

УДК 528.063

**О КВАЗИРАВНОТОЧНЫХ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЯХ,  
ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ УРАВНИВАНИИ РАВНОТОЧНЫХ ПОСТРОЕНИЙ  
МЕТОДОМ  $L_p$ -ОЦЕНОК**

*д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ,  
Н.О. КУПРИЕНКО, Д.В. УСОВ  
(Полоцкий государственный университет)*

*В практике уравнивательных вычислений используется понятие равноточных измерений, соответствующее случаю, когда все измерения выполнены с неодинаковой точностью. В 2008 году было введено новое понятие – равноточные сети, удовлетворяющие следующим условиям: сеть должна уравниваться как нуль-свободное (без исходных пунктов) геодезическое построение; сеть должна быть замкнутой; сеть содержит замыкающие, расположенные симметрично; измерения в сети должны быть равноточными. В статье показано, что четвертым условием можно частично пренебречь при выполнении уравнивательных вычислений по алгоритму  $L_p$ -оценок. В результате веса измерений будут близки между собой, а после уравнивания будут получены сети с похожими результатами оценки точности, такие сети называют квазиравноточными (близкие по точности). Область применения указанных геодезических сетей разнообразна: при геодезических работах во время строительства прецизионных сооружений, при анализе осадок реперов высотных зданий, кольцевых ускорителей, башенных сооружений и др.*

**Введение.** Важным этапом выполнения геодезических работ является наблюдение за деформациями инженерных объектов в процессе их строительства и эксплуатации. В строительном производстве для определения осадок сооружений используются инженерно-геодезические сети различных конфигураций. Успешному решению поставленных задач будет способствовать внедрение новых методик построения геодезических сетей и современных математических методов их анализа и средств вычисления.

В 2008 году под руководством профессора В.И. Мицкевича проводились исследования по проектированию нивелирных сетей, используемых на инженерных сооружениях при изучении осадок реперов. В результате исследований были получены нивелирные сети, в которых после математической обработки результатов измерений оценка точности определения пунктов оказалась одинаковой.

**Основная часть.** Приведем пример равноточной сети (рис. 1) с тем, чтобы в дальнейшем выполнить исследования этих построений.

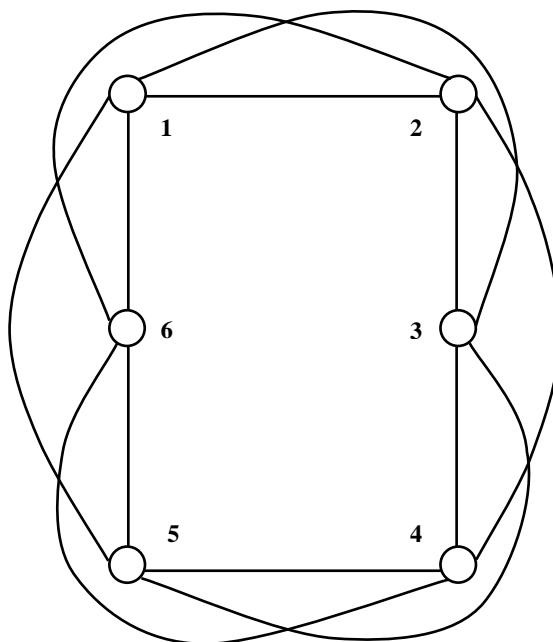


Рис. 1. Замкнутый равноточный нивелирный ход  
(число реперов  $K = 6$ , измерений  $N = 12$ )

Для сети, показанной на рисунке 1, матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок будет иметь вид:

$$A_{12 \times 6} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Примем, что измерения равноточны, т.е.  $P = E$ .

На рисунке 1 сеть не содержит исходных пунктов, и обычными методами уравнивания обрабатывать такие сети нельзя. В этих случаях обычно используют псевдообратные матрицы  $A^+$ , так что матрица обратных весов может быть получена по формуле:

$$Q = A^+ (A^+)^T, \quad (1)$$

где  $T$  – знак транспонирования матрицы.

Матрица  $Q$  для нашего примера будет такой:

$$Q_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 \\ -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & -0,0694 & -0,0278 & -0,0278 & 0,1806 \end{pmatrix}.$$

Видно, что значение диагональных элементов одинаковы и равны 0,18. Извлекая корень из диагонального элемента и умножая на  $\mu$ , получим одинаковые ошибки положения пунктов для всей сети.

Исследования показали, что условия построения равноточных нивелирных сетей будут следующие (в порядке убывания их значимости):

- 1) сеть должна уравниваться как нуль-свободное (без исходных пунктов) геодезическое построение;
- 2) сеть должна быть замкнутой;
- 3) сеть содержит замыкающие линии, расположенные симметрично [2];
- 4) измерения в сети должны быть равноточными.

В последнем случае вес должен вычисляться по формуле:

$$P = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – стандарт измеренного превышения, который на весь объект принимается неизменным. Отсюда следует, что сеть должна уравниваться по методу наименьших квадратов.

Покажем, что четвертое условие может не выполняться при уравнивании нивелирной сети методом  $L_p$ -оценок, в котором вес измерений вычисляется по формуле:

$$C_i = P_n \text{diag} |V_i|^{n-2}, \quad (3)$$

где  $P_n = 1/\sigma_i^n$ ;  $n$  – показатель степени (при  $n = 1$  имеем метод наименьших модулей, а при  $n = 3$  – метод наименьших кубов).

Поскольку  $V_i$  не одинаковое, то разными будут веса  $C_i$  и, следовательно, измерения будут неравноточными.

Приведем **пример**. Задавая по датчику псевдослучайных чисел поправки в измерения для примера, показанного на рисунке 1, и уравнивая по программе нашу равноточную сеть, получим ошибки положения пунктов, показанные в таблице 1.

Таблица 1

Результаты оценки точности нивелирной сети в различных условиях

n	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	1,0	1,5	1,9	2,1	2,5	3,0
№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,000	0,712	0,519	0,469	0,547	1,993	0,558	0,548	0,548	0,556	0,961
2	0,769	0,476	0,702	0,535	0,547	1,400	0,548	0,547	0,547	0,548	1,208
3	0,769	0,476	0,595	0,535	0,547	1,146	0,579	0,549	0,549	0,592	1,137
4	0,843	0,483	0,590	0,469	0,547	1,461	0,564	0,548	0,548	0,579	1,060
5	0,769	0,472	0,595	0,535	0,547	1,217	0,548	0,547	0,547	0,548	1,035
6	0,769	0,472	0,702	0,535	0,547	1,368	0,560	0,548	0,548	0,559	0,876

В таблице 1 приведены следующие расчеты:

- в колонке 1 представлены результаты оценки точности пунктов (в мм), считая пункт с номером 1 исходным;

- в колонке 2 указаны величины  $M_H$  (оценка точности пунктов в мм) для разомкнутой нивелирной сети, у которой удалены связи 6-1, 5-1 (разомкнутая нивелирная сеть);

- в колонках 3, 4 приведены  $M_H$  для несимметричных нивелирных сетей (в первом случае удалена связь 6-2, во втором – добавлена связь 1-4);

- в колонке 5 приведена оценка точности нивелирной сети, для которой удовлетворены все условия (от 1 до 4) указанные выше (равноточная нивелирная сеть);

- в колонках 6 – 11 приведена оценка точности нивелирной сети методом  $L_P$ -оценок при различных  $n$ .

Из таблицы 1 видно, что условием 4 (измерения в сети должны быть равноточными) можно пренебречь для метода  $L_P$ -оценок со степенями  $n = 1,5 \dots 2,5$ . Такие сети назовем «квазиравноточными».

Заметим, что и равноточные и квазиравноточные сети имеют не только одинаковую, но и наименьшую ошибку  $M_H$  в любом месте нивелирной сети.

Проведем дополнительные исследования для выявления особенностей использования равноточных нивелирных сетей (табл. 2).

Таблица 2

Результаты вычислений для трех нивелирных сетей

n	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	2,0	1,0	1,0
№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,547	0,535	1,993	1,931	0,584	0,560	1,559	1,564	0,384	0,373	1,115	0,976
2	0,555	0,612	1,814	1,959	0,616	0,600	2,206	2,343	0,433	0,427	1,135	1,869
3	0,265	0,284	0,612	0,657	0,338	0,318	1,472	1,330	0,366	0,357	0,996	1,332
4	0,614	0,589	1,911	1,478	0,578	0,604	1,663	1,470	0,417	0,409	1,235	1,110
5	0,498	0,556	1,292	1,465	0,639	0,603	1,951	1,912	0,402	0,392	1,383	1,300
6	0,386	0,368	0,859	0,836	0,408	0,385	1,646	1,528	0,316	0,316	1,218	1,487
7	0,528	0,601	1,444	1,676	0,647	0,610	2,639	2,607	0,377	0,390	1,310	0,985
8	0,425	0,394	1,017	0,958	0,402	0,379	0,812	0,767	0,306	0,307	0,678	0,621
9	0,475	0,670	1,046	1,807	0,611	0,638	1,656	1,897	0,481	0,467	1,705	1,752
10	0,510	0,480	1,716	1,578	0,544	0,546	1,627	1,760	0,394	0,383	1,393	1,012
Ср.	0,4803	0,5089	1,3704	1,4345	0,5367	0,5243	1,7231	1,7178	0,3876	0,3821	1,2168	1,2444

В таблице 2 приведены следующие расчеты:

- в колонках 1-4 приведены расчеты для нивелирной сети, показанной на рисунке 1;

- в колонках 5-8 даны вычисления по обработке нивелирной сети, показанной на рисунке 2;

- в колонках 9-12 приведены результаты вычислений для нивелирной сети, показанной на рисунке 2, ( $k = 8$ ) при числе измерений  $N = 24$  (16 измерений из рисунка 2 и 8 измерений через два пункта на третий со связями: 1-4, 2-5, 3-6, 4-7, 5-8, 6-1, 7-2, 8-3);

- каждая строка из десяти означает номер варианта генерации ошибок измерений, вносимых в каждое измерение по датчику псевдослучайных чисел;
- числа в таблице включают в себя  $M_{Hmax}$  – ошибка положения пункта в наиболее слабом месте, за исключением колонок 1, 5, 9, в которых  $M_H$  одинаковые, так как сеть равноточная;
- в колонках 2, 6, 10 приведены  $M_{Hmax}$  для неравноточной сети в результате включения дополнительных связей 1-4, 1-4 и 1-5 соответственно (несимметричные нивелирные сети). Отсюда видно, что по сравнению с колонками 1, 5, 9 в колонках 2, 6, 10  $M_{Hmax}$ , как правило, меньше, но среднее арифметическое по колонкам оказалось большим только в колонке 2 по сравнению с 1;
- в колонках 3, 7, 11 приведены  $M_{Hmax}$  для  $n = 1$ , для трех нивелирных сетей, указанных выше, а в колонках 4, 8, 12 приведены  $M_{Hmax}$  для неравноточной сети в результате включения дополнительных связей 1-4, 1-4 и 1-5 соответственно.

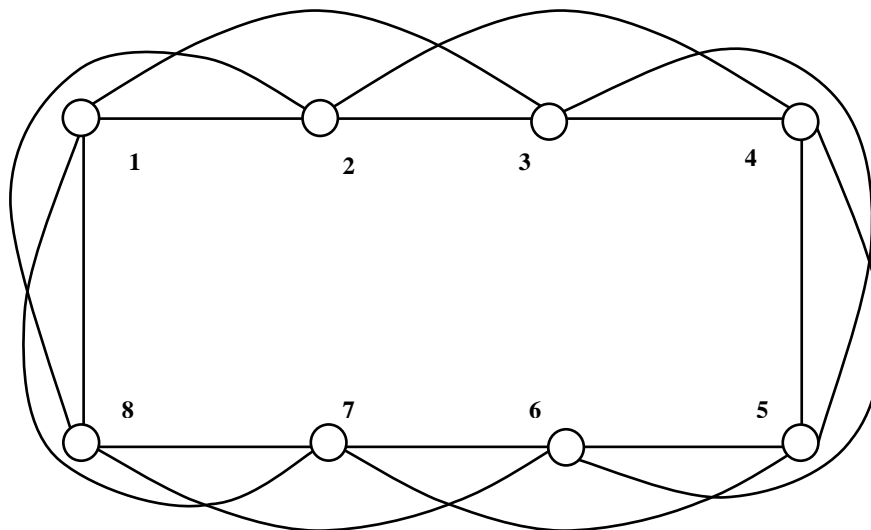


Рис. 2. Замкнутый равноточный нивелирный ход  
(число реперов  $K = 8$ , число измерений  $N = 16$ )

Здесь замечен эффект, присущий неравноточным сетям – известное правило Ансермета  $((P : p)_{cp} \approx N : k$ , где  $P$  – вес измерения после уравнивания, а  $p$  – вес до уравнивания) не выполняется. В нашем случае для колонок 1, 3  $N = 12$ , а для колонок 2, 4  $N = 13$ , но  $M_{Hcp} = 1,3704 < M_{Hcp} = 1,4345$ , хотя количество измерений во втором случае больше. Для колонок 7, 8 правило Ансермета выполняется:  $N_7 = 16$ ;  $N_8 = 17$ , в то время как  $1,7231 > 1,7178$ . С другой стороны, в колонках 11, 12 наблюдается эффект, описанный для колонок 3, 4 ( $1,2168 < 1,2444$ ).

Отсюда можно сделать вывод, что симметричные сети, как правило, жёстче несимметричных.

По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) требования, которым должны удовлетворять равноточные сети, нельзя нарушать, за исключением правила 4 (измерения в сети должны быть равноточными). Можно уравнивать сеть методом  $L_p$ -оценок (квазиравноточные сети при  $n = 1, 5 \dots 2, 5$ );
- 2) сети, удовлетворяющие требованиям равноточности, при  $n = 1$  хотя и не будут квазиравноточными, но для них, обычно, выполняется правило Ансермета;
- 3) квазиравноточные сети можно применять в тех случаях, когда количество измерений  $N$  ограничено, например, на строительных площадках, при изучении осадок инженерных сооружений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Высокоточные геодезические измерения для строительства и монтажа Большого серпуховского ускорителя / В.Д. Большаков [и др.]; под общ. ред. Н.Н. Лебедева. – М.: Недра, 1968. – 304 с.
2. Усов, Д.В. О тестировании нивелирных геодезических сетей при определении деформаций инженерных сооружений / Д.В. Усов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2008. – № 6. – С. 155 – 162.

Поступила 15.10.2009