www.esa-conference.ru

УДК 517.6: 517.958

Модифицированное разностное уравнение К. Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности

Волосова Наталья Константиновна, магистрант
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Волосов Константин Александрович, профессор, доктор физ.-мат. наук
Волосова Александра Константиновна, кандидат физ.-мат. наук
Российский Университет Транспорта (МИИТ)
Пастухов Дмитрий Феликсович, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Пастухов Юрий Феликсович, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Полоцкий государственный университет

Предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности и с минимальным 9 точечным шаблоном на неоднородной равномерной сетке. Для устойчивости формулы простой итерации использован принцип сжатых отображений. Решение тестового примера сравнено с численным решением, подтверждающим четвертый порядок погрешности для формул полученного алгоритма. Приведена программа.

Ключевые слова: *неоднородное уравнение Пуассона на прямоугольнике, неоднородно-краевая задача Дирихле, принцип сжатых отображений.*

Modernized iteracionnoe equation K.N. Volkova for equation of the Poisson on rectangle with 4 rather inaccuracy

Volosova N.K.,Volosov K. A., Volosova A. K., Pastuhov D. F., Pastuhov YU. F.

The Offered algorithm of the decision of the general lumpy marginal problem Dirihle for equation of the Poisson on rectangle with 4 rather inaccuracy and with minimum 9 point patterns on lumpy even net. Principle of the compressed images is used For stability of the formula iteration idle time. The Decision of the test example was compared to the numerical decision, confirming fourth order to inaccuracy for molded the got algorithm. The Broughted program.

Введение. Известно разностное уравнение Пуассона на 9 точечном шаблоне с погрешностью четвертого порядка на равномерной сетке К.Н. Волкова [1]. В данной работе впервые предложена разностная схема с 4 порядком погрешности для уравнения Пуассона на прямоугольнике на равномерной, но неоднородной сетке (с неравными шагами по осям x,y) с минимальным симметричным шаблоном (9 узлов). Полученный алгоритм численного решения уравнения Пуассона на прямоугольнике может применяться в кристаллографии, стеганографии[7,10],в задачах математической физики с трехмерным оператором Лапласа, например, в волновом уравнении[8,9].

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике для достаточно гладкого решения $u(x,y)$ как функции двух переменных:

$$\begin{cases}(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y),\ x\in(a,b),y\in(c,d)\\ u(a,y)=\mu_1(y),u(b,y)=\mu_2(y),\ y\in[c,d]\\ u(x,c)=\mu_3(x),u(x,d)=\mu_4(x),\ x\in[a,b]\end{cases}\quad(1)$$

В задаче(1) $f(x,y)$ - неоднородная правая часть уравнения Пуассона на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$ - неоднородные краевые условия, (x,y) - координаты точки.

В классической постановке задач математической физики необходимо требовать непрерывность граничных условий на 4 сторонах прямоугольника [2] и их равенство в 4 вершинах прямоугольника, например,

$$\mu_1(0)=\mu_3(0)$$

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1) на симметричном 9 точечном шаблоне

● ○ ●

○ ∗ ○

● ○ ●

Рис.1. **Классификация 9 узлов квадрата (прямоугольника) по расстоянию от центра и свойствам симметрии соответственно(1,4,4) узлов.**

Аппроксимируем разностный оператор Лапласа в центральном узле (m,n) линейной квадратурной формулой

$$\Delta u_{h_1,h_2} = C_1\left(u_{-h_1,-h_2} + u_{-h_1,h_2} + u_{h_1,-h_2} + u_{h_1,h_2}\right) + C_2\left(u_{-h_1,0} + u_{h_1,0}\right) + C_3\left(u_{0,-h_2} + u_{0,h_2}\right) + C_4 u_{0,0} \quad (1)$$

Теорема 1. На неоднородной равномерной сетке с 9 точечным симметричным шаблоном разностное уравнение Пуассона представимо в виде:

$$\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{-h_1,-h_2} + u_{-h_1,h_2} + u_{h_1,-h_2} + u_{h_1,h_2}\right) + \left(\frac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{-h_1,0} + u_{h_1,0}\right) + \left(\frac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{0,-h_2} + u_{0,h_2}\right) +$$

$$-\frac{5}{3}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2h_2^2}\right)u_{0,0} = f_{m,n} + \frac{h_1^2 f_{xx}}{12} + \frac{h_2^2 f_{yy}}{12} + O\left(h_1^4 + h_1^2h_2^2 + h_2^4\right)$$

Доказательство. Используем формулы разложения(6) [3, стр. 65], (2),(4) [4, стр. 155,166], в ряд Тейлора для суммы узловых значений на 9 точечном шаблоне по отдельности в каждой круглой скобке формулы(1)

$$u_{-h_1,-h_2} + u_{-h_1,h_2} + u_{h_1,-h_2} + u_{h_1,h_2} = 4u_{0,0} + 2\left(h_1^2u_{xx} + h_2^2u_{yy}\right) + \frac{1}{6}\left(h_1^4u_x^{(4)} + 6h_1^2h_2^2u^{(4)}_{\substack{(2)x\\(2)y}} + h_2^4u_y^{(4)}\right) +$$

$$+\frac{1}{180}\left(h_1^6u_x^{(6)} + 15\left(h_1^4h_2^2u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}} + h_1^2h_2^4u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}\right) + h_2^6u_y^{(6)}\right) + \frac{1}{10080}\left(h_1^8u_x^{(8)} + 28\left(h_1^6h_2^2u^{(8)}_{\substack{(6)x\\(2)y}} + h_1^2h_2^6u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(6)y}}\right) + 70h_1^4h_2^4u^{(8)}_{\substack{(4)x\\(4)y}} +$$

$$+h_2^8u_y^{(8)}\right) + O\left(\sum_{i=0}^{5} h_1^{2i}h_2^{10-2i}\right)$$

$$u_{-h_1,0} + u_{h_1,0} = 2u_{0,0} + h_1^2u_{xx} + \frac{h_1^4}{12}u_x^{(4)} + \frac{h_1^6}{360}u_x^{(6)} + \frac{h_1^8}{20160}u_x^{(8)} + O\left(h_1^{10}\right)$$

$$u_{0,-h_2} + u_{0,h_2} = 2u_{0,0} + h_2^2u_{yy} + \frac{h_2^4}{12}u_y^{(4)} + \frac{h_2^6}{360}u_y^{(6)} + \frac{h_2^8}{20160}u_y^{(8)} + O\left(h_2^{10}\right)$$

Где: для сокращения $u^{(8)}_{\substack{(4)x\\(4)y}}$ введено обозначение частной производной 8 порядка, четвертого порядка по координатам x,y соответственно. Подставляя последние три формулы разложения в ряд Тейлора в формулу(1) и, группируя слагаемые с одинаковой степенью $h_1^{2i}h_2^{2j}$, получим

$$\Delta u_{h_1,h_2} \equiv u_{xx} + u_{yy} = u_{0,0}\left(4C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4\right) + h_1^2u_{xx}\left(2C_1 + C_2\right) + h_2^2u_{yy}\left(2C_1 + C_3\right) + h_1^4u_x^{(4)}\left(\frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{12}\right) +$$

$$+h_2^4u_y^{(4)}\left(\frac{C_1}{6} + \frac{C_3}{12}\right) + h_1^2h_2^2u^{(4)}_{\substack{(2)x\\(2)y}}C_1 + h_1^6u_x^{(6)}\left(\frac{C_1}{180} + \frac{C_2}{360}\right) + h_2^6u_y^{(6)}\left(\frac{C_1}{180} + \frac{C_3}{360}\right) +$$

$$+\frac{15C_1}{180}\left(h_1^4h_2^2u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}} + h_1^2h_2^4u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}\right) + O\left(h_1^6 + h_1^4h_2^2 + h_1^2h_2^4 + h_2^6\right) \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что правая часть формулы(2) как и левая не содержит узлового значения $u_{0,0}$ в узле(m,n) тогда и только тогда если $4C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4 = 0$ (3)

Из формулы (2) следует равенство коэффициентов в её правой и левой частях при u_{xx}, u_{yy}, то есть получим

$$\begin{cases} 1 = h_1^2\left(2C_1 + C_2\right) \Leftrightarrow 2C_1 + C_2 = \dfrac{1}{h_1^2} \\ 1 = h_2^2\left(2C_1 + C_3\right) \Leftrightarrow 2C_1 + C_3 = \dfrac{1}{h_2^2} \end{cases} \quad (4)$$

В формуле (2) введем обозначения

$$\begin{cases}\dfrac{h_1^4}{6}\left(C_1+\dfrac{C_2}{2}\right)=a\\ \dfrac{h_2^4}{6}\left(C_1+\dfrac{C_3}{2}\right)=b\\ h_1^2h_2^2C_1=a+b\end{cases}\quad (5)$$

В системе условий(5) третье уравнение является следствием первых двух, так как в силу уравнения Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),\ f_{xx}=u_x^{(4)}+u^{(4)}_{(2)x(2)y},\ f_{yy}=u^{(4)}_{(2)x(2)y}+u_y^{(4)}$,

получим $Af_{xx}+Bf_{yy}=A\left(u_x^{(4)}+u^{(4)}_{(2)x(2)y}\right)+B\left(u^{(4)}_{(2)x(2)y}+u_y^{(4)}\right)=Au_x^{(4)}+u^{(4)}_{(2)x(2)y}(A+B)+Bu_y^{(4)}$.

То есть, чтобы перевести производные 4 порядка от решения в уравнении Пуассона во вторые производные от правой части ***достаточно*** *потребовать $A+B=(A+B)$ (третье уравнение(5)).*

Запишем условия (3),(4),(5) в одну систему уравнений(6)

$$\begin{cases}4C_1+2C_2+2C_3+C_4=0\\ 2C_1+C_2=\dfrac{1}{h_1^2}\\ 2C_1+C_3=\dfrac{1}{h_2^2}\\ \dfrac{h_1^4}{6}\left(C_1+\dfrac{C_2}{2}\right)=a\\ \dfrac{h_2^4}{6}\left(C_1+\dfrac{C_3}{2}\right)=b\\ h_1^2h_2^2C_1=a+b\end{cases}\quad (6)$$

Учитывая 4,5,6, уравнения системы(6),затем уравнения 2,3(6) получим

$$12h_1^2h_2^2C_1=h_1^4(2C_1+C_2)+h_2^4(2C_1+C_3)=h_1^2+h_2^2\Leftrightarrow C_1=\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\quad (7)$$

$$\begin{cases}C_2=\dfrac{1}{h_1^2}-2C_1=\dfrac{1}{h_1^2}-\left(\dfrac{h_1^2+h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)=\dfrac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}\\ C_3=\dfrac{1}{h_2^2}-2C_1=\dfrac{1}{h_2^2}-\left(\dfrac{h_1^2+h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)=\dfrac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\\ C_4=-4C_1-2(C_2+C_3)=-\dfrac{h_1^2+h_2^2}{3h_1^2h_2^2}-2\left(\dfrac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}+\dfrac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)=-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2h_2^2}\right)\end{cases}\quad (8)$$

$$h_1^4\left(\frac{C_1}{6}+\frac{C_2}{12}\right)=\frac{h_1^2(h_1^2+h_2^2)}{72h_2^2}+\frac{h_1^2(5h_2^2-h_1^2)}{72h_2^2}=\frac{h_1^2}{12},\ h_2^4\left(\frac{C_1}{6}+\frac{C_3}{12}\right)=\frac{h_2^2(h_1^2+h_2^2)}{72h_1^2}+\frac{h_2^2(5h_1^2-h_2^2)}{72h_1^2}=\frac{h_2^2}{12}$$

В итоге уравнение(2) перепишем в виде$\left(u_{xx}+u_{yy}=f(x_m,y_n)\right)$

$$\Delta u_{h_1,h_2}\equiv u_{xx}+u_{yy}+h_1^4u_x^{(4)}\left(\frac{C_1}{6}+\frac{C_2}{12}\right)+h_2^4u_y^{(4)}\left(\frac{C_1}{6}+\frac{C_3}{12}\right)+h_1^2h_2^2u^{(4)}_{(2)x(2)y}C_1+O\left(h_1^4+h_1^2h_2^2+h_2^4\right)=$$

$=f_{m,n}+\dfrac{h_1^2f_{xx}}{12}+\dfrac{h_2^2f_{yy}}{12}+O\left(h_1^4+h_1^2h_2^2+h_2^4\right)$, возвращаясь к формуле(1), получим

$$C_1\left(u_{-h_1,-h_2}+u_{-h_1,h_2}+u_{h_1,-h_2}+u_{h_1,h_2}\right)+C_2\left(u_{-h_1,0}+u_{h_1,0}\right)+C_3\left(u_{0,-h_2}+u_{0,h_2}\right)+C_4u_{0,0}=$$

$$=\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{-h_1,-h_2}+u_{-h_1,h_2}+u_{h_1,-h_2}+u_{h_1,h_2}\right)+\left(\frac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{-h_1,0}+u_{h_1,0}\right)+\left(\frac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u_{0,-h_2}+u_{0,h_2}\right)-$$

$$-\frac{5}{3}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2h_2^2}\right)u_{0,0}=f_{m,n}+\frac{h_1^2 f_{xx}}{12}+\frac{h_2^2 f_{yy}}{12}+O\left(h_1^4+h_1^2h_2^2+h_2^4\right) \quad (9)$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. На неоднородной равномерной сетке с 9 точечным симметричным шаблоном невозможно улучшить невязку разностного уравнения Пуассона выше четвертого алгебраического[6] порядка $O\left(h^4\right)$.

Доказательство проведем от противного. Рассмотрим слагаемые в формуле(2) с шестым порядком погрешности, и ***достаточные условия*** для того, чтобы производные 6 порядка от решения выразить через производные 4 порядка от правой части уравнения Лапласа (производные 4 порядка от правой части вычисляются аналитически, то есть точно). Запишем слагаемые

$$h_1^6u_x^{(6)}\left(\frac{C_1}{180}+\frac{C_2}{360}\right)+h_2^6u_y^{(6)}\left(\frac{C_1}{180}+\frac{C_3}{360}\right)+\frac{15C_1}{180}\left(h_1^4h_2^2u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}}+h_1^2h_2^4u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}\right)$$

Так как

$$cf_x^{(4)}+df^{(4)}_{\substack{(2)x\\(2)y}}+ef_y^{(4)}=c\left(u_x^{(6)}+u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}}\right)+d\left(u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}}+u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}\right)+e\left(u_y^{(6)}+u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}\right)=cu_x^{(6)}+u^{(6)}_{\substack{(4)x\\(2)y}}(c+d)+$$

$$+u^{(6)}_{\substack{(2)x\\(4)y}}(d+e)+eu_y^{(6)}$$

Из сравнения последних двух формул видно, с одной стороны, что

$$d=(c+d)-c=\frac{15C_1}{180}h_1^4h_2^2-h_1^6\left(\frac{C_1}{180}+\frac{C_2}{360}\right)=\frac{h_1^4h_2^2}{12}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\right)-\frac{h_1^6}{360h_1^2}=h_1^4\left(\frac{1}{144}-\frac{1}{360}\right)+\frac{h_1^2h_2^2}{144}$$

С другой стороны,

$$d=(e+d)-e=\frac{15C_1}{180}h_1^2h_2^4-h_2^6\left(\frac{C_1}{180}+\frac{C_3}{360}\right)=\frac{h_1^2h_2^4}{12}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\right)-\frac{h_2^6}{360h_2^2}=h_2^4\left(\frac{1}{144}-\frac{1}{360}\right)+\frac{h_1^2h_2^2}{144}$$

$$d=h_1^4\left(\frac{1}{144}-\frac{1}{360}\right)+\frac{h_1^2h_2^2}{144}=d=h_2^4\left(\frac{1}{144}-\frac{1}{360}\right)+\frac{h_1^2h_2^2}{144}\Leftrightarrow h_1=h_2$$

Доказано, что аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике с 9 точечным симметричным шаблоном с 6 порядком погрешности возможна только на однородной равномерной сетке. Но невозможна на неоднородной сетке, если шаги сетки неравные $h_1\neq h_2$. **Теорема 2** доказана.

Замечание 1. При равных шагах сетки $h_1=h_2$, как частный случай получим формулу Волкова К.Н.[1, стр.137]:

$$\left(\frac{1}{6h^2}\right)\left(u_{m-1,n-1}+u_{m-1,n+1}+u_{m+1,n-1}+u_{m+1,n+1}\right)+\left(\frac{2}{3h^2}\right)\left(u_{m-1,n}+u_{m+1,n}+u_{m,n-1}+u_{m,n+1}\right)-$$

$$-\frac{10}{3h^2}u_{0,0}=f_{m,n}+\frac{h^2\left(f_{xx}+f_{yy}\right)}{12}+O\left(h^4\right) \quad (10)$$

Из формулы(9) выразим центральное значение $u_{0,0}\equiv u_{m.n}$, присвоим ему номер итерации (k+1), а всем остальным узловым значениям итерацию с индексом k:

$$u_{m,n}^{k+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)\left(\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}\right)\left(u^k{}_{m-1,n-1}+u^k{}_{m-1,n+1}+u^k{}_{m+1,n-1}+u^k{}_{m+1,n+1}\right)+\left(\frac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u^k{}_{m-1,n}+u^k{}_{m+1,n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}\right)\left(u^k{}_{m,n-1}+u^k{}_{m,n+1}\right)-\left(f_{m,n}+\frac{h_1^2 f_{xx}}{12}+\frac{h_2^2 f_{yy}}{12}+O\left(h_1^4+h_1^2h_2^2+h_2^4\right)\right)\right)=\frac{1}{20}\left(u^k{}_{m-1,n-1}+u^k{}_{m-1,n+1}+u^k{}_{m+1,n-1}+u^k{}_{m+1,n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{10}\left(\frac{5h_2^2-h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\right)\left(u^k{}_{m-1,n}+u^k{}_{m+1,n}\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{5h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)\left(u^k{}_{m,n-1}+u^k{}_{m,n+1}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)f_{m,n}-$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$-\frac{1}{20}\left(\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right)\left(h_1^2 f_{xx}+h_2^2 f_{yy}\right)+O\left(h_1^6+h_1^4h_2^2+h_1^2h_2^4+h_2^6\right) \quad (11)$$

Формулу(9) аппроксимации уравнения Пуассона на неоднородной сетке и явную формулу простой итерации (11) мы назвали ***модифицированными формулами Волкова К.Н.***

В формуле простой итерации(11) верхний индекс k - номер итерации. В формуле(11) значения функции f(x,y) и ее частные производные вычисляются в узле с индексами (m,n). Формулу (11) можно записать в виде

$$u_{mn}^{k+1}=G\left(u_{mn}^k, f_{mn}\right)+O\left(h^6\right), h=\max\{h_1,h_2\} k=0,1,2,..., m=\overline{1,n_1-1}, n=\overline{1,n_2-1} \quad (12)$$

Где функция $G\left(u_{mn}^k, f_{mn}\right)$ совпадает с правой частью формулы(11). По аналогии с (12) рассмотрим итерационную последовательность(13) у которой сжимающий коэффициент $0<q<1$, (13) можно получить из(12), если в правой части (12) провести замену $u_{mn}^k \to qu_{mn}^k$

$$u_{mn}^{k+1}=G\left(qu_{mn}^k, f_{mn}\right)+O\left(h^6\right), k=0,1,2,..., m=\overline{1,n_1-1}, n=\overline{1,n_2-1} \quad (13)$$

Введем функцию нормы в пространстве сеточных функций $u_{m,n}\in R^{(n_1+1)}\times R^{\cdot(n_2+1)}$, $\delta^k=\left\|u^{k\ num}-u^{\ exact}\right\|_C^{n_1,n_2}=\max\limits_{\substack{0\le m\le n_1\\ 0\le n\le n_2}}\left|u_{m,n}^{k\ num}-(u)_{m,n}^{exact}\right|, k=0,1,2,...$, совпадающей с метрической функцией в пространстве $u_{mn}^k\in R^{(n_1+1)}\times R^{\cdot(n_2+1)}$ определяемой формулой $\rho\left(u^{num},u^{exact}\right)=\left\|u^{num}-u^{exact}\right\|$(Колмогоров А.Н., С.В. Фомин) [5,стр.139]. Где $u_{m,n}^{k\ num}$, $\left(u^{exact}\right)_{m,n}$ обозначают соответственно численное решение задачи(14) в узле(m,n) на итерационном шаге(k) и след[6,стр.102] точного решения задачи(1) на узел сетки (m,n).

Описание численного алгоритма.

Введем на прямоугольнике для задачи (1) неоднородную сетку с равномерным шагом

$$\overline{\Omega}=[a,b]\times[c,d], \omega_{n_1+1,n_2+1}=\left\{x_m=a+h_1 m, m=\overline{0,n_1}, y_n=c+h_2 n, n=\overline{0,n_2}\right\}$$

$h_1=\dfrac{b-a}{n_1}, h_2=\dfrac{d-c}{n_2}$. Для сеточной функции u_{mn}^{k+1} запишем систему разностных уравнений соответствующей задаче в частных производных (1)

$$\begin{cases} u_{m,n}^{k+1}=G\left(qu_{m,n}^k, f_{m,n}\right)+O\left(h^6\right), h=\max\{h_1,h_2\}, k=0,1,2,..., m=\overline{1,n_1-1}, n=\overline{1,n_2-1},\\ u_{0,n}^{k+1}=\mu_{1,n}, u_{n_1,n}^{k+1}=\mu_{2,n}, n=\overline{0,n_2}, k=0,1,2...\\ u_{m,0}^{s+1}=\mu_{3,m}, u_{m,n_2}^{s+1}=\mu_{4,m}, m=\overline{0,n_1}, k=0,1,2...\end{cases} \quad (14)$$

Теорема 3. (об устойчивости итерационных формул (13,14)). Оператор $G\left(qu_{mn}^k, f_{mn}\right)$ для итерационной последовательности (13) является сжимающим

в метрическом пространстве $u_{mn}^k\in R^{(n_1+1)}\times R^{\cdot(n_2+1)}$,то есть существует единственное предельное численное решение, совпадающее с аналитическим:

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ q\to 1-0\\ h_1\to 0\\ h_2\to 0}} u_{mn}^k=\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left(u^{exact}\right)_{mn}, \forall m=\overline{0,n_1}, n=\overline{0,n_2}, \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left(u^{exact}\right)_{mn}=G\left(\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left(u^{exact}\right)_{mn}, f_{mn}\right).$$

Доказательство. Покажем, что оператор $G\left(qu_{mn}^k, f_{mn}\right)$ в итерационной последовательности (13) является сжимающим отображением:

обозначим $\delta^k{}_{m,n}=y^k{}_{m,n}-x^k{}_{m,n}, \forall m=\overline{0,n_1}, n=\overline{0,n_2}$

$$\forall x_{mn}^{k+1}, y_{mn}^{k+1}\in R^{(n_1+1)}\times R^{\cdot(n_2+1)}: \rho\left(x_{mn}^{k+1}, y_{mn}^{k+1}\right)=\rho\left(G\left(qx_{mn}^k, f_{mn}\right), G\left(qy_{mn}^k, f_{mn}\right)\right)\Leftrightarrow\left|x_{m,n}^{k+1}-y_{m,n}^{k+1}\right|\overset{(13)}{=}$$

$$=\left|G\left(qx_{mn}^k, f_{mn}\right)-G\left(qy_{mn}^k, f_{mn}\right)\right|\overset{(11)}{\le}\left(\frac{q}{20}\left|\delta^k{}_{m-1,n-1}+\delta^k{}_{m+1,n-1}+\delta^k{}_{m-1,n+1}+\delta^k{}_{m+1,n+1}\right|+\right.$$

$$+\frac{q}{10}\left|\frac{5h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\right|\left|\delta^k{}_{m-1,n}+\delta^s{}_{m+1,n}\right|+\frac{q}{10}\left|\frac{5h_2^2-h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\right|\left|\delta^k{}_{m,n-1}+\delta^s{}_{m,n+1}\right|\le\left(\frac{4q}{20}+\frac{2q}{10}\left(\frac{5h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}+\frac{5h_2^2-h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\right)\right)\max_{\substack{0\le n\le n_1\\0\le m\le n_2\\0\le k\le n_3}}\left|\delta^s{}_{m,n,k}\right|=$$

$$\left(\frac{q}{5}+\frac{q}{5}\left(\frac{4(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}\right)\right)\max_{\substack{0\le n\le n_1\\0\le m\le n_2}}\left|\delta^k{}_{m,n}\right|=q\max_{\substack{0\le n\le n_1\\0\le m\le n_2}}\left|\delta^k{}_{m,n}\right|=q\rho\left(x_{mn}^k,y_{mn}^k\right)<\rho\left(x_{mn}^k,y_{mn}^k\right)\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow\max_{\substack{0\le n\le n_1\\0\le m\le n_2}}\left|\delta^{k+1}{}_{m,n}\right|\le q\max_{\substack{0\le n\le n_1\\0\le m\le n_2}}\left|\delta^k{}_{m,n}\right|.\ \text{То есть}\ \rho\left(x_{mn}^{k+1},y_{mn}^{k+1}\right)\le q\rho\left(x_{mn}^k,y_{mn}^k\right)\ (15)$$

По А.Н. Колмогорову, определение 1[5,стр.74] оператор $G\left(qu_{mn}^k,f_{mn}\right)$в последовательности(13) является сжимающим и существует единственный предел, обозначим его u_{mn}^* (теорема о неподвижной точке [5,стр.75])

$$\lim_{k\to\infty}u_{mn}^k\equiv u_{mn}^*:u_{mn}^*=G\left(qu_{mn}^*,f_{mn}\right)+O\left(h^6\right)\ (16)$$

Но точное решение удовлетворяет формуле(12) $\lim\limits_{h\to0}\left(u^{exact}\right)_{mn}=G\left(\lim\limits_{h\to0}\left(u^{exact}\right)_{mn},f_{mn}\right)$, оператор $G\left(qu_{mn}^k,f_{mn}\right)$ в (13) является линейным и непрерывным по u_{mn}^k и по q. Перейдем к двойному пределу в(16), используя непрерывность $G\left(qu_{mn}^k,f_{mn}\right)$

$$\lim_{\substack{q\to1-0\\h\to0}}u_{mn}^*=\lim_{\substack{q\to1-0\\h\to0}}G\left(qu_{mn}^*,f_{mn}\right)=G\left(\lim_{\substack{q\to1-0\\h\to0}}u_{mn}^*,f_{mn}\right)\Leftrightarrow\lim_{\substack{q\to1-0\\h\to0}}u_{mn}^*=\lim_{h\to0}\left(u^{exact}\right)_{mn}$$

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим тестовый пример:

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=\sin(x),\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\\u(0,y)=u(\pi,y)=\sin(y),\quad 0\le y\le\pi.\\u(x,0)=u(x,\pi)=\sin(x),\quad 0\le x\le\pi\end{cases}\qquad(17)$$

С точным решением

$$u(x,y)=\sin(\mathrm{y})(\mathrm{sh(x)(1-ch(pi))/sh(pi)+ch(x)})+\sin(\mathrm{x})(\mathrm{sh(y)(1-ch(pi))/sh(pi)+ch(y)})+$$
$$+\sin(\mathrm{x})(\mathrm{sh(y)(1-ch(pi))/sh(pi)+ch(y)-1})\qquad(18)$$

Программа на языке Fortran для функций с двойной точностью, с использованием алгоритма(14) и сжатием q=0,9999999999999990 приведена ниже и дает значение нормы Чебышева для разных шагов сетки

h1= 0.10471975511 h2= 7.85398163397E-002, =25000,n1=30,n2=40

$$\Delta u_{h_1h_2}=\max_{\substack{0\le m\le n_1\\0\le n\le n_2}}\left|u_{m,n}^{k\ num}-(u)_{m,n}^{exact}\right|=2.02955184E-007.$$

А для параметров сетки

h1= 5.2359877559E-002 h2= 3.92699081698E-002, m=25000,n1=60,n2=80

дает значение нормы Чебышева

$$\Delta u_{\frac{h_1}{2}\frac{h_2}{2}}=\max_{\substack{0\le m\le 2n_1\\0\le n\le 2n_2}}\left|u_{m,n}^{k\ num}-(u)_{m,n}^{exact}\right|=1.268928E-008.$$

То есть алгебраический порядок погрешности равен 4.

$$\frac{\Delta u_{h_1h_2}}{\Delta u_{\frac{h_1}{2}\frac{h_2}{2}}}=\frac{2.029551846027822E-007}{1.268928928599422E-008}=15{,}994\approx2^4,\ p=4$$

```
module stolb;integer(8), parameter::m=25000,n1=30,n2=40; end module

program puasson;use stolb;integer(8):: i,j,k

real(8)::u(0:m+1,0:n1+1,0:n2+1),delta(0:n1+1,0:n2+1),mm,res(0:n1+1,0:n2+1)

real(8)::a1,a2,b1,b2,f,x2,y2,a,b,c,d,x1,y1,x,y,z,h1,h2,q
```

```
real(8)::pi,cch,ssh,c0,c1,c2,c3,k1,k2,k3,k4
cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0
a1(y)=dsin(y);a2(y)=dsin(y);b1(x)=dsin(x);b2(x)=dsin(x);f(x,y)=dsin(x)
pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=pi;c=0d0;d=pi;min2=1d3;mm=-1d3
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2);do i=0,n1;do j=0,n2
x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j);c1= (cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))*dsin(y)
c2=dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));c3=dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
res(i,j)=c1+c2+c3;enddo;enddo;k1=5d-2;k2=(1d-1)*(5d0*h2*h2-h1*h1)/(h1*h1+h2*h2)
k3=(1d-1)*(5d0*h1*h1-h2*h2)/(h1*h1+h2*h2);k4=(5d-2)*(h1*h1*h2*h2)/(h1*h1+h2*h2)
print*,"h1=",h1,"h2=",h2;q=1d0-1d-15;do k=0,m;do i=0,n1;x=a+h1*dfloat(i)
u(k,i,0)=b1(x);u(k,i,n2)=b2(x);enddo;enddo;do k=0,m;do j=0,n2;y=c+h2*dfloat(j)
u(k,0,j)=a1(y);u(k,n1,j)=a2(y);enddo;enddo; do j=0,n2; do i=0,n1; x=a+h1*dfloat(i)
 y=c+h2*dfloat(j);u(0,i,j)=(b1(x)+b2(x)+a1(y)+a2(y))/4d0; enddo;enddo;do k=0, m-1
 do  i=1,n1-1;do  j=1,n2-1;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j);y2=y+h2;y1=y-h2;x2=x+h1;x1=x-h1;c1=  k2*(u(k,i-1,j)+u(k,i+1,j))+k3*(u(k,i,j-1)+u(k,i,j+1))
c2=k1* (u(k,i+1,j+1)+u(k,i+1,j-1)+u(k,i-1,j-1)+u(k,i-1,j+1))
c3=k4*(f(x1,y)+f(x2,y)+f(x,y1)+f(x,y2)+8d0*f(x,y));u(k+1,i,j)=q*(c1+c2)-c3;enddo;enddo;enddo;do j=0,n2,1;do i=0,n1,1;x=a+h1*dfloat(i);y=c+h2*dfloat(j);
delta(i,j)= dabs(u(m,i,j)- res(i,j));if( delta(i,j)>mm)then;mm=delta(i,j);endif
if(mod(i,10)==1.and.mod(j,10)==1)then;print*,x,y,u(m,i,j),res(i,j);endif
enddo;enddo;print*,"norma=",mm;pause; end program puasson
```

Литература:

1) Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. - М.: Издательство: Физматлит,2013 - 709 с.
2) Пикулин, В.П. Практический курс по уравнениям математической физики: учеб. пособие /В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.: Наука,1995. – 224 с.
3) Пастухов, Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
4) Пастухов, Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.
5) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа./ А.Н. Колмогоров, Фомин С.В. – М.: Наука,1976,543 с.
6) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях./ Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. – М.: БИНОМ,2010,240 с.
7) Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR кода в стеганографии/ Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. //Мир транспорта. – 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
8) Пастухов, Д.Ф., Пастухов, Ю.Ф., Волосова, Н.К. Оптимальный порядок аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018 . - №4. С.167 - 186.
9) Пастухов, Д.Ф., Пастухов, Ю.Ф., Волосова, Н.К. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова//Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018 . - №12. С.60 - 74.

10)Эффективная итерационная формула для краевой задачи уравнения Пуассона со сложно распределенными источниками / Н.К. Волосова [и др.]//Герценовские чтения: сб.LXXII Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, СПб., 9–13 апр. 2019 г. / Российский. пед. ун-т им. А.И. Герцена. – СПб., 2019. – С. 234–238.