гурвицева и у матрицы $(A_0 + F_0C)^{-1}(A_1 + F_1C)$ *все собственные числа лежат в единичном круге. Тогда решением системы (6) и системы:*

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(\alpha t) + L_0(Cz(t) - \hat{y}(t)) + L_1(Cz(\alpha t) - \hat{y}(\alpha t)) \tag{7}$$

является

$$\nu(t) = F_0w(t) + F_1w(\alpha t),$$
$$w(t) = z(t) + Pz(t) + Qz(\alpha t).$$

Матрицы P и Q выбираются согласно работе [2].

Заключение. В работе предложена теорема, дающая необходимое условие полной наблюдаемости систем вида (1), (2) и предложен метод построения приближения движения дифференциально–разностной системы с использованием асимптотического наблюдателя.

Литература

1. Екимов А.В., Жабко А.П., Яковлев П.В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Zhabko A.P., Tikhomirov O.G., Chizhova O.N. *The Prediction Scheme to the Linear Systems with Linearly Increasing and Constant Delays* // Fourth International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov, N. Smirnov, and A. Golovkina eds. Stability and Control Processes, 2020. P. 207–213.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

В основе применяемой методики исследования лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Для многих задач оптимизации динамических систем можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить систему конечных уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1}$$

где μ -– малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются уравнения (1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя метод пограничных функций, можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu)$, $i = \overline{1,k}$, по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \ldots, \quad i = \overline{1,k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (1). Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_i(\mu)$, $i = \overline{1,k}$, их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т.е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2}$$

Оказывается, что если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одной из них является вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2), что представляет собой неформальный этап исследования. Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

В докладе представлен обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению.

ПСЕВДОПРОЛОНГАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б.С. Калитин

В работе Т. Ура [1] представлено перспективное направление развития качественной теории устойчивости движения – теория пролонгаций. В дальнейшем эта теория использовалась в работах Ж.П. Аусландера, П. Сейберта, А. Пэльчера, О. Хайека и др. (см. [2-11]). Напомним необходимые обозначения и определения [8, 10]: $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X с метрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$; $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $\alpha > 0; (x_n)$ – последовательность точек в X; $L^+(x)$ – множество ω-(α-)предельных точек для $x \in X$; $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ – фазовое отображение, $\pi(x, t) = xt$.

Определение 1. Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система и M – замкнутое подмножество X. Будем говорить, что M :
-*устойчивое*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0) : \ d(M, xt) < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0;$$