4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

ВОЗМУЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВАЯ СИСТЕМА С ЕДИНСТВЕННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.В. Кузьмич

Рассматривалась автономная возмущенная гамильтоновая дифференциальная система на плоскости

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1} = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \sum_{i=0}^{n} h_i(x,\mu) y^i = Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

зависящая от действительного параметра $\mu \in I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и натуральных параметров n, q. Функции $h_i : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, непрерывны по двум аргументам и $h_n(x,\mu) \neq 0$.

Для определения числа и расположения предельных циклов в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ применялся обобщенный метод Дюлака [1], который заключается в нахождении функции Дюлака-Черкаса $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и числа $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, удовлетворяющих неравенству

$$\Phi \equiv k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0\,(< 0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad X = (P,Q).$$

Для выделения класса систем вида (1), имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости, функция Ψ применялась в виде

$$\Psi(x,y) = \frac{n}{q} c x^{2q} + c y^{2n} - a, \; a, c \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{2}$$

В результате получен следующий результат

Теорема. *Система*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2q-1} + \mu \Big(\frac{n}{q} c x^{2q} - a \Big)^{2l-1} y^n \end{aligned} \tag{3}$$

имеет функцию Дюлака-Черкаса в виде полинома (2) для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и при $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, $q, n, l \in \mathbb{N}$, n – нечетное, $a, c \in \mathbb{R}^{>0}$. Таким образом, при указанных условиях система (3) имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Причем если предельный цикл существует, то является устойчивым (неустойчивым) при $\mu < 0$ $(\mu > 0)$.

Для проверки существования предельного цикла выполняется второй шаг, который заключается в построении дополнительной замкнутой трансверсальной кривой, окружающей замкнутую кривую, задаваемую уравнением $\Psi = 0$. Требуемая кривая на втором шаге находится за счет дополнительного применения признака Дюлака-Черкаса, или признака Дюлака, или их обобщений [2, 3].

С помощью этих методов для некоторых конкретных систем вида (3) доказано существование точно одного предельного цикла во всей фазовой плоскости.

Литература

1. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 42. № 5. С. 208–211.

2. Гринь А. А. *Трансверсальные кривые для установления точного числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 427–437.

3. Гринь А. А., Кузьмич А. В. *Признак Дюлака-Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 174–182.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

О.О. Курбанбаев

В работе исследуется на разрешимость задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n го порядка с отклоняющимся аргументом на симметричном отрезке. Результаты исследования таких задач находят широкое практические применение в технике, экономике и других областях науки $[1, 2]$.

Рассмотрим на симметричном отрезке $[-l, l]$ дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом и с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k x^{(n-k)}(t) + b_k x^{(n-k)}(-t)\right) = 0, \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде суммы двух функций

$$x(t) = u(t) + \vartheta(t),$$

где $u(t)$ – решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} c_k u^{(n-k)}(t) = 0 \tag{2}$$

удовлетворяющее условию $u(t) = u(-t)$, а $\vartheta(t)$ – решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} d_k \vartheta^{(n-k)}(t) = 0 \tag{3}$$

удовлетворяющее условию $\vartheta(t) = -\vartheta(-t)$, где $c_k = a_k + b_k$ и $d_k = a_k - b_k$.

Теорема. *Пусть коэффициенты* $a_k,\ b_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ *таковы, что системы*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (a_{2k} + b_{2k})\lambda^{n-2k} = 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (a_{2k+1} + b_{2k+1})\lambda^{n-2k-1} = 0 \end{cases} \tag{4}$$