УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ X_n-ПОЛУПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

О.В. НЕТБАЙ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Рассматриваются конечные группы с заданными системами X_n-полуперестановочных подгрупп.

Изучается влияние условия X_n-полуперестановочности для выделенной системы подгрупп на строение основной группы. Пусть G – конечная группа. Подгруппа A называется X_n-полуперестановочной в G, если A имеет такое добавление T в G, что A X-перестановочна с каждой нильпотентной подгруппой из T для некоторого подмножества X. Показано, что если каждая циклическая примарная подгруппа из M X_n-полуперестановочна в G, тогда G сверхразрешима; если каждая циклическая подгруппа простого порядка из M X-полуперестановочна в G, тогда G сверхразрешима; если каждая циклическая подгруппа простого порядка из M перестановочна в G, тогда G сверхразрешима.

Введение. Все группы, рассматриваемые в данной работе, предполагаются конечными. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B группы G, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется перестановочной или квазинормальной подгруппой в G. Оре доказал [1], что квазинормальная подгруппа группы G всегда является субнормальной в G. В дальнейшем Ито и Сеп в работе [2] доказали, что для каждой квазинормальной подгруппы H группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. Обобщая результаты этих работ, Кегель [3] и Дескинз [4] показали, что подгруппы, перестановочные со всеми силовскими подгруппами группы, наследуют ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. После выхода работ [3, 4] многими авторами предпринимались попытки исследования и применения других типов обобщенно перестановочных подгрупп. В частности, в работе [5] были впервые рассмотрены подгруппы H группы G, перестановочные со всеми подгруппами из некоторого добавления к H в G. Такие подгруппы получили название полунормальных подгрупп. В дальнейшем полунормальные подгруппы исследовались многими авторами. В работе В.С. Монахова и В.В. Подгорной [6] исследовались группы, у которых каждая нециклическая силовская подгруппа является полунормальной, и было доказано, что такие группы сверхразрешимы. В статье [7] В.С. Монахов и В.В. Подгорная установили признаки π-разрешимости конечных групп с полунормальной π-холловой подгруппой и доказали нильпотентность третьего коммутанта группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами. В работе В.Н. Княгиной и В.С. Монахова [8] исследовались группы, имеющие полунормальные подгруппы Шмидта четного порядка. В частности, была доказана разрешимость группы G, если все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта группы G полунормальны.

Заметим, что две подгруппы H и T группы G могут быть неперестановочными между собой, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $HT^x = T^xH$. При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующими естественными определениями [9]: пусть A, B – подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \leq G$. Тогда A называется X-перестановочной с B, если $ABx = BxA$ для некоторого $x \in X$. Подгруппа A называется X-полуперестановочной в G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами некоторого своего добавления T в группе G.

В работе [10] найдены новые критерии сверхразрешимости и новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах X-полуперестановочных подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее более общее понятие.

Определение. Пусть $A \leq G$ и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда будем говорить, что подгруппа A является X_n-полуперестановочной в G, если A имеет такое добавление T в G, что A X-перестановочна с каждой нильпотентной подгруппой из T.

Здесь мы изучаем влияние условия X_n-полуперестановочности для выделенной системы подгрупп на строение основной группы.

Предварительные леммы

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Пусть A, B и X – подгруппы группы G и K – нормальная подгруппа в G.*

(1) Если A X_n-полуперестановочна в G, тогда AK/K $(XK/K)_n$-полуперестановочна в G/K.

(2) Пусть $K \leq A$. Тогда A/K $(XK/K)_n$-полуперестановочна в G/K, если и только если A X_n-полуперестановочна в G.

(3) Пусть $A \leq B$ и $X \leq B$. Если A X_n-полуперестановочна в G, то A X_n-полуперестановочна в B.

(4) Если A X_n-полуперестановочна в G и $X \leq D$, то A D_n-полуперестановочна в G.

(5) Если N – перестановочная подгруппа в G и A X_n-полуперестановочна в G, то NA является X_n-полуперестановочной подгруппой в G.

(6) Если A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T и $A \leq N_G(X)$, то A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T^y для всех $y \in X$.

Доказательство

(1) Предположим, что A X-перестановочна с каждой нильпотентной подгруппой из T. Пусть N/K – произвольная нильпотентная подгруппа группы TK/K и E – минимальное добавление к K в N. Тогда $N = KE$ и $EK \subseteq \Phi(E)$, по [11, теорема 9.2]. Так как $EK/K \cong E/K \cap E$ – нильпотентная группа, то E нильпотентна, и поэтому $L = E \cap T$ – нильпотентная подгруппа в T. По условию, A X-перестановочна с L, поэтому AK/K является XK/K-перестановочной с $LK/K = (E \cap T)K/K = (EK \cap TK)/K = N/K$ [12, лемма 2.1]. Это значит, что AK/K XK/K-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из TK/K.

(2) Предположим, что A/K XK/K-перестановочна со всеми нильпотетными подгруппами из T/K. Ясно, что T является добавлением к A в G. Пусть T_1 – произвольная нильпотентная подгруппа в T. Тогда T_1K/K – нильпотентная подгруппа группы T/K. По условию A/K XK/K-перестановочна с T_1K/K в G/K. Тогда ввиду [12, лемма 2.1] A X-перестановочна с T_1 в T. С другой стороны, если A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T, то ввиду (1) A/K XK/K-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T/K.

(3) Предположим, что A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T. Так как $B = B \cap AT = A(B \cap T)$, то $B \cap T$ является добавлением к A в B. Пусть N – нильпотентная подгруппа в $B \cap T$. Тогда N является нильпотентной подгруппой в T. По условию A X-перестановочна с N. Это значит, что A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из $B \cap T$.

(4) Очевидно.

(5) Доказательство этой части следует из [9, лемма 2.1(6)].

(6) Пусть T_1 – нильпотентная подгруппа в T^y. Покажем, что A X-перестановочна с T_1. Так как $G = AT$, то $x = at$ для некоторых $a \in A$, $t \in T$, и поэтому $T^y = T^a$. Заметим, что $T_1^{a^{\wedge -1}} \leq T$ и $A = A^{a^{\wedge -1}}$. Для некоторого $d \in X$, по условию, мы имеем $A(T_1^{a^{\wedge -1}})^d = (T_1^{a^{\wedge -1}})^d A = A^a(d^{-1})^a(T_1^{a^{\wedge -1}})^{ad^{\wedge a}} = AT_1^{d^{\wedge a}} = T_1^{d^{\wedge a}}A$, где $d^a \in X$, так как $A \subseteq N_G(X)$. Это показывает, что A X-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T^y. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть G – разрешимая группа и N – минимальная нормальная подгруппа в G. Если каждая минимальная подгруппа из N является G_n-полуперестановочной в G, то N является группой простого порядка.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Так как N – элементарная абелева p-группа для некоторого простого p, то N содержится в некоторой силовской p-подгруппе P группы G, и поэтому $N \cap Z(P) \neq 1$. Выберем в группе N такую минимальную подгруппу A, что $A \subseteq N \cap Z(P)$. По условию, A G_n-полуперестановочна в G. Тогда A имеет такое добавление T в G, что A G-перестановочна с каждой нильпотентной подгруппой из T. Покажем, что $T = G$. Пусть $H = T \cap N$. Тогда H нормальна в T и H нормальна в N. Следовательно, H нормальна в G. Значит, либо $H = 1$, либо $H = N$. Если $H = 1$, то $G = AT = [N]T$, и поэтому $N = A$. Это влечет, что N – группа порядка p, что противоречит выбору группы G. Значит, $H = N$, и поэтому $G = AT = NT = T$. Тогда A G-перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из G. Пусть G_q – силовская q-подгруппа группы G, где $q \neq p$. Тогда $E = AG_q^x = G_q^xA$ для некоторого $x \in G$. Поскольку $N \cap E = N \cap AG_q^x = A(N \cap G_q^x) = A$, то A нормальна в E. А поскольку $q \neq p$ бралось произвольно, то $O^p(G) \leq N_G(A)$, и поэтому A нормальна в G, так как A нормальна в группе P. Ввиду минимальности группы N имеем $N = A$ и, значит, N является группой порядка p. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствием данной леммы является следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1 [10, лемма 2.7.]. Пусть G – разрешимая группа и N – минимальная нормальная подгруппа в G. Если каждая минимальная подгруппа из N является G-полуперестановочной в G, то N является группой простого порядка.

ЛЕММА 2.3. *Пусть G – группа и $X = F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Если каждая циклическая примарная подгруппа группы G X_n-полуперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *G не является простой неабелевой группой.*

Предположим, что G – неабелева простая группа. Тогда $X = F(G) = 1$. Пусть r – наименьший простой делитель порядка $|G|$ и R – подгруппа из G порядка r. По условию, R 1_n-полуперестановочна в G. Тогда существует такое добавление T к R в группе G, что каждая нильпотентная подгруппа из T перестановочна с R . Пусть $H = R \cap T$. Тогда либо $H = 1$, либо $H = R$. Если $H = 1$, то $|G : T| = |R| = r$, и поэтому T

нормальна в G, по [13, теорема 1.6.10], – противоречие. Следовательно, $H = R$. Это означает, что $G = T$ и R перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами в G. Поэтому R является S-перестановочной в G. Согласно [3], R является субнормальной подгруппой в G, что влечет $R \leq O_r(G)$, по [11, А, лемма 8.6], – противоречие.

(2) *Если N – неединичная нормальная подгруппа в G, тогда факторгруппа G/N сверхразрешима.*

Пусть H/N – произвольная циклическая подгруппа в G/N порядка p^a, где p – некоторый простой делитель порядка $|G/N|$. Ясно, что $H/N = < h >N/N$, где $|h|$ есть степень числа p. По условию, $< h >$ является X_n-полуперестановочной подгруппой в G, и поэтому $H/N = < h > N/N$ является $(XN/N)_n$-полуперестановочной в G/N, по лемме 2.1(1). Тогда по выбору группы G мы заключаем, что G/N сверхразрешима.

(3) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и* $\Phi(G) = 1$.

Это утверждение напрямую следует из (2) и хорошо известного факта, что класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию [14, с. 35].

(4) *Группа G разрешима.*

Ввиду (2), нам необходимо лишь показать, что N разрешима. Допустим, что это неверно. Тогда $X = F(G) = 1$, ввиду (3). Пусть r – наименьший простой делитель порядка $|N|$ и N_r – силовская r-подгруппа в N. Если N_r – циклическая группа, то N_r имеет нормальное дополнение K в N, по [13, теорема 10.1.9]. Так как K характеристическая подгруппа в N, то K нормальна в G, что противоречит минимальности N. Следовательно, N_r – нециклическая группа. Пусть N_1 – минимальная подгруппа в N_r. По условию, N_1 X_n-полуперестановочна в G, и поэтому существует такое добавление T к N_1 в G, что N_1 перестановочна с каждой нильпотентной подгруппой из T (ввиду $X = 1$). Пусть $H = N_1 \cap T$. Тогда либо $H = 1$, либо $H = N_1$. Если $H = N_1$, то $G = T$ и N_1 S-перестановочна в G. Согласно [3], N_1 является субнормальной подгруппой в G, что влечет $N_1 \leq O_r(G)$, по [11, А, лемма 8.6], – противоречие. Следовательно, $N_1 \cap T = 1$. Тогда $|G : T| = |N_1| = r$ и $T_G = 1$. Пусть N_p – силовская p-подгруппа из T, где $p \neq r$. Тогда T_p является силовской p-подгруппой в G. По условию, $N_1T_p = T_pN_1$. Кроме того, по [15, глава VI, теорема 4.7], $G_r = N_1T_r$, где G_r, T_r – силовские r-подгруппы в G и T соответственно. Это в свою очередь означает, что N_1 перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Тогда N_1 субнормальна в G [3], и поэтому $N_1 \leq O_r(G)$. Так как $F(G) = 1$, то $N_1 = 1$, что невозможно, по выбору N_r. Это влечет, что N r-группа, что противоречит нашему допущению о N.

(5) *$N = C_G(N) = F(G) = O_p(G) = X$ для некоторого простого p и $|N| = p^a$, где $a > 1$ и $a \in N$.*

Следует из (2), (3) и (4).

(6) *Заключительное противоречие.*

Ввиду (3) и (5) $G = [N]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа из G и $M_G = 1$. Так как $M \cong G/N$, то M сверхразрешима, по (2). Ввиду леммы 2.2 подгруппа N имеет простой порядок, и поэтому группа G сверхразрешима. Данное противоречие завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1 [10, лемма 2.9]. *Пусть G – группа и $X = F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Если каждая циклическая примарная подгруппа группы G X-полуперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. *Пусть G – группа и $X = F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Если каждая циклическая примарная подгруппа группы G перестановочна или X-перестановочна в G, то G сверхразрешима.*

ЛЕММА 2.4 [9, лемма 3.5]. *Пусть G – группа с подгруппами M и T, такими, что $|G : M|$ и $|G : T|$ имеют различные простые индексы. Тогда G непроста.*

ЛЕММА 2.5 [16, 2, лемма 3.3]. *Если G содержит максимальную подгруппу с единичным ядром, тогда следующие условия равносильны:*

(1) индексы всех максимальных подгрупп с единичным ядром в группе G являются степенями одного и того же простого числа p;

(2) существует единственная минимальная нормальная подгруппа в G и существует общий простой делитель всех индексов всех максимальных подгрупп с единичным ядром в группе G;

(3) в G существует неединичная нормальная разрешимая подгруппа.

ЛЕММА 2.6 [17, лемма 4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E – циклическая подгруппа, то $G \in \mathfrak{F}$.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Известно большое число характеризаций сверхразрешимости и критериев сверхразрешимости на основе условий, налагаемых на все максимальные подгруппы основной группы [18]. Следующая теорема дает критерий сверхразрешимости группы на основе условий, налагаемых лишь на одну максимальную подгруппу группы.

ТЕОРЕМА. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G, $F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга и $X = F(G) \cap M$. Если каждая циклическая примарная подгруппа из M X_n-полуперестановочна в G, тогда G сверхразрешима.*

Доказательство. Сначала докажем, что группа G разрешима. Предположим, что это утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка.

Тогда имеем:

(1) *Подгруппа M сверхразрешима и $M_G = 1$.*

Так как $F(G) \cap M \leq F(M)$, то каждая циклическая подгруппа из M простого порядка является $F(M)_n$-полуперестановочной в M, по лемме 2.1(3, 4). Следовательно, подгруппа M сверхразрешима, по лемме 2.3. Допустим, что $M_G \neq 1$, и пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в M_G. Тогда N является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p. Поскольку $(F(G) \cap M)/N = (F(G)/N) \cap (M/N) \leq F(G/N) \cap (M/N)$, то легко заметить, что группа G/N удовлетворяет условию теоремы, в силу леммы 2.1. Ввиду выбора группы G факторгруппа G/N разрешима. Это влечет разрешимость группы G – противоречие. Следовательно, $M_G = 1$.

(2) *$X = 1$.*

Если $F(G)$ не содержится в M, то $G = MF(G)$. Так как факторгруппа $G/F(G) = MF(G)/F(G) \cong M/(M \cap F(G))$ разрешима, то группа G разрешима. Это противоречие показывает, что $F(G) \leq M$. Так как $M_G = 1$, то $F(G) = 1$. Таким образом, $X = 1$.

(3) $O_p(G) = 1$ для всех простых делителей p порядка группы G.

Допустим, что $O_p(G) \neq 1$. Поскольку $O_p(G)$ не содержится в M, по (1), то $G = O_p(G)M$ и, следовательно, $G/O_p(G) \cong M/(M \cap O_p(G))$. Это влечет, что группа G разрешима, по (1), – противоречие. Следовательно, $O_p(G) = 1$ для всех простых делителей p порядка группы G.

(4) Каждая силовская подгруппа из M является элементарной абелевой группой.

Пусть P – силовская p-подгруппа из M, где $p \in \pi(M)$. Предположим, что $\Phi(P) \neq 1$ и пусть A – подгруппа в $\Phi(P)$ порядка p. По условию и ввиду (2) A имеет такое добавление T в G, что A перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T. Следовательно, $P = P \cap AT = A(P \cap T) = P \cap T$. Это показывает, что $G = T$, и поэтому A перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из G. Значит, A является S-перестановочной подгруппой в G. По [3] A субнормальна в G. Таким образом, $A \leq O_p(G)$ [11, A, лемма 8.6]. Значит, по (3) $A = 1$ – противоречие. Следовательно, $\Phi(P) = 1$, и поэтому P – элементарная абелева группа.

(5) Подгруппа M ненильпотентна.

Действительно, если M – нильпотентная максимальная подгруппа в G, то G разрешима, по (4) и [15, глава IV, теорема 7.4], – противоречие.

(6) Группа G не является неабелевой простой группой.

Допустим, что G – неабелева простая группа. По (5), $|M|$ имеет по крайней мере два различных простых делителя, обозначим их через p_1 и p_2. По условию и ввиду (2), для каждой подгруппы $< x_i >$ из M порядка p_i существует такая подгруппа T_i группы G, что $G = < x_i >T_i$ и $< x_i >$ перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T_i, где $i \in \{1, 2\}$. Пусть $H_i = < x_i > \cap T_i$. Если $H_i = < x_i >$ для некоторого i, то $G = T_i$, и поэтому $< x_i >$ перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из G. Это влечет, по [3], что $< x_i >$ субнормальна в G и, значит, $< x_i > \leq O_{p_i}(G) = 1$ (см. [11, A, лемма 8.6]) – противоречие. Следовательно, $H_i = 1$, где $i \in \{1, 2\}$. Это влечет, что группа G имеет подгруппы T_i индекса p_i, где $i \in \{1, 2\}$. По лемме 2.4 G не является неабелевой простой группой – противоречие.

(7) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и N – собственная неразрешимая подгруппа группы G.

Пусть N_1 и N_2 – различные минимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда $G = MN_1 = MN_2$, по (1). Следовательно, $N_1 \cap M = N_2 \cap M = 1$, в силу [11, A, теорема 15.2] {DH}. Поскольку $G/N_1 \cong G/N_2 \cong M$ разрешима, то $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ также разрешима. Это противоречие показывает, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Обозначим ее через N. По (6), N – собственная подгруппа в G. Очевидно, что подгруппа N не является разрешимой, по выбору группы G и ввиду (1).

(8) $M \cap N = 1$.

Сначала покажем, что $|\pi(M \cap N)| \leq 1$. Пусть $p \in \pi(M \cap N)$ и A – подгруппа из $M \cap N$ порядка p. По условию и ввиду (2) A имеет такое добавление T в G, что A перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T. Используя рассуждения, как и выше, мы можем показать, что $A \cap T = 1$. Это влечет, что для каждого простого числа p из $\pi(M \cap N)$ группа G содержит такую подгруппу T, что $|G : T| = p$ и N не содержится в T. Это влечет, что $G = TN$, и поэтому $|N : N \cap T| = p$. По (7) $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где $N_j \cong N_1 (j = 1, 2, \ldots , t)$ является неабелевой простой группой. Так как N не содержится в T, то существует такой номер k, что N_k не содержится в $T \cap N$, где $1 \leq k \leq t$. Следовательно, $N = N_k(N \cap T)$, и поэтому $|N_k : N_k \cap T \cap N| = p$. Поскольку $N_k \cong N_1$, то N_1 имеет такую максимальную подгруппу K_1 , что $|N_1 : K_1| = p$. Допустим, что $|\pi(M \cap N)| \geq 2$ и пусть p_1 и p_2 – различные простые числа из $\pi(M \cap N)$. Тогда найдутся та-

кие максимальные подгруппы K_1 и K_2 в N, что $|N_1 : K_1| = p_1$ и $|N_1 : K_2| = p_2$. Таким образом, N_1 – непростая группа, по лемме 2.4. Это противоречие показывает, что $|\pi(M \cap N)| \leq 1$.

Теперь покажем, что $M \cap N = 1$. Действительно, если $M \cap N \neq 1$, то $M \cap N$ является r-подгруппой для некоторого простого числа r. Кроме того, в случае, когда $N_N(M \cap N) > M \cap N$, мы имеем $N_G(M \cap N) = G$, поскольку $N_N(M \cap N) = N_G(M \cap N) \cap N$ и $M \leq N_G(M \cap N)$. Это влечет, что $M_G \neq 1$ – противоречие. Значит, $N_N(M \cap N) = M \cap N$. Поэтому $M \cap N$ является силовской r-подгруппой в N. По (4) $M \cap N$ является элементарной абелевой группой. Следовательно, $N_N(M \cap N) = M \cap N = C_N(M \cap N)$, и поэтому $M \cap N$ имеет нормальное r-добавление N_r в N, по теореме Бернсайда. Так как N_r *char* $N \lhd G$, то N_r нормальна в G. Поскольку N – минимальная нормальная подгруппа в G, то $N_r = 1$. Следовательно, N является r-группой, что противоречит (7). Значит, $M \cap N = 1$.

(9) Пусть p – наибольшее простое число в $\pi(M)$ и P – силовская p-подгруппа в M. Тогда P является силовской p-подгруппой в группе G и p не делит порядок $|N|$.

Действительно, так как p – наибольший простой делитель порядка $|M|$, то P нормальна в M, по (1). По (4), P является элементарной абелевой p-группой. Если P не является силовской p-подгруппой в G, то найдется такая силовская p-подгруппа G_p из G, что $P < G_p$ и $P = G_p \cap M$. Следовательно, $N_{Gp}(P) = Gp \cap N_G(P) > P = G_p \cap M$. Поскольку M максимальна в G, то $N_G(P) = G$. Значит, $M_G \neq 1$. Это противоречие показывает, что P – силовская p-подгруппа в G. По [15, глава VI, теорема 4.7] $P = N_pP$, где N_p – некоторая силовская p-подгруппа в N. Значит, $N_p \leq M$, что противоречит (8). Поэтому p не делит порядок $|N|$.

(10) Заключительное противоречие.

Пусть p – наибольшее простое число в $\pi(M)$ и P – силовская p-подгруппа в M. Тогда P является силовской p-подгруппой в группе G, по (9), и $N_G(P) = M$, по (1). Пусть теперь L – произвольная максимальная подгруппа группы G и $L_G = 1$. Покажем, что $|G : L| = |N|$. Действительно, очевидно, что $G = NL$, и поэтому $M \cong G/N \cong L/(N \cap L)$. Пусть L_p – силовская p-подгруппа из L. Тогда по (9) и [15, глава VI, теорема 4.7] L_p является силовской p-подгруппой в G. По теореме Силова, в G найдется такой элемент g, что $P = L_p^g \leq L^g$. Так как $M \cong L^g/(N \cap L^g)$ и P нормальна в M, то силовская p-подгруппа $P(N \cap L^g)/(N \cap L^g)$ из $L^g/(N \cap L^g)$ нормальна в $L^g/(N \cap L^g)$. Это влечет, что $P(N \cap L^g)$ нормальна в L^g. Теперь, используя лемму Фраттини, мы имеем $L^g = (N \cap L^g)N_{Lg}(P)$. Так как $N \cap L^g \cap N_{Lg}(P) \leq N \cap N_G(P) = N \cap M = 1$, то $M \cong L^g/(N \cap L^g \cong N_{Lg}(P)$. Поэтому $|N_{Lg}(P)| = |M|$. Поскольку $N_{Lg}(P) \leq N_G(P) = M$, то $N_{Lg}(P) = M$. Следовательно, $L^g = M$. Отсюда $|G : L| = |G : L^g| = |G : M| = |N|$. По лемме 2.5 G имеет разрешимую нормальную подгруппу $K \neq 1$. Тогда $N \leq K$, и поэтому N разрешима, что противоречит (7). Это заключительное противоречие показывает, что группа G разрешима.

Теперь докажем, что группа G сверхразрешима. Предположим, что это утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка.

Легко видеть, что группа M сверхразрешима (см. доказательство пункта (1)). Если $M_G \neq 1$, тогда выберем такую минимальную нормальную подгруппу N в G, что $N \leq M_G$. По лемме 2.1 (1) факторгруппа G/N удовлетворяет условию теоремы, и поэтому G/N сверхразрешима. Кроме того, группа N циклическая, по лемме 2.2. Это влечет, что группа G сверхразрешима, по лемме 2.6. Значит, $M_G = 1$. Так как группа G разрешима, то по [11, A, лемма 15.6] видим, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, такую, что $G = [N]M$ и $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$ для некоторого простого p. Это влечет, что $X = 1$. Пусть q – наибольший простой делитель $|G|$.

Допустим, что $q = p$. Тогда N является силовской p-подгруппой в G. Действительно, если N не является силовской p-подгруппой в G, то $O_p(M) \neq 1$, что противоречит [11, A, теорема 15.6]. Следовательно, N является силовской p-подгруппой в G. Пусть R – произвольная силовская r-подгруппа в M, где $r \in \pi(M)$ и $R = < x_1, x_2, \ldots, x_t >$, где $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ – минимальное порождающее множество группы R. По условию, для всех i $(1 \leq i \leq t)$, $< x_i >$ имеет такое добавление T_i в G, что каждая нильпотентная подгруппа из T_i перестановочна с $< x_i >$. Так как $N \leq T_i$ и N нильпотентна, то $< x_i >$ перестановочна со всеми подгруппами из N. Пусть N_1 – максимальная подгруппа в N. Тогда $< x_i > N_1$ является подгруппой в G и $N_1 = N \cap < x_i > N_1 \lhd < x_i > N_1$. Следовательно, $< x_i > \leq N_G(N_1)$ для всех x_i. Это влечет, что $R \leq N_G(N_1)$ и, следовательно, $M \leq N_G(N_1)$. Значит, N_1 нормальна в G, так как N абелева. Таким образом, N – циклическая группа порядка p. Поскольку $G/N \cong M$ сверхразрешима, то G сверхразрешима, по лемме 2.6.

Теперь допустим, что $q > p$. Пусть A – минимальная подгруппа из M порядка q. По условию, найдется такая подгруппа T в G, что $G = AT$ и A перестановочна со всеми нильпотентными подгруппами из T. Так как $N \leq T$ и N нильпотентна, то A перестановочна со всеми подгруппами из N. Пусть $N = < y_1 > \times < y_2 > \times \times \ldots \times < y_s >$. Тогда $A < y_i > = < y_i > A$, и поэтому A нормальна в $< y_i > A$, по [13, теорема 10.1.9], где $i \in \{1, \ldots, s\}$.

С другой стороны, $< y_i > = < y_i > A \cap N$ нормальна в $< y_i > A$. Значит, $A \leq C_G(< y_i >)$. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствиями теоремы являются следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1 [10, теорема 3.1]. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G, F(G) – ее подгруппа Фиттинга и X = F(G)M. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка из M X-полуперестановочна в G, тогда G сверхразрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2 [10, следствие 3.1.1]. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G, F(G) – ее подгруппа Фиттинга и X = F(G)M. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка из M перестановочна в G, тогда G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – V. 5. – P. 431 – 460.
2. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Act. Sci. Math. – 1962. – V. 23. – P. 168 – 170.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – V. 87. – P. 205 – 221.
4. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – V. 82. – P. 125 – 132.
5. Su, X. Semi-normal subgroups of a finite group / X. Su // Math. Mag. – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5 – 10.
6. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Извес. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 50 – 53.
7. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573 – 581.
8. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448 – 458.
9. Guo, W. *X*-semipermutable subgroups of finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – V. 315. – P. 31 – 41.
10. Guiyun, Chen. The influence of *X*-semipermutable of subgroups on the structure of finite groups / Chen Guiyun, Li Jinbao, Li Baojun // Science in China. Series A: Matematics. – 2009. – V. 52, № 2. – P. 827 – 841.
11. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin/New York: Walter de gruyter, 1992.
12. Skiba, A.N. *H*-permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37 – 39.
13. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.
14. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
16. Baer, R. Classes of finite groups and theie properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – V. 1(2). – P. 115 – 187.
17. Нетбай, О.В. Критерий принадлежности конечных групп насыщенной формации / О.В. Нетбай, А.Н. Скиба // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 149 – 154.
18. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982.

Поступила 23.01.2010

ON FINITE GROUPS WITH PREASSIGNED SYSTEMS OF X_n-SEMICOMMUTING SUBGROUPS

O. NETBAY

Finite groups with preassigned systems of X_n-semicommuting subgroups are considered. The influence of the X_n-semicommutability for the dedicated subgroup system on the structure of basic group is studied. Let G be the finite group. Subgroup A is named X_n-semicommuting in G, if A has such addition T in G, that A is X_n-semicommuting with each nilpotent subgroup from T for some subpopulation X. It is shown that if each cyclic primary subgroup from M is X_n-semicommuting in G, then G is supersoluble; if each cyclic subgroup of simple order from M is commutative in G, then G is supersoluble.