ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Дифференциальное уравнение теплопроводности

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности.

Температурное поле – совокупность значений температур во всех точках рассматриваемого пространства для каждого момента времени $t = f(x, y, z, t)$.

Для упрощения вывода этого дифференциального уравнения сделаны следующие допущения:

– тело изотропно;

– физические параметры постоянны;

– деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим объемом;

– внутренние источники теплоты в теле $q_u = f(x, y, z, t)$ распределены равномерно.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии в формулировке:

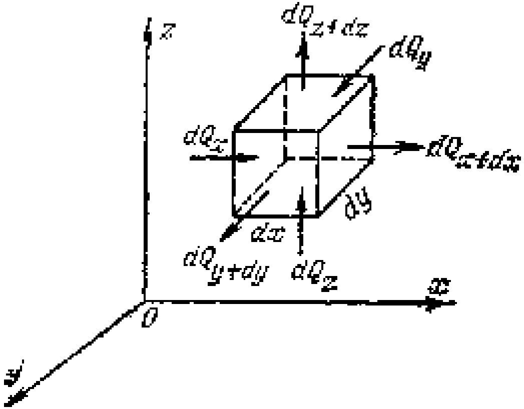
количество теплоты dQ, введенное в элементарный объем извне за время $d\tau$ теплопроводностью, а также от внутренних источников, равн изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процесса), содержащегося в элементарном объеме.

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \qquad (*)$$

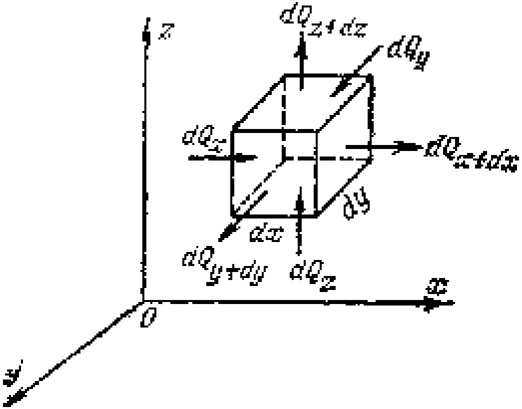
где dQ_1 – количество теплоты, Дж, введенное в элементарный объем теплопроводностью за время $d\tau$;

dQ_2 – количество теплоты, Дж, которое за время $d\tau$ выделилось в элементарном объем du за счет внутренних источников;

dQ – изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в элементарном объеме du, за время $d\tau$.



Для нахождения составляющих выделим теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz. Параллелепипед расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям.



Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей Ox, Oy, Oz обозначим соответственно dQ_x, dQ_y, dQ_z.

Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}.

Количество теплоты, подведенное к грани dydz=dF в направлении оси Ох за время $d\tau$, составляет $dQ_x = q_x dydzdt$,
где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани.

Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ох

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$$.

Разница количеств теплоты, подведенного к элементарному параллелепипеду и отведенного от него за время $d\tau$ в направлении оси Ox

$$dQ_{x1} = \left(q_x - q_{x+dx}\right) dydzdt$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx и может быть разложена в ряд Тейлора

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда:

$$dQ_{x1} = \left(q_x - q_{x+dx}\right) dydzdt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzdt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} du \cdot dt$$

Аналогично можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объему в направлениях двух других координатных осей Оу и Oz.

Количество теплоты *dQ*, подводимое теплопроводностью к рассматриваемому объему, будет равно

$$dQ_1 = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) du \cdot dt$$

Обозначим через q_u , Вт/м^3, количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема в единицу времени.

Тогда $dQ_2 = q_u du \cdot dt$

Третья составляющая уравнения (*) найдется в зависимости от характера термодинамического процесса изменения системы.

В случае рассмотрения изохорного процесса вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменения внутренней энергии вещества, заключенного в этом объеме, т.е.

$$dQ = dU = \left(r\,du \right) c_u t, \quad \frac{dQ}{dt} = \left(r\,du \right) c_u \frac{\partial t}{\partial t}$$

где c_u – изохорная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К);
ρ – плотность вещества, кг/м^3.

Подставляя полученные выражения в уравнение (*), получим

$$\frac{\partial t}{\partial t} = -\frac{1}{c_u\, r}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_u}{c_u\, r},$$

Проекции вектора плотности теплового потока на координатные оси Ox, Oy, Oz определяются законом Фурье:

$$q_x = -l \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -l \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -l \frac{\partial t}{\partial z}.$$

где λ – коэффициент теплопроводности (физический параметр вещества, характеризующий способность проводить теплоту), Вт/(м·°С).

Подставляя полученные выражения проекций вектора плотности теплового потока в уравнение (*), опуская индекс при *c*, и принимая теплофизические характеристики постоянными, получим

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{l}{c \cdot r}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_u}{c \cdot r} \quad (***)$$

Выражение (***) называется *дифференциальным уравнением теплопроводности*. Оно устанавливает связь между временнЫм и пространственным изменением температуры в любой точке тела.

Можно обозначить

$$\frac{l}{c \cdot r} = a \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t$$

Тогда выражение (***) имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a\nabla^2 t + \frac{q_u}{c \cdot r}$$

Выражение (***) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial j^{\,2}} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_u}{c\cdot r}$$

где r – радиус-вектор;

φ – полярный угол;

z – аппликата.

Коэффициент пропорциональности *a*, м^2/с, называется *коэффициентом температуропроводности* и является физическим параметром вещества.

Он характеризует скорость изменения температуры, т.е. является мерой теплоинерционных свойств тела. Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает бóльшим коэффициентом температуропроводности.

Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества.

Например, жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, следовательно, малым коэффициентом температуропроводности.

Металлы обладают малой тепловой инерционностью, т.к. они имеют большой коэффициент температуропроводности.

Если система тел не содержит внутренних источников теплоты ($q_\upsilon=0$), то

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a\nabla^2 t$$

Если имеются внутренние источники теплоты, но температурное поле соответствует стационарному состоянию, т.е. $t = t(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial t}{\partial t} = 0$$

При рассмотрении изобарного процесса вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменение энтальпии вещества, заключенного в этом объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dI \qquad (**)$$

Если рассматривать энтальпию единицы объема как $i = i(t, p)$, то

$$\frac{dI}{dt} = (r\,du)\,c_p\,\frac{\partial t}{\partial t} = (r\,du)\,\frac{\partial i}{\partial t}$$

где c_p – изобарная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг·К).

В итоге (**) имеет вид:

$$r\frac{\partial i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_u$$