Условия однозначности для процессов теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Чтобы выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности называются *условиями однозначности или краевыми условиями*.

Условия однозначности включают в себя:

– геометрические условия (форма и размеры тела);
– физические условия (физические свойства среды и тела λ, c, ρ, q_v);
– временнЫе (начальные) условия (распределение температур в теле в начальный момент времени);
– граничные условия (взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой):

а) *Граничные условия первого рода*. Задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени

$$t_c = f(x, y, z, t),$$

где t_c – температура на поверхности тела; x,y,z – координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение упрощается: $t_c = const$.

б) *Граничные условия второго рода*. Задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени

$$q_n = f(x, y, z, t)$$

где $q_п$ – плотность теплового потока на поверхности тела.

В простейшем случае $q_n = q_o = const$. Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) *Граничные условия третьего рода*. При этом задаются температура окружающей среды $t_ж$ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Рихмана: количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела t_c и окружающей среды $t_ж$ ($t_c > t_ж$)

$$q = a \cdot \left(t_{с} - t_{ж}\right)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К), характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи, должно равняться теплоте, подводимой к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т.е.

$$a \cdot (t_c - t_{ж}) = -l \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$$

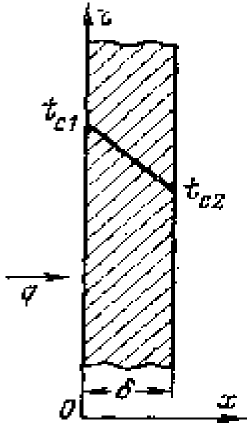
где n – нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при *n*=*0*).

Стационарная теплопроводность в телах простейшей формы

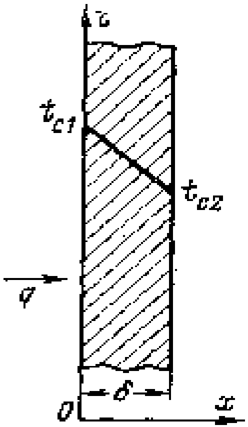
Плоская стенка

При установившемся или стационарном тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т.е. $\frac{\partial t}{\partial t} = 0$. Если внутренние источники теплоты отсутствуют ($q_u = 0$), то уравнение Фурье имеет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

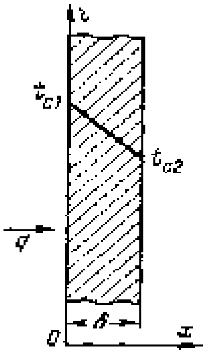


Рассмотрим изотропную стенку толщиной δ, высота и ширина которой являются величинами бесконечно большими относительно толщины δ, с постоянным коэффициентом теплопроводности λ. На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянными температуры t_{c1} и t_{c2}.



При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось Ох направить, как показано на рисунке, то температура в направлении осей Оу и Оz будет оставаться постоянной

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$



Температура будет функцией только одной координаты
и уравнение теплопроводности для рассматриваемого
случая запишется

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0$$

Зададим граничные условия в рассматриваемой задаче
при $x = 0$ $t = t_{c1}$
при $x = \delta$ $t = t_{c2}$

В результате решения поставленной задачи должно быть найдено распределение температуры в плоской стенке, т.е. $t = f(x)$, и получена формула для определения количества теплоты, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения Фурье.

Первое интегрирование $\frac{dt}{dx} = C_1$

Второе интегрирование $t = C_1 x + C_2$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

при x = 0 и $t = t_{c1}$ $C_2 = t_{c1}$

при x = δ и $t = t_{c2}$ $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d}$

В итоге, закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right) \cdot \frac{x}{d}$$

Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси *Ox*, воспользуемся законом Фурье

$$q = -l\,\frac{dt}{dx}, \text{ а } \frac{dt}{dx} = C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d}$$

Следовательно $q = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2})$

Из уравнения следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ, разности температур на наружных поверхностях стенки $(t_{c1} - t_{c2})$ и обратно пропорционально толщине стенки δ.

Отношение δ/λ, (м^2·К)/Вт называется тепловым или термическим сопротивлением стенки.

Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты Q_t , Дж, которое передаётся через поверхность стенки величиной F за промежуток времени τ

$$Q_t = q \cdot F \cdot t = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) \cdot F \cdot t$$

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из *n* однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоев и соответствующих коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений

$$q = \frac{l_1}{d_1} \cdot \left(t_{c1} - t_{c2}\right);$$

$$q = \frac{l_2}{d_2} \cdot \left(t_{c2} - t_{c3}\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q = \frac{l_n}{d_n} \cdot \left(t_{cn} - t_{c(n+1)}\right)$$

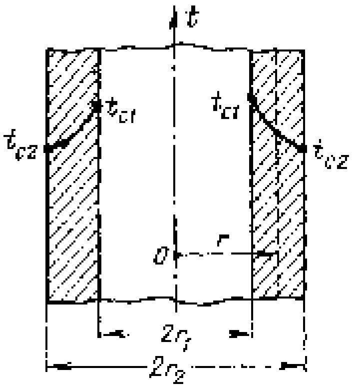
Выразив температурные напоры в каждом слое и сложив правые и левые части полученных уравнений, будем иметь

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \cdot \left(\frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \ldots + \frac{d_n}{l_n} \right).$$

Отсюда $$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \ldots + \frac{d_n}{l_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i}}$$

Величина $\sum_{i=1}^{i=n} d_i / l_i$, равна сумме термических сопротивлений всех *n* слоев, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

Цилиндрическая стенка



Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром $d_1=2r_1$ и наружным диаметром $d_2=2r_2$.

На поверхностях стенки заданы постоянные температуры t_{c1} и t_{c2}. В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки λ является постоянной величиной.

Необходимо найти распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

При этом ось Oz совмещена с осью трубы.

При заданных условиях температура изменяется только в радиальном направлении и температурное поле будет одномерным. Поэтому

$$\frac{\partial^2 t}{\partial j^{\,2}} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Уравнение Фурье примет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0$$

Граничные условия
при $r = r_1$ $t = t_{c1}$
при $r = r_2$ $t = t_{c2}$

Введём новую переменную $u = \dfrac{dt}{dr}$

тогда $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{d^2 t}{dr^2}$

Подставляя в уравнение Фурье, получим

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot u = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

Интегрируя, получаем

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 \quad \text{->} \quad u \cdot r = C_1 \quad \text{->} \quad \frac{dt}{dr} \cdot r = C_1 \quad \text{->} \quad dt = C_1 \frac{dr}{r}.$$

После интегрирования

$$t = C_1 \cdot \ln r + C_2 \qquad (*)$$

Подставляя граничные условия

$$t_{c1} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$
$$t_{c2} = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2$$

Решение уравнений дает

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad C_2 = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right) \cdot \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (*), получим

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$ или $$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right) \cdot \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$

Для нахождения количества теплоты, Вт, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной *F* в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье

$$Q = -l\,\frac{dt}{dr}\cdot F\ .$$

Учитывая, что $F = 2\pi \cdot r \cdot l$ и $$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} = -\frac{1}{r}\left(t_{c1} - t_{c2}\right)\frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

получаем $$Q = \frac{2 \cdot p \cdot l \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$, Вт.

Следовательно, количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Тепловой поток *Q* может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом расчетные формулы для плотности теплового потока, Вт/м^2, принимают вид

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot r_1 \cdot l} = q_1 = \frac{2 \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток через единицу внутренней поверхности);

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot r_2 \cdot l} = q_2 = \frac{2 \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток через единицу наружной поверхности);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{p \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2 \cdot l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток, проходящий через единицу длины трубы, Вт/м).