УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ СЛАБО τ-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В.О. ЛУКЬЯНЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть H – подгруппа конечной группы G. Тогда мы говорим, что подгруппа H является: (1) *τ-квазинормальной подгруппой в группе G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G такой, что* $(|Q|, |H|) = 1$ *и* $(|H|, |Q^G|) \neq 1$; (2) *слабо τ-квазинормальной подгруппой в G, если группа G содержит такую субнормальную подгруппу T, что* $HT = G$ *и* $T \cap H \leq H_{\tau G}$, *где* $H_{\tau G}$ *– подгруппа, порожденная всеми подгруппами из H, которые τ-квазинормальны в G. Пусть U – класс всех сверхразрешимых конечных групп,* $Z_{U\Phi}(G)$ *– наибольшая нормальная подгруппа группы G, в которой все нефраттиниевы G-главные факторы цикличны. Основным результатом данной работы является следующий результат* (*теорема* 1.2)*: Пусть E – нормальная подгруппа группы G, и пусть P – силовская p-подгруппа из E, где p – наименьший простой делитель порядка* $|E|$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа из P или каждая циклическая подгруппа из P порядка p и порядка* 4 (*если P является неабелевой* 2-*группой*), *не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Тогда* $E/O_{p'}(E) \leq Z_{U\Phi}(G/O_{p'}(E))$.

Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Множество всех простых делителей порядка группы G будем обозначать через $\pi(G)$. Напомним, что нормальным замыканием H^G подгруппы H в группе G называется пересечение всех нормальных подгрупп из G, которые содержат H, а нормальным ядром H_G подгруппы H в группе G называется произведение всех нормальных подгрупп из G, которые содержатся в H. Говорят, что подгруппа A группы G перестановочна с подгруппой B, если $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется $\pi(G)$-перестановочной или $\pi(G)$-квазинормальной в G [1], если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G.

В данной работе мы анализируем следующие обобщения $\pi(G)$-квазинормальности.

Определение 1.1. *Пусть H – подгруппа группы G. Будем говорить, согласно* [2], *что:*

(1) *H τ-квазинормальна в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G такой, что* $(|Q|, |H|) = 1$ *и* $(|H|, |Q^G|) \neq 1$;

(2) *H слабо τ-квазинормальна в G, если группа G содержит такую субнормальную подгруппу T, что* $HT = G$ *и* $T \cap H \leq H_{\tau G}$, *где* $H_{\tau G}$ *– подгруппа, порожденная всеми подгруппами из H, которые τ-квазинормальны в G.*

Очевидно, что каждая $\pi(G)$-квазинормальная подгруппа является τ-квазинормальной подгруппой, а каждая τ-квазинормальная подгруппа является слабо τ-квазинормальной подгруппой. Примеры 1.2 и 1.3 работы [2] показывают, что обратные утверждения в общем случае неверны.

Класс всех сверхразрешимых групп будем обозначать через U. Напомним, что U-гиперцентром группы G называется наибольшая нормальная подгруппа в G, в которой все G-главные факторы цикличны [3, с. 389]. В работе [4] было введено следующее обобщение данного понятия: наибольшая нормальная подгруппа группы G, в которой все нефраттиниевы G-главные факторы цикличны, называется *UФ-гиперцентром* группы G и обозначается $Z_{U\Phi}(G)$.

Исследования многих авторов связаны с анализом следующего основного вопроса: *Пусть X – насыщенная формация, содержащая U, и пусть E – такая нормальная подгруппа группы G, что* $G/E \in X$. *Какими свойствами должна обладать подгруппа E, для того чтобы* $G \in X$? (см. раздел 5 работы [5]). Многие результаты в данном направлении можно обобщить, доказав, что верно выражение $E \leq Z_{U\Phi}(G)$. Следующие два результата служат частичными иллюстрациями этому.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть E – нормальная подгруппа группы G, и пусть P – силовская p-подгруппа из E, где p – наименьший простой делитель порядка* $|E|$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа из P или каждая циклическая подгруппа из P порядка p и порядка* 4 (*если P является неабелевой* 2-*группой*), *не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Тогда* $E/O_{p'}(E) \leq Z_{U\Phi}(G/O_{p'}(E))$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть E – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что для любой нециклической силовской подгруппы P из E каждая максимальная подгруппа из P или каждая циклическая подгруппа из P простого порядка и порядка* 4 (*если P является неабелевой* 2-*группой*), *не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Тогда* $E \leq Z_{U\Phi}(G)$.

Отметим, что многие известные результаты в данном направлении также являются следствиями этих теорем (см. [5, раздел 5]).

Другие обозначения и определения соответствуют принятым в [3] или [6].

Предварительные результаты

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства τ-квазинормальных и слабо τ-квазинормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.1. [2, леммы 2.2 и 2.3] *Пусть G – группа, $H \leq K \leq G$, $L \leq G$ и p – некоторое простое число.*

(1) *Если H τ-квазинормальна в G, тогда H τ-квазинормальна в K.*

(2) *Предположим, что подгруппа H нормальна в G и $\pi(K/H) = \pi(K)$. Если K τ-квазинормальна в G, тогда K/H τ-квазинормальна в G/H.*

(3) *Предположим, что H τ-квазинормальна в G. Если $HL = LH$ и $\pi(H \cap L) = \pi(H) \cap \pi(L)$, тогда $H \cap L$ τ-квазинормальна в L.*

(4) *Предположим, что подгруппа H нормальна в G. Тогда EH/H τ-квазинормальна в G/H для каждой τ-квазинормальной подгруппы E в G, удовлетворяющей условию $(|H|, |E|)=1$.*

(5) *Если H τ-квазинормальна в G и $H \leq O_p(G)$, тогда H $\pi(G)$-квазинормальна в G.*

(6) *Предположим, что H и L τ-квазинормальны в G. Если $HL = LH$ и $\pi(H \cap L) = \pi(H) = \pi(L)$, тогда $H \cap L$ τ-квазинормальна в G.*

(7) *Если H – p-группа, тогда $H_{\tau G}$ τ-квазинормальна в G и $H_G \leq H_{\tau G}$.*

ЛЕММА 2.2. [2, лемма 2.4] *Пусть G – группа, $H \leq K \leq G$ и p – некоторое простое число.*

(1) *Если H τ-квазинормальна в G, тогда H слабо τ-квазинормальна в G.*

(2) *Предположим, что K – p-группа и подгруппа H нормальна в G. Если K слабо τ-квазинормальна в G, тогда K/H слабо τ-квазинормальна в G/H.*

(3) *Если H слабо τ-квазинормальна в G, тогда H слабо τ-квазинормальна в K.*

(4) *Предположим, что подгруппа H нормальна в G. Тогда EH/H слабо τ-квазинормальна в G/H для каждой слабо τ-квазинормальной p-подгруппы E в G, удовлетворяющей условию* $(|H|, |E|) = 1$.

(5) *Предположим, что H – p-группа и H не является τ-квазинормальной подгруппой в G. Если H слабо τ-квазинормальна в G, тогда группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что $|G:M| = p$ и $G = HM$.*

ЛЕММА 2.3. [2, лемма 2.5] *Пусть N – элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G, где p – некоторое простое число. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |N|$ и каждая подгруппа из N порядка p^k слабо τ-квазинормальна в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

ЛЕММА 2.4. *Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта (т.е. минимальная ненильпотентная группа), где P – силовская p-подгруппа в G. Если каждая циклическая подгруппа из P порядка p и порядка 4 (если P – неабелева 2-группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G, тогда $|P/\Phi(P)| = p$.*

Доказательство. В силу [7, IV, лемма 5.4] группа P имеет экспоненту p или 4 (если P – неабелева 2-группа). Предположим, что каждая циклическая подгруппа из P простого порядка и порядка 4 (если P – неабелева 2-группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Пусть $\Phi = \Phi(P)$, X/Φ – подгруппа в P/Φ простого порядка, $x \in X \backslash \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$. Следовательно, либо L имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо L слабо τ-квазинормальна в G. В первом случае мы можем полагать, что $T \neq G$, следовательно, $T\Phi \neq G$, поскольку имеет место $\Phi \leq \Phi(G)$. С другой стороны, $LT = G$, поэтому $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi$. Следовательно, $|G/\Phi:T\Phi/\Phi| = p$, поэтому $|P/\Phi| = p$, поскольку имеет место $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$. Предположим теперь, что L слабо τ-квазинормальна в G. Допустим, что L не является τ-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, в силу леммы 2.2(5), группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что $LM=G$ и $|G:M|=p$. Поскольку G – минимальная ненильпотентная группа, то M нильпотентна. Следовательно, Q – характеристическая подгруппа в M, и поэтому Q нормальна в G. Это означает, что группа G нильпотентна. Данное противоречие показывает, что L τ-квазинормальна в G. Очевидно, что $L\Phi$ τ-квазинормальна в G. Тогда $L\Phi/\Phi = X/\Phi$ τ-квазинормальна в G/Φ по лемме 2.1(2). Поэтому в силу леммы 2.3 и поскольку P/Φ – G-главный фактор группы P, мы заключаем, что $|P/\Phi| = p$.

ЛЕММА 2.5. [8, лемма 2.2] *Пусть G – группа, p – нечетное простое число и P – нормальная неединичная p-подгруппа в G. Предположим, что каждая минимальная подгруппа из P $\pi(G)$-квазинормальна в G. Тогда $P \leq Z_U(G)$.*

Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.2. Предположим, что теорема неверна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально.

(1) $O_{p'}(E) = 1$.

Предположим, что $Y = O_{p'}(E) \neq 1$. Согласно лемме 2.2(4), условия теоремы справедливы для фактор-группы G/Y (относительно E/Y). Это означает, в силу выбора (G, E), что теорема верна для G/Y (относительно E/Y), и, следовательно, теорема верна для группы G (относительно E) – противоречие.

(2) *$E = G$ или $E = P$.*

Предположим, что $E \neq G$. Согласно лемме 2.2(3) условия теоремы справедливы для группы E (относительно E). Тогда в силу выбора (G, E) и ввиду (1) $E \leq Z_{U\Phi}(E)$. Это означает, что группа E – p-сверхразрешима. Согласно условию теоремы p – наименьший простой делитель порядка $|E|$, поэтому группа E p-нильпотентна. Тогда ввиду (1) $E = P$.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Согласно лемме 2.2(4), условия теоремы справедливы для фактор-группы G/V (относительно EV/V). Это означает, в силу выбора (G, E), что теорема верна для G/V (относительно EV/V). Тогда ввиду (1) и по [4, лемма 2.3 (3)] мы заключаем, что теорема верна для группы G (относительно E) – противоречие.

(4) *Каждая максимальная подгруппа группы P, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G.*

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы P порядка p и порядка 4 (если P является неабелевой 2-группой), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Предположим сначала, что p – наименьший простой делитель порядка $|G|$ и $E = G$. Ввиду (3) G не является p-нильпотентной группой, следовательно, G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта [7, IV, лемма 5.4] вида $H = [H_p]H_q$, где $H_p \leq P$. Согласно лемме 2.2 (3) каждая циклическая подгруппа группы H простого порядка и порядка 4 (если H_p – неабелева 2-группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в H, слабо τ-квазинормальна в H. Но тогда по лемме 2.4 $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что противоречит минимальности p. Следовательно, в силу (2) $E = P$ и $x \in C_G(P)$ для любого p'-элемента x группы G. Это означает, что группа G p-нильпотентна, что противоречит (3).

Предположим теперь, что p не является наименьшим простым делителем порядка $|G|$. Тогда $p > 2$, и ввиду (2) $E = P$. Если группа G имеет циклический главный фактор вида E/V, то подгруппа V нециклична, следовательно, $|V| > p$. В этом случае условия теоремы справедливы для группы G (относительно V), что влечет $V \leq Z_{U\Phi}(G)$ в силу выбора (G, E). Следовательно, $E \leq Z_{U\Phi}(G)$. Это противоречие показывает, что группа G не имеет циклического главного фактора вида E/V. Предположим, что некоторая подгруппа группы P порядка p имеет сверхразрешимое добавление T в G. Тогда $|P:T \cap P| = p$, следовательно, подгруппа $T \cap P$ нормальна в P. Кроме того, $T \cap P$ нормальна в T. Это означает, что подгруппа $T \cap P$ нормальна в G. Но тогда $P/(T \cap P) = E/(T \cap P)$ – циклический главный фактор группы G – противоречие. Это показывает, что каждая подгруппа группы P порядка p слабо τ-квазинормальна в G. Предположим, что некоторая подгруппа H из P порядка p не является τ-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, согласно лемме 2.2(5), группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что $HM = G$ и $|G:M| = p$. Следовательно, подгруппа $P \cap M \neq P$ нормальна в G и, в силу изоморфизма $G/M \cong P/P \cap M$, группа $E = P$ имеет циклический G-главный фактор $P/P \cap M$ – противоречие. Поэтому каждая подгруппа из P порядка p τ-квазинормальна в G, а значит, $\pi(G)$-квазинормальна в G по лемме 2.1(5). Тогда $E = P \leq Z_{U\Phi}(G)$, согласно лемме 2.5, – противоречие. Таким образом, утверждение (4) доказано.

(5) *$|N|<|P|$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, которая содержится в P.*

Предположим, что $N = P$. Если некоторая максимальная подгруппа H из N имеет сверхразрешимое добавление T в G, тогда $TN = G$ и $T \neq G$ в силу выбора группы G. Следовательно, $N \cap T$ – собственная неединичная подгруппа в N, поскольку $N = N \cap HT = H(N \cap T)$. Но, очевидно, подгруппа $N \cap T$ нормальна в G, что противоречит минимальности N. Поэтому ввиду (4) каждая максимальная подгруппа группы N слабо τ-квазинормальна в G. Тогда согласно лемме 2.3 некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G – противоречие. Таким образом, утверждение (5) доказано.

(6) $E = G$.

Предположим, что $E = P$ и пусть N – такая минимальная нормальная подгруппа группы G, что $N \leq P$. Ввиду (4) и согласно лемме 2.2 (2) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N (относительно E/N). Следовательно, в силу выбора (G, E) имеет место $E/N \leq Z_{U\Phi}(G/N)$, $N \not\subset \Phi(G)$ и $|N| > p$. Таким образом, $\Phi(G) \cap E = 1$. Тогда согласно [9, лемма 7.9] P – прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G. Согласно (5) $N < P$. Следовательно, для некоторой минимальной нормальной подгруппы R группы G, содержащейся в P, имеет место $R \neq N$. Тогда в силу [3, A, теорема 9.11] $RN/N \not\subset \Phi(G/N)$. Таким образом, $|R| = |RN/N| = p$. Это влечет, что теорема верна для группы G (относительно E) – противоречие. Значит, ввиду (2) утверждение (6) доказано.

(7) *Некоторая максимальная подгруппа группы P не имеет p-нильпотентного добавления в G* (это прямо следует из утверждений (1), (6) и [4, лемма 2.10]).

(8) $O_p(G) = 1$.

Предположим, что $O_p(G) \neq 1$ и пусть N – такая минимальная нормальная подгруппа группы G, что $N \leq O_p(G)$. Согласно (5), $N < P$. Тогда ввиду (4) и согласно лемме 2.2 (2) условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N (относительно E/N). Следовательно, G/N p-нильпотентна в силу выбора (G, E). Таким образом, $|N| > p$, $N \not\subset \Phi(G)$ и $N = O_p(G) = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно, $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Если A – такая максимальная подгруппа в P, что $N \leq A$, тогда $AM = G$, следовательно, $M \cong G/N$ – p-нильпотентное добавление к подгруппе A в группе G. Тогда ввиду (7) P содержит некоторую максимальную подгруппу V, которая не содержит N и которая не имеет p-нильпотентное добавление в G. Следовательно, ввиду (4) V слабо τ-квазинормальна в G. Пусть $L = V_{\tau G}$ и T – такая субнормальная подгруппа группы G, что $VT = G$ и $T \cap V \leq L$. Тогда $T \cap V = T \cap L$ и согласно [10, (f)] $N \leq O^p(G) \leq T$. Предположим, что $L = 1$. Ввиду (6) порядок силовской p-подгруппы группы T равен p. Поскольку p – наименьший простой делитель порядка $|E|=|G|$, то группа T p-нильпотентна согласно [7, IV, лемма 2.8]. Поскольку T субнормальна в G и $O^p(G) \leq T$, то получаем, что группа G p-нильпотентна, что противоречит (3). Таким образом, $L \neq 1$. В силу леммы 2.1(7), L τ-квазинормальна в G. Поскольку $N \cap L \leq N \cap V \leq T \cap V \leq L$, то имеет место $N \cap L = N \cap V \neq 1$. Следовательно, $N \cap L$ τ-квазинормальна в G по лемме 2.1(6). Кроме того, $N \cap L \leq N = O_p(G)$. Таким образом, $N \cap L$ $\pi(G)$-квазинормальна в G ввиду леммы 2.1(5). Согласно [10, лемма A] $O^p(G) \leq N_G(N \cap L)$. Очевидно, что $N \cap L = N \cap V$ нормальна в P. Отсюда следует, что $N \cap L$ – неединичная подгруппа из N, которая нормальна в G. Это противоречие завершает доказательство утверждения (8).

Заключительное противоречие

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду (3) и (8), p делит порядок $|N|$ и N – неабелева группа. Согласно лемме 2.2(3) условия теоремы справедливы для группы PN (относительно PN). Предположим, что $PN \neq G$. Поскольку $O_{p'}(PN) \leq O^p(PN) \leq N$, то $O_{p'}(PN) \leq O_{p'}(G) = 1$ ввиду (3). Тогда в силу выбора (G, E) имеем $PN \leq Z_{U\Phi}(PN)$. Отсюда следует, что группа PN p-сверхразрешима. Но поскольку p – наименьший простой делитель порядка $|PN|$, то PN p-нильпотентна, что невозможно. Это означает, что $PN = G$. Предположим вначале, что $P \leq N$. Тогда $G = N$ – неабелева простая группа. Ввиду (12), мы можем полагать что некоторая максимальная подгруппа H из P слабо τ-квазинормальна в G. Если H не является τ-квазинормальной подгруппой в G, тогда, по лемме 2.2 (5), группа G непроста – противоречие. Следовательно, мы можем полагать, что H τ-квазинормальна в G. Пусть Q – произвольная силовская q-подгруппа группы $G = N$, где $q \neq p$. Тогда p делит порядок $|Q^G|$. Следовательно, $HQ = QH \neq G$. Поскольку Q^g также является силовской q-подгруппой в группе G для любого элемента $g \in G$, то $HQ^g = Q^gH \neq G$. Следовательно, согласно [11, теорема 3] группа G непроста – противоречие.

Предположим теперь, что $P \not\subset N$. Согласно (7), хотя бы одна максимальная подгруппа из P, скажем V, не имеет p-нильпотентное добавление в G. Ввиду (4) V слабо τ-квазинормальна в G. Пусть T – такая субнормальная подгруппа группы G, что $VT = G$ и $V \cap T \leq V_{\tau G}$. Если $V_{\tau G} = 1$, тогда ввиду (6) порядок силовской p-подгруппы из T равен p, следовательно, группа T p-нильпотентна. Поскольку T субнормальна в G и $|G:T| = p^n$ для некоторого натурального числа n, то получаем, что группа G p-нильпотентна, что противоречит (3). Таким образом, $V_{\tau G} \neq 1$. Согласно [10, (f)] $N = O^p(G) \leq T$. Тогда $V \not\subset N$, следовательно, $V \cap N \leq V \cap T \leq V_{\tau G}$. Поэтому $V \cap N \leq V_{\tau G} \cap N \leq V \cap N$, откуда следует, что $V \cap N = V_{\tau G} \cap N \neq 1$. Тогда согласно лемме 2.1 (3), (7) $V \cap N$ τ-квазинормальна в N. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы N. Тогда ввиду леммы 2.1 (3) $V \cap L = V \cap N \cap L$ τ-квазинормальна в L. Пусть L_r – силовская r-подгруппа в L, где $r \neq p$. Тогда p делит порядок $|(L_r)^L|$. Следовательно, $(V \cap L)(L_r)^x = (L_r)^x(V \cap L)$ для любого элемента $x \in L$. Очевидно, что $(V \cap L)(L_r)^x \neq L$. Это означает, что группа L непроста, согласно [11, теорема 3]. Это противоречие завершает доказательство данной теоремы.

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что теорема неверна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально. Если X – нормальная холлова подгруппа из E, тогда условия теоремы справедливы для группы G (относительно X) и для фактор-группы G/X (относительно E/X) (см. доказательство утверждения (1) теоремы 1.3 в [8]). Если $1 \neq X \neq E$, тогда $X \leq Z_{U\Phi}(G)$ и $E/X \leq Z_{U\Phi}(G/X)$ в силу выбора (G, E). Следовательно, $E \leq Z_{U\Phi}(G)$ – противоречие. Таким образом, для любой нормальной холловой подгруппы $X \neq 1$ группы E имеет место $E = X$. Предположим теперь, что силовская p-подгруппа P из E циклична, где p – наименьший простой делитель порядка $|E|$. Тогда согласно [7, IV, лемма 2.8] группа E p-нильпотентна. Следовательно, $E = P$, и поскольку P циклична, то каждый нефраттиниевый G-главный фактор группы E имеет простой порядок, т.е. $E \leq Z_{U\Phi}(G)$, – противоречие. Это означает, что P – нециклическая группа, поэтому в силу условий теоремы каждая максимальная подгруппа из P или каждая циклическая подгруппа из P порядка p и порядка 4 (если P является неабелевой 2-группой), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Тогда, по теореме 1.2, $E/O_{p'}(E) \leq Z_{U\Phi}(E/O_{p'}(E))$. Отсюда следует, что фактор-группа $E/O_{p'}(E)$ p-сверхразрешима. Поскольку p – наименьший простой

делитель порядка $|E|$, то $E/O_{p'}(E)$ p-нильпотентна. Это означает, что группа E p-нильпотентна. Следовательно, $E = P$, что ввиду теоремы 1.2 влечет $E \leq Z_{U\Phi}(G)$. Это противоречие завершает доказательство данной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205 – 221.
2. Lukyanenko, V.O. On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Acta Math. Hungar. – 2009. – Vol. 125, № 3. – P. 237 – 248.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. Shemetkov, L.A. On the *XΦ*-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 322, № 6. – P. 2106 – 2117.
5. Skiba, A.N. On weakly *S*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192 – 209.
6. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
8. Lukyanenko, V.O. On τ-quasinormal and weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 10. – P. 243 – 257.
9. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
10. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 182. – P. 285 – 293.
11. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90 – 93.

Поступила 28.12.2009

FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEMS OF WEAKLY *T*-QUASINORMAL SUBGROUPS

V. LUKYANENKO

Let H be a subgroup of a finite group G. We say that: (1) H is τ-quasinormal in G if H permutes with all Sylow subgroups Q of G such that $(|Q|, |H|) = 1$ u $(|H|, |Q^G|) \neq 1$; (2) H is weakly τ-quasinormal in G if G has a subnormal subgroup T such that $HT = G$ and $T \cap H \leq H_{\tau G}$, where $H_{\tau G}$ is the subgroup generated by all those subgroups of H which are τ-quasinormal in G. Let U be the class of all supersoluble finite groups and $Z_{U\Phi}(G)$ the largest normal subgroup of G whose all non-Frattini G-chief factors are cyclic. Our main result here is the following (Theorem 1.2): Let E be a normal subgroup of a group G and P a Sylow p-subgroup of E, where p is the smallest prime dividing $|E|$. Suppose that either every maximal subgroup of P or every cyclic subgroup of P with order p and with order 4 (if P is a non-abelian 2-group) not having a supersoluble supplement in G is weakly τ-quasinormal in G. Then $E/O_{p'}(E) \leq Z_{U\Phi}(G/O_{p'}(E))$.