УДК 514

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Аннотация: В работе рассматриваются свойства функций Гамильтона и Лагранжа в координатно - импульсном пространстве. Основным полученным результатом для системы ОДУ 1-ого порядка

Гамильтона является утверждение : решения системы 2mn обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона первого порядка являются решениями системы соответствующей системы m дифференциальных уравнений порядка n Эйлера-Лагранжа ,двойственной к функции Гамильтона и соответствующего невырожденного преобразования переменных.
Получены формулы, связывающие частные производные в координатно-импульсном пространстве q-p для функций Лагранжа и Гамильтона по одним и тем же переменным. Получены формулы для частных производных для двойственной к функции Гамильтона функции Лагранжа по координатным переменным в координатно-импульсном пространстве (X_n, P_{n-1})

Ключевые слова: Функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор обобщенного импульса, невырожденный гессиан.

Введение.

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.. Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго).

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 г. И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться ее решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки так, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учеными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Свои подходы к решению этой задачи предложили Л. Эйлер и Ж. Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Г. Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Л. Эйлер (уравнения Эйлера) и Ж. Лагранж (метод вариаций). Далее следует А. Лежандр (исследование второй вариации – необходимое условие Лежандра), У. Гамильтон и Б. Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона – Якоби), А. Клёбш и Ю. Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX в. послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Д. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, А. Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19,20,21,22].

Основные определения.

Введем обозначения для объектов, используемых в работе:.

Функция Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2..p_1^m,p_2^1p_2^2..p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1})\qquad j1=\overline{1,m}\quad l1=\overline{1,n}$$

$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2..q_1^m,q_2^1q_2^2..q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2})\qquad j2=\overline{1,m}\quad l2=\overline{1,n}$$

Гамильтона.

Определение 1. $L(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $\quad L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

называется функция Лагранжа, двойственная к функции *Гамильтона* $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$

Постановка задачи.

Пусть $H(q,p)$ – функция Гамильтона зависит от $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$, $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$, при этом нижние индексы меняются от 1 до n, верхние индексы меняются от 1 до m

$$p=\bar{p}=(p_1^{j1},p_2^{j1},...,p_n^{j1})=(p_1^1p_1^2...p_1^m,p_2^1p_2^2...p_2^m,...,p_n^1,...,p_n^m)=(p_{l1}^{j1}),\ j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n};$$
$$q=\bar{q}=(q_1^{j2},q_2^{j2},...,q_n^{j2})=(q_1^1q_1^2...q_1^m,q_2^1q_2^2...q_2^m,...,q_n^1,...,q_n^m)=(q_{l2}^{j2}),\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}.$$

Поставим следующую задачу: какими свойствами обладает *Функция Гамильтона* $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}, l1=\overline{1,n}, j2=\overline{1,m}, l2=\overline{1,n}$ и функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^jq_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ и какие связи между двумя данными функциями $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$, $L(p,q):\Re^{2mn}\to\Re$. Сформулировать и доказать обратную теорему Гамильтона.

Имеет место следующая

Теорема 1 Пусть $s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}$. Тогда

1) $$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}\ ,\ s=1,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1}\ ,\ 2\le s\le n,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1)\ ,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\qquad(1)$$

2) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0,\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m};\qquad(2)$$

3) $$\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}=\delta_i^j\delta_s^k,\qquad(3)$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\0,\ \alpha\ne\beta\end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Прибавим 1 к обеим частям двойного неравенства $1\le k\le n-1\Rightarrow 2\le k+1\le n$, $1\le s\le n$, поэтому при $s=1$

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = 0 = 1 - 1 = 1 - \delta_s^1 = (1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1},\ i, j = \overline{1,m},$$

где $\quad \delta_s^1 = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \geq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера.

При $s = 1$ формула (7) доказана.

где $\quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},\ \delta_s^{k+1} = \begin{cases} 1, s = k+1 \\ 0, s \neq k+1 \end{cases}$ – символ Кронекера.

При $2 \leq s \leq n$ $\dfrac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} 1, (i = j) \wedge (s = k+1) \\ 0, (i \neq j) \vee (s \neq k+1) \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1} = \delta_j^i \delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ i, j = \overline{1,m}$ или

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i} = \begin{cases} (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ s = 1,\ k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m} \\ (1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ 2 \leq s \leq n,\ k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m} \end{cases} = \delta_j^i \delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s, k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m}.$$

Вторая и третья части теоремы очевидны:

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i} = \dfrac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i} = 0$, $s, k = \overline{1,n},\ i, j = \overline{1,m}$, так как переменные p, q независимы;

$\dfrac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1\ ,(i = j) \wedge (k = s) \\ 0\ ,(i \neq j) \vee (k \neq s) \end{cases} = \delta_i^j \delta_s^k$, условие во второй строке очевидно является отрицанием условия в первой: $\overline{(i = j) \wedge (k = s)} = \overline{(i = j)} \vee \overline{(k = s)} = (i \neq j) \vee (k \neq s)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть (q, p) - $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $\ j1 = \overline{1,m}$, $l1 = \overline{1,n}$, $j2 = \overline{1,m}$, $l2 = \overline{1,n}$. Тогда при $s = \overline{1,n}$, $i, j = \overline{1,m}$ и произвольных $p_k^j \in \Re$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1) \qquad (4)$$

где $\quad \delta_s^1 = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, s = 1 \\ 0, s \geq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера;

$\delta_s^{k+1} = \begin{cases} 1, s = k+1 \\ 0, s \neq k+1 \end{cases}$ – символ Кронекера.

Доказательство. Так как $(1-\delta_s^1)$ не зависит от индексов суммирования k, j, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = (1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}\ .$$

При $s = 1$ $(1-\delta_s^1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1-\delta_s^1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = 0$ $\ p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i \cdot 0 = 0$ и утверждение **теоремы 2** выполнено.

При $n \geq s \geq 2 \Rightarrow s - 1 \geq 1$ $\ \delta_s^1 = 0,\ 1 - \delta_s^1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow p_{s-1}^i(1-\delta_s^1) = p_{s-1}^i$ – правая часть;

$p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1} = \begin{cases} p_{k=s-1}^{j=i} = p_{s-1}^i,\ (j = i) \wedge (k+1 = s) \\ 0,\ (j \neq i) \vee (k+1 \neq s) \end{cases} \Rightarrow (1-\delta_s^1)\,p_{s-1}^i = (1-0)\,p_{s-1}^i = p_{s-1}^i$ – левая часть утверждения.

При $n = 1 \Rightarrow s = 1\ (s = \overline{1,n}) \Rightarrow \delta_n^1 = \delta_s^1 = 1$, поэтому

$$p_{s-1}^{i}(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)=p_{1-1}^{i}(1-\delta_1^1)(1-\delta_1^1)=0=p_{1-1}^{i}(1-\delta_1^1).$$

При $n>1\Rightarrow\delta_n^1=0\Rightarrow(1-\delta_n^1)=(1-0)=1\Rightarrow p_{s-1}^{i}(1-\delta_s^1)=p_{s-1}^{i}(1-\delta_s^1)(1-\delta_n^1)$.

Формула (4) проверена. **Теорема 2** доказана.

Рассмотрим функцию $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$.

Теорема 3. Пусть $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$. Тогда имеют место равенства:

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^{i}(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i} \qquad (5)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_s^i} \qquad (6)$$

Где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\ \alpha=\beta\\0,\ \alpha\neq\beta\end{cases}$ – *символ Кронеккера*

Доказательство: $\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$.

По **теореме 1**, $\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}=\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}=0$, так как переменные p, q независимы, перепишем равенства:

$$\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\begin{cases}(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ s=1,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\\(1-\delta_s^1)\delta_j^i\delta_s^{k+1},\ 2\le s\le n,\ k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m}\end{cases}=\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}(1-\delta_s^1),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m},$$

поэтому $\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})$.

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_k^j}{\partial q_s^i}q_{k+1}^j+p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial p_n^j}{\partial q_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i})+\sum_{j=1}^{m}(p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i})=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1})+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)p_{s-1}^i+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

По **теореме 2**, $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(p_k^j(1-\delta_s^1)\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}=p_{s-1}^i(1-\delta_s^1)$, поэтому

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j\,\delta_j^i\,\delta_s^{k+1}+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_s^i}.$$

Формула (5) проверена. Первая часть **теоремы 3** доказана.

$$L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}=-H(p,q)+(1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}.$$

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j + p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}\right).$$

Так как $\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i} = \begin{cases} 1,\ (s=k)\wedge(i=j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \\ 0,\ (s\neq k)\vee(i\neq j),\ s,k=\overline{1,n},\ i,j=\overline{1,m} \end{cases} = \delta_i^j\delta_s^k$ и $\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i} = 0$, то

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_k^j}{\partial p_s^i}q_{k+1}^j + p_k^j\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial p_s^i}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial p_n^j}{\partial p_s^i}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}\right) =$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\delta_i^j\delta_s^k\ q_{k+1}^j) + \sum_{j=1}^{m}\left(\delta_i^j\delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i} + (1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^j + \delta_s^n\ \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j \partial p_s^i}.$$

Формула (6) проверена. **Теорема 3** доказана.

Теорема 4. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ – функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}\right)\neq 0,\ i,j=\overline{1,m}\ \text{окрестности}\ U(q_0,p_0)\ \text{точки}\ (q_0,p_0).$$

Тогда

1) замена переменных $p_n^i \to x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $i=\overline{1,m}$ является невырожденной в окрестности точки (q_0,p_0) и справедливо

$$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}; \tag{7}$$

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}); \tag{8}$$

3) имеет место формула свертки

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i \partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases}1,\ i=j \\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases} \text{ – символ Кронекера}. \tag{9}$$

Доказательство. $x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}\left(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\right) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}$

Выражение (7) проверено.

Так как $\det\left(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}\right)\neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,\dots,} q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, x^{(n)}), \tag{10}$$

и значит, первые 2 части утверждения доказаны.

Продифференцируем соотношения

$$x^{n(i)}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))\equiv x^{n(i)}\ ,\ i,l,j=\overline{1,m}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}; \frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l} = 0\ s=\overline{1,n}\ ; \frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} = 0\ s=\overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{n(j)}} = \delta_j^i = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{n(j)}} + \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}} = \sum_{l=}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{n(j)}}.$$

Что доказывает формулу (9) и **теорему 4**.

Теорема 5. Пусть $H(q,p)$ – функция $H:\Re^{2mn}\to\Re$ $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},$ $l1=\overline{1,n},$ $j2=\overline{1,m},$ $l2=\overline{1,n}$. И пусть функция Гамильтона в уравнении связи $L(p,q)=-H(p,q)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ невырождена $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^i})\neq 0,\ i,j=\overline{1,m}$, где $U(q_0,p_0)$ – окрестность точки (q_0,p_0).

Тогда справедливы следующие результаты:

1) формула замена переменных – это переход от

$$p_n^i\to x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i},\ i=\overline{1,m}, \tag{11}$$

является невырожденным в окрестности точки (q_0,p_0);

2) локально существует обратная замена

$$p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}); \tag{12}$$

3) $$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n^i. \tag{13}$$

Доказательство. По **теореме 4**, первые 2 части **теоремы 5** доказаны:

$$x^{(n)i}=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j}=\frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i})=\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}.$$

Так как $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i})\neq 0$, благодаря теореме об обратной функции существует обратная замена переменных $p_n^i=p_n^i(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)})$.

$$\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_k^j q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}(p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})= \tag{14}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j))+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \tag{15}$$

Учтем тождества $\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}=0;\ k=\overline{1,n};$ $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j=0;\ k=\overline{1,n-1};$ $\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j=0$, поэтому формулу (15) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k^j}\frac{\partial q_k^j}{\partial x^{(n)i}}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_k^j)q_{k+1}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}q_{k+1}^j)+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}+\sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}+p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})). \tag{16}$$

С учетом **теоремы 3** $\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}=\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\delta_n^k=\begin{cases}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}},\ k=n\\ 0,\ k<n\end{cases}$, $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\ 0,\ k\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера (17)

(переменные $q_1, q_{2,...,} q_n, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, x^{(n)}$ независимы), тогда выражение (16) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k^j}\frac{\partial p_k^j}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}((\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}} p_n^j)\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) + \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}), \qquad (18)$$

так как $\sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} + \frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}}\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m}(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j} + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j})\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(n)i}} = 0$.

Преобразуем выражение (18), получим

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j(\frac{\partial}{\partial x^{(n)i}}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}). \qquad (19)$$

Зная, что $\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} = 0,\ k=\overline{1,n},\ i,l=\overline{1,m}$ и по формуле (27) $\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} = \frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^l$, где $\delta_n^l = \begin{cases}1,\ l=n\\ 0,\ l\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера, то выражение (19) можно преобразовать:

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial q_k^l}\frac{\partial q_k^l}{\partial x^{(n)i}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}) = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_k^l}\frac{\partial p_k^l}{\partial x^{(n)i}}\delta_n^k = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}}. \qquad (20)$$

По пункту 3 **теоремы 4,** $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)j}} = \delta_j^i = \begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера, перепишем формулу (30) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m} p_n^j\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^j\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{\partial x^{(n)i}} = \sum_{j=1}^{m} p_n^j\delta_i^j = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} p_n^j\delta_i^j + p_n^{j=i}\delta_i^{j=i} = 0 + p_n^i\cdot 1 = p_n^i.$$

Теорема 5 доказана.

Обобщением **теоремы 4 п.3** является

Теорема 6. Пусть $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ независимых переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m}$, $l1=\overline{1,n}$, $j2=\overline{1,m}$, $l2=\overline{1,n}$ и выполняется условие

$$\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i}) \neq 0,\ i,j=\overline{1,m} \text{ окрестности } U(q_0,p_0) \text{ точки } (q_0,p_0)$$

Тогда:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(k)j}} = \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^i\partial p_n^s}\cdot\frac{\partial p_n^s}{\partial x^{(n)k}} = \delta_j^i\cdot\delta_n^k,\quad k=\overline{0,n} \qquad (23)$$

Где $x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}$, $\delta_j^i = \begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ *– символ Кронекера* $\delta_n^k = \begin{cases}1,\ k=n\\ 0,\ k\neq n\end{cases}$ *– символ Кронекера*

Доказательство. $x^{(n)i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i} \Rightarrow \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^j} = \frac{\partial}{\partial p_n^j}(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}) = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j\partial p_n^i}$.

Так как $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^j \partial p_n^i}) \neq 0$, то по теореме об обратной функции существует обратная замена

$p_n^i = p_n^i(q_1, q_{2,...,}q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})$ Продифференцируем соотношения

$x^{n(i)}(q_1,...,q_n, p_1,..., p_{n-1}, p_n(q_1, q_{2,...,}q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})) \equiv x^{n(i)}$, $i,l,j = \overline{1,m}$. Учитывая, что

$\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial p_n^l} = \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}; \frac{\partial x^{(n)i}}{\partial q_s^l} = 0 \ s = \overline{1,n} \quad ; \frac{\partial p_s^l}{x^{(n)j}} = 0 \ s = \overline{1,n-1}$,

$$\frac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}} = \delta_n^k \cdot \delta_j^i = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial q_s^l}\frac{\partial q_s^l}{x^{k(j)}} + \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_s^l}\frac{\partial p_s^l}{x^{k(j)}} + \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}} == \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{n(i)}}{\partial p_n^l}\frac{\partial p_n^l}{x^{(k)(j)}} = \sum_{l=}^{m}\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_n^l \partial p_n^i}\frac{\partial p_n^l}{x^{k(j)}}$$

В частности при $k = n$ $\quad \frac{\partial x^{n(i)}}{x^{(k)j}} = \delta_n^k \cdot \delta_j^i = \delta_n^{k=n} \cdot \delta_j^i = \delta_j^i = \frac{\partial x^{n(i)}}{x^{(n)j}}$

$\delta_j^i = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} - \text{символ Кронекера}$ $\delta_n^k = \begin{cases} 1, \ k = n \\ 0 \ , \ k \neq n \end{cases} - \text{символ Кронекера}$

Что доказывает формулу (24) и **теорему 6**.

Введем обозначения

$X_{n-1} = (x^{(0)}, x^{(1)},..., x^{(n-1)})$, $X_n = (x^{(0)}, x^{(1)},..., x^{(n-1)}, x^{(n)}) = (X_{n-1}, x_n)$,

$q = (q_1, q_{2,...,}q_n)$, $p = (p_1, p_2,..., p_n)$, $P_{n-1} = (p_1, p_2,..., p_{n-1})$, $p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})$

Теорема 7 . 1) $H : \Re^{2mn} \to \Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1 = \overline{1,m}, \ l1 = \overline{1,n}, \ j2 = \overline{1,m}, \ l2 = \overline{1,n}$.

$$L(q,p) = -H(q,p) + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j + \sum_{j=1}^{m} p_n^j \cdot \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$$

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i \partial p_k^i}) \neq 0$, $i, j = \overline{1,m}$ окрестности $U(q_0, p_0)$ точки (q_0, p_0)

(**по теореме 4 п.2** $p_n = p_n(q_1, q_{2,...,}q_n, p_1, p_2,..., p_{n-1}, x^{(n)})) = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)}))$

3) Рассмотрим замену $q(X_{n-1}) : \Re^{mn} \to \Re^{mn}$ $\quad q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i}$, $s = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$ и функцию $L_1 : \Re^{2mn} \to \Re$,

$L_1(X_n, P_{n-1}) = L(q_1^i = x^{(0)i}, q_2^i = x^{(1)i},..., q_n^i = x^{(n-1)i}, P_{n-1}, p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) = L(q(X_{n-1}), P_{n-1}, p_n(q(X_{n-1}), P_{n-1}, x^{(n)}))$

Тогда выполняется соотношение

$$1. \ \frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = \delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} \cdot (1-\delta_n^k) = \frac{\partial x^{(k)j}(q, P_{n-1}, x^{(n)})}{\partial q_s^j} \quad k = \overline{0,n} \ , \ s = \overline{1,n} \qquad (24)$$

$$2. \ \frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q = q(X_{n-1}), P_{n-1}, p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) + (1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i + p_n^j \cdot \delta_n^k = \qquad (25)$$

$$-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}(q = q(X_{n-1}), P_{n-1}, p_n = p_n(q, P_{n-1}, x^{(n)})) + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j \quad k = 0, n-1 \qquad (26)$$

Коротко:

$$\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i + p_n^j \cdot \delta_n^k = -(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j} + (1-\delta_k^0)\cdot p_k^j \qquad (27)$$

Где $\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, \ \alpha = \beta \\ 0 \ , \ \alpha \neq \beta \end{cases}$ – *символ Кронекера*

3) $\frac{\partial L_1(X_n, P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}} = p_n^j(q(X_{n-1}), P_{n-1}, x^{(n)})$ $\quad j = \overline{1,m}$

Доказательство. При $0 \le k \le n-1 < n, \ s = \overline{1,n}, \ i = \overline{1,m}$ $\quad q_s^i(X_{n-1}) = x^{(s-1)i}$, $\quad s = \overline{1,n} \ \Rightarrow \ 0 \le s-1 \le n-1$

$\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = \frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(k)j}} = \delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} = \delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} \cdot (1-\delta_n^k)$ При $\quad k = n \Rightarrow \frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = \frac{\partial x^{(s-1)i}}{\partial x^{(n)j}} = 0 = (1-\delta_n^k) = \delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} \cdot (1-\delta_n^k)$

т.к. $x^{(0)i},..., x^{(n-1)i}$ и $x^{(n)j}$ независимы и $1-\delta_n^k = \bar{\delta}_n^k = \begin{cases} 1, k < n \\ 0, k = n \end{cases}$. Докажем ,что $\delta_j^i \cdot \delta_k^{s-1} \cdot (1-\delta_n^k) = \frac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}$

При $0 \le k \le n-1 < n, \ \ s = \overline{1,n}, \ i = \overline{1,m}$ $\quad x^{(k)j}(q,p) = q_{k+1}^j, \quad s = \overline{1,n} \ \Rightarrow \ 0 \le s-1 \le n-1$

$$\frac{\partial x^{(k)j}(q,p)}{\partial q_s^i}=\frac{\partial q_{k+1}^j}{\partial q_s^i}=\delta_j^i\cdot\delta_s^{k+1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)$$ При $k=n\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^i}=\frac{\partial x^{(n)i}}{\partial x^{(s-1)j}}=0=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^{k=n})$

т.к. $q,P_{n-1},x^{(n)}$ независимы и $1-\delta_n^k=\overline{\delta}_n^k=\begin{cases}1,k<n\\0,k=n\end{cases}$

Пункт 1 **теоремы 7,** равенство (24) доказано.

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\qquad(28)$$

По теореме 3 выполнены соотношения

$$1.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\qquad(29)$$

$$2.\ \frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i}\qquad(30)$$

где $\delta_\beta^\alpha=\begin{cases}1,\alpha=\beta\\0,\alpha\neq\beta\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$, $\delta_j^i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$, $\delta_k^{s-1}=\begin{cases}1,s=k+1\\0,s\neq k+1\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$

Подставляя (29),(30) в (28) и учитывая, что $\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=0$ *при* $0\le k\le n-1$, $s=\overline{1,n-1}$ $(X_n,P_{n-1}-\textit{независимы})$

и **п.1 теоремы 7** $\frac{\partial q_s^i(X_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)$, $k=\overline{0,n}$, $s=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\Big)=\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L(q,p)}{\partial q_s^i}\frac{\partial q_s^i}{\partial x^{(k)j}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}\frac{\partial p_s^i}{\partial x^{(k)j}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1}\cdot\delta_j^i\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\Big)\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_{s-1}^i(1-\delta_n^1)(1-\delta_s^1)\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial q_s^i}\cdot\delta_k^{s-1=k}\cdot\delta_j^{i=j}\cdot(1-\delta_n^k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\qquad(31)$$

По формуле(28) $\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_s^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_s^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^s)q_{s+1}^i+\delta_n^s\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_s^i}$, при $k=n$:

$$\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+(1-\delta_n^1)(1-\delta_n^{s=n})q_{n+1}^i+\delta_n^n\frac{\partial H}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial p_n^\alpha\partial p_n^i}=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}=\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\qquad(32)$$

Подставим (32) в последнее слагаемое в (31) : $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\Big)\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$

$$=\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\Big)\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}==\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}\Big)\qquad(33)$$

По теореме 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=\delta_j^\alpha\cdot\delta_n^k$

$\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j\\0\ ,\ i\neq j\end{cases}$ – *символ Кронекера* $\delta_n^k=\begin{cases}1,\ k=n\\0\ ,\ k\neq n\end{cases}$ – *символ Кронекера*

Поэтому (32) равно $\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}})=\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\cdot\delta_j^\alpha\cdot\delta_n^k=p_n^j\cdot\delta_n^k=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\cdot\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}$

По теореме 7 п.1

$\delta_j^i\cdot\delta_k^{s-1}\cdot(1-\delta_n^k)=\frac{\partial x^{(k)j}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_s^i}\Rightarrow\frac{\partial x^{(n)\alpha}(q,P_{n-1},x^{(n)})}{\partial q_{k+1}^j}=\delta_\alpha^j\cdot\delta_n^{k+1-1}\cdot(1-\delta_n^{k=n})=\delta_\alpha^j\cdot\delta_n^k\cdot(1-1)=0$

Следовательно $\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)=(1-\delta_n^k)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}=(1-\delta_n^k)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\cdot 0=0$ Значит,(31) равно

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{\alpha=1}^{m}p_n^\alpha\frac{\partial x^{(n)\alpha}}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(q,p)}{\partial p_n^i}\frac{\partial p_n^i}{\partial x^{(k)j}}=$$

$$=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k \quad (34)$$

Справа в (34) было использовано очевидное равенство $\delta_{k+1}^1=\delta_k^0$, так как по определению

Где $\delta_{k+1}^1=\begin{cases}1,\ 1=k+1\Leftrightarrow 0=k\\0\ ,\ 1\neq k+1\Leftrightarrow 0=k\end{cases}$ – *символ Кронекера* $\delta_k^0=\begin{cases}1,\ 0=k\\0\ ,\ 0\neq k\end{cases}$ – *символ Кронекера*

Равенство(25) доказано. Докажем, что

$$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k+1}^1)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$$

Сравним (34) с (27): $-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

При $k<n\Rightarrow\delta_n^k=0\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$

1)При $n>1\Rightarrow\delta_n^1=0\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_k^0)=-(1-\delta_n^{k<n})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

2)При $n=1,(k<n\Rightarrow k=0)\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_{k=0}^0)=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j}=-(1-\delta_n^{k=0})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{0+1}^j}+(1-\delta_{k=0}^0)\cdot p_k^j$

То есть при $k<n$ доказано $-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$

3) При $k=n\Rightarrow\delta_n^{k=n}=1\Rightarrow-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^{k=n})+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^{k=n})+p_n^j\cdot\delta_n^{k=n}=p_n^j$

$(k=n\geq 1\Rightarrow k>0\Rightarrow\delta_{k>0}^0=0)\Rightarrow-(1-\delta_n^{k=n})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j=(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j=(1-0)\cdot p_k^j=p_k^j$ Значит,

$-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}\cdot(1-\delta_n^k)+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)\cdot(1-\delta_n^k)+p_n^j\cdot\delta_n^k=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+p_k^j\cdot(1-\delta_n^1)(1-\delta_k^0)$ доказано.

Из **теоремы 7 п.2** следует основное утверждение **теоремы 7 п.3** (основное утверждение **теоремы 5 п.3**) :

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(n)j}}=-(1-\delta_n^{k=n})\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i}+(1-\delta_{k=n}^0)\cdot p_{k=n}^j=-(1-1)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{n+1}^i}+(1-0)\cdot p_{k=n}^j=p_{k=n}^j=p_n^j$$

Этот результат можно получить иначе.

$X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)})$, $X_n=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)},x^{(n)})=(X_{n-1},x_n)$,

$q=(q_1,q_2,...,q_n)$, $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$, $p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})$

Ранее была замена $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $q_s^i(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ и функцию $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$,

$L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},...,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$

$H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2},p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$.

$$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m}p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\quad H_1(X_n,P_{n-1})=H(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$$

$$L_1(X_n,P_{n-1})=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}x^{(l)j}p_l^j=-H_1(X_n,P_{n-1})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1}x^{(l)j}p_l^j+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}p_n^j$$

1) $0\le k\le n-1<n,\quad s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\qquad x^{(n)j}=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}\right)+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}x^{(n)j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}\frac{\partial p_n^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}$$

Так как $0\le k\le n-1<n,\quad 1\le l\le n-1\ \ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}=\begin{cases}0\ ,\ (k=0)\wedge(1\le l\le n-1)\\ \delta_k^l\,\delta_i^j\ ,\ 1\le k,l\le n-1\end{cases}=\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)$

$\delta_i^j=\begin{cases}1,\ j=i\\0\ ,\ j\ne i\end{cases}$ *−символ Кронекера,* $\delta_k^l=\begin{cases}1,\ l=k\\0\ ,\ l\ne k\end{cases}$ *−символ Кронекера* $\delta_k^0=\begin{cases}1,\ k=0\\0\ ,\ k\ne 0\end{cases}$ *− символ Кронекера*$\Rightarrow$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^{(l)j}}{\partial x^{(k)i}}p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\delta_k^l\,\delta_i^j(1-\delta_k^0)p_l^j+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_{l=k}^{j=i}+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=$$

$=-\dfrac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}$ Так как $P_{n-1}=(p_1,p_2,...,p_{n-1})$ и $X_{n-1}=(x^{(0)},x^{(1)},...,x^{(n-1)})$-независимы, то

$$\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=0\Rightarrow-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\frac{\partial p_l^j}{\partial x^{(k)i}}=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}x^{(l)j}\cdot 0=$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}+(1-\delta_k^0)p_k^i=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k)i}}(1-\delta_n^k)+(1-\delta_k^0)p_k^i\qquad ,\ 0\le k\le n-1$$

2) $k=n$ **По теореме 5 п.3** $\dfrac{\partial}{\partial x^{(n)i}}L(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n^i=$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-\delta_n^{k=n})+(1-\delta_{k=n}^0)p_{k=n}^i=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}(1-1)+(1-0)p_{k=n}^i=-\frac{\partial H_1}{\partial x^{(k=n)i}}\cdot 0+1\cdot p_n^i=p_n^i$$

Объединяем результаты, полученные в пунктах 1),2), получим :

$$\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)(1-\delta_n^k)\cdot(1-\delta_n^1)\cdot p_k^i+p_n^j\cdot\delta_n^k=-(1-\delta_n^k)\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_{k+1}^j}+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j\quad ,0\le k\le n$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8 $\quad\dfrac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=(1-\delta_n^k)\,\dot{p}_{k+1}^j+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$ в силу системы уравнений Гамильтона (35)

$$\begin{cases}\dfrac{dq_k^i(t)}{dt}=\dfrac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p_k^i}\\[2ex]\dfrac{dp_k^i(t)}{dt}=-\dfrac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q_k^i}\end{cases}\quad i=\overline{1,m},k=\overline{1,n}\ ,$$

$\delta_k^0=\begin{cases}1,\ 0=k\\0\ ,\ 0\ne k\end{cases}$ *− символ Кронеккера* $\qquad\delta_k^i=\begin{cases}1,\ i=k\\0\ ,\ i\ne k\end{cases}$ *−символ Кронеккера*

Доказательство. Так как $-\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q^i_{k+1}} = \dfrac{dp^i_{k+1}(t)}{dt} = \dot{p}^i_{k+1}$ **По теореме 7 п.2**

$\dfrac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}} = -(1-\delta^k_n)\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q^j_{k+1}} + (1-\delta^0_k)\cdot p^j_k = (1-\delta^k_n)\,\dot{p}^i_{k+1} + (1-\delta^0_k)\cdot p^j_k$ **Теорема 8** доказана.

Определение 2 Функцию $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$ **из теоремы 7** переменных $(X_n,P_{n-1})=(x^{(0)i},x^{(1)i},\dots,x^{(n-1)i},x^{(n)i},p^i_1,\dots p^i_{n-1})$

$$L_1(X_n,P_{n-1}) = L(q^i_1=x^{(0)i},q^i_2=x^{(1)i},\dots,q^i_n=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)})) = L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$$

$$q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn} \quad q^i_s(X_{n-1})=x^{(s-1)i},\ s=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}$$

$$L(q,p) = -H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p^j_k q^j_{k+1} + \sum_{j=1}^{m} p^j_n\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p^j_n}$$

($L(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ -функция Лагранжа, двойственная к функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$) назовем функцией Лагранжа, адаптированной двойственной к функции Гамильтона $H(q,p)$ или просто адаптированной к функции Гамильтона; преобразование $q(X_{n-1}):\Re^{mn}\to\Re^{mn}$ $q^i_s(X_{n-1})=x^{(s-1)i}$, $s=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ назовем адаптирующим преобразование q координат(не вырождено);преобразование $\mathrm{A}:(q(X_n,P_{n-1}),p(X_n,P_{n-1}))$:

$(q^i_k = q^i_k((X_n,P_{n-1}) = x^{(k-1)i}), p^i_1((X_n,P_{n-1}) = p^i_1,\dots,p^i_{n-1}((X_n,P_{n-1}) = p^i_{n-1}, p^i_n((X_n,P_{n-1}) = p^i_n(q=X_{n-1},P_{n-1},x^{(n)}))$

назовем адаптирующим преобразованием (q,p) координат.

Теорема 9 Адаптирующее преобразование $\mathrm{A}:\Re^{2\mathrm{mn}}\to\Re^{2mn}$ $A(X_n,P_{n-1})=(q(X_n,P_{n-1}),p(X_n,P_{n-1}))$
$q^i_k(X_n,P_{n-1})=x^{(k-1)i}$ $k=\overline{1,n},$ $p_{n-1}(X_n,P_{n-1})=p_{n-1}, p_n=p_n(X_{n-1},P_{n-1},x^{(n)}))$ не вырождено.

Доказательство. Матрица Якоби $\dfrac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1},P_{n-1},x_n)}$ имеет вид :

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1},P_{n-1},x_n)} = \begin{pmatrix} E_{m\bullet(2n-1)} & 0^T_{1\times m\bullet(2n-1)} \\ 0_{1\times m\bullet(2n-1)} & \dfrac{\partial p^i_n}{\partial x^{(n)j}} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^i_n \partial p^j_n}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

где $E_{m\bullet(2n-1)}$ -единичная матрица, $0_{1\times m\bullet(2n-1)}$ -0-вектор, $0^T_{1\times m\bullet(2n-1)}$ -транспонированный 0-вектор.

В правом нижнем углу матрицы использован основной результат работы **[22],стр. 150, теорема 6 :**

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^i_n\partial p^j_n}\right)^{-1}$ и так как $\det\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^i_n\partial p^j_n}\right)\neq 0 \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)i}\partial x^{(n)j}}\right) = \det^{-1}\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^i_n\partial p^j_n}\right)\neq 0$

$\det(\dfrac{\partial(q,p)}{\partial(X_{n-1},P_{n-1},x_n)}) = \det^{-1}\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^i_n\partial p^j_n}\right)\neq 0$,значит, переменные (X_n,P_{n-1}) -независимы **Теорема 9 доказана.**

Определение 3 Обратное к $\mathrm{A}:\Re^{2\mathrm{mn}}\to\Re^{2mn}$ $A(X_n,P_{n-1})=(q(X_n,P_{n-1}),p(X_n,P_{n-1}))$
$q^i_k(X_n,P_{n-1})=x^{(k-1)i}$ $k=\overline{1,n},$ $p_{n-1}(X_n,P_{n-1})=p_{n-1}, p_n=p_n(X_{n-1},P_{n-1},x^{(n)}))$ преобразование
$\mathrm{A}^{-1}:(q,p)\to(X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$ $\mathrm{A}^{-1}(q,p)=(x^{(k-1)i}(q,p)=q^i_k\ k=\overline{1,n}\ ;\ x^{(n)i}(q,p)=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p^i_n}\ ;\ p^i_l(q,p)=p^i_l\ l=\overline{1,n-1}\ )$
называется обратным адаптирующим преобразование координат(преобразование Лежандра)

Определение 4 Пусть $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$ -функция Гамильтона, $L_1(X_n,P_{n-1}):\Re^{2mn}\to\Re$ -адаптированная к ней функция Лагранжа. Система уравнений $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k_t(\dfrac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})=0$, $i=\overline{1,m}$ назовем системой уравнений Эйлера-Лагранжа, адаптированной к функции Гамильтона $H(q,p):\Re^{2mn}\to\Re$,где D^k_t - оператор k - кратного полного дифференцирования по переменной t

Теорема 10. 1) $H:\Re^{2mn}\to\Re$ - функция $2mn$ переменных $(q_{l2}^{j2}, p_{l1}^{j1})$ $j1=\overline{1,m},\ l1=\overline{1,n},\ \ j2=\overline{1,m},\ l2=\overline{1,n}$.

$L(q,p)=-H(q,p)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} p_k^j q_{k+1}^j+\sum_{j=1}^{m} p_n^j\cdot\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^j}$ -двойственная к $H:\Re^{2mn}\to\Re$ функция Лагранжа

2) $\det(\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p_k^i\partial p_k^i})\neq 0$, $i,j=\overline{1,m}$ окрестности $U(q_0,p_0)$ точки (q_0,p_0)

(**по теореме 4 п.2** $p_n=p_n(q_1,q_{2,\dots,}q_n,p_1,p_2,\dots,p_{n-1},x^{(n)}))=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))$

3) Пусть $L_1:\Re^{2mn}\to\Re$ -адаптированная функция Лагранжа переменных (X_n,P_{n-1}):

$L_1(X_n,P_{n-1})=L(q_1^i=x^{(0)i},q_2^i=x^{(1)i},\dots,q_n^i=x^{(n-1)i},P_{n-1},p_n=p_n(q,P_{n-1},x^{(n)}))=L(q(X_{n-1}),P_{n-1},p_n(q(X_{n-1}),P_{n-1},x^{(n)}))$

Тогда преобразование Лежандра(обратное адаптирующее преобразование координат)

$A^{-1}:(q,p)\to(X_n(q,p)\ ,\ P_{n-1}(q,p))$ $\quad A^{-1}(q,p)=(x^{(k-1)i}(q,p)=q_k^i\ \ k=\overline{1,n}\ ;\ \ x^{(n)i}(q,p)=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}\ ;\ \ p_l^i(q,p)=p_l^i\ \ l=\overline{1,n-1}\ )$

любого решения $(q(t),p(t))$ системы ОДУ 1-ого порядка Гамильтона

$$\begin{cases}\dfrac{dq_k^i(t)}{dt}=\dfrac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial p_k^i}\\[2mm] \dfrac{dp_k^i(t)}{dt}=-\dfrac{\partial H(q(t),p(t))}{\partial q_k^i}\end{cases}\quad i=\overline{1,m},k=\overline{1,n}\qquad (36)$$

$(X_n(t),P_{n-1}(t))=A^{-1}(\ (q(t),p(t))\ )=$

$=(x^{(k-1)i}(q(t),p(t))=q_k^i(t)\ \ k=\overline{1,n}\ \ ;\ \ x^{(n)i}(q(t),p(t))=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_n^i}(q(t),p(t))\ \ ;\ \ p_l^i(q(t),p(t))=p_l^i(t)\ \ l=\overline{1,n-1}\ \ )$

является решением адаптированной системы уравнений Эйлера-Лагранжа.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})=0\,,\ i=\overline{1,m}$$

Доказательство. По теореме 8 $\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)j}}=(1-\delta_n^k)\,\dot p_{k+1}^j+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j$, **по теореме 7 п.3** $\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(m)j}}=p_n^j$

$\delta_k^0=\begin{cases}1,\ 0=k\\ 0\ ,\ 0\neq k\end{cases}\ -$ *символ Кронекера*

При $0<1\le k\le n-1<n\Rightarrow\delta_n^k=0=\delta_k^0\ \Rightarrow 1-\delta_k^0=1$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})=(-1)^0\cdot\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(0)i}}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(k)i}})+(-1)^n D_t^n\left(\frac{\partial L_1(X_n,P_{n-1})}{\partial x^{(n)i}}\right)=$

$+(-1)^n D_t^n(p_n^i)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k((1-\delta_n^k)\,\dot p_{k+1}^j+(1-\delta_k^0)\cdot p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+$

$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(\dot p_{k+1}^j+p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(\dot p_{k+1}^j)+(-1)^k D_t^k(p_k^j))=$

$=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(\dot p_{k+1}^j)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^{k+1}(p_{k+1}^j)+$

$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+\sum_{l=2}^{n}(-1)^{l-1}D_t^l(p_l^j)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)+$

$(-1)\cdot\sum_{l=2}^{n}(-1)^l D_t^l(p_l^j)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)=\dot p_1^j+(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)-(-1)^n D_t^n\left(p_n^j\right)-\sum_{l=2}^{n-1}(-1)^l D_t^l(p_l^j)+$

$+\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)+(-1)^{k=1}D_t^{k=1}(p_{k=1}^j)=\dot p_1^j-\sum_{l=2}^{n-1}(-1)^l D_t^l(p_l^j)+\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k D_t^k(p_k^j)+(-1)^{k=1}D_t^{k=1}(p_{k=1}^j)=$

$-\dot p_1^j+(-1)^1 D_t^1(p_1^j)=\dot p_1^j-\dot p_1^j=0$

Теорема 10 доказана

HAMILTON INVERSE THEOREM
Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

The solution of a system 2mn ordinary differential Hamilton's equations of the first order are solutions of the system of the corresponding system of m differential equations of order n Euler-Lagrange dual for the Hamiltonian Lagrangian function and the corresponding transformation of variables.

Keywords: Hamilton function, variation problem, fiber space of velocities,, Euler-Lagrange equations, smooth manifolds, energy tensor, tensor of generalized momentum, non-degenerate function.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
5. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
6. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
7. Козлов А.А. О глобальном управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2006. – № 3. – С. 63–64.
8. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 117–123.
14. Вакуленко С.П. К вопросу о нелинейных волнах в стержнях / С.П. Вакуленко А.К. Волосова, Н.К. Волосова // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 3 (76). – С. 6–17.
15. Пастухов Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
16. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 78–100.
17. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 194–209.
18. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094. – Дата доступа: 15.06.2018.

19. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
20. Пастухов, Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
21. Пастухов, Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии 2 [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
22. Пастухов, Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.