C_2 (u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m,n-1,k-1} + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + \\ & + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) + C_3 (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + \\ & \left. + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим в формулу (18) разложения из Лемм 1,2,3, т.е. формулы(3),(7),(12) с разложением по степени шага $h_1 = h_2 = h_3 = h$, $2p = 6$ включительно и сгруппируем скобками слагаемые с равной степенью по h

$(u_{(2)x}^{(6)} - \text{для краткости будем обозначать, например, частную производную функции } u(x_m, y_n, z_k) \text{ шестого}$

порядка и по всем координатам x, y, z второго порядка в узле с координатами x_m, y_n, z_k):

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12}(u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{h^6}{360}(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \right) + \right. \\ & + C_2 \left(12u_{mnk} + 4 \left(h^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + h^4 \left(\frac{1}{24}(u_x^{(4)} + u_y^{(4)}) + \frac{1}{4}u_{(2)x}^{(4)} + \frac{1}{24}(u_x^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4}u_{(2)x}^{(4)} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{1}{24}(u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \frac{1}{4}u_{(2)y}^{(4)} \left. \left. \left. \right) + h^6 \left(\frac{1}{720}(u_x^{(6)} + u_y^{(6)}) + \frac{1}{48}(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)}) + \frac{1}{720}(u_x^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48}(u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)}) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{1}{720}(u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{1}{48}(u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)}) \left. \left. \left. \right) + O(h^8) \right) + C_3 \left(8u_{mnk} + 8 \left(\frac{h^2}{2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{24}(u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{h^4}{4} \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) + \frac{h^6}{720}(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \frac{h^6}{48} \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + \\ & \left. \left. \left. + \frac{h^6}{8}u_{(2)x}^{(6)} + O(h^8) \right) = \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{mnk} + C_1 \left(6u_{mnk} + h^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{12}(u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{h^6}{360}(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + O(h^8) \left. \left. \right) + C_2 \left(12u_{mnk} + 4h^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{h^4}{3}(u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h^4 \left(u_{(2)y}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)z}^{(4)} \right) + h^6 \left(\frac{1}{90} \left(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)} \right) + \frac{1}{12} \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) + O(h^8) \right) + \\
& + C_3 (8u_{mnk} + 4h^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})) + \frac{h^4}{3} (u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) + 2h^4 \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) + \frac{h^6}{90} (u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) + \\
& + \frac{h^6}{6} \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} \right) + h^6 u_{(2)z}^{(6)} + O(h^8) = \frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) + \\
& + (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) (C_1 + 4C_2 + 4C_3) + h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) + \\
& + h^4 \left((u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)}) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)z}^{(6)} C_3 + O(h^6) \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

Из формулы (19) следует, что $\frac{|u_{mnk}|}{h^2} |C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3|_{h \rightarrow 0} < +\infty \Leftrightarrow C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0$, $u_{mnk} \neq 0$

В задаче аппроксимации трехмерного лапласиана $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1$,

Согласно Лемме 4 $3 \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) = \frac{1}{2} 3(C_2 + 2C_3) \Leftrightarrow C_1 = 2C_2 + 8C_3$.

Согласно Лемме 5 $3 \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + C_3 = \frac{1}{2} 6 \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) \Leftrightarrow C_1 = 26C_2 - 64C_3$.

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1 \\ C_1 = 2C_2 + 8C_3 \\ C_1 = 26C_2 - 64C_3 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{64}{15}, C_1 = \frac{7}{15}, C_2 = \frac{1}{10}, C_3 = \frac{1}{30} \quad (20)$$

Поэтому первое слагаемое в (19) $\frac{u_{mnk}}{h^2} (C_0 + 6C_1 + 12C_2 + 8C_3) = 0$, в силу уравнения Пуассона второе слагаемое в (19) с учетом (20) $(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) (C_1 + 4C_2 + 4C_3) = f$, используя Лемму 4, получим третье слагаемое в (19)

$$\begin{aligned}
& h^2 \left((u_x^{(4)} + u_y^{(4)} + u_z^{(4)}) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} \right) + \left(u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)x}^{(4)} + u_{(2)y}^{(4)} \right) (C_2 + 2C_3) \right) = h^2 (Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz}) = \\
& = \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}), \text{ т.к. } A = B = C = \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} = \frac{7}{180} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Используя Лемму 5, получим четвертое слагаемое в(19)

$$h^4 \left(u_x^{(6)} + u_y^{(6)} + u_z^{(6)} \right) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} \right) + \left(u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} + u_{(4)x}^{(6)} + u_{(2)x}^{(6)} + u_{(4)z}^{(6)} + u_{(2)z}^{(6)} + u_{(4)y}^{(6)} + u_{(2)y}^{(6)} \right) \left(\frac{C_2}{12} + \frac{C_3}{6} \right) + u_{(2)x}^{(6)} C_3 =$$

$$= h^4 \left(Af_x^{(4)} + Bf_{(2)x}^{(4)} + Cf_{(2)x}^{(4)} + Df_y^{(4)} + Ef_{(2)y}^{(4)} + Ff_y^{(4)} \right) = \frac{h^4}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)} + f_z^{(4)}) + \frac{h^4}{90} \left(f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)x}^{(4)} + f_{(2)y}^{(4)} \right) \quad (22)$$

Так как $A = D = F = \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{90} + \frac{C_3}{90} = \frac{7}{5400} + \frac{1}{900} + \frac{1}{2700} = \frac{7+6+2}{5400} = \frac{1}{360}$ и

$$B = C = E, B + C + E = C_3, B = C = E = \frac{C_3}{3} = \frac{1}{90}.$$

Подставляя в левую часть(19) найденные коэффициенты из(20)

$$C_0 = -\frac{64}{15}, C_1 = \frac{7}{15}, C_2 = \frac{1}{10}, C_3 = \frac{1}{30},$$

а в правую часть(19)(невязка аппроксимации трехмерного уравнения Пуассона представляет третьи и четвертые слагаемые в правой части(19)) преобразованные слагаемые через функцию $f(x, y, z)$ - (21),(22), получим формулу(23)

$$\frac{1}{h^2} \left(-\frac{64}{15} u_{mnk} + \frac{7}{15} (u_{m-1,n,k} + u_{m+1,n,k} + u_{m,n-1,k} + u_{m,n+1,k} + u_{m,n,k-1} + u_{m,n,k+1}) + \frac{1}{10} (u_{m-1,n-1,k} + u_{m-1,n,k-1} + u_{m-1,n+1,k} + u_{m-1,n,k+1} + u_{m,n-1,k-1} + \right.$$

$$\left. + u_{m,n-1,k+1} + u_{m,n+1,k-1} + u_{m,n+1,k+1} + u_{m+1,n-1,k} + u_{m+1,n,k-1} + u_{m+1,n+1,k} + u_{m+1,n,k+1}) + \frac{1}{30} (u_{m-1,n-1,k-1} + u_{m-1,n-1,k+1} + u_{m-1,n+1,k-1} + u_{m-1,n+1,k+1} + \right.$$

$$\left. + u_{m+1,n-1,k-1} + u_{m+1,n-1,k+1} + u_{m+1,n+1,k-1} + u_{m+1,n+1,k+1}) \right) = f_{mnk} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) +$$

$$+ \frac{h^4}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) \quad (23)$$

и она совпадает с формулой (17). Из формулы(23) следует, что аппроксимация трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде 27 точечным симметричным шаблоном имеет 6 порядок погрешности. Всего неизвестных коэффициентов в шаблоне (18) четыре. Тогда добавление условий в систему уравнений(20), аналогично условиям связи в Леммах 4,5, приведет к несовместности линейной системы уравнений, в которой число неизвестных 4, а число уравнений не менее 5. Другими словами, 27 точечным шаблоном аппроксимировать трехмерное уравнения Пуассона с 8 порядком погрешности невозможно.

Теорема 1 доказана.

Из формулы(23) выразим центральное узловое значение с индексами (m,n,k) и получим формулу простой итерации:

$$\begin{aligned}
u_{mnk}^{s+1} = & \left(\frac{15}{64} \right) \left(\frac{7}{15} \left(u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s \right) + \frac{1}{10} \left(u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + \right. \right. \\
& + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k}^s + u_{m+1,n,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k}^s + u_{m+1,n,k+1}^s \left. \right) + \frac{1}{30} \left(u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + \right. \\
& + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s \left. \right) - h^2 f_{mnk} - \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \frac{h^6}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \\
& - \frac{h^6}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^6) = \frac{7}{64} \left(u_{m-1,n,k}^s + u_{m+1,n,k}^s + u_{m,n-1,k}^s + u_{m,n+1,k}^s + u_{m,n,k-1}^s + u_{m,n,k+1}^s \right) + \\
& + \frac{3}{128} \left(u_{m-1,n-1,k}^s + u_{m-1,n,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k}^s + u_{m-1,n,k+1}^s + u_{m,n-1,k-1}^s + u_{m,n+1,k-1}^s + u_{m,n-1,k+1}^s + u_{m,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k}^s + u_{m+1,n,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k}^s + u_{m+1,n,k+1}^s \right) + \\
& + \frac{1}{128} \left(u_{m-1,n-1,k-1}^s + u_{m-1,n-1,k+1}^s + u_{m-1,n+1,k-1}^s + u_{m-1,n+1,k+1}^s + u_{m+1,n-1,k-1}^s + u_{m+1,n-1,k+1}^s + u_{m+1,n+1,k-1}^s + u_{m+1,n+1,k+1}^s \right) - \\
& - \frac{15}{64} h^2 f_{mnk} - \frac{5h^4}{256} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) - \frac{h^6}{1536} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) - \frac{h^6}{384} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + O(h^8) \quad (24)
\end{aligned}$$

В формуле простой итерации(24) верхний индекс s обозначает номер итерации, в левой части(24) индекс итерации $s=1$ на единицу больше, чем индексы итерации s у всех узловых значений в правой части формулы(24). В формуле(24) значения функции $f(x,y,z)$ и ее частные производные вычисляются в узле с индексами (m,n,k) . Формулу простой итерации(24) можно записать в виде

$$u_{mnk}^{s+1} = G(u_{mnk}^s, f_{mnk}), s = 0, 1, 2, \dots, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (25)$$

Где функция $G(u_{mnk}^s, f_{mnk})$ полностью совпадает с правой частью формулы(24).

По аналогии с (25) рассмотрим итерационную последовательность(26) с сжимающим коэффициентом $0 < q < 1$, которую можно получить из(25), если в правой части (25) провести замену $u_{mnk}^s \rightarrow qu_{mnk}^s$

$$u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk}), s = 0, 1, 2, \dots, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (26)$$

Введем функцию нормы в пространстве сеточных функций $u_{m,n,k} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$

$$\delta^s = \left\| u^{s \text{ num}} - u^{\text{exact}} \right\|_C^{n_1, n_2, n_3} = \max_{\substack{0 \leq m \leq n_1 \\ 0 \leq n \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} \left| u_{m,n,k}^{s \text{ num}} - (u)_{m,n,k}^{\text{exact}} \right|, s = 0, 1, 2, \dots, \text{ совпадающей с метрической функцией в}$$

пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$ определяемой формулой $\rho(u^{num}, u^{exact}) = \|u^{num} - u^{exact}\|$

(Колмогоров А.Н., С.В. Фомин) [8,стр.139]. Где $u_{m,n,k}^{s \text{ num}}$, $(u^{exact})_{m,n,k}$ обозначают соответственно численное решение задачи(27) в узле (m,n,k) на итерационном шаге (s) и след[9,стр.102] точного решения задачи(1) на узел сетки (m,n,k) .

Описание численного алгоритма.

Введем на параллелепипеде для задачи (1) сетку с равномерным шагом

$$\overline{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \times [e, r], \omega_{n_1, n_2, n_3} = \left\{ x_m = a + hm, m = \overline{0, n_1}, y_n = c + hn, n = \overline{0, n_2}, z_k = e + hk, k = \overline{0, n_3} \right\}$$

$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = h_2 = \frac{d-c}{n_2} = h_3 = \frac{r-e}{n_3} = h$. Для сеточной функции u_{mnk}^{s+1} запишем систему разностных уравнений

соответствующей задаче в частных производных (1)

$$\begin{cases} u_{m,n,k}^{s+1} = G(qu_{m,n,k}^s, f_{m,n,k}) & (24), s = 0, 1, 2, \dots, m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \\ u_{0,n,k}^{s+1} = \mu_{1,0,n,k}, u_{n_1,n,k}^{s+1} = \mu_{2,n_1,n,k}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, s = 0, 1, 2, \dots \\ u_{m,0,k}^{s+1} = \mu_{3,m,0,k}, u_{m,n_2,k}^{s+1} = \mu_{4,m,n_2,k}, m = \overline{0, n_1}, k = \overline{0, n_3}, s = 0, 1, 2, \dots \\ u_{m,n,0}^{s+1} = \mu_{5,m,n,0}, u_{m,n,n_3}^{s+1} = \mu_{6,m,n,n_3}, m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, s = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

Замечание. В разностной задаче(27) $q \rightarrow 1$, иначе изменятся коэффициенты точной аппроксимации(20) достаточно, $q = 1 - 10^{-15}$, т.е. отличается на число от 1 в 10 раз большее ошибки округления.

В системе разностных уравнений(27) первое уравнение совпадает с записью формулы(26). За начальное решение итерационного процесса можно выбрать функцию, определяемую граничными условиями[2,стр. 428]

$$u_{m,n,k}^0 = \frac{1}{6} (\mu_{1,0,n,k} + \mu_{2,n_1,n,k} + \mu_{3,m,0,k} + \mu_{4,m,n_2,k} + \mu_{5,m,n,0} + \mu_{6,m,n,n_3}), m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1}, k = \overline{1, n_3 - 1} \quad (28)$$

Из формулы(28) видно, что начальное численное решение непрерывно зависит от всех 6 краевых функций как их линейная комбинация, и в классической постановке задачи(1) не может быть разрывов первого рода для начального приближения решения и всех значений индексов(m,n,k).

Теорема 2(об устойчивости итерационных формул (23,26)). Итерационная последовательность(26) $u_{mnk}^{s+1} = G(qu_{mnk}^s, f_{mnk})$ является сжимающим отображением в метрическом пространстве $u_{mnk}^s \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)}$ и имеет место единственное решение, то есть

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^s = \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk} = G(\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, f_{mnk}).$$

Доказательство. Покажем, что итерационная последовательность (26) является сжимающим отображением:

обозначим $\delta_{m,n,k}^s = y_{m,n,k}^s - x_{m,n,k}^s, \forall m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}$

$$\begin{aligned} \forall x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1} \in R^{(n_1+1)} \times R^{(n_2+1)} \times R^{(n_3+1)} : \rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) &= \rho(G(qx_{mnk}^s, f_{mnk}), G(qy_{mnk}^s, f_{mnk})) \Leftrightarrow |x_{m,n,k}^{s+1} - y_{m,n,k}^{s+1}| = \\ &= |G(qx_{mnk}^s, f_{mnk}) - G(qy_{mnk}^s, f_{mnk})| \stackrel{(24)}{\leq} \left(\frac{7q}{64} |\delta_{m-1,n,k}^s + \delta_{m+1,n,k}^s + \delta_{m,n-1,k}^s + \delta_{m,n+1,k}^s + \delta_{m,n,k-1}^s + \delta_{m,n,k+1}^s| + \right. \\ &+ \frac{3q}{128} |\delta_{m-1,n-1,k}^s + \delta_{m-1,n,k-1}^s + \delta_{m-1,n+1,k}^s + \delta_{m-1,n,k+1}^s + \delta_{m,n-1,k-1}^s + \delta_{m,n+1,k-1}^s + \delta_{m,n-1,k+1}^s + \delta_{m,n+1,k+1}^s + \delta_{m+1,n-1,k}^s + \delta_{m+1,n,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k}^s + \delta_{m+1,n,k+1}^s| + \\ &+ \left. \frac{q}{128} |\delta_{m-1,n-1,k-1}^s + \delta_{m-1,n-1,k+1}^s + \delta_{m-1,n+1,k-1}^s + \delta_{m-1,n+1,k+1}^s + \delta_{m+1,n-1,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k-1}^s + \delta_{m+1,n+1,k+1}^s + \delta_{m+1,n-1,k+1}^s| \right) \leq \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s|. \\ \left(\frac{7q \cdot 6}{64} + \frac{3q \cdot 12}{128} + \frac{q \cdot 8}{128} \right) &= q \left(\frac{84 + 36 + 8}{128} \right) \cdot \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| = q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta_{m,n,k}^s| = q \rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s), 0 < q < 1 \quad (29) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta^{s+1}_{m,n,k}| \leq q \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |\delta^s_{m,n,k}|. \text{ То есть } \rho(x_{mnk}^{s+1}, y_{mnk}^{s+1}) \leq q \rho(x_{mnk}^s, y_{mnk}^s)$$

По А.Н. Колмогорову, определение 1[8,стр.74] последовательность(26) является сжимающей и сходится к единственному пределу, обозначим его u_{mnk}^* (теорема - принцип сжимающих отображений[8,стр.75]),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_{mnk}^s \equiv u_{mnk}^* : u_{mnk}^* = G(qu_{mnk}^*, f_{mnk}) \quad (30)$$

Но точное решение удовлетворяет формуле(23) $\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk} = G(\lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}, f_{mnk})$, оператор $G(qu_{mnk}^s, f_{mnk})$ (23) является линейным и непрерывным по u_{mnk}^s и по q . Перейдем к пределу в(30)

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} G(qu_{mnk}^*, f_{mnk}) = G\left(\lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^*, f_{mnk}\right) \Leftrightarrow \lim_{\substack{q \rightarrow 1-0 \\ h \rightarrow 0}} u_{mnk}^* = \lim_{h \rightarrow 0} (u^{exact})_{mnk}$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим тестовый пример

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \sin(x) \sin(y) \sin(z), x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = \sin(y) \sin(z), (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = \sin(x) \sin(2z), (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(x, y, 0) = u(x, y, \pi) = \sin(3x) \sin(y), (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \quad (31)$$

Постановка задачи в примере (31) является классической, так как, все шесть краевых функций непрерывны не только на своей грани куба, но и на всех 12 ребрах куба равны друг другу (нулю).

Задача (31) является линейной относительно неизвестной функции $u(x, y, z)$, поэтому воспользуемся методом редукции линейной задачи $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z)$, где функции $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z), u_4(x, y, z)$ являются решениями соответственно следующих частных задач

$$\begin{cases} 1) \begin{cases} u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = \sin(x) \sin(y) \sin(z), x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \\ 2) \begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_2(0, y, z) = u_2(\pi, y, z) = \sin(y) \sin(z), (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, 0, z) = u_3(x, \pi, z) = \sin(x) \sin(2z), (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0, (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), z \in (0, \pi) \\ u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = 0, (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0, (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u_4(x, y, 0) = u_4(x, y, \pi) = \sin(3x) \sin(y), (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

Ищем решение задачи 1) в виде $u_1(x, y, z) = C \sin(x) \sin(y) \sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 1):

$$u_1(0, y, z) = u_1(\pi, y, z) = u_1(x, 0, z) = u_1(x, \pi, z) = u_1(x, y, 0) = u_1(x, y, \pi) = 0.$$

Подставим $u_1(x, y, z)$ в первое уравнение системы 1):

$$u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz} = -3C \sin(x) \sin(y) \sin(z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z) \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}, u_1(x, y, z) = -\frac{1}{3} \sin(x) \sin(y) \sin(z)$$

Ищем решение задачи 2) в виде $u_2(x, y, z) = f(x) \sin(y) \sin(z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 2):

$$u_2(x, 0, z) = u_2(x, \pi, z) = u_2(x, y, 0) = u_2(x, y, \pi) = 0$$

Подставим $u_2(x, y, z) = f(x) \sin(y) \sin(z)$ в первое и второе уравнения системы 2):

$$\begin{cases} u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz} = f''(x) \sin(y) \sin(z) - 2f(x) \sin(y) \sin(z) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 2f(x) = 0 \\ u_2(0, y, z) = f(0) \sin(y) \sin(z) = \sin(y) \sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_2(\pi, y, z) = f(\pi) \sin(y) \sin(z) = \sin(y) \sin(z), \forall (y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(x) - 2f(x) = 0, f(x) = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) + B \operatorname{ch}(\sqrt{2}x), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)}, f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x), u_2(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y) \sin(z)$$

Ищем решение задачи 3) в виде $u_3(x, y, z) = f(y) \sin(x) \sin(2z)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_3(0, y, z) = u_3(\pi, y, z) = u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, \pi) = 0$$

Подставим $u_3(x, y, z) = f(y) \sin(x) \sin(2z)$ в первое и третье уравнения системы 3):

$$\begin{cases} u_{3xx} + u_{3yy} + u_{3zz} = f''(y) \sin(x) \sin(2z) - 5f(y) \sin(x) \sin(2z) = 0 \Leftrightarrow f''(y) - 5f(y) = 0 \\ u_3(x, 0, z) = f(0) \sin(x) \sin(2z) = \sin(x) \sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_3(x, \pi, z) = f(\pi) \sin(x) \sin(2z) = \sin(x) \sin(2z), \forall (x, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(y) - 5f(y) = 0, f(y) = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) + B \operatorname{ch}(\sqrt{5}y), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)}, f(y) = \operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y), u_3(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z)$$

Ищем решение задачи 4) в виде $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$, которое удовлетворяет однородным краевым условиям системы уравнений 3):

$$u_4(0, y, z) = u_4(\pi, y, z) = u_4(x, 0, z) = u_4(x, \pi, z) = 0$$

Подставим $u_4(x, y, z) = f(z) \sin(3x) \sin(y)$ в первое и четвертое уравнения системы 4):

$$\begin{cases} u_{4xx} + u_{4yy} + u_{4zz} = f''(z) \sin(3x) \sin(y) - 10f(z) \sin(3x) \sin(y) = 0 \Leftrightarrow f''(z) - 10f(z) = 0 \\ u_4(x, y, 0) = f(0) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 1 \\ u_4(x, y, \pi) = f(\pi) \sin(3x) \sin(y) = \sin(3x) \sin(y), \forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Общее решение ОДУ второго порядка есть

$$f''(z) - 10f(z), f(z) = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) + B \operatorname{ch}(\sqrt{10}z), f(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1, f(\pi) = 1 \Leftrightarrow 1 = A \operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi) + \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)}, f(z) = \operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z), u_4(x, y, z) = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y)$$

Решение примера (31) равно (в силу линейной редукции) сумме решений систем уравнений 1),2),3),4):

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z) + u_4(x, y, z) = -\frac{1}{3} \sin(x) \sin(y) \sin(z) +$$

$$+ \left(\operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{2}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{2}x) \right) \sin(y) \sin(z) + \left(\operatorname{ch}(\sqrt{5}y) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{5}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{5}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{5}y) \right) \sin(x) \sin(2z) +$$

$$+ \left(\operatorname{ch}(\sqrt{10}z) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}\pi)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}\pi)} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{10}z) \right) \sin(3x) \sin(y) \quad (32)$$

В таблице 1 показаны результаты численного решения примера 1 с параметрами программы $n_1 = 60, n_2 = 60, n_3 = 60, m = 13500$. (первые три столбца координаты – x,y,z, четвертый и пятый столбцы – численное и точное решение соответственно).

Таблица 1

x	y	z	numerical	exact
---	---	---	-----------	-------

0.261799387799149	0.261799387799149	0.261799387799149	0.19326654098	0.19326654078
1.30899693899575	0.261799387799149	0.261799387799149	0.18328544131	0.18328544145
2.35619449019234	0.261799387799149	0.261799387799149	0.28564460479	0.2856446045
0.261799387799149	1.30899693899575	0.261799387799149	0.4608673730	0.46086737233
1.30899693899575	1.30899693899575	0.261799387799149	-0.28784462945	-0.28784462878
2.35619449019234	1.30899693899575	0.261799387799149	0.35457814658	0.35457814586
0.261799387799149	2.35619449019234	0.261799387799149	0.35373212267	0.35373212214
1.30899693899575	2.35619449019234	0.261799387799149	-0.14968371807	-0.14968371760
2.35619449019234	2.35619449019234	0.261799387799149	0.30424860387	0.30424860333
0.261799387799149	0.261799387799149	1.30899693899575	0.22895617234	0.22895617228
1.30899693899575	0.261799387799149	1.30899693899575	0.242830568967	0.242830568968
2.35619449019234	0.261799387799149	1.30899693899575	0.23202215878	0.23202215871
0.261799387799149	1.30899693899575	1.30899693899575	0.59406289056	0.59406289039
1.30899693899575	1.30899693899575	1.30899693899575	-6.56191877E-002	-6.56191875E-002
2.35619449019234	1.30899693899575	1.30899693899575	0.15445645365	0.15445645348
0.261799387799149	2.35619449019234	1.30899693899575	0.45123800883	0.45123800870
1.30899693899575	2.35619449019234	1.30899693899575	1.299659600E-002	1.299659609E-002
2.35619449019234	2.35619449019234	1.30899693899575	0.15774935695	0.15774935681
0.261799387799149	0.261799387799149	2.35619449019234	-1.683548459E-002	-1.683548468E-002
1.30899693899575	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.57131703876	-0.57131703855
2.35619449019234	0.261799387799149	2.35619449019234	-0.35628466793	-0.35628466797
0.261799387799149	1.30899693899575	2.35619449019234	0.45799547075	0.45799547037
1.30899693899575	1.30899693899575	2.35619449019234	-0.18843379843	-0.18843379794
2.35619449019234	1.30899693899575	2.35619449019234	9.325158014E-002	9.325157979E-002
0.261799387799149	2.35619449019234	2.35619449019234	0.30256837412	0.30256837385
1.30899693899575	2.35619449019234	2.35619449019234	-0.26000946507	-0.26000946466
2.35619449019234	2.35619449019234	2.35619449019234	-2.109387609E-002	-2.109387631E-002

$\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 1.08543979\ 36022005e - 009 (n_1 = n_2 = n_3 = 60)$. Где равномерно непрерывная норма разности двух сеточных функций численного и аналитического решений равна 10^{-9} и определяется по формуле - $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u_{n,m,k}^{num} - u_{n,m,k}^{exact}|$ т.е. программа работает с использованием алгоритма

согласно формулам(19)-(28) с относительной точностью REAL(4)(лучше чем 10^{-8}) [10].

Поскольку при $n_1=10, n_2=10, n_3=10, m=6000$ $\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 5.01911315\ 1139010E - 005$

а при $n_1=30, n_2=30, n_3=30, m=6000$ (уменьшение всех шагов сетки в 2 раза)

$$\|u_{num} - u_{exact}\|_C = 6.93907748\ 4835465E - 008$$

То алгебраический порядок погрешности p равен шести при использовании формул(25,27)- $q=1$

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.01911315\ 1139010E - 005}{7.89113015\ 4868975E - 007} \approx 63.4 \approx 2^6 = 2^p, p = 6$$

При использовании алгоритма(26,27) $q = 1 - eps = 1 - 5 \cdot 10^{-8} = 0.99999995$

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^1}{\|u_{num} - u_{exact}\|_C^{1/2}} = \frac{5.01312814\ 5980872E - 005}{6.99332969\ 9778172E - 007} \approx 71.7 \approx 2^6 = 2^p, p = 6$$

Более высокое значение для порядка погрешности во втором случае объясняется экспоненциальным затуханием ошибки округления в правой части формулы (27) в слагаемых вида $u^s_{m-1,n-1,k-1}, \dots$ с параметром $q = 0.99999995$.

Лемма 6. Пусть начальная норма разности численного и точного решения конечна, тогда после s шагов итерационной формулы(26) конечная норма затухает по экспоненциальному закону от s и справедлива оценка

$$R_0 = \|u^0_{m,n,k} - u^{exact}_{m,n,k}\|_C = \max_{\substack{0 \leq n \leq n_1 \\ 0 \leq m \leq n_2 \\ 0 \leq k \leq n_3}} |u^{0,num}_{n,m,k} - u^{exact}_{n,m,k}|, R_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s), q = 1 - \varepsilon \quad (33)$$

Доказательство. Согласно теореме о неподвижной точке [8, стр.75], итерационная последовательность (26)

имеет предел, и после s итераций получим оценку погрешности[8, стр.75]:

$$\begin{aligned} R_s &\leq \frac{R_0 q^s}{1-q}, q \rightarrow 1-0 \Leftrightarrow \varepsilon = 1-q \rightarrow +0, R_s \leq \frac{R_0 q^s}{1-q} = \frac{R_0 (1-\varepsilon)^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) = \\ &= \frac{R_0}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon s) \stackrel{s = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}, d > 0}{=} \frac{R_0 \exp(-\varepsilon^{-d})}{\varepsilon} = \frac{R_0}{\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^d}\right)} \stackrel{z = \frac{1}{\varepsilon^d}}{=} \frac{R_0}{\frac{1}{z^{1/d}} \exp(z)} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{z \rightarrow \infty} = \frac{z^{1/d} R_0}{\exp(z)} \leq \frac{z^{[1/d]+1} R_0}{\frac{z^{[1/d]+1}}{([1/d]+1)!} + \frac{z^{[1/d]+2}}{([1/d]+2)!}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Лемма 6 и формула(33) доказаны.

Замечание. Из формулы(34) следует, если $s\varepsilon = 1, R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} sR_0 e^{-1}$, то ошибка округления в алгоритме(26) как и в(25)прямо пропорциональна числу итераций s . При выполнении условий в алгоритме (26): $\varepsilon = 1 - q \rightarrow 0, s\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rightarrow \infty \Leftrightarrow s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{1+d}}, d > 0, R_s \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ R_s мала.

Быстродействие алгоритма в секундах составляет для $n1=30, n2=30, n3=30, m=6000$ ($t2-t1 = 12.85448$ с). В то время как авторы работы[11] получили время счета 15 минут ($n1=20, n2=20, n3=20$) с алгоритмами вида $O(h^4)$ и погрешность в процентах, т.е. с точностью порядка 10^{-2} .

Программа написана на языке FORTRAN и представлена ниже с использованием всех функций и переменных двойной точности, также занесены данные из тестового примера 1.

```
module stolb;use dfimsl;integer(8),parameter:: n1=30,n2=30,n3=30,m=6000;end module
program one;use dfimsl;use stolb;real(8)::a,b,c,d,e,r,h1,h2,h3,ss
integer(8)::i,j,k;real(8)::res(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2)
real(8)::res0(0:n1+2,0:n2+2,0:m+2),l(n1+2),nu(n1+2),res1(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+2,0:m+1),max,delta(0:n1+2,0:n2+2,0:n3+1)
real(8)::x,y,z,t,ch,sh,f,u1x,u2x,u1y,u2y,u1z,u2z,du,d4u,d4xyzu,pi,h22,h44,h66
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0;f(x,y,z)=dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);
u1x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u2x(y,z)= dsin(y)*dsin(z);u1y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z)
```

```

u2y(x,z)=dsin(x)*dsin(2d0*z);u1z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y)
u2z(x,y)=dsin(3d0*x)*dsin(y);du(x,y,z)=-3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
d4u(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z);d4xyzu(x,y,z)=3d0*dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)
a=0d0;c=0d0;e=0d0;pi=2d0*dasin(1d0);b=pi;d=pi;r=pi
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);h3=(r-e)/dfloat(n3)
max=-1d3;do k=0,n3;z=e+h3*dfloat(k);do j=0,n2;y=c+h2*dfloat(j)
do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(i);call uu(x,y,z,t);res(i,j,k)=t;if(mod(i,5)==0.and.mod(j,5)==0.and.mod(k,5)==0)then;endif
if(max<dabs(res(i,j,k)))then;max=dabs(res(i,j,k));endif;
enddo;enddo;enddo;do i=1,n1-1;x=a+h1*dfloat(i);do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do k=1,n3-1;z=r+h3*dfloat(k)
res0(i,j,k)=(u1x(y,z)+u2x(y,z)+u1y(x,z)+u2y(x,z)+u1z(x,y)+u2z(x,y))/6d0
enddo;enddo;enddo;do s=0,m;do j=0,n2;do k=0,n3;y=c+h2*dfloat(j)
z=e+h3*dfloat(k);res1(0,j,k,s)=u1x(y,z);res1(n1,j,k,s)=u2x(y,z)
enddo;enddo;do i=0,n1;do k=0,n3;x=a+h1*dfloat(i);z=e+h3*dfloat(k)
res1(i,0,k,s)=u1y(x,z);res1(i,n2,k,s)=u2y(x,z);enddo;enddo;do i=0,n1;do j=0,n2;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j)
res1(i,j,0,s)=u1z(x,y);res1(i,j,n3,s)=u2z(x,y);enddo;enddo;enddo
h22=h1*h1;h44=h22*h22;h66=h44*h22;do s=0,m-1;do k=1,n3-1;z=e+h3*dfloat(k);
do j=1,n2-1;y=c+h2*dfloat(j);do i=1,n1-1;ss=0d0;x=a+h1*dfloat(i)
ss=(7d0/64d0)*(res1(i-1,j,k,s)+res1(i+1,j,k,s)+res1(i,j-1,k,s)+res1(i,j+1,k,s)+res1(i,j,k-1,s)+res1(i,j,k+1,s))
ss=ss+(3d0/128d0)*(res1(i-1,j+1,k,s)+res1(i-1,j,k+1,s)+res1(i-1,j-1,k,s)+res1(i-1,j,k-1,s)+res1(i,j-1,k-1,s)+res1(i,j-1,k+1,s)+res1(i,j+1,k-1,s)+res1(i,j+1,k+1,s)+res1(i+1,j-1,k,s)+res1(i+1,j,k-1,s)+res1(i+1,j+1,k,s)+res1(i+1,j,k+1,s))
ss=ss+(1d0/128d0)*(res1(i-1,j-1,k-1,s)+res1(i-1,j-1,k+1,s)+res1(i-1,j+1,k-1,s)+res1(i-1,j+1,k+1,s)+res1(i+1,j-1,k-1,s)+res1(i+1,j-1,k+1,s)+res1(i+1,j+1,k-1,s)+res1(i+1,j+1,k+1,s))
ss=ss-(15d0/64d0)*f(x,y,z)*h22-(5d0*h44/256d0)*du(x,y,z)-(h66/1536d0)*(d4u(x,y,z))-
(h66/384d0)*(d4xyzu(x,y,z))
res1(i,j,k,s+1)=ss;enddo;end do;enddo;enddo;max=-1d3;do k=0,n3;do j=0,n2;do i=0,n1
delta(i,j,k)=dabs(res(i,j,k)-res1(i,j,k,m));if(mod(i,2)==0.and.mod(j,2)==0.and.mod(k,2)==0)then
endif;if(max<=delta(i,j,k))then;max=delta(i,j,k);endif;enddo;enddo;enddo; print*, "max=", max;end program one;
subroutine uu(x,y,z,t);real(8)::x,y,z,t,pi,c1,c2,c3,c4,ch,sh
ch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;sh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0
pi=2d0*dasin(1d0);c1=-dsin(x)*dsin(y)*dsin(z)/3d0
c2=dsin(y)*dsin(z)*(ch(x*dsqrt(2d0))+sh(x*dsqrt(2d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(2d0))))/sh(pi*dsqrt(2d0))
c3=dsin(x)*dsin(2d0*z)*(ch(y*dsqrt(5d0))+sh(y*dsqrt(5d0))*(1d0-ch(pi*dsqrt(5d0))))/sh(pi*dsqrt(5d0))

```

$$c4 = d \sin(3d_0 * x) * d \sin(y) * (ch(z * d \sqrt{10d_0}) + sh(z * d \sqrt{10d_0}) * (1d_0 - ch(\pi * d \sqrt{10d_0}))) / sh(\pi * d \sqrt{10d_0})$$

t=c1+c2+c3+c4;end subroutine

Особую сложность в методах решения имеют дифференциальные уравнения с разрывами первого рода в краевых и начальных условиях [12,13]. Предложенный в работе алгоритм(26) с формулой(24) устойчив по отношению к разрывам первого рода в краевых условиях, например, к прибавлению постоянной к краевой функции одной грани (точки разрыва первого рода краевых условий появляются на все 4 ребрах данной грани).

В работе получены результаты:

- 1) Предложен минимальный симметричный 27 точечный шаблон для аппроксимации трёхмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде.
- 2) Доказано, что на 27 точечном шаблоне и равномерной сетке невозможна аппроксимация уравнения Пуассона выше шестого порядка.
- 3) В леммах 1-3 доказано, что коэффициенты разложения в ряд Тейлора суммы узловых значений в группах узлов, расположенных симметрично и на одинаковом расстоянии от центра куба содержат только частные производные четного порядка и четного порядка по каждой из трех переменных.
- 4) В леммах 4,5 доказано, что коэффициенты аппроксимации уравнения Пуассона линейной квадратурной формулой связаны уравнением связи, как следствие уравнения Пуассона, по одному уравнению на каждую четную степень шага сетки.
- 5) Найдена явная разностная схема аппроксимирующая трехмерное уравнение Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности, доказана ее устойчивость.
- 6) Численно показано с использованием точного аналитического решения тестирующего примера(28) и программы, что явная формула простой итерации(24) с алгоритмом (26) имеют шестой порядок погрешности.

Литература

- 1) Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.:Издательство ЛКИ,2009. – 480 с.
- 2) Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. - М.: Издательство: Физматлит,2013 - 709 с.
- 3) Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики : учеб. пособие / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука,1995. – 224 с.
- 4) Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
- 5) Г.Р. Кирхгоф. Механика: Лекции по математической физике. Перевод с 4 немецкого издания. – М.: КомКнига, 2014. – 392 с.
- 6) Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR кода в стеганографии/ Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
- 7) Пастухов, Д.Ф., Пастухов, Ю.Ф., Волосова, Н.К. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. - №4. С.167 - 186.
- 8) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа./ А.Н. Колмогоров, Фомин С.В. – М.: Наука,1976,543 с.
- 9) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях./ Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. – М.: БИНОМ,2010,240 с.
- 10) Бартедьев О.В. Современный Фортран./О.В. Бартедьев – М.:Издательство “ДИАЛОГ – МИФИ”, 2000. – 450 с.
- 11) Гришин А.М., Якимов А.С. Об одном методе решения трехмерного эллиптического уравнения общего вида/ Гришин А.М., Якимов А.С.//Вычислительные технологии. – 2000.Т.5. №5. С. 38-52.
- 12) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2008.-Т.44,№10. С.1319-1335.
- 13) Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае./А.А. Козлов//Дифференциальные уравнения.-2007.-Т.43,№5. С.621-627.

- 14) Тихонов А.Н. Уравнения математической физики./А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2008, 729 с.

MINIMUM SCHEME OF THE DIFFERENCES FOR EQUATION OF THE POISSON ON BOX WITH SIXTH RATHER INACCURACY

D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV, N. VOLOSOVA

The Offered algorithm of the decision of the general lumpy marginal problem Dirihle for three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped with sixth rather inaccuracy with minimum 27 point patterns. Numerically stability of the algorithm is checked to breakup of the first sort of the border conditions on side parallelepiped. It Is Received decomposition to inaccuracy of the problem in general type for uneven net through derived even order from decision and right part of equation and even order on each of three variable. The Writtened program on base of the built algorithm and principle of the compressed images for evident formula iteration idle time. It Is Solved exactly and numerically test example, which comparison confirms the sixth order to inaccuracy for molded the numerical algorithm.

The Keywords: three-dimensional equation of the Poisson on parallelepiped, lumpy-marginal task Dirihle.