Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В 2 частях

Часть 1

Под общей редакцией
В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско

Новополоцк
ПГУ
2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С71

Рекомендовано к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 3 от 14.12.2011)

АВТОРЫ:
В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско, В. А. Жак,
Т. И. Завистовская, А. П. Матепёнок

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. алгебры и методики преподавания
математики УО «ВГУ им. П. М. Машерова» Н. Т. ВОРОБЬЁВ;
д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики
УО «ПГУ» Э. М. ПАЛЬЧИК

С71 **Специальные главы высшей математики** : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско. – Новополоцк : ПГУ, 2013. – 136 с.

ISBN 978-985-531-379-4.

Изложены теоретические основы трех разделов курса высшей математики: «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы» и «Поверхностные интегралы»; спроектированы основные этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, вопросы к экзамену, глоссарий.

Предназначен для студентов и преподавателей технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-531-379-4 (ч. 1)
ISBN 978-985-531-378-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебно-методический комплекс (УМК) является частью серии учебно-методических изданий, разрабатываемых кафедрой высшей математики УО «ПГУ» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента В. С. Вакульчик. Теоретические и дидактические принципы разработки таких изданий изложены в нулевом учебном модуле [9]. Мы надеемся, что наши читатели знакомы, а, точнее, изучили этот УМК. А, ежели нет, то советуем ознакомиться хотя бы с его нулевым модулем.

В предлагаемом УМК, графическая схема которого представлена на рисунке 1, авторами предпринята попытка спроектировать процесс обучения математике как систему целей, содержания, форм, методов и средств обучения, обеспечивающих в своем взаимодействии организацию познавательной деятельности студентов с учетом дифференциации студенческой аудитории. Дидактическую основу УМК составляет дифференцированный и деятельностный подход к обучению математике, а также дидактические принципы научности, системности, доступности.

В применении к математике мы руководствуемся сформулированным А. А. Столяром исходным положением теории обучения математике: «Обучение математике есть дидактически целесообразное сочетание обучения математическим знаниям и математической деятельности». Под дифференцированным подходом к обучению математике понимается такая его организация, при которой каждый студент, овладевая некоторым минимумом математических знаний и их практических приложений, получает право и возможность расширять и углублять свои математические знания на более высоких уровнях усвоения. Отдельное внимание необходимо обратить на наличие в УМК таких дидактических средств как графические схемы, информационные таблицы, глоссарий, обобщенные планы, алгоритмические указания, алгоритмическое выделение этапов познавательной деятельности, которые позволяют организовать мыслительную деятельность по переработке математической информации, помогают обучающемуся в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний. Поскольку УМК предназначен для студентов технических специальностей, то он имеет прикладную направленность, содержит практические задачи, решение которых требует моделирования с помощью изучаемого математического аппарата. УМК содержит в себе возможности самоконтроля.

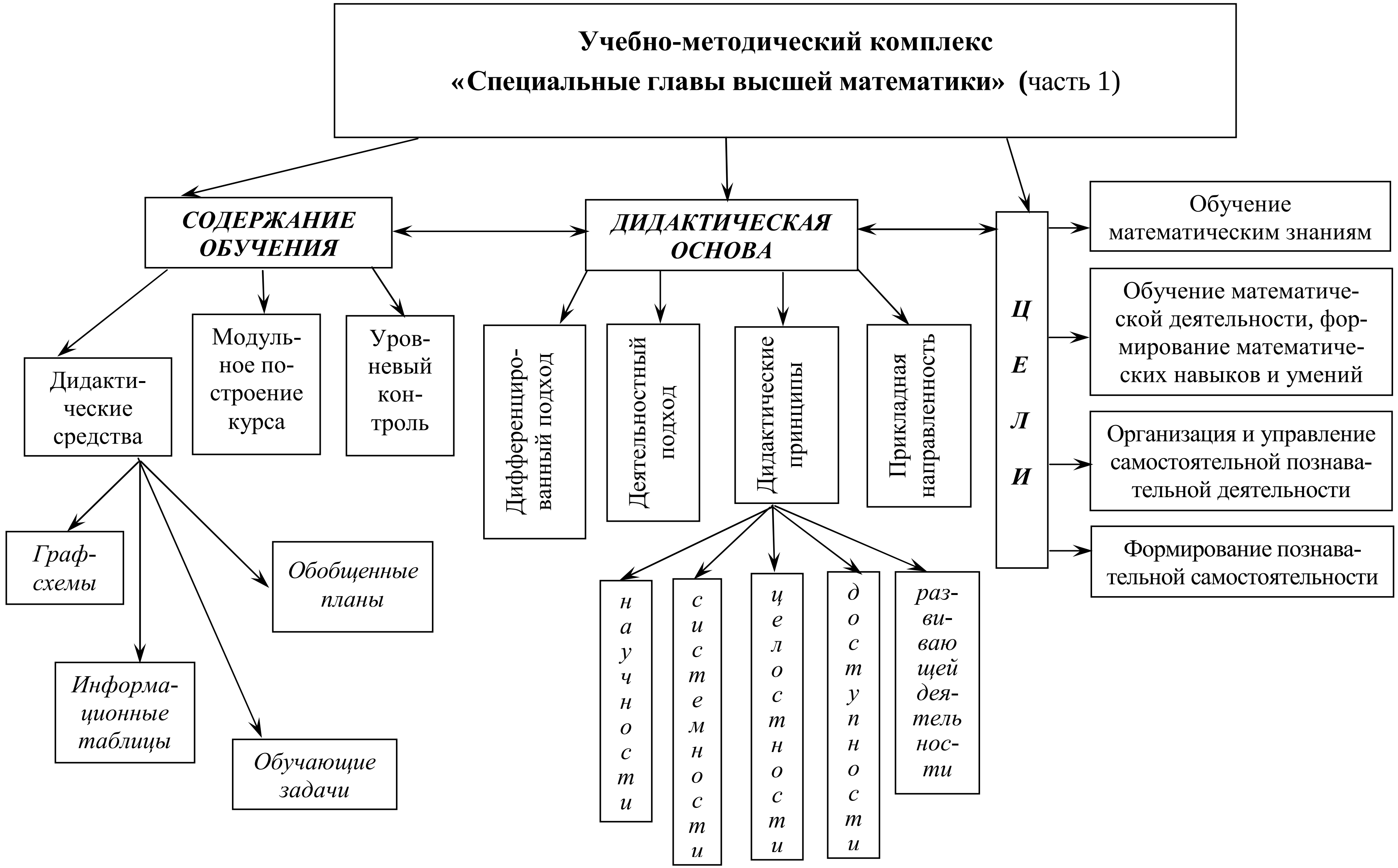

Учебно-методический комплекс
«Специальные главы высшей математики» (часть 1)
СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ
ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОСНОВА
Ц Е Л И
Обучение математическим знаниям
Обучение математической деятельности, формирование математических навыков и умений
Организация и управление самостоятельной познавательной деятельности
Формирование познавательной самостоятельности
Дидактические средства
Модульное построение курса
Уровневый контроль
Дифференцированный подход
Деятельностный подход
Дидактические принципы
Прикладная направленность
Граф-схемы
Обобщенные планы
Информационные таблицы
Обучающие задачи
научности
системности
целостности
доступности
развивающей деятельности

Рис. 1.

Считаем необходимым, еще раз привести методические рекомендации работы в информационном поле модуля, изложенные в нулевом учебном модуле [9].

В самом общем виде процесс познания новой информации состоит из следующих этапов: первичное восприятие → изучение основных ее элементов → углубление, обобщение, систематизация полученной информации → включение познанного нового знания в систему имеющихся представлений, знаний, мировоззрения в целом. Исходя из этих психолого-методологических соображений, предлагается следующая последовательность этапов работы в информационном поле модуля.

0. С помощью методической карты изучить содержание разделов лекционного материала.

1. Вход в модуль целесообразно осуществить с помощью графической схемы и информационной таблицы. Граф-схема и информационная таблица определенного раздела математики представляют собой максимально сжатый, компактно составленный справочный материал. Справочный материал информационной таблицы раскрывает основные блоки графической схемы рассматриваемого раздела.

Предложенные методические средства помогают при изучении новой информации увязать различные понятия, теоремы, формулы в единое целое; позволяют проследить логику построения теорий; служат эффективному прохождению всех этапов восприятия, усвоения, обобщения, систематизации, и в конечном итоге, логической организации новой информации. Структурированная наглядность содержания представленной информации облегчает ее усвоение за счет целостности представления и восприятия изучаемого объекта, направляет избирательность внимания и памяти. Все это способствует более глубокому уровню усвоения предмета, помогает находить главное и производное в изучаемом материале, анализировать его, учит рационально работать с новой информацией любого содержания.

2. Изучение теоретической части модуля следует начинать с беглого чтения всей информации. На втором этапе этой познавательной деятельности рекомендуется проработать каждый раздел, отдельные фрагменты при этом разумно параллельно проделать своей рукой. На третьем этапе, просмотрев еще раз графическую схему, отработав основные положения теоретической части модуля с помощью информационной таблицы, целесообразно прочитать еще раз весь теоретический материал с целью его

целостного восприятия, большей систематизации, логической организации и обобщения.

3. Практическая часть модуля представляет собой методически спроектированные практические занятия. Отметим, что они содержат как методические рекомендации преподавателям, так и методические рекомендации студентам. В этой связи, обратим внимание на наличие обучающих задач, решение вариантов аудиторных и внеаудиторных контрольных работ. Все это дополняет задачи и примеры, приведенные в теоретической части модуля, и создает предпосылки для овладения соответствующим математическим аппаратом, по крайней мере, на уровне воспроизводящей познавательной деятельности, позволяет освоить обучающемуся практическую часть информации модуля либо самостоятельно, либо под руководством преподавателя.

4. На выходе из модуля следует еще раз провести обобщение, систематизацию полученных знаний путем повторного изучения графической схемы, информационной таблицы, глоссария и выводов. Кроме того, практическая часть содержит в себе возможности для проведения контроля и самоконтроля результатов обучения: тесты трех уровней сложности с ответами. Поэтому на выходе из модуля рекомендуется, как минимум, выполнить тест первого уровня сложности. Тесты первого уровня сложности рекомендуется выполнить и непосредственно при подготовке к экзамену, зачету либо коллоквиуму.

Желаем успехов!

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 11

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном модуле рассматриваются кратные (двойные и тройные), криволинейные и поверхностные интегралы, которые имеют большое практическое применение при решении различных задач в технике, физике, механике. В частности, они используются в теории векторных полей, в математической физике и других разделах математики.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

Студент должен знать	*Студент должен уметь*
- определение и основные свойства двойных интегралов; - правила замены переменных в двойном интеграле; - формулы приложения двойных интегралов к решению задач геометрии и физики; - определение и основные свойства тройных интегралов; - общую замену переменных в тройном интеграле; - замену переменных в цилиндрической и сферической системах координат; - формулы приложений тройных интегралов к решению прикладных задач; - определение и свойства криволинейных интегралов I и II рода; - определение и свойства поверхностных интегралов 1 рода; - определение и свойства поверхностных интегралов 2 рода	- вычислять двойной интеграл в декартовых координатах с помощью повторного; - вычислять двойной интеграл, переходя к полярным координатам; - применять двойной интеграл при решении прикладных задач; - вычислять тройной интеграл в декартовых, цилиндрических и сферических координатах; - применять тройной интеграл к решению прикладных задач; - вычислять криволинейные интегралы I и II рода; - вычислять поверхностные интегралы 1 рода; - вычислять поверхностные интегралы 2 рода; - решать прикладные задачи с помощью поверхностных интегралов

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Наглядные и методические пособия	Формы контроля знаний
1. Задачи, приводящие к понятию интеграла по фигуре. Определение двойного интеграла по фигуре, его основные свойства и вычисление	I, II	1, 2, 3	ПЛ, ВДЗ
2. Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам	III, IV	1, 2, 3	ПДЗ ВДЗ
3. Общая замена переменных в тройном интеграле. Приложения кратных интегралов	V	1, 2, 3	ПДЗ ВДЗ
4. Определение криволинейных интегралов I и II рода, их основные свойства и вычисление.	VI	1, 3	ПДЗ Выдача ИДЗ
5. Определение и вычисление поверхностных интегралов 2 рода.	VII	2, 3	ПЛ ВДЗ
6. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов 1 рода, их свойства и вычисление.	VIII, IX	2, 3	ПДЗ Прием ИДЗ

Принятые сокращения:

ПЛ – проверка на лекциях;

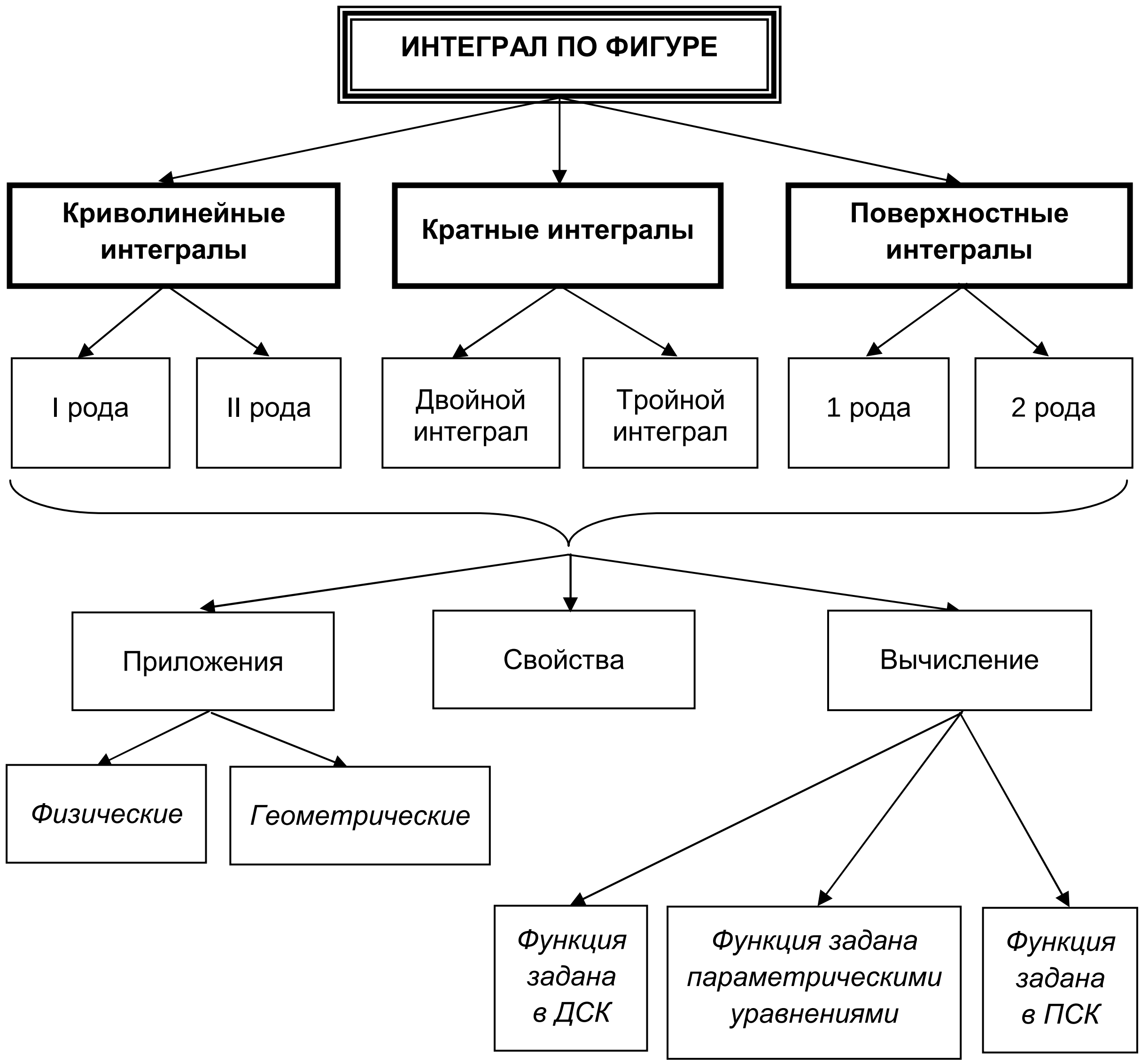
ВДЗ – выдача домашнего задания;

ПДЗ – проверка домашнего задания;

ИДЗ – индивидуальное домашнее задание.

Перечень тем практических занятий приведен в практической части модуля.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА «КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

1. ***Двойным интегралом*** от функции $f(x,y)$ по области D называется конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, где λ – наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,.$$

Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области *D*, то она интегрируема в этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если $f(x,y) > 0$, то двойной интеграл от функции $z = f(x,y)$ по области *D* равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *Oz*, снизу – плоскостью $z = 0$.

Механический смысл двойного интеграла. Двойной интеграл от функции $z = f(x,y) > 0$ по области *D* представляет собой массу области *D*, если подынтегральную функцию $f(x,y)$ считать плотностью этой фигуры в точке $M(x,y)$.

Свойства двойного интеграла

1) $\iint\limits_D C\, f(x,y)\,dS = C \iint\limits_D f(x,y)\,dS \qquad (C = \text{const})$.

2) $\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y) \right) dS = \iint\limits_D f_1(x,y)\,dS \pm \iint\limits_D f_2(x,y)\,dS$.

3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS$,

где D_1 и D_2 – области, на которые разбита область *D*.

4) Если $f(x,y) \le \varphi(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dS \le \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dS$.

5) Если в области *D* $\quad m \le f(x,y) \le M$, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dS \le MS,$$

где *S* – площадь области *D*.

6) $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \mu \cdot S \qquad (m \le \mu \le M)$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух однократных (повторных) интегралов по одной из следующих формул:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Если область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат $(a \le x \le b, c \le y \le d)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Приложения двойных интегралов к задачам геометрии

1) Вычисление площадей плоских фигур

$$S = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\varphi.$$

2) Вычисление объемов тел

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi .$$

3) Вычисление площадей поверхностей.

Площадь σ гладкой поверхности, заданной уравнением $z = z(x,y)$, выражается формулой

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dx\,dy,$$

где D – проекция этой поверхности на плоскость xOy.

Приложения двойных интегралов к механике

1) Масса и статические моменты пластинки.

Если D – область на плоскости xOy, занятая пластинкой, а $\delta(x,y)$ – поверхностная плотность в точке $M(x,y)$, то масса пластинки

$$m = \iint\limits_D \delta(x,y)\,dx\,dy,$$

статические моменты M_x и M_y относительно осей *Ox* и *Oy*:

$$M_x = \iint\limits_D y\,\delta(x,y)\,dx\,dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy.$$

Если пластинка однородная, то $\delta(x,y) = \text{const}$, ее часто полагают равной 1.

2) Координаты центра тяжести пластинки.

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{m}.$$

В случае однородной пластинки

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dx\,dy, \qquad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy,$$

где S – площадь пластинки.

3) Моменты инерции пластинки

$$I_x = \iint\limits_D y^2\delta(x,y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\delta(x,y)\,dx\,dy$$

относительно осей координат, а момент инерции относительно начала координат (полярный)

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y)\,dx\,dy.$$

2. *Тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области Ω называется конечный предел ее интегральной суммы при $\lambda \to 0$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i,$$

где λ – наибольший диаметр элементарных тел ΔV_i.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной области Ω, то указанный предел $\exists$ и конечен (он не зависит от способа разбиения области Ω на элементарные и от выбора точек M_i).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

где область Ω ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, проекцией Ω на плоскость *xOy* является некоторая область *D*, определяемая неравенствами: $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Если область Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $k \le z \le e$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^e f(x,y,z)\,dz.$$

Замена переменных в тройном интеграле

При переходе к ***цилиндрическим*** координатам ρ, φ, h, связанным с *x*, *y*, *z* формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = h$ ($0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < h < +\infty$),

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dh.$$

При переходе к ***сферическим*** координатам ρ, φ, θ, связанным с *x*, *y*, *z* формулами $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ ($0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$),

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Приложения тройных интегралов

Объем *V* тела Ω выражается формулой

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dh = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Масса тела, занимающего объем Ω, плотность которого в точке $M(x,y,z)$ $\delta = \delta(x,y,z)$, равна

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра тяжести $C\left(x_c, y_c, z_c\right)$

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} x\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,\quad y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} y\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} z\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz.$$

В числителях этих формул стоят статические моменты относительно плоскостей координат: M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}.

Моменты инерции относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,\quad I_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\,\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz.$$

Моменты инерции относительно координатных осей

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega}\left(y^2 + z^2\right)\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,\quad I_y = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + z^2\right)\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2\right)\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz.$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\delta\left(x, y, z\right)dx\,dy\,dz.$$

Если тело однородное, то принимается $\delta = 1$.

3. ***Криволинейным интегралом I рода*** (по длине дуги) по дуге кривой L от функции $f\left(x, y, z\right)$ называется предел интегральной суммы

$$\int\limits_L f\left(x, y, z\right)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta l_i,$$

где λ – длина наибольшего участка разбиения L на части.

На кривой L, целиком лежащей в плоскости xOy, функция f от координаты z не зависит, поэтому

$$\int\limits_L f\left(x, y\right)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta l_i.$$

Основные свойства:

1) Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_{BA} f(M)\,dl.$$

2) $\int\limits_{AB} \left(f_1(M) \pm f_2(M) \right) dl = \int\limits_{AB} f_1(M)\,dl \pm \int\limits_{AB} f_2(M)\,dl.$

3) $\int\limits_{AB} C \cdot f(M)\,dl = C \cdot \int\limits_{AB} f(M)\,dl \qquad (C = \text{const}).$

4) $\int\limits_{L} f(M)\,dl = \int\limits_{L_1} f(M)\,dl + \int\limits_{L_2} f(M)\,dl + \ldots + \int\limits_{L_n} f(M)\,dl.$

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями:

L: $\quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$, то

$$\int\limits_{L} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt.$$

Если L лежит в плоскости xOy, то

$$\int\limits_{L} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

Для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$,

$$\int\limits_{L} f(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\left(x, y(x)\right) \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $x = x(y) \qquad (c \le y \le d)$,

$$\int\limits_{L} f(x, y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f\left(x(y), y\right) \sqrt{1 + x'^2}\,dy.$$

Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$,

$$\int\limits_{L} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

Если подынтегральную функцию рассматривать как линейную плотность $\delta(x,y,z)$ кривой L, то масса этой кривой

$$m=\int_L \delta(x,y,z)\,dl\,,$$

для плоского случая

$$m=\int_L \delta(x,y)\,dl\,.$$

4. ***Криволинейным интегралом II рода*** (по координатам) называется предел соответствующей интегральной суммы

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i+R(M_i)\Delta z_i\big),$$

где λ – длина наибольшей из проекций Δl_i на оси координат (Δx_i, Δy_i, Δz_i).

На кривой L, целиком лежащей в плоскости xOy, функции P, Q, R не зависят от z, $\Delta z_i=0$, $dz=0$, поэтому

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\big).$$

Криволинейный интеграл II рода зависит от выбора направления обхода кривой

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{BA} Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

Вычисление криволинейного интеграла II рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,x'(t)\;+\;Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,y'(t)\;+$$

$$+\;R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\;\Big)dt\,.$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости xOy,

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y=y(x)$ $\quad (a\le x\le b)$,

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\Big(\ P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\ \Big)dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $x=x(y)$ $\quad (c\le y\le d)$,

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_c^d\Big(\ P\big(x(y),y\big)\ x'(y)\ +Q\big(x(y),y\big)\ \Big)dy.$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы $\overline{F}$ на координатные оси, то криволинейный интеграл II рода выражает работу этой силы, точка приложения которой описывает кривую L.

$$A=\int\limits_L Pdx+Qdx+Rdz.$$

5. ***Поверхностным интегралом 1 рода*** от функции $f(x,y,z)$ по поверхности (σ) называется предел соответствующей интегральной суммы

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i,$$

где λ – наибольший из диаметров частичных областей $\Delta\sigma_i$.

Поверхностный интеграл 1 рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейных интегралов I рода.

Если поверхность (σ) задана уравнением $z=z(x,y)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\ dx\,dy,$$

где D_1 – проекция поверхности (σ) на плоскость xOy.

Если (σ): $y=y(x,z)$, D_2 – проекция (σ) на xOz, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{D_2} f\big(x,y(x,z),z\big)\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\ dx\,dz.$$

Если (σ): $x = x(y,z)$, D_3 – проекция (σ) на yOz, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_3} f\big(x(y,z),y,z\big)\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}\,dy\,dz.$$

Приложения интегралов 1 рода

1) ***Площадь*** σ поверхности (σ)

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma.$$

2) ***Масса*** материальной поверхности (σ)

$$m = \iint\limits_{(\sigma)} \delta(x,y,z)\,d\sigma,$$

где $\delta(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы.

3) ***Координаты центра тяжести*** $C(x_c, y_c, z_c)$ поверхности (σ)

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} x\,\delta(x,y,z)\,d\sigma, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} y\,\delta(x,y,z)\,d\sigma,$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} z\,\delta(x,y,z)\,d\sigma.$$

4) ***Моменты инерции*** относительно координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \left(z^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma, \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma,$$

$$I_z = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma.$$

5) ***Моменты инерции*** относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \iint\limits_{(\sigma)} z^2\,\delta(x,y,z)\,d\sigma, \quad I_{xz} = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,\delta(x,y,z)\,d\sigma,$$

$$I_{yz} = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\,\delta(x,y,z)\,d\sigma.$$

6. ***Поверхностным интегралом 2 рода*** от функции $f(x,y,z)$ по поверхности (σ) называется предел интегральной суммы

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)\,dx\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i,$$

где λ – наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_i$, ΔS_i – проекции частей $(\Delta\sigma_i)$ на плоскость *xOy*.

Наиболее общим видом интеграла 2 рода является интеграл

$$\iint_{(\sigma)} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

где *P*, *Q*, *R* – непрерывные функции в точках двухсторонней поверхности (σ).

Если поверхность (σ) однозначно проецируется в область D_1 плоскости *xOy* и $z = z(x,y)$ – ее уравнение, то

$$\iint_{(\sigma)} R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint_{D_1} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dx\,dy,$$

где знак плюс берется, если на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, и знак минус, когда $\cos\gamma < 0$.

Аналогично,

$$\iint_{(\sigma)} Q(x,y,z)\,dx\,dz = \pm\iint_{D_2} Q\big(x,y(x,z),z\big)\,dx\,dz,$$

$$\iint_{(\sigma)} P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint_{D_3} R\big(x(y,z),y,z\big)\,dy\,dz,$$

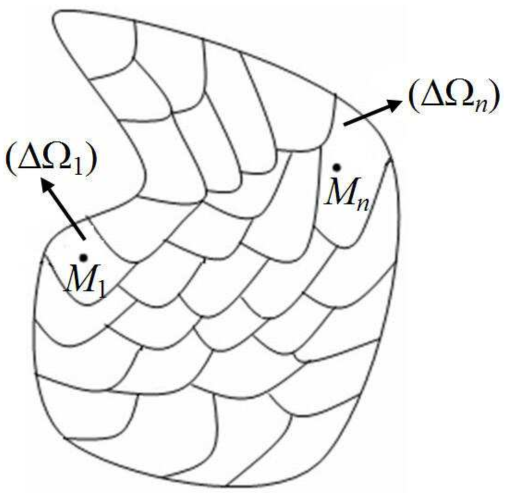
где D_2 и D_3 – проекции поверхности (σ) на плоскости *xOz* и *yOz*, в первой формуле берется знак $\cos\beta$, во второй $\cos\alpha$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали к выбранной стороне поверхности.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

11.0. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ

11.0.1. Задачи, приводящие к понятию интеграла по фигуре

Задача 1 (о массе). Вычислить массу m тела (Ω), плотность ρ которого известна, но переменна.



Решение. Тело (Ω) разобьем произвольным образом на элементарные части объемов: $\Delta\Omega_1$, …, $\Delta\Omega_n$. Выберем в каждой элементарной части произвольным образом по точке соответственно M_1, M_2, …, M_n. Поскольку разбиение мы производим на элементарные (бесконечно малые) части, то внутри каждой из них плотность можно считать постоянной. Тогда,

$$\Delta m_1 = \rho\left(M_1\right)\cdot\Delta\Omega_1,$$

$$\Delta m_2 = \rho\left(M_2\right)\cdot\Delta\Omega_2,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots,$$

$$\Delta m_n = \rho\left(M_n\right)\cdot\Delta\Omega_n.$$

Для всего тела получаем

$$m(\Omega)\approx\sum_{k=1}^{n}\rho\left(M_k\right)\cdot\Delta\Omega_k \;\Rightarrow$$

$$m(\Omega)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta\Omega_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\rho\left(M_k\right)\cdot\Delta\Omega_k. \qquad (11.0.1)$$

Задача 2. Вычислить заряд, распределенный в теле (Ω) с переменной плотностью σ.

Решение. Проводя разбиение тела на элементарные части и рассуждая аналогично задаче 1, получим

$$q=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta\Omega_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\sigma\left(M_k\right)\cdot\Delta\Omega_k. \qquad (11.0.2)$$

З а м е ч а н и е 1. Масса или заряд могут быть распределены не по объему, а по *поверхности* или по *линии*. Для поверхности это означает, что одно из измерений части пространства, занятой массой или зарядом, значительно меньше двух других; для линии – два измерения значительно меньше третьего. И в этих случаях формулы (11.0.1), (11.0.2) остаются в силе, если под плотностью понимать поверхностную (т. е. отнесенную к единице площади) или линейную (т. е. отнесенную к единице длины) плотность, а под $\Delta\Omega_k$ понимать, соответственно, площадь или длину кусочка $(\Delta\Omega_k)$.

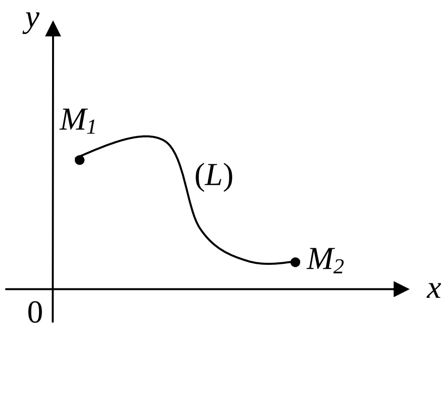
З а м е ч а н и е 2. С формальной точки зрения формулы (11.0.1) и (11.0.2) единообразны и содержание их зависит лишь от того, что понимается под $\Delta\Omega_k$, что рассматривается в качестве области суммирования $(\Delta\Omega_k)$ и качественной сути $\rho(M_k)$ или $\sigma(M_k)$. Данный факт дает основание для общего определения следующего понятия.

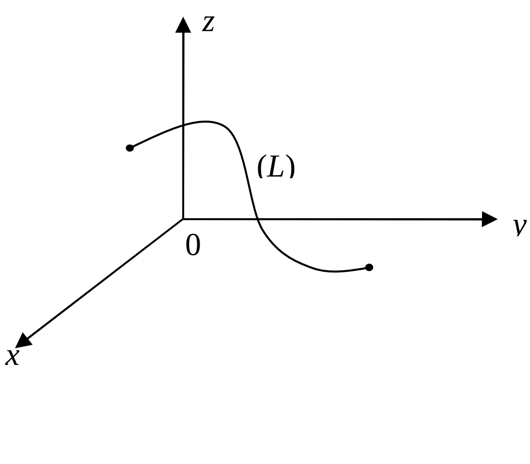
11.0.2. Понятие определенного интеграла по фигуре от скалярной функции

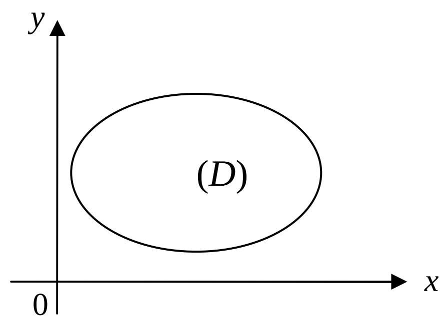
О п р е д е л е н и е 11.0.2.1. Множество точек называется ***связным***, если любые две из него можно соединить линией, все точки которой принадлежат данному множеству.

О п р е д е л е н и е 11.0.2.2. Под ***геометрической фигурой*** (Ω) будем понимать одно из связных (включая границу) множеств точек:

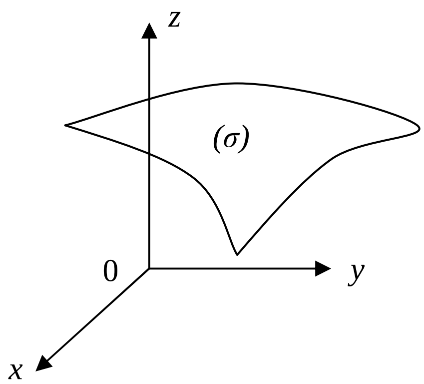
а) *линия* (L) в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, в частности, отрезок $[a,b]$ координатной оси, где мера – длина.



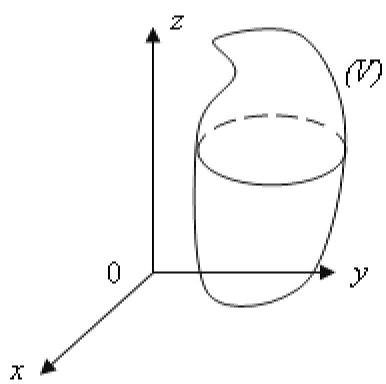




б) область (D) в $\mathbb{R}^2$ – плоская область, где мера – площадь.



в) поверхность (σ) в $\mathbb{R}^3$, где мера – площадь.



г) пространственная область (V) в $\mathbb{R}^3$, ограниченная замкнутой поверхностью (σ) – тело в пространстве, где мера – объем.

Определение 11.0.2.3. В общем случае будем говорить, что $\Delta\Omega_k$ есть ***мера*** области или фигуры $(\Delta\Omega_k)$, понимая под этим:

1) длину,

2) площадь или

3) объем,

в зависимости от того, рассматриваются объемные, поверхностные или линейные области.

Определение 11.0.2.4. Пусть задана некоторая фигура (Ω) и в ней мера Ω в смысле определения 11.0.2.3. Пусть в каждой точке M фигуры (Ω) задана скалярная функция $u = f(M)$, принимающая конечные значения. Разобьем фигуру (Ω) на элементарные части $(\Delta\Omega_1)$, …, $(\Delta\Omega_n)$.

В каждом из элементарных разбиений выберем точки $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$. Составим ***интегральную сумму***

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\,\Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\Delta\Omega_k\,. \qquad (11.0.2.1)$$

Предел интегральной суммы (11.0.2.1) в процессе, когда разбиение фигуры (Ω) бесконечно измельчается и $\max\Delta\Omega_k \to 0$, называется ***интегралом от функции f по фигуре*** (Ω)**.** Обозначается:

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} f\left(M\right)d\Omega = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta\Omega_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\cdot\Delta\Omega_k\,. \qquad (11.0.2.2)$$

Определение 11.0.2.5. Функция, для которой существует предел (11.0.2.2), называется ***интегрируемой*** на фигуре (Ω).

ТЕОРЕМА 11.0.1. Если функция $u = f\left(M\right)$ непрерывна на фигуре (Ω), то она и интегрируема на фигуре (Ω).

11.0.3. Основные свойства интегралов по фигуре

Свойство 1. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_{(\Omega)} \left(u_1 \pm u_2\right)d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} u_1\,d\Omega \pm \int\limits_{(\Omega)} u_2\,d\Omega\,.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int\limits_{(\Omega)} Cu\,d\Omega = C\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega\,.$$

Упражнение. Свойства 1-2 доказать самостоятельно.

Свойство 3 (аддитивности, или теорема о разбиении области интегрирования). При любом разбиении области (Ω) на части, например, (Ω_1) и (Ω_2), будет выполняться равенство:

$$\int\limits_{(\Omega)} u\,d\Omega = \int\limits_{(\Omega_1)} u\,d\Omega + \int\limits_{(\Omega_2)} u\,d\Omega\,.$$

С в о й с т в о 4. Интеграл от единицы равен мере области интегрирования:

$$\int\limits_{(\Omega)} d\Omega = \Omega \quad \Big(\int\limits_{(\Omega)} dl = l\,,\ \int\limits_{(\Omega)} dV = V\,,\ \int\limits_{(\Omega)} dS = S \Big).$$

С в о й с т в о 5 (случайной симметрии). Если в прямоугольной системе координат область интегрирования симметрична относительно начала координат и подынтегральная функция: а) четная, то $\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = 2 \int\limits_{(\Omega_1)} u\, d\Omega$, где (Ω_1) – одна из симметричных частей; б) нечетная, то $\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = 0$.

С в о й с т в о 6. Неравенства можно интегрировать.

$$\text{Если } u_1 \le u_2, \text{ то } \int\limits_{(\Omega)} u_1\, d\Omega \le \int\limits_{(\Omega)} u_2\, d\Omega .$$

С в о й с т в о 7. Самая грубая оценка интеграла

$$u_{\min} \cdot \Omega \le \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega \le u_{\max} \cdot \Omega .$$

С в о й с т в о 8 (теорема о среднем).

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = \bar{u} \cdot \Omega,$$

где $\bar{u}$ – среднее значение функции в области (Ω).

Из этого свойства следует $\bar{u} = \dfrac{\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega}{\Omega}$ (например, средний заряд на поверхности (σ)).

З а м е ч а н и е. Все свойства легко иллюстрировать, если под *u* понимать, например, плотность неравномерно распределенной массы, а под интегралом – саму массу.

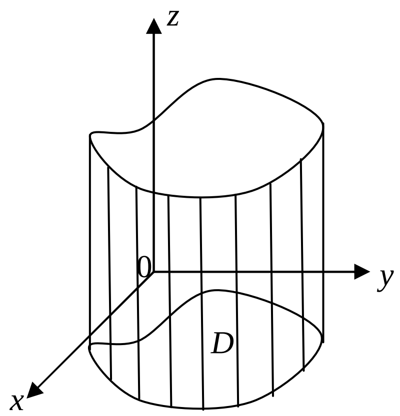
С в о й с т в о 9. Имеет место неравенство:

$$\left| \int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega \right| \le \int\limits_{(\Omega)} |\, u \,|\, d\Omega .$$

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА, ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

11.1.1. Объем цилиндрического тела. Определение двойного интеграла

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью *Oxy*, поверхностью, с которой любая прямая, параллельная оси *Oz*, пересекается не более чем в одной точке, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*.

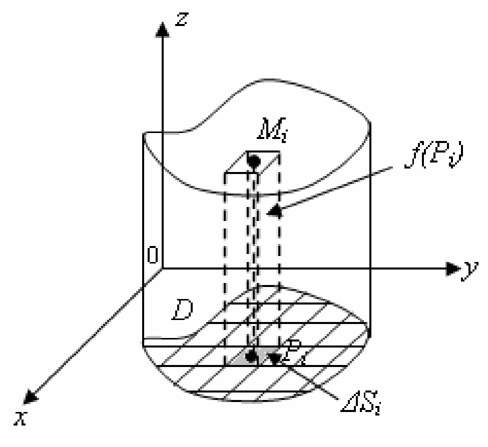


Область *D*, высекаемая в плоскости *Oxy* цилиндрической поверхностью, называется ***основанием*** цилиндрического тела. В частных случаях боковая цилиндрическая поверхность может отсутствовать. Примером тому служит тело, ограниченное плоскостью *Oxy* и верхней полусферой $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Обычно тело можно составить из некоторого числа цилиндрических тел и искомый объем определить как сумму объемов цилиндрических тел, составляющих это тело.

Пусть $z = f(x, y)$ есть уравнение поверхности, ограничивающей цилиндрическое тело. Будем считать функцию $f(x, y)$ непрерывной в области *D* и сначала предположим, что поверхность целиком лежит над плоскостью *Oxy*, т. е., что $f(x, y) > 0$ всюду в области *D*.

Обозначим искомый объем цилиндрического тела через *V*. Разобьем основание цилиндрического тела – область *D* – на некоторое число *n* областей произвольной формы; будем называть их *частичными областями*. Пронумеровав частичные области в каком-нибудь порядке, обозначим их площади через ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n.



Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси *Oz*. Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность на *n* кусков, соответствующих *n* частичным областям.

Таким образом, цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел. Выберем в каждой частичной области произвольные точки $P_i\left(x_i, y_i\right)$ и заменим соответствующее частичное тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной $z_i = f\left(x_i, y_i\right)$. В результате получим n-ступенчатое тело, объем которого равен

$$V_n = f\left(x_1, y_1\right)\Delta S_1 + f\left(x_2, y_2\right)\Delta S_2 + \ldots + f\left(x_n, y_n\right)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i .$$

Принимая объем V данного цилиндрического тела приближенно равным объему построенного n-ступенчатого тела, будем считать, что V_n тем точнее выражает V, чем больше n и чем меньше каждая из частичных областей. Переходя к пределу при $n \to \infty$, будем требовать, чтобы не только площадь каждой частичной суммы стремилась к нулю, но чтобы стремились к нулю все ее размеры. Если назвать *диаметром* области наибольшее расстояние между точками ее границы, то высказанное требование будет означать, что каждый из диаметров частичных областей должен стремиться к нулю, при этом области будут стягиваться в точку.

В соответствии со сказанным, мы принимаем искомый объем V равным пределу, к которому стремится V_n при стремлении к нулю наибольшего диаметра λ частичных областей (при этом $n \to \infty$).

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta S_i .$$

К отысканию предела подобных сумм для функций двух переменных приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме тела.

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть $f\left(x, y\right)$ – любая функция двух переменных (не обязательно положительная), непрерывная в некоторой области D, ограниченной замкнутой линией. Разобьем область D на частичные области, как указано выше, выберем в каждой частичной области по произвольной точке $P_i\left(x_i, y_i\right)$ и составим сумму:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta S_i , \tag{11.1.1}$$

где $f\left(x_i, y_i\right)$ – значение функции в точках P_i, а ΔS_i – площадь i-й частичной области.

Сумма (11.1.1) называется *n-й интегральной суммой* для функции $f(x,y)$ в области *D*, соответствующей данному разбиению этой области на *n* частичных областей.

Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, построенных с помощью функции $f(x,y)$ для данной области *D* при различных способах разбиения области *D* на части ΔS_i.

Определение. ***Двойным интегралом*** от функции $f(x,y)$ по области *D* называется предел, к которому стремится последовательность интегральных сумм при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей λ.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)\,dS .$$

Читается: «Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ на dS по области *D*». Выражение $f(x,y)\,dS$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x,y)$ – ***подынтегральной функцией***, dS – ***элементом площади***, область *D* – ***областью интегрирования***, наконец, переменные x и y называются ***переменными интегрирования***.

Таким образом, объем цилиндрического тела ($f(x,y) > 0$)

$$V = \iint_D f(x,y)\,dS . \qquad (11.1.2.)$$

Это **геометрический смысл двойного интеграла**.

ТЕОРЕМА 11.1.1 (о существовании двойного интеграла). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области *D*, ограниченной замкнутой линией, то ее последовательность интегральных сумм стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, т. е. двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$, не зависит от способа разбиения области *D* на частичные области и от выбора в них точек P_i.

Двойной интеграл представляет собой число, зависящее только от подынтегральной функции и области интегрирования и вовсе не зависящее от обозначений переменных интегрирования, например:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(u,v)\,dS .$$

11.1.2. Свойства двойных интегралов

Свойства двойных интегралов повторяют соответствующие свойства определенного интеграла. Поэтому приведем их без доказательства.

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций

$$\iint_D \big(f(x,y) + \varphi(x,y) + \ldots + \psi(x,y) \big) dS =$$

$$= \iint_D f(x,y)\, dS + \iint_D \varphi(x,y)\, dS + \ldots + \iint_D \psi(x,y)\, dS .$$

Свойство 2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ двойного интеграла

$$\iint_D C f(x,y)\, dS = C \iint_D f(x,y)\, dS \quad (C = \text{const}).$$

Свойство 3. Если область интегрирования D разбита на две части D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \iint_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint_{D_2} f(x,y)\, dS .$$

Свойство 4. Если во всех точках области D функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ удовлетворяют условию $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)\, dS \geq \iint_D \varphi(x,y)\, dS .$$

Если в двойном интеграле подынтегральная функция тождественно равна 1, то двойной интеграл равен площади S области интегрирования $S = \iint_D dS$.

Свойство 5. Если функция $f(x,y)$ во всех точках области интегрирования D удовлетворяет неравенствам

$$m \leq f(x,y) \leq M, \text{ то } \quad mS \leq \iint_D f(x,y) dS \leq MS,$$

где S – площадь области D.

Свойство 6. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, т. е. $\iint_D f(x,y)\, dS = f(\xi,\eta) \cdot S$.

Значение $f(\xi,\eta)$, находимое из последнего равенства, называется ***средним значением функции*** $f(x,y)$ в области *D*.

Геометрически теорему о среднем для двойного интеграла можно сформулировать так: *существует цилиндр, основание которого совпадает с основанием D данного цилиндрического тела, высота равна аппликате поверхности* $z = f(x,y)$ *в некоторой точке основания, а его объем равен объему цилиндрического тела. Указанная аппликата и изображает среднее значение функции* $f(x,y)$ *в области D.*

11.1.3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

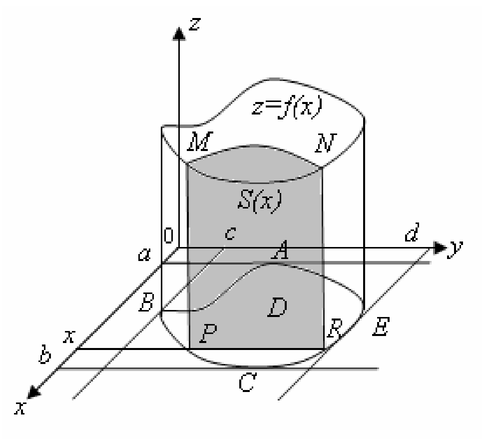
При вычислении двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ элемент площади dS удобно представить в ином виде. Будем разбивать область интегрирования *D* в плоскости *Oxy* на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Этими линиями служат прямые, параллельные соответственно оси *Oy* и оси *Ox*, а частичными областями – прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Ясно, что площадь каждой частичной области ΔS будет равна произведению соответствующих Δx и Δy. Поэтому элемент площади dS запишем в виде $dS = dx \cdot dy$, т. е. *элемент площади* в декартовых координатах является произведением дифференциалов независимых переменных *x* и *y*, поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (11.1.3)$$

Будем исходить из того, что двойной интеграл выражает объем *V* цилиндрического тела с основанием *D*, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$. Вспомним, что объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (11.1.4)$$

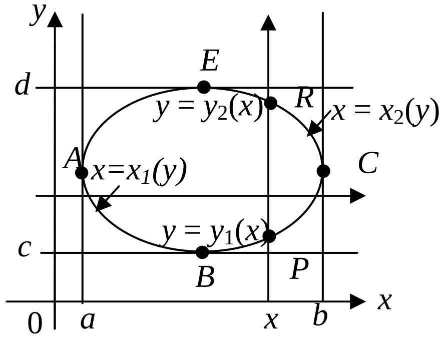
где $S(x)$ – площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x = a$ и $y = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело. Применим теперь эту формулу к вычислению двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.



Предположим сначала, что область интегрирования D удовлетворяет следующему условию: любая прямая, параллельная оси Ox или оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Область D заключим внутри прямоугольника $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, стороны которого касаются границы области в точках A, B, C, E. Отрезок $[a,b]$ является ортогональной проекцией области D на ось Ox, а отрезок $[c,d]$ – ортогональной проекцией области D на ось Oy. Покажем область D в плоскости xOy.

Точками A и C граница разбивается на две линии, каждая из которых пересекается с любой прямой параллельной оси Oy в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в форме, разрешенной относительно y:



$$y = y_1(x) \quad (ABC),$$

$$y = y_2(x) \quad (AEC).$$

Аналогично точками B и E граница разбивается на линии BAE и BCE, уравнения которых можно записать так:

$$x = x_1(y) \quad (BAE),$$

$$x = x_2(y) \quad (BCE).$$

Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью, параллельной плоскости Oyz, т. е. $x = \text{const}$, $a \le x \le b$. В сечении получим криволинейную трапецию $PMNR$, площадь которой выражается интегралом от функции $f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y, причем y изменяется от ординаты точки P до ординаты точки R. Точка P есть точка входа прямой $x = \text{const}$ (в плоскости Oxy) в область D, а R – точка выхода ее из этой области. Из уравнений линий ABC и AEC следует, что ординаты этих точек при фиксированном x соответственно равны $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ дает выражение для площади плоского сечения $PMNR$. Ясно, что величина этого интеграла зависит от выбранного значения *x*, т. е. площадь рассматриваемого сечения является некоторой функцией от *x*, обозначим ее через $S(x)$:

$$S(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Согласно формуле (11.1.4) объем тела будет равен интегралу от $S(x)$ в интервале изменения *x* ($a \le x \le b$). Заменив в этой формуле $S(x)$ ее выражением, окончательно получим

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

или в более удобной форме

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (11.1.5)$$

Пределы внутреннего интеграла переменные, они указывают границы изменения переменной интегрирования *y* при постоянном значении второго аргумента *x*. Пределы внешнего интеграла постоянные, они указывают границы, в которых может изменяться аргумент *x*.

Меняя роли *x* и *y*, т. е., рассматривая сечение тела плоскостями $y=\text{const}$ $(c \le y \le d)$, найдем сначала, что площадь $Q(y)$ такого сечения равна $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$, где *y* при интегрировании считается величиной постоянной. Интегрируя затем $Q(y)$ в пределах изменения *y*, т. е. от *c* до *d*, придем ко второму выражению для двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (11.1.6)$$

Здесь интегрирование совершается сначала по *x*, а затем по *y*.

Формулы (11.1.5) и (11.1.6) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов. Нужно только помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных принимается при интегрировании за постоянную. Для краткости правые части формул (11.1.5) и (11.1.6) называют ***повторными*** (или ***двукратными***) интегралами, а сам процесс расстановки пределов интегрирования – ***приведением двойного интеграла к повторному.***

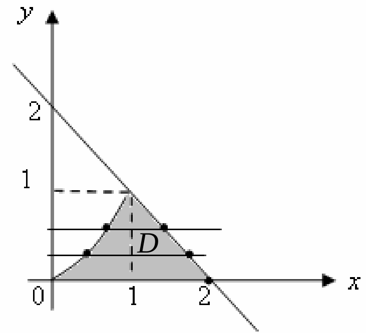
Формулы приведения двойного интеграла к повторному приобретают особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Пример 11.1.1. Привести к повторному $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями: $y=0$, $y=x^2$ и $x+y=2$.

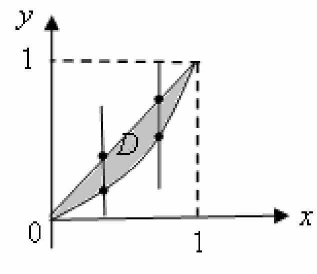
Решение. Нарисуем область D: $y=0$ – это ось Ox, $y=x^2$ – парабола, $x+y=2$ – прямая линия, пересекающая оси координат в точках (0,2) и (2,0).

Так как прямые линии, параллельные оси Ox, пересекают границы области D – слева только по параболе, а справа – только по прямой, то внутреннее интегрирование будем производить по переменной x, которая изменяется от параболы $x=\sqrt{y}$ до прямой $x=2-y$. Внешнее интегрирование будет тогда по переменной y $(0\le y\le 1)$. Для того, чтобы выбрать другой порядок интегрирования, необходимо область D разбить на две области прямой $x=1$. Таким образом,



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,.$$

Пример 11.1.2. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$.



Решение. Нарисуем область D.

Здесь порядок интегрирования безразличен.

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+y)\,dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx =$$

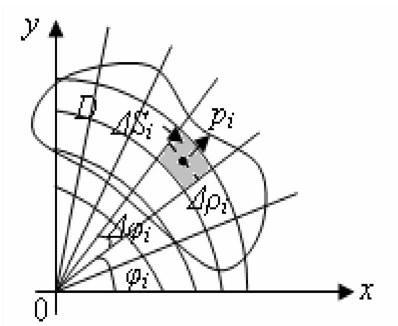
$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

11.1.4. Двойной интеграл в полярных координатах

Для вычисления двойного интеграла $J=\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ мы пользовались до сих пор системой декартовых координат. Отнесем теперь плоскость к системе полярных координат ρ и φ и предположим, как обычно, что полюс лежит в начале координат и полярная ось совпадает с осью абсцисс. Тогда $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Разобьем область интегрирования D на частичные области двумя системами координатных линий: $\rho=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$. Этими линиями будут соответственно концентрические окружности с центром в полюсе и лучи, исходящие из полюса. При этом частичными областями будут криволинейные четырехугольники, ограниченные дугами концентрических окружностей и их радиусами. Площадь ΔS_i будет



$$\Delta S_i = \frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}\rho_i^{\,2}\Delta\varphi_i=\left[\begin{array}{l}\text{разность двух}\\ \text{секторов}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\rho_i+\frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\,\Delta\varphi_i \qquad \text{или}$$

$$\Delta S_i=\rho_i'\,\Delta\rho_i\,\Delta\varphi_i,$$

где $\rho_i'=\rho_i+\dfrac{\Delta\rho_i}{2}$ есть средний радиус между ρ_i и $\rho_i+\Delta\rho_i$.

Пусть дана функция $f(x,y)$ непрерывная в области D. Составим для нее интегральную сумму, разбивая область D на частичные области и выбирая в качестве произвольных точек $P_i(x_i,y_i)$ точки, лежащие на средних окружностях радиуса ρ_i', т. е. полагая

$$x_i=\rho_i'\cos\varphi_i, \qquad y_i=\rho_i'\sin\varphi_i.$$

Тогда

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i'\cos\varphi_i,\rho_i'\sin\varphi_i)\cdot\rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_i.$$

Так как в правой части стоит интегральная сумма для функции $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho$ по переменным ρ и φ, то переходя к пределу, получим

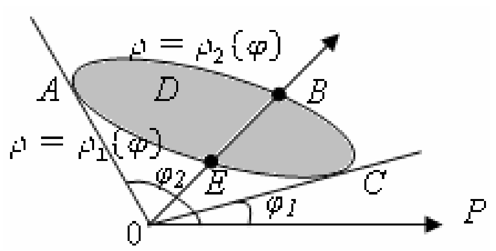
$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (11.1.7)$$

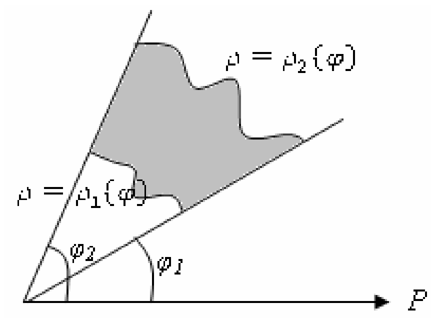
Это равенство является формулой преобразования двойного интеграла от декартовых координат к полярным. Выражение $dS = \rho d\rho d\varphi$ называется *элементом площади в полярных координатах*.

Для того чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно через $\rho\cos\varphi$ и $\rho\sin\varphi$, а произведение $dx\,dy$ заменить произведением $\rho d\rho d\varphi$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, также как и в декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным ρ и φ. Укажем правила расстановки пределов.

1. Пусть полюс не содержится внутри области интегрирования *D*, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, и координатные линии $\varphi = \text{const}$ пересекают ее границу не более чем в двух точках.





Полярные уравнения кривых *AEC* и *ABC* пусть будут соответственно $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$.

Интегрируя сначала по ρ в пределах его изменения при постоянном φ, т. е. от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$, а затем по φ от φ_1 до φ_2, получим

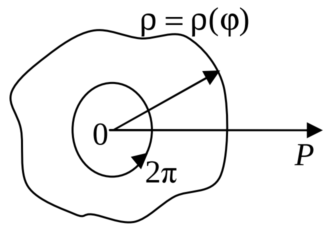
$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Интегрирование в обратном порядке, т. е. сначала по φ, а потом по ρ, обычно не встречается.

В частном случае, когда областью интегрирования служит часть кругового кольца $R_1 \le \rho \le R_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, пределы интегрирования постоянны по обеим переменным:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho .$$

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке (звездная область). Интегрируя сначала по ρ, а затем по φ, получим



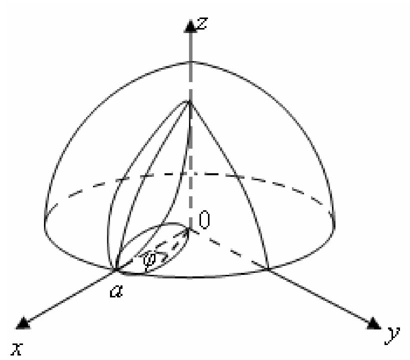
$$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho ,$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ есть уравнение границы области в полярных координатах.

В частности, при $\rho = R$, т. е. когда область интегрирования есть круг с центром в полюсе, будем иметь

$$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho .$$

Пример 11.1.3. Вычислить объем V общей части шара радиуса a и кругового цилиндра радиуса $\frac{a}{2}$ при условии, что центр шара лежит на поверхности цилиндра.



Решение. Сверху цилиндрическое тело накрывает сфера, уравнение которой $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Имеем

$$\frac{1}{4}V = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy ,$$

где D – полукруг, являющийся половиной основания цилиндра.

Здесь очень удобно перейти к полярным координатам. Имеем

$$\frac{1}{4}V = \iint_D \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Отсюда $V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

11.1.5. Приложения двойных интегралов

1. Площадь области интегрирования:

$$S = \iint_D dx\,dy = \iint_D \rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (11.1.8)$$

2. Объем цилиндрического тела:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (11.1.9)$$

3. Масса плоской пластинки переменной плотности.

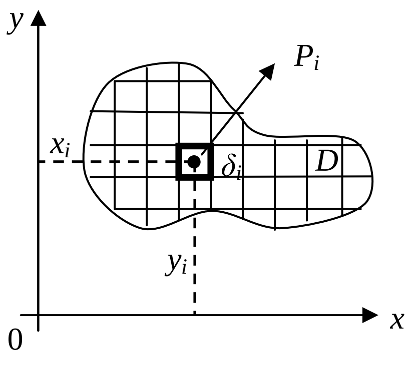
Рассмотрим тонкую пластинку, расположенную на плоскости *Oxy* и занимающую область *D*. Толщину этой пластинки считаем настолько малой, что изменением плотности по толщине ее можно пренебречь.

Поверхностной плотностью такой пластинки в данной точке называется *предел* отношения массы площадки к ее площади при условии, что площадка стягивается к данной точке.

Определенная таким образом поверхностная плотность будет зависеть только от положения данной точки, т. е. являться функцией ее координат:

$$\delta = \delta(x, y).$$

Если бы плотность была постоянной ($\delta = \text{const}$), то масса всей пластинки равнялась бы $m = \delta \cdot S$, где S – площадь пластинки. Найдем теперь массу неоднородной пластинки, считая, что ее плотность является заданной функцией $\delta(x, y)$. Для этого разобьем область, занимаемую пластинкой, на частичные области с площадями ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n. Выбирая в каждой частичной области произвольные точки $P_i(x_i, y_i)$, будем считать, что плотность во всех точках частичной области постоянна и равна плотности $\delta(x_i, y_i)$ в выбранной точке. Составим приближенное выражение для массы пластинки в виде интегральной суммы:



$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Для точного выражения массы следует найти предел суммы при условии, что $n \to \infty$ и каждая частичная область стягивается к точке. Тогда

$$m = \iint_D \delta(x, y)\,dS = \iint_D \delta(x, y)\,dx\,dy. \qquad (11.1.10)$$

4. Статические моменты и центр тяжести пластинки.

Статическим моментом материальной точки с массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы на расстояние от точки до этой оси.

Вычислим сейчас статические моменты рассматриваемой пластинки относительно осей координат. Для этого сосредоточим в точках $P_i(x_i, y_i)$ массы соответствующих частичных областей и найдем статические моменты полученной системы материальных точек относительно осей координат Ox и Oy.

$$M_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \delta(x_i, y_i)\, \Delta S_i, \qquad M_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \delta(x_i, y_i)\, \Delta S_i.$$

Переходя к пределу при обычных условиях и заменяя интегральные суммы интегралами, получим

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)\, dS, \qquad M_y = \iint_D x\delta(x, y)\, dS. \qquad (11.1.11)$$

Находим координаты центра тяжести $C(x_c, y_c)$.

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\, dS}{\iint\limits_D \delta(x, y)\, dS}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\, dS}{\iint\limits_D \delta(x, y)\, dS}. \qquad (11.1.12)$$

Если пластинка однородная, т. е. $\delta(x, y) = \text{const}$, то

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x dS}{S}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y dS}{S}, \qquad (11.1.13)$$

где S – площадь пластинки.

5. Моменты инерции пластинки.

Моментом инерции материальной точки P с массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы на квадрат расстояния точки P от этой оси.

Исходя из определения, можно получить формулы:

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y)\, dS, \qquad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y)\, dS. \qquad (11.1.14)$$

Для однородной пластинки ($\delta = 1$):

$$I_x = \iint_D y^2 dS, \qquad I_y = \iint_D x^2 dS. \qquad (11.1.15)$$

Отметим, что двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dS$ называется ***центробежным*** моментом инерции и обозначается I_{xy}

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy\,dS\,. \tag{11.1.16}$$

В механике часто рассматривают ***полярный момент*** инерции точки, равный произведению массы точки на квадрат ее расстояния до данной точки – полюса:

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dS = I_x + I_y\,. \tag{11.1.17}$$

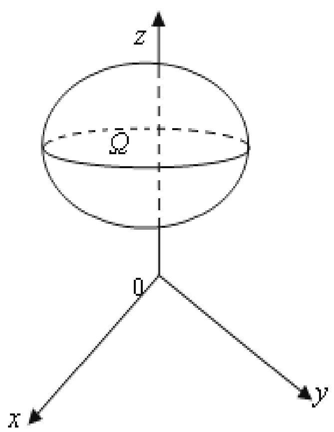
Вопрос вычисления площади поверхности пространственных тел с применением двойных интегралов будет рассмотрен в разделе 11.5.

11.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

11.2.1. Масса неоднородного тела. Определение тройного интеграла

Рассмотрим тело, занимающее пространственную область Ω, и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела:

$$\delta=\delta(x,y,z).$$



Единица измерения плотности – $\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Разобьем тело произвольным образом на n частей; объемы этих частей обозначим через ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n. Выберем затем в каждой части по произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, получим приближенное выражение для массы тела в виде суммы:

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i\,. \tag{11.2.1}$$

Предел этой суммы при условии, что $n \to \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку, и даст массу тела:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i . \qquad (11.2.2)$$

Пусть $f(x,y,z)$ – произвольная непрерывная функция в области Ω. Составим для нее *n*-ю интегральную сумму:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i .$$

По определению ***тройным интегралом*** назовем предел *n*-ой интегральной суммы, если $n \to \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку.

Таким образом,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i . \qquad (11.2.3)$$

Если $f(x,y,z)$ непрерывна в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью, то конечный предел существует, причем он не зависит от способа разбиения области на частичные и от выбора точек P_i.

11.2.2. Основные свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_{\Omega} \left(f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z) \right) dV = \iiint\limits_{\Omega} f_1(x,y,z) dV \pm \iiint\limits_{\Omega} f_2(x,y,z) dV$.

2. $\iiint\limits_{\Omega} C\, f(x,y,z)\, dV = C \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dV$, ($C = \text{const}$).

3. $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, то $\iiint\limits_{\Omega} \; = \iiint\limits_{\Omega_1} \; + \iiint\limits_{\Omega_2}$.

4. Если во всех точках области Ω функции $f(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z)$ удовлетворяют соотношению $f(x,y,z) \ge \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dV \ge \iiint\limits_{\Omega} \varphi(x,y,z)\, dV .$$

5. Если функция $f(x,y,z)$ во всех точках области интегрирования Ω удовлетворяет неравенствам $m \le f(x,y,z) \le M$, то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV \le M \cdot V,$$

где V – объем области Ω.

6. Тройной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на объем области интегрирования, т. е.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = f(x_c, y_c, z_c)V.$$

Заметим, что если подынтегральная функция $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} dV = V,$$

где V – объем области интегрирования Ω.

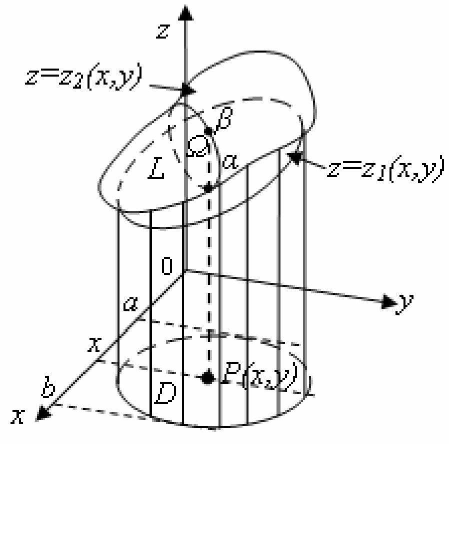
11.2.3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла, так же как и двойного, может быть осуществлено посредством ряда последовательных интегрирований.

Пусть дан тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV,$$

причем область Ω отнесена к системе декартовых координат *Oxyz*. Разобьем область интегрирования Ω плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда частичными областями будут параллелепипеды с гранями, параллельными плоскостям *Oxy*, *Oxz*, *Oyz*. Элемент объема будет равен произведению дифференциалов переменных интегрирования



$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

В соответствии с этим будем иметь

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Будем считать, что область Ω имеет вид, показанный на рисунке.

Опишем около области Ω цилиндрическую поверхность с образующей, перпендикулярной к плоскости *Oxy*. Она касается области Ω вдоль некоторой линии *L*, которая делит поверхность, ограничивающую область на две части: верхнюю и нижнюю. Уравнение нижней поверхности пусть будет $z = z_1(x, y)$, а уравнение верхней $z = z_2(x, y)$.

Построенная цилиндрическая поверхность высекает из плоскости *Oxy* плоскую область *D*, которая является ортогональной проекцией пространственной области Ω на плоскость *Oxy*; при этом линия *L* проектируется в границу области *D*.

Будем производить интегрирование сначала по направлению оси *Oz*. Для этого функция $f(x, y, z)$ интегрируется по заключенному в области Ω отрезку прямой, параллельной оси *Oz* и проходящей через некоторую точку $P(x, y)$ области *D* (отрезок $[\alpha, \beta]$).

При данных *x* и *y* переменная интегрирования *z* будет изменяться от $z_1(x, y)$ – аппликаты точки входа (α) прямой в области Ω, до $z_2(x, y)$ – аппликаты точки выхода (β) прямой из области Ω.

Результат интегрирования представляет собой величину, зависящую от точки $P(x, y)$, обозначим ее через $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz .$$

При интегрировании *x* и *y* рассматривают здесь как постоянные. Мы получим значение исходного тройного интеграла, если возьмем двойной интеграл от функции $F(x, y)$ при условии, что точка $P(x, y)$ изменяется по области *D*, т. е. $\iint\limits_D F(x, y)\, dx\, dy$. Таким образом, тройной интеграл должен быть представлен в виде

$$I = \iint\limits_D dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz .$$

Приводя, далее, двойной интеграл по области *D* к повторному и интегрируя сначала по *y*, а затем по *x*, получим

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz , \qquad (11.2.4)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – ординаты точек входа в область *D* и выхода из нее прямой $x = \mathrm{const}$ (в плоскости *Oxy*), a и b – абсциссы конечных точек интервала оси *Ox*, на которую проектируется область *D*.

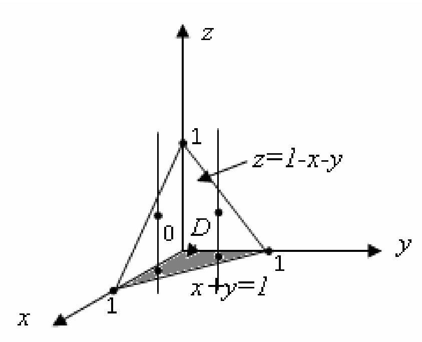
Формула (11.2.4) сохраняется и для областей, имеющих цилиндрическую форму, т. е. ограниченных цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси *Oz*, а снизу и сверху поверхностями, уравнения которых соответственно $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$.

Если областью интегрирования служит внутренность параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, то пределы интегрирования постоянны во всех трех интегралах:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz.$$

В этом случае интегрирование можно производить в любом порядке.

Пример. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.



Решение. Нарисуем область Ω. Это треугольная пирамида.

Очевидно, что z изменяется от плоскости $z = 0$ до наклонной плоскости $z = 1 - x - y$.

Тогда

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)\,d(x + y + z) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left.\frac{(x + y + z)^2}{2}\right|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left((x + y + 1 - x - y)^2 - (x + y + 0)^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(1 - (x + y)^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^{1-x} dy - \int\limits_0^{1-x} (x + y)^2\,d(x + y)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y\Big|_0^{1-x} - \left.\frac{(x + y)^3}{3}\right|_0^{1-x} \right) dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 (1 - x)\,dx - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left((x + 1 - x)^3 - (x + 0)^3\right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int\limits_0^1 (1 - x)\,d(1 - x) - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\left.\frac{(1 - x)^2}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{3}x\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}.$$

11.3. ОБЩАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

11.3.1. Общая замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции $x = x(t,u,v)$, $y = y(t,u,v)$, $z = z(t,u,v)$ взаимнооднозначно отображают область Ω в декартовых координатах *x, y, z* на область Ω' в криволинейных координатах *t, u, v*. Пусть элемент объема ΔV области Ω переходит при этом в элемент объема $\Delta V'$ области Ω' и пусть

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |J|.$$

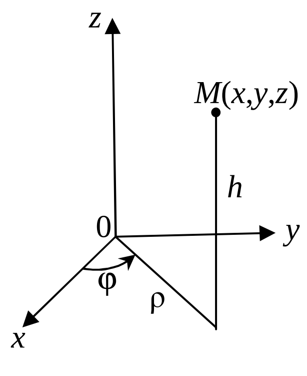
Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} f\big(x(t,u,v), y(t,u,v) z(t,u,v) \big) |J|\, dt\, du\, dv,$$

где J – якобиан, который вычисляется по следующей формуле:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

11.3.2. Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам



Отнесем область Ω к системе цилиндрических координат (ρ, φ, h), в которой положение точки *M* в пространстве определяется полярными координатами (ρ, φ) ее проекции *P* на плоскость *Oxy* и ее аппликатой $h(z)$. Тогда

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = h. \qquad (11.3.1)$$

Вычислим, чему равен якобиан *J* при переходе к цилиндрическим координатам:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial h} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial h} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho .$$

Замечание. При переходе к полярным координатам (ρ, φ) в двойном интеграле якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho .$$

Теперь $dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dh$. Таким образом,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dh,$$

т. е., чтобы перейти в тройном интеграле к цилиндрическим координатам, нужно в выражении подынтегральной функции $f(x, y, z)$ заменить x, y, z по формулам (11.3.1) и взять элемент объема равным $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dh$. Если, в частности, $f(x, y, z) = 1$, то интеграл выражает объем V области Ω.

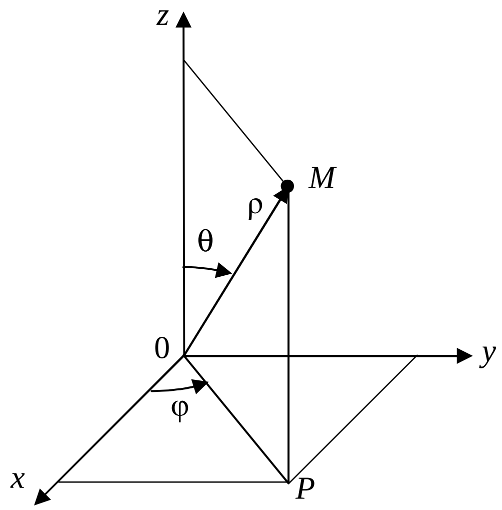
$$V = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dh . \tag{11.3.2}$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к интегрированию по ρ, по φ и по h на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат. В частности, если областью интегрирования служит внутренность цилиндра $\rho \le R$, $0 \le h \le H$, то пределы трехкратного интеграла постоянны и не меняются при перемене порядка интегрирования:

$$I = \int\limits_0^H dh \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)\rho\, d\rho .$$

11.3.3. Переход в тройном интеграле к сферическим координатам

Отнесем теперь область Ω к системе сферических координат (ρ,θ,φ). В этой системе координат положение точки *M* в пространстве определяется ее расстоянием ρ от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом θ между радиус-вектором точки и осью *Oz* и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость *Oxy* и осью *Ox*. При этом θ может изменяться от 0 до π, а φ – от 0 до 2π(φ – долгота точки, $\theta' = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ – широта точки).



Установим связь между сферическими и декартовыми координатами. Из рисунка имеем:

$$MP = \rho \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\cos\theta,$$

$$OP = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\sin\theta,$$

$$x = OP \cdot \cos\varphi, \qquad y = OP \cdot \sin\varphi.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases} \tag{11.3.3}$$

Найдем якобиан в тройном интеграле при переходе к сферическим координатам.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - \rho\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\left(-\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \rho^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) -$$

$$-\rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) =$$

$$= -\rho^2\sin\theta\cos^2\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) - \rho^2\sin^3\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$

$$= -\rho^2\sin\theta\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\theta = -\rho^2\sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = -\rho^2\sin\theta.$$

$$|J| = \rho^2\sin\theta.$$

$$dv = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \qquad (11.3.4)$$

Заменив в тройном интеграле x, y, и z по формулам (11.3.3) и взяв элемент объема по формуле (11.3.4), будем иметь:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Особенно удобно применение сферических координат в случае, когда область интегрирования Ω – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо. Например, в последнем случае, если радиус внутреннего шара R_1, а внешнего – R_2, пределы интегрирования следует расставить следующим образом:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_{R_1}^{R_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$

Пример. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение.

$$V = \int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R}\rho^2 d\rho = -\cos\theta\Big|_0^{\pi}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{R} =$$

$$= -(-1-1)\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отметим, что трудно дать общие указания, когда следует применять ту или иную систему координат. Это зависит и от области интегрирования, и от вида подынтегральной функции.

11.3.4. Приложения тройных интегралов

Объем тела, ограниченного областью Ω,

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dh = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi. \qquad (11.3.5)$$

Применение тройных интегралов к вычислению статических моментов и моментов инерции пространственных тел основано на тех же принципах, что и для двойных интегралов.

Для вычисления координат центра тяжести нужны статические моменты относительно координатных плоскостей *Oxy*, *Oxz*, *Oyz*; обозначим их соответственно M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}. Легко получить следующие формулы для координат x_c, y_c, z_c центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ неоднородного тела, плотность которого задается функцией $\delta(x, y, z)$, занимающего область Ω;

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv};$$
$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv}. \tag{11.3.6}$$

Если тело однородное, т. е. $\delta = \text{const}$, то формулы упрощаются:

$$x_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_{\Omega} x\,dv; \qquad y_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_{\Omega} y dv; \qquad z_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_{\Omega} z\,dv. \tag{11.3.7}$$

Перейдем к вычислению моментов инерции тела относительно координатных осей. Так как квадраты расстояний от точки $P(x, y, z)$ до осей *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равны $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + x^2$, то, полагая $\delta = 1$, получим

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega}\left(y^2 + z^2\right)dv,\ I_y = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + z^2\right)dv,\ I_z = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2\right)dv. \tag{11.3.8}$$

Аналогично плоскому случаю интегралы

$$I_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} xy\,dv, \qquad I_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} yz\,dv, \qquad I_{zy} = \iiint\limits_{\Omega} zx\,dv \tag{11.3.9}$$

называются центробежными моментами инерции, а интеграл

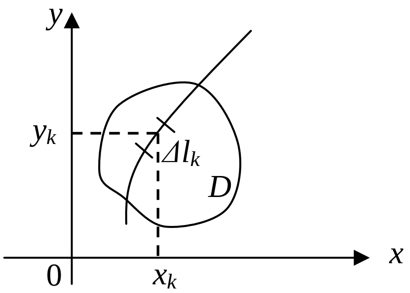
$$I_0 = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dv \tag{11.3.10}$$

называется полярным моментом инерции.

11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ I И II РОДА, ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

11.4.1. Криволинейный интеграл по длине дуги (I рода)

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области и L – линия целиком расположенная в этой области. Разобьем L на n участков; возьмем на каждом из участков произвольно точки (x_k, y_k) и построим следующую интегральную сумму:



$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta l_k, \qquad (11.4.1)$$

где Δl_k – длина соответствующего участка линии L.

О п р е д е л е н и е . Криволинейным интегралом по длине дуги называется предел n-й интегральной суммы (11.4.1) при условии, что длина наибольшего участка разбиения $\lambda \to 0$.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta l_k = \int_L f(x, y)\,dl. \qquad (11.4.2)$$

Свойства криволинейного интеграла по длине совершенно аналогичны свойствам определенного интеграла. Вычисление их производится путем преобразования в обыкновенные определенные интегралы.

П р а в и л о . Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L f(x, y)\,dl$, где линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении положить $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$ и взять интеграл по интервалу изменения t, соответствующему линии интегрирования:

$$\int_L f(x, y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\, x(t), y(t)\,\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \qquad (11.4.3)$$

Если уравнение линии L задано в виде $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то, положив $t = x$, $y = y(t)$, имеем

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1 + {y'_x}^2}\,dx. \qquad (11.4.4)$$

Если уравнение линии L задано следующим образом: $x = x(y)$, $c \le y \le d$, то, положив $y = t$, $x = x(t)$, имеем

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_c^d f\left(x(y), y\right)\sqrt{1 + {x'_y}^2}\,dy. \qquad (11.4.5)$$

Пример 1. Вычислить $\int_L y\,dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от (0,0) до $\left(4, \sqrt{8}\right)$. Здесь линию удобнее задать в форме разрешенной относительно *x*:

$$x = \frac{y^2}{2}, \qquad x' = y, \qquad 0 \le y \le \sqrt{8}.$$

$$\int_L y\,dl = \int_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1 + y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{8}} \left(1 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + y^2\right) = \frac{1}{2}\left.\frac{\left(1 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{\sqrt{8}} = \frac{26}{3}.$$

Замечание 1. Масса неоднородной линии L с заданной поверхностной плотностью $\delta = \delta(x,y)$ вычисляется по формуле

$$m = \int_L \delta(x,y)\,dl. \qquad (11.4.6)$$

Пример 2. Вычислить $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$,

где $L: \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\sqrt{1 + t^2}; \qquad \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2} = at.$$

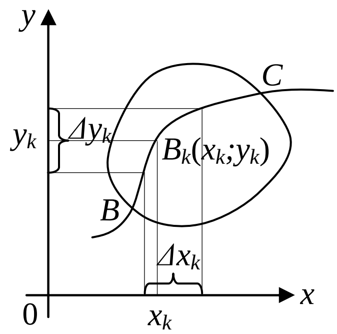
$$I = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 + t^2}\,at\,dt = \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\left.\left(1 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{3}\left[\left(1 + 4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

Замечание 2. Если линия L расположена в пространстве и задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, то

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt. \qquad (11.4.7)$$

11.4.2. Криволинейный интеграл по координатам (II рода)

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции двух переменных, непрерывные в некоторой области D, и L – гладкая линия, целиком расположенная в этой области.



Разобьем линию L на n участков и в каждом таком участке выберем по произвольной точке $B_k(x_k, y_k)$. Обозначим проекции k-го участка на оси координат через Δx_k и Δy_k и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P\big(x_k, y_y\big)\Delta x_k + Q\big(x_k, y_y\big)\Delta y_k. \quad (11.4.8)$$

Сумма (11.4.8) называется n-ой *интегральной суммой по линии L,* а ее предел при стремлении длины наибольшего частичного участка λ к нулю – криволинейным интегралом II рода по линии L

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Определение. ***Криволинейным*** интегралом по линии L называется предел n-й интегральной суммы (11.4.8) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L.

Линия L называется линией или контуром интегрирования. Точка B называется начальной, а C – конечной точкой интегрирования.

В частности, если $Q(x,y)\equiv 0$, то интеграл имеет вид $\int_L P(x,y)\,dx$ и называется криволинейным интегралом по координате x.

Аналогично, если $P(x,y)\equiv 0$, то $\int_L Q(x,y)\,dy$ называется криволинейным интегралом по координате y.

Замечание. Работа силового поля при перемещении материальной точки по кривой L под действием силы $\overline{F}=\overline{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ выражается криволинейным интегралом:

$$A=\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy. \qquad (11.4.9)$$

Вычисление криволинейных интегралов приводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов. Рассмотрим интеграл $\int_L P(x,y)\,dx$ и предположим, что уравнение линии интегрирования L дано в параметрическом виде:

$$x=x(t),\qquad y=y(t)\ \ (t_B\le t\le t_C).$$

Начальной точке линии (B) соответствует значение параметра t_B, конечной (C) – t_C. Возьмем интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n}P(x_k,y_k)\Delta x_k$, пределом которой является данный интеграл, и преобразуем ее к переменной t. Так как $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=x(t_{k+1})-x(t_k)$, то, применяя формулу Лагранжа, получим $\Delta x_k=x'(\theta_k)\Delta t_k$, где θ_k лежит в интервале $[t_k,t_{k+1}]$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$. В качестве промежуточной точки (x_k,y_k) выберем как раз ту, которая соответствует значению параметра θ_k. Тогда

$$x_k=x(\theta_k),\ y_k=y(\theta_k).$$

Преобразованная сумма

$$\sum_{k=1}^{n}P\big[x(\theta_k),y(\theta_k)\big]\,x'(\theta_k)\,\Delta t_k$$

будет обыкновенной интегральной суммой для функции одной переменной $P\big[x(t),y(t)\big]x'(t)$, а ее предел – определенным интегралом

$$\int_{t_B}^{t_C}P\big[x(t),y(t)\big]x'(t)\,dt.$$

Точно также

$$\int_L Q(x,y)\,dy=\int_{t_B}^{t_C}Q\big[x(t),y(t)\big]y'(t)\,dt.$$

Отсюда и вытекает правило вычисления криволинейного интеграла II рода:

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятый по линии $x = x(t)$, $y = y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении заменить x, y, dx и dy их выражениями через t и dt и вычислить получившийся интеграл по интервалу изменения параметра t:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \left\{ P\left[x(t), y(t)\right] x'(t) + Q\left[x(t), y(t)\right] y'(t) \right\} dt, \tag{11.4.10}$$

где t_B и t_C – значения параметра t, соответствующие точкам B и C линии L.

Если уравнение линии L задано в виде $y = y(x)$, то, полагая в общей формуле преобразования $t = x$, получим

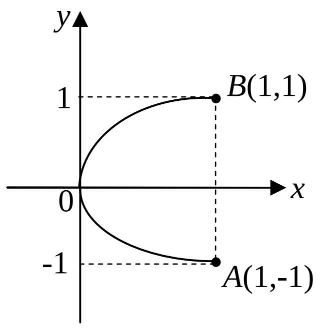
$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_B}^{x_C} \left(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) y'(x) \right) dx, \tag{11.4.11}$$

где x_B и x_C – абсциссы точек B и C.

Если уравнение линии L задано в виде $x = x(y)$, то, полагая $y = t$, получим

$$\int\limits_L P dx + Q dy = \int\limits_{y_B}^{y_C} \Big(P\big(x(y), y\big) \cdot x'(y) \ + \ Q\big(x(y), y\big) \Big) dy, \tag{11.4.12}$$

где y_B и y_C – ординаты точек B и C.



Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_L xy\,dx$, где L – дуга параболы $x = y^2$ от ее точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$.

Решение.

$x = y^2$, $dx = 2ydy$, $-1 \le y \le 1$. Тогда

$$I = \int\limits_L xy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} y^2 \cdot y \cdot 2y\,dy = 2\int\limits_{-1}^{1} y^4\,dy = 2\frac{y^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}(1+1) = \frac{4}{5}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_L y\,dx-x\,dy$, где L – дуга циклоиды $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi,0)$.

Решение.

$$dx=2(1-\cos t)\,dt, \qquad dy=2\sin t\,dt,\ \ 0\le t\le 2\pi.$$

$$I=\int\limits_L y\,dx-x\,dy=\int\limits_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)\,dt-2(t-\sin t)2\sin t\,dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}\left((1-\cos t)^2-(t-\sin t)\sin t\right)dt=4\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t-t\cdot\sin t+\sin^2 t\right)dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t-t\sin t)dt=\begin{vmatrix} u=t, & dv=\sin t dt \\ du=dt, & v=-\cos t\end{vmatrix}=4(2t-2\sin t+t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=16\pi.$$

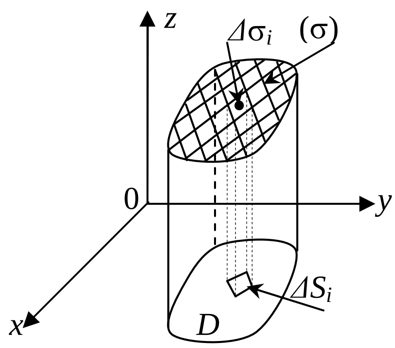
Аналогичным образом вычисляется криволинейный интеграл

$$I=\int\limits_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

по пространственной линии L, заданной параметрически уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t_B\le t\le t_C$:

$$I=\int\limits_{t_B}^{t_C}\Big(P\left[x(t),y(t),z(t)\right]x'(t)+Q\left[x(t),y(t),z(t)\right]y'(t)+ +R\left[x(t),y(t),z(t)\right]z'(t)\Big)\,dt. \quad (11.4.13)$$

11.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 2 РОДА



Пусть в точках двухсторонней поверхности (σ) задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Выберем на поверхности определенную сторону. Разобьем поверхность (σ) сетью произвольно проведенных кривых на части с площадями $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \ldots,\ \Delta\sigma_n$.

В каждой части выберем по произвольной точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$ и вычислим в них значения данной функции. Эти значения $f(x_i, y_i, z_i)$ умножим на площади проекций ΔS_i частей $(\Delta\sigma_i)$ на плоскость *Oxy*. При этом числу ΔS_i приписывается определенный знак, а именно:

1) если в точках $(\Delta\sigma_i)$ нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности, составляет с осью *Oz* острый угол, то через ΔS_i обозначаем площадь проекции $\Delta\sigma_i$, взятую со знаком плюс;

2) если же эта нормаль составляет с осью *Oz* тупой угол, то под ΔS_i будем понимать площадь этой проекции, взятую со знаком минус.

Составим интегральную сумму всех таких произведений:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i. \qquad (11.5.1)$$

Определение. ***Интегралом 2 рода*** от функции $f(x, y, z)$ по поверхности (σ) называется предел суммы (11.5.1) при $\lambda \to 0$, где λ – наибольший из диаметров элементарных частей $\Delta\sigma_i$.

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i. \qquad (11.5.2)$$

Аналогично определяются следующие интегралы:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dz, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

причем для выбора знака проекции служит угол между нормалью, отвечающей выбранной стороне, и осью *Oy* или *Ox*.

Наиболее общим интегралом 2 рода является интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dx\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

где *P*, *Q*, *R* – функции от *x*, *y*, *z*, определенные и непрерывные в точках двухсторонней поверхности (σ).

Интегралы 2 рода вычисляются следующим образом. Если поверхность (σ) однозначно проецируется в область D_1 плоскости *Oxy* и $z = z(x, y)$ – ее уравнение, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} R(x, y, z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{D_1} R\big(x, y, z(x, y)\big)\,dx\,dy, \qquad (11.5.3)$$

где $\pm\iint\limits_{D_1} R\big(x,y,z(x,y)\big)dx\,dy$ – двойной интеграл по области D_1. Знак плюс берется в этом случае, когда на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma>0$, и знак минус, когда $\cos\gamma<0$.

Аналогично, если (σ) однозначно проецируется в область D_2 (или D_3) на плоскости *Oxz* (или *Oyz*), т. е. может быть задана уравнением $y=y(x,z)$ (или $x=x(y,z)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)dx\,dz=\pm\iint\limits_{D_2} Q\big(x,y(x,z),z\big)dx\,dz, \qquad (11.5.4)$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)dy\,dz=\pm\iint\limits_{D_3} Q\big(x(y,z),y,z\big)dy\,dz, \qquad (11.5.5)$$

где в случае (11.5.4) берется знак $\cos\beta$, а в случае (11.5.5) – знак $\cos\alpha$;

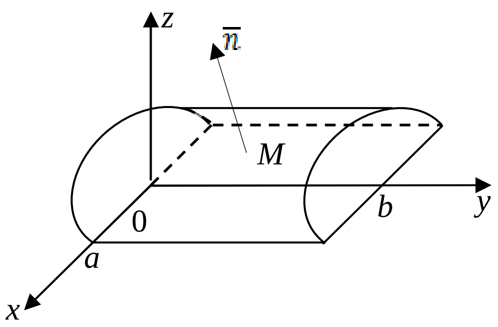
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл 2 рода.

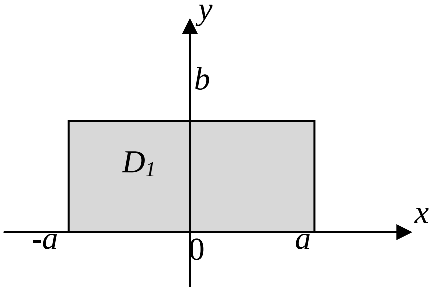
Пример. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)}\left(y^2+z^2\right)dx\,dy$, где (σ) – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=b$.

Решение.

$$z=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow z^2=a^2-x^2, \qquad x^2+z^2=a^2, \text{ т.е.}$$

$z=\sqrt{a^2-x^2}$ – верхняя часть цилиндрической поверхности $x^2+z^2=a^2$ с образующей, параллельной оси *Oy* и направляющей – окружностью $x^2+z^2=a^2$ в плоскости *Oxz*. $y=0$ – плоскость *Oxz*, $y=b$ – плоскость, параллельная плоскости *Oxz*.





Нормаль $\bar{n}$ в точке *M*, соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью *Oz* острый угол $\gamma\left(0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому в формуле для вычисления этого интеграла надо взять плюс. Проекцией D_1 данной поверхности на плоскость *Oxy* является прямоугольник, определяемый неравенствами $-a\le x\le a$, $0\le y\le b$.

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(y^2+z^2\right)dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\left(y^2+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right)dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{b}\left(y^2+a^2-x^2\right)dy=$$

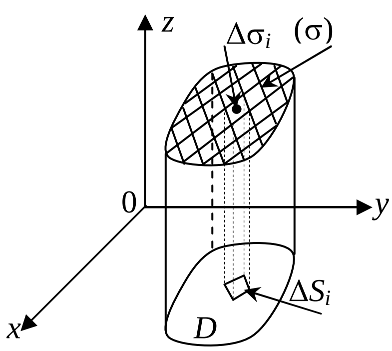
$$=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{y^3}{3}+a^2y-x^2y\right)\Bigg|_0^b dx=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{b^3}{3}+a^2b-bx^2\right)dx=\left(\frac{b^3}{3}x+a^2bx-b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{b^3}{3}(a+a)+a^2b(a+a)-\frac{b}{3}\left(a^3+a^3\right)=\frac{2}{3}ab^3+2a^3b-\frac{2}{3}a^3b=\frac{2}{3}ab^3+\frac{4}{3}ba^3=$$

$$=\frac{2}{3}ab\left(b^2+2a^2\right).$$

11.6. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 1 РОДА, ИХ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть дана функция $f(x,y,z)$ непрерывная на некоторой гладкой поверхности (σ). Разобьем эту поверхность сетью произвольно проведенных кривых на части с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$.



В каждой из этих частей выберем произвольно по точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$, вычислим значения функции $f(x_i,y_i,z_i)$ в этих точках и составим интегральную сумму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i\,. \qquad (11.6.1)$$

Обозначим через λ – наибольший из диаметров элементарных частей поверхности (σ).

Определение. ***Интегралом 1 рода*** от функции $f(x,y,z)$ по поверхности (σ) называется предел интегральной суммы (11.6.1) при $\lambda \to 0$.

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (11.6.2)$$

Интеграл 1 рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейных интегралов 1 рода.

Если $f(x,y,z) > 0$ и функцию f рассматривать как поверхностную плотность массы материальной поверхности (σ), то интеграл (11.6.2) определяет массу этой поверхности (пусть $f(x,y,z) = \delta(x,y,z)$):

$$m = \iint\limits_{(\sigma)} \delta(x,y,z)\,d\sigma. \qquad (11.6.3)$$

Когда поверхность (σ) задана уравнением $z = z(x,y)$ и она проектируется на плоскость *Oxy* в область D_1, то

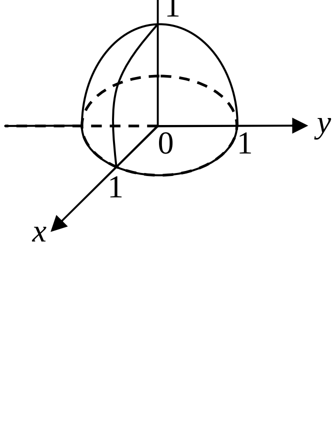
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy, \qquad (11.6.4)$$

т. е. вычисление поверхностных интегралов сводится к вычислению двойных интегралов.

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $I = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$, где (σ) – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$.

Решение.

$z = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = -\left(x^2+y^2\right)+1$ – параболоид вращения $z = -\left(x^2+y^2\right)$ с ветвями парабол, направленных вниз, поднятый по оси *Oz* на 1. Проекцией рассматриваемой части параболоида (до плоскости $z = 0$) на плоскость *Oxy* является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, областью D_1 является круг $x^2 + y^2 \le 1$.



Так как $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, то

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \iint_{D_1} \left(1+4x^2+4y^2\right) dx\,dy .$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам (ρ,φ), $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, якобиан $J = \rho$. $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1+4\rho^2\right)\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho+4\rho^3\right) d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2}\rho^2+\rho^4\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}+1\right) = 3\pi .$$

Если поверхность задана уравнением, разрешенным относительно *y*, $y = y(x,z)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_2} f\left(x, y(x,z), z\right)\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dx\,dz , \qquad (11.6.5)$$

где D_2 – проекция поверхности (σ) на плоскость *Oxz*.

Если поверхность задана уравнением $x = x(y,z)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_3} f\left(x(y,z), y, z\right)\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}\,dy\,dz , \qquad (11.6.6)$$

где D_3 – проекция поверхности (σ) на плоскость *Oyz*.

Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ дает площадь поверхности (σ).

В первом случае поверхность (σ) проектируется на плоскость *Oxy* ($z = z(x,y)$ – уравнение (σ))

$$\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy . \qquad (11.6.7)$$

Аналогичные формулы получаются, если поверхность (σ) проецируется на другие плоскости координат.

Пример 2. Найти площадь поверхности сферы радиуса R.

Решение. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (z=0)$.

$$z'_x=\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Тогда

$$1+{z'_x}^2+{z'_y}^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}=\frac{R^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}=$$

$$=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

$$\frac{\sigma}{2}=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=R\iint\limits_{D_1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам (ρ,φ).

$$\frac{\sigma}{2}=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = -\frac{1}{2}R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\left(R^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}R\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left.\frac{\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^R=-R\cdot 2\pi(0-R)=2\pi R^2,$$

а площадь всей поверхности сферы

$$\sigma=2\cdot 2\pi R^2=4\pi R^2.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение двойного интеграла, его основные свойства.
3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.
4. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.
5. Приложения двойных интегралов.
6. Вычисление массы неоднородного тела. Определение тройного интеграла, его основные свойства.
7. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
8. Общая замена переменных в тройном интеграле.
9. Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам.
10. Переход в тройном интеграле к сферическим координатам.
11. Приложения тройных интегралов.
12. Криволинейные интегралы I рода (по длине дуги).
13. Криволинейные интегралы II рода (по координатам).
14. Определение и вычисление поверхностных интегралов 2 рода.
15. Определение и вычисление поверхностных интегралов 1 рода.
16. Приложения поверхностных интегралов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во часов
I. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
II. Замена переменной в двойном интеграле, переход к полярной системе координат	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
IV. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
V. Приложения кратных интегралов	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VI. Криволинейные интегралы I и II рода	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VII. Вычисление поверхностных интегралов 2 рода	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VIII. Применение поверхностных интегралов	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
IX. Контрольная работа		2

Основная и дополнительная литература

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980.
2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск : Навука и тэхника, 1991.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.
4. Берман, Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.М. Берман. – М. : Наука, 1971.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980.
6. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М. : Наука,1981.
7. Индивидуальные задания по высшей математике / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 2004.

I. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Вычисление двойных интегралов сводится к вычислению двух однократных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy, \text{ либо}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Правые части этих формул называются двукратными (или повторными) интегралами. Сначала вычисляется последний интеграл, при этом либо x (в первой формуле), либо y (во второй формуле) считается величиной постоянной.

В более общем случае область интегрирования разбивается на несколько частей.

Если область $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

2. Преподаватель у доски решает:

Обучающий пример 1. Вычислить $\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy$, если D – прямоугольник: $0 \le x \le 4, \quad 1 \le y \le e$.

Решение.

$$\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy = \int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_1^e \ln y\,dy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 \cdot \left.(y\ln y - y)\right|_1^e = 8\cdot(e - e + 1) = 8.$$

3. Студенты самостоятельно решают.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D \left(\cos^2 x + \sin^2 y\right)dx\,dy$, если область D квадрат: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$. *Ответ*: $\frac{\pi^2}{16}$.

При вычислении двойных интегралов рекомендуется применять следующий алгоритм действий:

1) нарисовать область интегрирования;

2) выбрать порядок интегрирования;

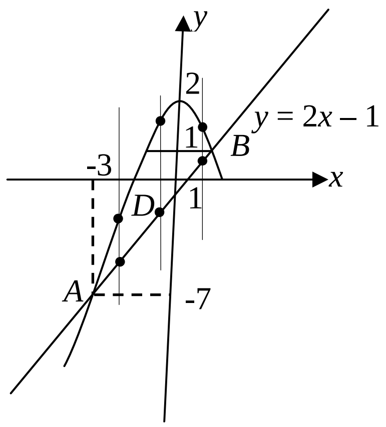
3) расставить пределы интегрирования;

4) вычислить повторный интеграл.

4. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 2. Вычислить $I = \iint\limits_D (x - y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Решение.



1) Построим область *D*. Первая линия – парабола с вершиной в точке $(0,2)$, симметричная относительно оси *Oy*. Вторая линия – прямая. Решая совместно уравнения $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1$, найдем координаты точек пересечения: $A(-3,-7)$, $B(1,1)$.

2) Выбираем порядок интегрирования: внутренний интеграл (последний) будем интегрировать по *y*, т. к. любая прямая, параллельная оси *Oy*, пересекает границу области не более чем в двух точках и точки входа в область лежат на одной линии, точки выхода из области также лежат на одной линии. Если выбрать обратный порядок интегрирования, то пришлось бы область *D* разбивать на две области линией, проходящей через точку *B* параллельно оси *Ox*.

3) Расставим пределы интегрирования. Во внутреннем интеграле *y* изменяется от прямой линии $y = 2x - 1$ – уравнения линии, где находятся точки входа в область, до параболы $y = 2 - x^2$ – уравнения линии, где находятся точки выхода из области любой прямой, параллельной оси *Oy*, т. е. $2x - 1 \le y \le 2 - x^2$. Для внешнего (первого) интеграла указываем наименьшее и наибольшее значения *x* в области *D*, т. е. $-3 \le x \le 1$.

Итак,

$$I = \iint\limits_D (x - y)\,dx\,dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)\,dy .$$

4) Вычисляем получившийся повторный интеграл.

$$I=\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=\int\limits_{-3}^{1}dx\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2}=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(x\left(2-x^2\right)-\frac{1}{2}\left(2-x^2\right)^2-x(2x-1)+\frac{1}{2}(2x-1)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}.$$

4. Два студента у доски решают (параллельно) примеры.

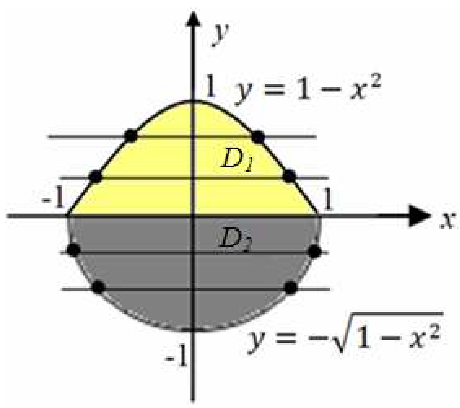
Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, если область D ограничена прямыми $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$. *Ответ*: $25\frac{1}{3}$.

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, если область D – треугольник с вершинами $A(2,3)$, $B(7,2)$, $C(4,5)$. *Ответ*: 26.

5. Наиболее популярной является задача об изменении порядка интегрирования в двойном интеграле. Преподаватель (у доски) решает.

Обучающий пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\,dy.$$

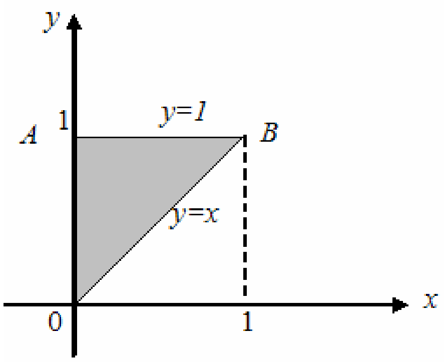


Решение. Область интегрирования D ограничена неравенствами $-1\le x\le 1$, нижней частью окружности $y=-\sqrt{1-x^2}$ и параболой $y=1-x^2$. Изменим порядок интегрирования, для чего заданную область представим в виде двух областей: D_1, ограниченную слева и справа ветвями параболы $x=\mp\sqrt{1-y}$ $(0\le y\le 1)$, и D_2, ограниченную дугами окружности $x=\mp\sqrt{1-y^2}$ $(-1\le y\le 0)$. Тогда

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

Иногда этот прием помогает при вычислении двойных интегралов.

Обучающий пример 4. Вычислить $I=\iint\limits_D e^{-y^2}dx\,dy$, где D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$.



Решение.

$$I=\iint\limits_D e^{-y^2}dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy.$$

Интеграл $\int e^{-y^2}dy$ является «неберущимся» интегралом. Мы не можем его выразить через элементарные функции.

Изменим порядок интегрирования.

$$I=\iint\limits_D e^{-y^2}dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 e^{-y^2}dy\left.(x)\right|_0^y=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2}d\left(-y^2\right)=-\frac{1}{2}\left.e^{-y^2}\right|_0^1=-\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\cong 0{,}3161.$$

Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$.

6. Два студента у доски решают.

Пример 4. На плоскости построить область интегрирования D по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле:

$$I=\int_0^4 dx\int_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy.$$

Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при заданном порядке интегрирования.

Ответ: 8.

7. Студенты решают самостоятельно следующие примеры.

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I=\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

Ответ: $I=\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx$.

Пример 6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I=\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

Ответ: $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx$.

Пример 7 (повышенной трудности). Найти среднее значение функции $f(x,y)=\cos^2 x\cdot\cos^2 y$ в области D: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 0,25.

Указание. $f_{ср.}=\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где S – площадь области D.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Замена переменной в двойном интеграле, переход к полярной системе координат».

2. Выполнить первые два примера из ИДЗ по кратным интегралам (два студента на один вариант).

3. Изменить порядок интегрирования $I=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

Ответ: $I=\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

II. Замена переменной в двойном интеграле, переход к полярной системе координат

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются полярные координаты (ρ,φ), для которых $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, дополнительный множитель (якобиан), который появляется при переходе в двойном интеграле к полярным координатам,

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho .$$

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

где область D' – это изображение области D в полярной системе координат.

Пределы в новом интеграле расставляются по рассмотренному ранее правилу с учетом вида области D'.

Рекомендуется переходить в двойном интеграле к полярным координатам, если областью интегрирования является круг (либо часть его), а подынтегральная функция содержит x и y в четных степенях. Например,

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2 .$$

Если же областью интегрирования является эллипс (или часть его), то можно перейти к так называемым обобщенным полярным координатам:

$$\frac{x}{a}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\rho\sin\varphi,$$

где a и b – полуоси эллипса.

Тогда уравнение эллипса имеет очень простой вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1 \;\Rightarrow\; \rho^2=1, \rho=1,$$

а якобиан $|J|=ab\rho$, $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$.

2. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 1. Вычислить $I=\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dx\,dy$, если область D – круг радиуса R с центром в начале координат.

Решение.

$$I=\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dx\,dy=\iint\limits_D \sqrt{\left(\rho^2\right)^3}\,\rho d\rho\, d\varphi=\iint\limits_D \rho^4 d\rho\, d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4\, d\rho=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{5}\rho^5\Big|_0^R=\frac{2\pi}{5}R^5.$$

Обучающий пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. В интеграле $S=\iint\limits_D dx\,dy$, выражающим площадь эллипса в декартовых координатах, перейдем к обобщенным полярным координатам. Уравнение эллипса, как было показано выше, тогда имеет вид $\rho=1$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\iint\limits_D ab\,\rho d\rho d\varphi= ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho d\rho=ab\;\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1=\pi ab\,.$$

Если $a=b=R$ из $S=\pi ab$ следует, что площадь круга $S=\pi R^2$.

3. Два студента у доски решают примеры.

Пример 1. Использовав полярные координаты, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$. *Ответ*: 24 π.

Пример 2. Найти $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, если область D ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x=0$, $y=0$. *Ответ*: $\dfrac{a^2b^2}{8}$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=6x$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=\sqrt{3}\,x$. *Ответ*: $\dfrac{5}{6}\pi$.

4. Студенты самостоятельно под контролем преподавателя решают примеры.

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, где D – часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$.

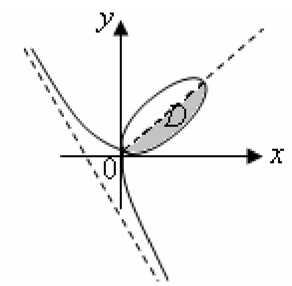
Ответ: $\frac{\pi^2}{6}$.

Пример 5. Вычислить $\iint\limits_D (4-x-y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линией $x^2+y^2=2x$. *Ответ*: 3π.

Пример 6. Найти площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$. *Ответ*: a^2.

5. Преподаватель у доски решает пример повышенной трудности.

Обучающий пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3+y^3=axy$ (площадь петли).



Решение. Преобразуем данное уравнение к полярным координатам:

$$\rho^3\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)=a\rho^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi,\quad \text{т. е.}$$

$$\rho=\frac{a\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

Осью симметрии петли является луч $\varphi=\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$S=2\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}}\rho\,d\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{a\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}}=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)^2}\,d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\cos^4\varphi}{\cos^6\varphi\left(1+\operatorname{tg}^3\varphi\right)^2}\,d\varphi=$$

$$= \frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi)}{\left(1+\operatorname{tg}^3\varphi\right)^2} = \frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(1+\operatorname{tg}^3\varphi\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^3\varphi\right)^2} = -\frac{a^2}{3}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{a^2}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{a^2}{6}.$$

6. Студент у доски решает.

Пример 7 (повышенный трудности). Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в следующем интеграле:

$$\int_0^{\frac{3}{4}a} dx \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{3}\sin\varphi} \rho f(\rho)\, d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho f(\rho)\, d\rho$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах».

2. Выполнить примеры 3 и 4 из ИДЗ по кратным интегралам.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 1$, $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$ (вне окружности $\rho = 1$). *Ответ*: $\frac{1}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ (кв. ед.).

III. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Будем считать область интегрирования Ω правильной (т. е. такой, что прямые, параллельные осям координат, пересекают границу этой области не более чем в двух точках). Для правильной области справедливы неравенства: $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$ и следующая формула для вычисления тройного интеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

При вычислении тройного интеграла вначале интегрируют функцию $f(x,y,z)$ по одной из переменных (в данной формуле по z) при условии, что оставшиеся две переменные считаются постоянными, затем результат интегрируют по второй переменной (в нашей формуле по y), считая оставшуюся переменную (x) постоянной, и наконец выполняют интегрирование по третьей переменной (по x) в максимальном диапазоне ее изменения.

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению трех однократных интегралов.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен, тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами.

Более сложные области интегрирования разбиваются на конечное число правильных областей, и результаты вычисления по этим областям суммируются. В частности, если область интегрирования – прямоугольный параллелепипед – $\Omega = \{\, a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ p \le z \le q \,\}$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz\,.$$

2. Студенты вместе с преподавателем разбирают.

Обучающий пример 1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

где область Ω – прямоугольный параллелепипед: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 2$.

Решение. Пределы интегрирования постоянные

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^2 (x+y+z)\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 \big(2(x+y)+2 \big)\, dy = 2\int\limits_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(3x + \frac{9}{2} + 3 \right) dx = 2\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{15}{2}x \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \right) = 18\,.$$

3. Два студента у доски решают один и тот же пример, но с разным порядком интегрирования.

Пример 1. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω задана неравенствами: $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$.

Ответ: $\dfrac{abc(a+b+c)}{2}$.

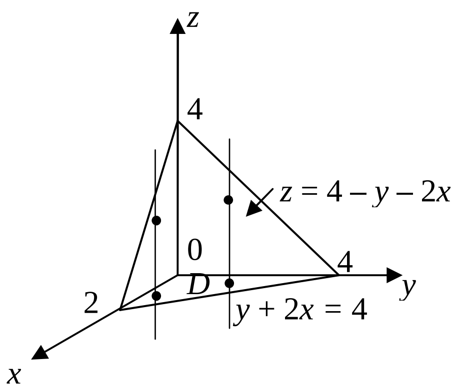
4. Преподаватель у доски решает.

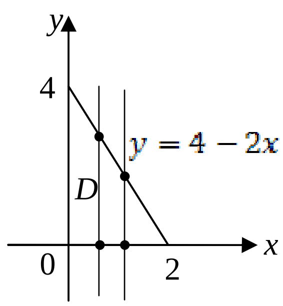
Обучающий пример 2. Вычислить $I=\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$, где Ω – треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x+y+z-4=0$ и плоскостями координат $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Из уравнения $2x+y+z-4=0$ получим уравнение плоскости в отрезках:

$$2x+y+z=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1.$$

Значит, эта плоскость отсекает на осях координат отрезки $a=2$, $b=4$, $c=4$.





Все четыре плоскости образуют треугольную пирамиду.

Расставим пределы интегрирования в тройном интеграле. Плоскость $2x+y+z-4=0$ пересекает плоскость xOy по прямой $2x+y-4=0$ ($z=0$). Для того чтобы определить, как изменяется z в последнем интеграле, проведем несколько линий, пересекающих данную область Ω, параллельно оси Oz. Точки входа этих линий в область лежат на основании пирамиды, т. е. в плоскости $z=0$, а точки выхода – на наклонной плоскости $z=4-y-2x$. Таким образом,

$$0\le z\le 4-y-2x.$$

Оставшийся повторный интеграл $\int dx \int dy$ является двойным интегралом по области D – проекции тела Ω на плоскость xOy. Имеем $0 \le y \le 4-2x$, $0 \le x \le 2$.

Итак,

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} y dy \left(z\right)\Big|_0^{4-y-2x} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} y(4-y-2x)dy = \int\limits_0^2 dx \left(2y^2 - \frac{1}{3}y^3 - xy^2\right)\Bigg|_0^{4-2x} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2(4-2x)^2 - \frac{1}{3}(4-2x)^3 - x(4-2x)^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (4-2x)^2 \left(2 - \frac{4-2x}{3} - x\right)dx = \int\limits_0^2 (4-2x)^2 \cdot \frac{6-4+2x-3x}{3}dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (4-2x)^2 \frac{2-x}{3}dx = \frac{4}{3}\int\limits_0^2 (2-x)^3 dx = -\frac{4}{3}\int\limits_0^2 (2-x)^3 d(2-x) =$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{(2-x)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Тот же результат можно получить, меняя порядок интегрирования. В частности, проецируя пирамиду на плоскость Oyz, имеем

$$I = \iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{4-z} dy \int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-y-z)} y\,dx = \frac{16}{3}.$$

5. Два студента у доски решают примеры.

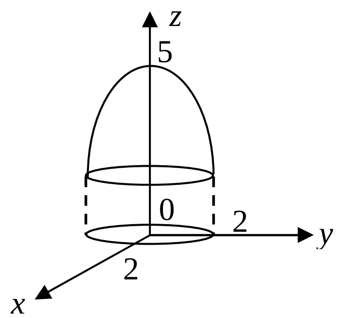
П р и м е р 2. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$, если область Ω ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. *Ответ*: $\frac{1}{24}$.

П р и м е р 3. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} (2x+y)dx\,dy\,dz$, где Ω ограничена поверхностями $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=1$, $z=x^2+y^2+1$. *Ответ*: $\frac{41}{60}$.

6. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1$, $z=5-x^2-y^2$.

Решение. Строим область Ω. $z=-\left(x^2+y^2\right)+5$ – параболоид вращения $z=-\left(x^2+y^2\right)$ (с ветвями вниз), поднятый вверх по оси Oz на 5 единиц. $z=1$ – плоскость, параллельная плоскости xOy. Линия пересечения этих поверхностей: $5-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=2^2$ – окружность с $R=2$.



Используем формулу $V=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz$.

$$V = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{1}^{5-x^2-y^2} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\ (z)\Big|_1^{5-x^2-y^2} =$$

$$=\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(5-x^2-y^2-1\right)dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(4-\left(x^2+y^2\right)\right)dy.$$

Перейдем к полярным координатам, расставив пределы интегрирования по четверти круга радиуса 2 $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\right)$.

$$V = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \rho\left(4-\rho^2\right) d\rho = -2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \left(4-\rho^2\right) d\left(4-\rho^2\right) =$$

$$= -2\cdot(\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left.\frac{\left(4-\rho\right)^2}{2}\right|_0^2 = -2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(0-16\right) = 8\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

7. Студенты самостоятельно под контролем преподавателя решают.

Пример 4. Вычислить объем пирамиды с помощью тройного интеграла: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$. Результат проверить по школьной формуле. *Ответ*: 12 куб. ед.

Пример 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью конуса $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$. Ответ проверить по школьной формуле. *Ответ*: $\frac{8}{3}\pi$ (куб. ед.)

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат».

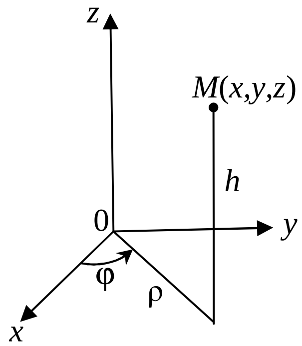
2. Выполнить примеры 5 и 6 из ИДЗ по кратным интегралам.

3. Найти объем пирамиды: $2x-3y+6z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ с помощью тройного интеграла. Ответ проверить по школьным формуле.

Ответ: 8 (куб. ед.)

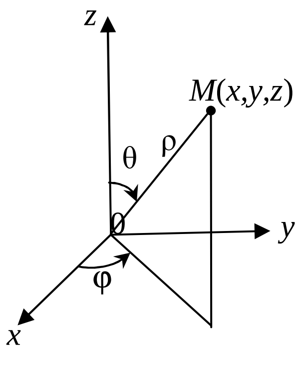
IV. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.



В цилиндрических координатах ρ, φ, h имеем

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \ \ y=\rho\sin\varphi, \quad z=h, \\ 0\le\varphi\le 2\pi, \ \ 0\le\rho<\infty, \ -\infty<h<\infty, \\ J=\rho, \ \ dx\,dy\,dz=\rho\, d\rho\, d\varphi\, dh. \end{cases}$$



В сферических координатах ρ, φ, θ получаем

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\rho\cos\theta, \\ 0\le\rho<\infty, \ \ 0\le\varphi\le 2\pi, \ \ 0\le\theta\le\pi, \\ J=\rho^2\sin\theta, \ \ dx\,dy\,dz=\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \end{cases}$$

В обобщенных сферических координатах –

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \;\; y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \;\;\; z = c\rho\cos\theta, \\ 0 \le \rho < \infty, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\;\; 0 \le \theta \le \pi, \\ J = abc\rho^2\sin\theta, \;\; dx\,dy\,dz = abc\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \end{cases}$$

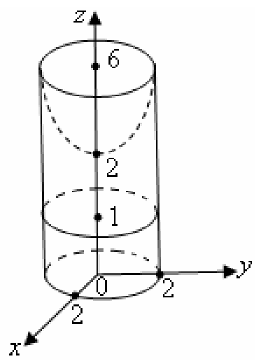
Эти соотношения позволяют осуществлять в тройных интегралах переход от декартовых к цилиндрическим, сферическим или обобщенным сферическим координатам. Вычисление их производится через три однократных интеграла, причем, как правило, внешний интеграл берется по одному из углов.

2. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 1. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\,dy\,dz$, если область интегрирования ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, $z = 2 + x^2 + y^2$.

Решение. По заданным поверхностям построим область Ω. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задает в трехмерном пространстве цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси *Oz*, и направляющей – окружностью $x^2 + y^2 = 2^2$ в плоскости *xOy*. Плоскость, заданная уравнением $z = 1$, параллельная плоскости *xOy*. Уравнение $z = 2 + x^2 + y^2$ задает параболоид вращения с ветвями вверх, поднятый вверх по оси *Oz* на 2 единицы.

Подставив 4 в уравнение $z = 2 + x^2 + y^2$ вместо $x^2 + y^2$, получим $z = 6$ – плоскость, где параболоид пересекается с цилиндром.



Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности $z = 2 + x^2 + y^2$ принимает вид $z = 2 + \rho^2$, т. е. $1 \le z \le 2 + \rho^2$. Область интегрирования для оставшегося повторного интеграла – это круг с радиусом 2 $\left(0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le \rho \le 2 \right)$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\rho^2} = \rho .$$

Итак,

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \rho \cdot \rho d\rho\, d\varphi\, dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^2 d\rho \int\limits_1^{2+\rho^2} dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^2 d\rho \left(h\right)\Big|_1^{2+\rho^2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^2 \left(2+\rho^2-1\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(\rho^4+\rho^2\right) d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{5}\rho^5 + \frac{1}{3}\rho^3\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3}\right) = \frac{272}{15}\pi.$$

3. Два студента у доски решают.

Пример 1. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$.

Ответ: $\frac{8}{9}a^2$.

4. Студенты самостоятельно решают.

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$. *Ответ*: $\frac{\pi}{6}$ куб. ед.

5. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 2. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dx\,dy\,dz$, если область Ω есть полушар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$.

Решение. $x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\theta$.

Для полушара $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le R$. Тогда

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2\sin^2\theta \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho =$$

$$= -\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\theta\right) d\cos\theta \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R = -\frac{2}{5}\pi R^5 \left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{5}\pi R^5 \left(0-1-\frac{1}{3}(0-1)\right) = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

6. Два студента у доски решают.

Пример 3. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}\, dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскостью $y = 0\ (y \geq 0)$.

Ответ: $\dfrac{64}{3}\pi$.

Пример 4. Вычислить объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi abc$ куб. ед.

Замечание. Если $a = b = c = R$, то $V_{шара} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

7. Студенты решают самостоятельно.

Пример 5. Вычислить $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2\, dx\,dy\,dz$, если Ω – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Ответ: $\dfrac{4}{15}\pi R^5$.

Пример 6. Вычислить $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, перейдя к сферическим координатам.

Ответ: $\dfrac{8}{5}\pi R^2 \sqrt{R}$.

Пример 7 (повышенной трудности). Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(0 < a < b)$, $z^2 = x^2 + y^2\ (z \geq 0)$.

Ответ: $\dfrac{b^3 - a^3}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\pi$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Приложения кратных интегралов».

2. Выполнить примеры 7 и 8 из ИДЗ по кратным интегралам.

3. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dydx$, где область Ω ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\pi^2 abc$.

V. Приложения кратных интегралов

V.1. Приложения двойных интегралов

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Вычисление площадей плоских фигур

$$S=\iint\limits_{D}dx\,dy=\iint\limits_{D}\rho\,d\rho\,d\varphi. \tag{V.1}$$

Вычисление объемов тел

$$V=\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dx\,dy. \tag{V.2}$$

Вычисление массы материальной пластинки

$$m=\iint\limits_{D}\delta\left(x,y\right)dx\,dy, \tag{V.3}$$

где $\delta=\delta\left(x,y\right)$ – поверхностная плотность пластинки.

Вычисление статических моментов и координат центра масс материальной пластинки

$$x_c=\frac{\iint\limits_{D}x\delta\left(x,y\right)dx\,dy}{m},\quad y_c=\frac{\iint\limits_{D}y\delta\left(x,y\right)dx\,dy}{m}. \tag{V.4}$$

Величины

$$M_x=\iint\limits_{D}y\delta\left(x,y\right)dx\,dy,\quad M_y=\iint\limits_{D}x\delta\left(x,y\right)dx\,dy \tag{V.5}$$

называются статическими моментами пластинки *D* относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно $\left(x_c=\frac{M_y}{m},\ y_c=\frac{M_x}{m}\right)$.

Вычисление моментов инерции материальной пластинки

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \delta(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \delta(x,y)\,dx\,dy,$$
$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y)\,dx\,dy, \qquad \text{(V.6)}$$

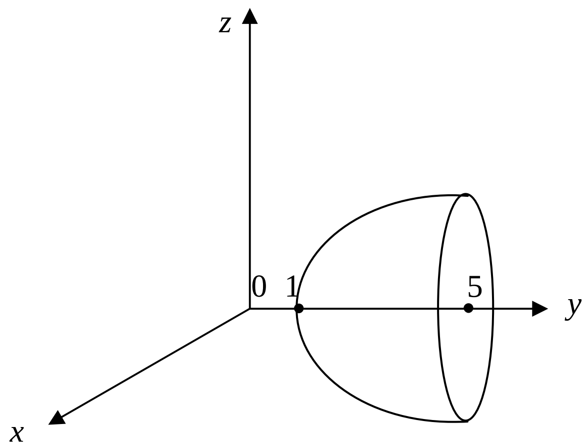
где I_0 – полярный момент инерции (относительно начала координат); $I_0 = I_x + I_y$.

Примечание. Вычисление площади поверхности будет рассмотрено на последнем практическом занятии.

2. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных и декартовых координатах было рассмотрено в предыдущих практических занятиях I и II.

3. Преподаватель решает у доски.

Обучающий пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = 1 + x^2 + z^2$, $y = 5$.



Решение. Рассматриваемое тело ограничено параболоидом вращения вокруг оси *Oy* и плоскостью $y = 5$, перпендикулярной оси *Oy*. Его проекция на плоскость *xOz* есть круг $x^2 + z^2 \le 4$.

$$\begin{cases} y = 1 + x^2 + z^2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 + x^2 + z^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = 4.$$

Искомый объем

$$V = \iint\limits_D \left(5 - \left(1 + x^2 + z^2\right)\right)dx\,dz = \iint\limits_D \left(4 - \left(x^2 + z^2\right)\right)dx\,dz.$$

Перейдем к полярным координатам с помощью равенств $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$. Тогда $x^2 + z^2 = \rho^2$, $dx\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi$ и

$$V = \iint\limits_D \left(4 - \rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4 - \rho^2\right)\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}(\varphi)\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 \left(4 - \rho^2\right) d\left(4 - \rho^2\right) =$$

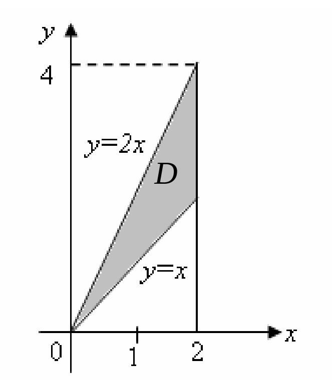
$$=-\pi\left.\frac{\left(4-\rho^2\right)^2}{2}\right|_0^2=-\frac{\pi}{2}(0-16)=8\pi.$$

4. Два студента у доски решают.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z=0$, координатными плоскостями и плоскостями $x=a$, $y=b$ $(a>0, b>0)$. *Ответ*: $\frac{ab}{3}\left(a^2+b^2\right)$ куб. ед.

5. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 2. Найти координаты центра масс пластинки *D*, ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$, если ее плотность $\delta=xy$.



ачале определим массу пластинки:

$$x,y)\,dx\,dy=\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^2 xdx\int_x^{2x} ydy=\int_0^2 xdx\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^{2x}=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x\left(4x^2-x^2\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^2 x^3\,dx=\left.\frac{3}{2}\frac{x^4}{4}\right|_0^2=6.$$

Согласно формулам (V.4), координаты центра масс

$$x_c=\frac{1}{m}\iint_D x\cdot xy\,dx\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2 x^2dx\int_x^{2x} y\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2 x^2dx\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^{2x}=$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^2 x^2\left(4x^2-x^2\right)dx=\frac{3}{12}\int_0^2 x^4dx=\left.\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{8}{5},$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iint_D y\cdot xy\,dx\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2 x\,dx\int_x^{2x} y^2\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2 x\,dx\left.\frac{y^3}{3}\right|_x^{2x}=$$

$$=\frac{1}{18}\int_0^2 x\left(8x^3-x^3\right)dx=\frac{7}{18}\int_0^2 x^4dx=\left.\frac{7}{18}\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{112}{45}.$$

Итак, центр масс $C\left(\frac{8}{5},\frac{112}{45}\right)$.

6. Два студента у доски решают.

Пример 2. Найти массу круглой пластинки радиуса *R*, если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна $\delta = \text{const}$ на краю пластинки. *Ответ*: $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$.

Пример 3. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$. *Ответ*: $\left(\frac{2}{5}; 0\right)$.

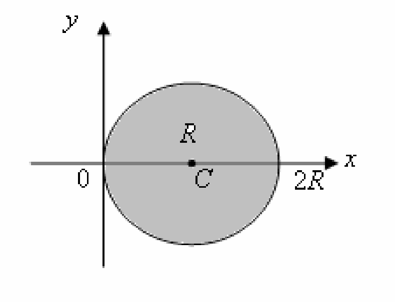
Указание. Так как фигура однородная $(\delta = \text{const})$, то δ в формулах (V.4) сокращается. Тогда

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{S},$$

где *S* – площадь области *D*.

7. Преподаватель решает у доски.

Обучающий пример 3. Вычислить моменты инерции относительно точки границы однородного круга и его диаметра, если радиус круга *R*, а вес *P*.



Решение. Поместим начало координат в точку, лежащую на границе круга, а центр круга – в точку $C(R, 0)$. Тогда задача сведется к нахождению моментов инерции круга относительно начала координат (I_0) и оси *Ox* (I_x).

Так как круг однороден, то его плотность δ постоянна и $\delta = \frac{P}{qS} = \frac{P}{q\pi R^2}$. Уравнение окружности имеет вид $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, т. е. $x^2 + y^2 = 2Rx$, в полярных координатах – $\rho = 2R\cos\varphi$. Для данного круга

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \rho \le 2R\cos\varphi.$$

Следовательно, на основании формул (V.6) имеем:

$$I_0 = \delta \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = \delta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\varphi} \rho \cdot \rho^2 d\rho = \frac{\delta}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_0^{2R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\delta R^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = 8\delta R^4 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\delta\pi R^4 = \frac{3}{2}\frac{P}{q} R^2 .$$

$$I_x = \delta \iint\limits_D y^2 \, dx\, dy = \delta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\varphi} \rho \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \, d\rho =$$

$$= \frac{\delta}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \rho^4 \Big|_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = 4\delta R^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos^4 \varphi \, d\varphi =$$

$$= 8\,\delta R^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \cdot \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \, d\varphi =$$

$$= \delta R^4 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi \right) =$$

$$= \delta R^4 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} \, d\varphi + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\sin 2\varphi \right) =$$

$$= \frac{\delta R^4}{2} \left(\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin^3 2\varphi}{3} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4} \delta R^4 = \frac{1}{4}\frac{P}{q} R^4 .$$

8. Два студента решают у доски.

Пример 4. Вычислить момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$ относительно оси Ox $(\delta = 1)$.

Ответ: $\frac{21}{32}\pi a^4$.

V.2. Приложения тройных интегралов

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Вычисление объемов тел

$$V = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dh = \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \qquad \text{(V.7)}$$

Вычисление массы тела

$$m = \iiint_{\Omega} \delta(x, y, z)\, dx\,dy\,dz, \qquad \text{(V.8)}$$

где δ – поверхностная плотность тела; $\delta = \delta(x, y, z)$.

Вычисление координат центра масс

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} x\,\delta(x, y, z)\, dx\,dydz,$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} y\,\delta(x, y, z)\, dx\,dydz, \qquad \text{(V.9)}$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} z\,\delta(x, y, z)\, dx\,dydz.$$

Величины M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} называются статическими моментами тела относительно координатных плоскостей.

Если $\delta(x, y, z) = \text{const}$, то δ в этих формулах сокращается и они принимают следующий вид:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} x\,dV, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} y\,dV, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z\,dV. \qquad \text{(V.10)}$$

Вычисление моментов инерции тел

Момент инерции относительно начала координат (полярный) I_0 определяется по формуле

$$I_0 = \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\, dx\,dy\,dz. \qquad \text{(V.11)}$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{(V.12)}$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{(V.13)}$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2 \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Если тело однородное, то чаще всего принимается, что $\delta = 1$.

2. Как вычисляются объемы тел показано в практических занятиях III и IV.

Обучающий пример 1. Найти координаты центра масс полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию точки от центра с коэффициентом *K*.

Решение. Имеем $\delta(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и вследствие симметрии $x_c = y_c = 0$, $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$. Вычисления проведем в сферических координатах.

$$m = K\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = K\iiint\limits_{\Omega} \rho \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= K\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \rho^3 d\rho = K \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{R} = \frac{1}{2} K\pi R^4.$$

$$M_{xy} = K\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; z\; dx\, dy\, dz = K\iiint\limits_{\Omega} \rho \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot \rho\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= K\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = K\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\sin\theta\cdot \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R =$$

$$= K\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{1}{5}K\pi R^5.$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{5}K\pi R^5 : \frac{1}{2}K\pi R^4 = \frac{2}{5}R.$$

Таким образом, $C\left(0, 0, \frac{2}{5}R\right)$.

3. Студенты у доски решают.

Пример 1. Найти центр тяжести шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке его обратно пропорциональна расстоянию до начала координат. *Ответ*: $C\left(0, 0, \frac{4}{5}R\right)$.

Пример 2. Вычислить момент инерции однородного куба со стороной a относительно одного из его ребер. *Ответ*: $\frac{2}{3}a^5$.

4. Студенты самостоятельно решают.

Пример 3. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $x_c = y_c = \frac{2}{5}$, $z_c = \frac{7}{30}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Криволинейные интегралы I и II рода».
2. Выполнить примеры 9 и 10 из ИДЗ по кратным интегралам.
3. Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно плоскости основания, и в центре основания равна δ_0.

Ответ: $m = \frac{1}{5}\pi\delta_0 R^2 H$, $\delta_{cp} = \frac{3}{5}\delta_0$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ ПО КРАТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ

1. Вычислить двойной интеграл по области *D*, ограниченной указанными линиями:

1.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2,\ x=y^2$.

1.2. $\iint\limits_D x\,y^2\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2,\ y=2x$.

1.3. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y^2=x,\ y=x$.

1.4. $\iint\limits_D x^2\,y\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=2-x,\ y=x,\ x\ge 0$.

1.5. $\iint\limits_D \left(x^3-2y\right)dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2-1,\ x\ge 0,\ y\le 0$.

1.6. $\iint\limits_D (1+y)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y^2=x,\ 5y=x$.

1.7. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2-1,\ y=-x^2+1$.

1.8. $\iint\limits_D \left(x-y^2\right)dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2, y=1$.

1.9. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, $\quad D$: $x=y^2,\ x=1$.

1.10. $\iint\limits_D x(2x+y)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=1-x^2,\ y\ge 0$.

1.11. $\iint\limits_D x\,y^3\,dx\,dy$, $\quad D$: $y^2=1-x,\ x\ge 0$.

1.12. $\iint\limits_D x(y+5)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0$.

1.13. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, $\quad D$: $y=x^2-1,\ y=3$.

1.14. $\iint\limits_D \left(x^3+y\right)dx\,dy$, $\quad D$: $x+y=1,\ x+y=2,\ x\le 1,\ x\ge 0$.

1.15. $\iint\limits_D \left(x^3+3y\right)dx\,dy$, $\quad D$: $x+y=1,\ y=x^2-1,\ x\ge 0$.

2. Вычислить площадь плоской области *D*, ограниченной заданными линиями:

2.1. *D*: $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y \ge 0$. *Ответ*: $\frac{10}{3}$.

2.2. *D*: $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$. *Ответ*: $\frac{5}{8}$.

2.3. *D*: $y^2 = x + 2$, $x = 2$. *Ответ*: $\frac{32}{3}$.

2.4. *D*: $y = \frac{8}{x^2 + 4}$, $x^2 = 4y$. *Ответ*: $2\pi - \frac{4}{3}$.

2.5. *D*: $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$. *Ответ*: $\frac{9}{2}$.

2.6. *D*: $y = \cos x$, $y \le x + 1$, $y \ge 0$. *Ответ*: $\frac{3}{2}$.

2.7. *D*: $y = x^2 + 2$, $x \ge 0$, $x = 2$, $y = x$. *Ответ*: $\frac{14}{3}$.

2.8. *D*: $y = x^2$, $y = -x$. *Ответ*: $\frac{1}{6}$.

2.9. *D*: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$. *Ответ*: $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

2.10. *D*: $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. *Ответ*: $\frac{125}{6}$.

2.11. *D*: $y = -2x^2 + 2$, $y \ge -6$. *Ответ*: $\frac{64}{3}$.

2.12. *D*: $y^2 = 4x$, $x = \frac{8}{y^2 + 4}$. *Ответ*: $2\pi - \frac{4}{3}$.

2.13. *D*: $x = y^2 + 1$, $x + y = 3$. *Ответ*: $\frac{9}{2}$.

2.14. *D*: $y = \cos x$, $x \le y + 1$, $x \ge 0$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$.

2.15. *D*: $x = 4 - y^2$, $x - y + 2 = 0$. *Ответ*: $\frac{125}{6}$.

3. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

3.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dy$. 3.2. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

3.3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \dfrac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$. 3.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

3.5. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx$. 3.6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,dy$.

3.7. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$. 3.8. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{tg}\left(x^2+y^2\right)dy$.

3.9. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\left(x^2+y^2\right)dy$. 3.10. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$.

3.11. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \dfrac{dy}{1+x^2+y^2}$. 3.12. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \dfrac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.13. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 3.14. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,dy$.

3.15. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

4. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

4.1. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2+y^2\right)$. 4.2. $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$.

4.3. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(3x^2+2y^2\right)$. 4.4. $\rho = a\sin^2\varphi$.

4.5. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(2x^2+3y^2\right)$. 4.6. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2+y^2\right)$.

4.7. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(7x^2+5y^2\right)$.

4.8. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

4.9. $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(3x^2+4y^2\right)$.

4.10. $\rho=a\sin 2\varphi$.

4.11. $\rho=a\cos 5\varphi$.

4.12. $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

4.13. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

4.14. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

4.15. $\rho=a\sin 3\varphi$.

5. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, если область Ω ограничена указанными поверхностями. Нарисовать область интегрирования.

5.1. Ω: $x=2$, $y=4x$, $y=3\sqrt{x}$, $z\ge 0$, $z=4$.

5.2. Ω: $x=1$, $y=3x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=2\left(x^2+y^2\right)$.

5.3. Ω: $x=3$, $y=x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=3x^2+y^2$.

5.4. Ω: $x=0$, $y=x$, $y=5$, $z\ge 0$, $z=2x^2+y^2$.

5.5. Ω: $x\ge 0$, $y=2x$, $y=1$, $z\ge 0$, $x+y+z=3$.

5.6. Ω: $x=5$, $y=\dfrac{x}{5}$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=x^2+5y^2$.

5.7. Ω: $x=3$, $y=\dfrac{1}{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

5.8. Ω: $x\ge 0$, $y=3x$, $y=3$, $z\ge 0$, $z=2\left(x^2+y^2\right)$.

5.9. Ω: $x\ge 0$, $y=4x$, $y=8$, $z\ge 0$, $z=3x^2+y^2$.

5.10. Ω: $x\ge 0$, $y=5x$, $y=10$, $z\ge 0$, $z=x^2+y^2$.

5.11. Ω: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y=2$, $z=4-x^2-y^2$.

5.12. Ω: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y=3$, $z=9-x^2-y^2$.

5.13. Ω: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $3x+4y=12$, $z=6-x^2-y^2$.

5.14. Ω: $x\ge 0$, $z\ge 0$, $y=x$, $y=3$, $z=18-x^2-y^2$.

5.15. Ω: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $2x+3y=6$, $z=3+x^2+y^2$.

6. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

6.1. $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \geq 0$. *Ответ*: 12π.

6.2. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x - y$, $z \geq 0$. *Ответ*: 2π.

6.3. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z \geq 0$. *Ответ*: 16π.

6.4. $x \geq 0$, $z \geq 0$, $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$. *Ответ*: $\frac{118}{3}$.

6.5. $z \geq 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$. *Ответ*: 36.

6.6. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$. *Ответ*: $\frac{8}{3}$.

6.7. $z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$. *Ответ*: 45π.

6.8. $z \geq 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$. *Ответ*: $\frac{16}{3}$.

6.9. $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y = 4$, $z = x$, $x = \sqrt{25 - y^2}$. *Ответ*: $\frac{118}{3}$.

6.10. $z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$. *Ответ*: $\frac{81}{8}\pi$.

6.11. $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y \geq x$, $z = 1 - x^2 - y^2$. *Ответ*: $\frac{\pi}{16}$.

6.12. $z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$. *Ответ*: 8π.

6.13. $z \geq 0$, $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$. *Ответ*: 8π.

6.14. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $2x + y = 2$, $z = y^2$. *Ответ*: $\frac{2}{3}$.

6.15. $z \geq 0$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $z = 1 - y^2$. *Ответ*: $\frac{8}{5}$.

7-8. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат:

7.1. $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Ответ: $\frac{16\pi}{5}$.

7.2. $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, Ω: $z \ge 0$, $z=2$, $y \ge \pm x$, $z^2 = 4\left(x^2+y^2\right)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

7.3. $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz$, Ω: $1 \le x^2+y^2 \le 36$, $y \ge z$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

Ответ: $\dfrac{1555}{3}$.

7.4. $\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2+y^2+z^2=32$, $y^2=x^2+z^2$, $y \ge 0$.

Ответ: 128π.

7.5. $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2=y^2+z^2$, $x \ge 0$.

Ответ: 8π.

7.6. $\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$, Ω: $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Ответ: $\dfrac{15\pi}{2}$.

7.7. $\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$, Ω: $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge 0$.

Ответ: $8\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$.

7.8. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{y^2\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, Ω: $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y \ge \sqrt{3}x$, $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 36$.

Ответ: $\dfrac{52}{27}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

7.9. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{y^2 z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, Ω: $y \ge 0$, $y \le \sqrt{3}x$, $z=3\left(x^2+y^2\right)$, $z=3$.

Ответ: $\dfrac{3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{20}$.

7.10. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{x^2 z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}}$, Ω: $x^2+y^2+z^2=16$, $z \ge 0$.

Ответ: $\dfrac{16\pi}{3}$.

7.11. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $z=2\left(x^2+y^2\right)$, $y \geq 0$, $y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z=18$.

Ответ: 81.

7.12. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, Ω: $z=x^2+y^2$, $y \geq 0$, $y \leq x$, $z=4$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

7.13. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z \geq 0$.

Ответ: $\frac{1472}{45}$.

7.14. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=2x$, $x+z=2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

7.15. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=16y$, $y+z=16$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Ответ: $\frac{2048}{5}$.

8.1. $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2+y^2=2x$, $x+z=2$, $z \geq 0$.

Ответ: $\frac{128}{45}$.

8.2. $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$, Ω: $2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 8$, $z^2=x^2+y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$z \geq 0$. *Ответ*: $\frac{31\left(4\sqrt{2}-5\right)}{15}$.

8.3. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $z=6$.

Ответ: 24.

8.4. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2+y^2+z^2=36$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $y\le -x$. *Ответ*: 81π.

8.5. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $z\ge 0$, $z=4$, $y\ge 0$, $y\le x$. *Ответ*: $10\sqrt{2}$.

8.6. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Ω: $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\ge 0$, $y\le\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z\ge 0$.

Ответ: $\frac{13\pi}{8}$.

8.7. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2-2x+y^2=0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+z=2$.

Ответ: $\frac{64}{45}$.

8.8. $\iiint\limits_{\Omega}x^2\,dx\,dy\,dz$, Ω: $1\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\ge 0$, $y\le x$, $z\ge 0$.

Ответ: $\frac{341(\pi+2)}{20}$.

8.9. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Ω: $x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z\ge 0$.

Ответ: $\frac{64}{3}$.

8.10. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Ω: $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. *Ответ*: $\frac{7\pi}{3}$.

8.11. $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2+y^2=2x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $z=3$.

Ответ: 8.

8.12. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Ω: $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$, $x\ge 0$, $y\le x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. *Ответ*: $\frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$.

8.13. $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, Ω: $x^2 = 2\left(y^2 + z^2\right)$, $x = 4$, $x \ge 0$.

Ответ: 32π.

8.14. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, Ω: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $y \le x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Ответ: $\dfrac{13\sqrt{2}\,\pi}{2}$.

8.15. $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, Ω: $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \ge 0$.

Ответ: $\dfrac{81}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$.

9. Вычислить статический момент однородной пластины *D*, ограниченной данными линиями, относительно указанной оси, использовав полярные координаты:

9.1. *D*: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x - y \le 0$, *Ox*.

9.2. *D*: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x + y \le 0$, *Oy*.

9.3. *D*: $x^2 + y^2 + 2ay = 0$, $x - y \ge 0$, *Ox*.

9.4. *D*: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x + y \ge 0$, *Oy*.

9.5. *D*: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \ge 0$, *Oy*.

9.6. *D*: $x^2 + y^2 + 2ay = 0$, $x^2 + y^2 + ay = 0$, $x \ge 0$, *Ox*.

9.7. *D*: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x \ge 0$, *Ox*.

9.8. *D*: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x \le 0$, *Ox*.

9.9. *D*: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x^2 + y^2 + ax = 0$, $y \ge 0$, *Oy*.

9.10. *D*: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \le 0$, *Ox*.

9.11. *D*: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x - y \ge 0$, $y \le 0$, *Oy*.

9.12. *D*: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y \ge 0$, $x \le 0$, *Ox*.

9.13. *D*: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x + y \le 0$, $y \ge 0$, *Oy*.

9.14. *D*: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y - x \le 0$, $y \ge 0$, *Ox*.

9.15. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $y-x\le 0$, $x+y\ge 0$, Oy.

10. Вычислить координаты центра масс однородного тела Ω, ограниченного указанными поверхностями:

10. 1. Ω: $x=6\left(y^2+z^2\right)$, $y^2+z^2=3$, $x=0$. *Ответ*: $(6,0,0)$.

10.2. Ω: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $z=8$. *Ответ*: $(0,0,6)$.

10.3. Ω: $z=5\left(x^2+y^2\right)$, $x^2+y^2=2$, $z=0$. *Ответ*: $\left(0,\,0,\dfrac{10}{3}\right)$.

10.4. Ω: $x=6\sqrt{y^2+z^2}$, $y^2+z^2=9$, $x=0$. *Ответ*: $\left(\dfrac{27}{4},0,0\right)$.

10.5. Ω: $z=8\left(x^2+y^2\right)$, $z=32$. *Ответ*: $\left(0,\,0,\dfrac{64}{3}\right)$.

10.6. Ω: $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $y=9$. *Ответ*: $\left(0,\dfrac{27}{4},0\right)$.

10.7. Ω: $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $z=0$. *Ответ*: $\left(0,\,0,\dfrac{1}{4}\right)$.

10.8. Ω: $x^2+z^2=6y$, $y=8$. *Ответ*: $\left(0,\dfrac{16}{3},0\right)$.

10.9. Ω: $8x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=\dfrac{1}{2}$. *Ответ*: $\left(\dfrac{3}{8},0,0\right)$.

10.10. Ω: $y^2+z^2=8x$, $x=2$. *Ответ*: $\left(\dfrac{4}{3},0,0\right)$.

10.11. Ω: $z=9\sqrt{x^2+y^2}$, $z=36$. *Ответ*: $(0,0,27)$.

10.12. Ω: $x^2+z^2=4y$, $y=9$. *Ответ*: $(0,6,0)$.

10.13. Ω: $x=5\sqrt{y^2+z^2}$, $x=20$. *Ответ*: $(15,0,0)$.

10.14. Ω: $y^2+z^2=3x$, $x=9$. *Ответ*: $(6,0,0)$.

10.15. Ω: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=4$. *Ответ*: $(0,0,3)$.

VI. Криволинейные интегралы I и II рода

VI.1. Криволинейные интегралы по длине дуги (I рода)

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Вычисление криволинейного интеграла I рода $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ зависит от того, каким способом задана линия L. Возможны четыре случая.

1) Линия L задана уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{VI.1}$$

2) Линия L задана уравнением $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_c^d f\left(x(y), y\right)\sqrt{1+x'^2}\,dy. \tag{VI.2}$$

3) Линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \tag{VI.3}$$

4) Линия L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$,

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \tag{VI.4}$$

Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt. \tag{VI.5}$$

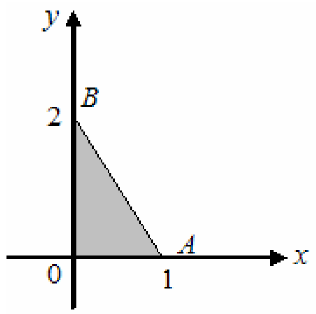
2. Студенты вместе с преподавателем разбирают.

Обучающий пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x+y)\,dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

Решение. $\int\limits_L (2x+y)\,dl = \int\limits_{AB} (2x+y)\,dl + \int\limits_{BO} (2x+y)\,dl + \int\limits_{OA} (2x+y)\,dl$.

На отрезке AB: $y=-2x+2$, $y'=-2$,

$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{5}\,dx\;\;(0\le x\le 1)$.



На отрезке BO: $x=0$, $x'=0$,

$dl=\sqrt{1+x'^2}\,dy=dy\;\;(0\le y\le 2)$.

На отрезке OA: $y=0$, $y'=0$,

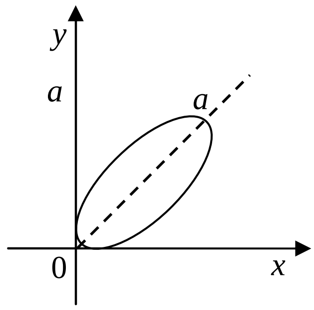
$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=dx\;\;(0\le x\le 1)$.

Поэтому

$$\int\limits_L (2x+y)\,dl=\int\limits_0^1 (2x-2x+2)\sqrt{5}\,dx+\int\limits_0^2 y\,dy+\int\limits_0^1 2x\,dx=$$

$$=2\sqrt{5}x\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Big|_0^2+x^2\Big|_0^1=3+2\sqrt{5}.$$

Обучающий пример 2. Вычислить $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L – лепесток лемнискаты Бернулли $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первой четверти.



Решение. $\rho'=a\dfrac{1\cdot\cos 2\varphi\cdot 2}{2\sqrt{\sin 2\varphi}}=a\dfrac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$.

$$\rho^2+\rho'^2=a^2\sin 2\varphi+\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}=a^2\,\frac{\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}=\frac{a^2}{\sin 2\varphi};$$

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{a^2}{a\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{a^2}{\rho},\qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_L (x+y)\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\,\frac{a^2}{\rho}\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2a^2.$$

3. Два студента у доски (параллельно) решают.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L (x-y)\,dl$, где L – отрезок прямой от $O(0,0)$, до $B(4,3)$. *Ответ*: $\dfrac{5}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L – первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$ $(a>0)$. *Ответ*: $4\pi a\sqrt{a}$.

4. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 3. Вычислить $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)\,dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$ и $M_2(6,10,5)$.

Решение. Запишем сначала канонические уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} = t \quad \Rightarrow$$

$\begin{cases} x = 8-2t, \\ y = 9+t, \\ z = 2t+3. \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Найдем, как изменяется t.

$$6 \le x \le 8 \;\Rightarrow\; 6 \le 8-2t \le 8 \;\Rightarrow\; -2 \le -2t \le 0 \;\Rightarrow\; 0 \le t \le 1.$$

Так как $x'_t = -2$, $y'_t = 1$, $z'_t = 2$, то

$$dl = \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2 + {z'_t}^2}\,dt = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}\;dt = 3dt.$$

По формуле (VI.5) находим

$$\int\limits_L (2x+4y-4z+7)\,dl = \int\limits_0^1 \big(\,2(8-2t)+4(9+t)-4(2t+3)+7\,\big)\,3dt =$$

$$= 3\int\limits_0^1 (47-8t)\,dt = 3\left(47t-4t^2\right)\Big|_0^1 = 129.$$

5. Студент у доски решает.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_L xy\,dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, ограниченной точками, для которых $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$. *Ответ*: $\dfrac{ab}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

VI.2. Криволинейные интегралы по координатам (II рода)

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Вычисление криволинейного интеграла II рода также зависит от способа задания линии L.

1) Линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Тогда

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \Big[\, P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) \;+\; Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t) \,\Big]dt. \quad \text{(VI.6)}$$

2) Линия L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Тогда

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big[\, P\big(x,y(x)\big) \;+\; Q\big(x,y(x)\big)y'(x) \,\Big]dx. \quad \text{(VI.7)}$$

3) Линия L задана уравнением $x = x(y)$, $c \le y \le d$. Тогда

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_c^d \Big[\, P\big(x(y),y\big)x'(y) \;+\; Q\big(x(y),y\big) \,\Big]dy. \quad \text{(VI.8)}$$

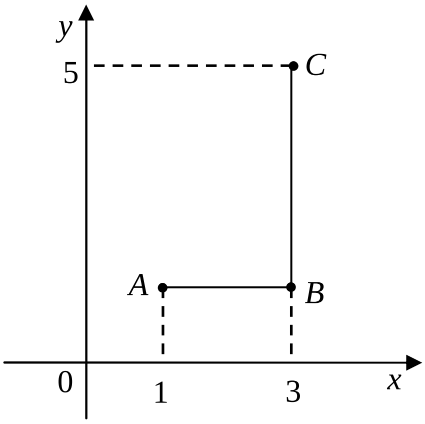
Если пространственная линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \Big[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,y'(t) + \quad \text{(VI.9)}$$

$$+ R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,z'(t)\Big]\,dt.$$

2. Студенты вместе с преподавателем разбирают решение примеров.



Обучающий пример 1. Вычислить $\int\limits_L \left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy$, где L – ломаная ABC, причем $A(1{,}1)$, $B(3{,}1)$, $C(3{,}5)$.

$$\int\limits_L = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} .$$

На отрезке AB, уравнение которого $y=1$ имеем $dy=0$ $(1\le x\le 3)$; на отрезке BC, уравнение которого $x=3$ имеем $dx=0$ $(1\le y\le 5)$, поэтому

$$\int\limits_L \left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=\int\limits_1^3\left(x^3+1+\left(x^2+1\right)\cdot 0\right)dx+$$

$$+\int\limits_1^5\left(\left(3^3+y\right)\cdot 0+3+y^3\right)dy = \int\limits_1^3\left(x^3+1\right)dx+\int\limits_1^5\left(3+y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5=190 .$$

Обучающий пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz ,$$

где L – отрезок прямой от точки $A(1,0,2)$ до точки $B(3,1,4)$.

Решение. Параметрические уравнения этой прямой

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=t, \qquad 0\le t\le 1. \\ z=2t+2. \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx&=2dt, \\ dy&=dt, \\ dz&=2dt. \end{aligned}$$

По формуле (VI.9)

$$\int\limits_L y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2t^2+(1+2t)^2+2+2t+2\left(1+2t+t+(2t+2)^2\right)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left(14t^2+28t+13\right)dt=\left(\frac{14}{3}t^3+14t+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{95}{3}.$$

3. Студенты у доски решают.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L x^2 y\,dy - y^2 x\,dx$, где L: $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $0 \le t \le 2\pi$. *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L y\,dx - \left(y + x^2\right)dy$, если L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки. *Ответ*: 4.

Пример 3 (повышенной трудности). Найти массу m дуги кривой $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $z = \frac{t^3}{3}$ $(0 \le t \le 1)$, линейная плотность которой меняется по закону $\delta = \sqrt{2y}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Указание. $m = \int\limits_L \delta(x, y, z)\,dl$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал по теме следующего практического занятия «Вычисление поверхностных интегралов 2 рода».

2. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x - y}$, если L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$ между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$. *Ответ*: $\sqrt{5}\ln 2$.

3. Вычислить $\int\limits_L x\,y\,z\,dl$, если L – отрезок прямой между $A(1,0,1)$ и $B(2,2,3)$. *Ответ*: 12.

4. Вычислить $\int\limits_L xy\,dx + (y - x)\,dy$, если линия, соединяющая точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, задана уравнением: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = x^3$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{17}{30}$.

5. Вычислить $\int\limits_L x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$. *Ответ*: 13.

6 (повышенной трудности). Вычислить работу A силы $\overline{F} = yz\,i + xz\,j + xy\,k$ вдоль отрезка прямой BC, если $B(1,1,1)$, $C(2,3,4)$.

Ответ: 23.

Указание. $A = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$.

VII. Вычисление поверхностных интегралов 2 рода

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Наиболее общим видом поверхностного интеграла 2 рода является интеграл

$$I = \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

где P, Q, R – функции от x, y, z, определенные и непрерывные в точках двусторонней поверхности σ.

Интегралы 2 рода вычисляются сведением к двойным интегралам следующим образом. Если поверхность σ однозначно проецируется в область D_1 плоскости xOy и $z = z(x,y)$ – ее уравнение, то

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm \iint\limits_{D_1} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dx\,dy, \qquad \text{(VII.1)}$$

где знак плюс берется, когда на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, и знак минус, когда $\cos\gamma < 0$.

Аналогично, если σ однозначно проецируется в область D_2 (или D_3) на плоскости xOz (или yOz), т. е. задана уравнением $y = y(x,z)$ (или $x = x(y,z)$), то

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)\,dx\,dz = \pm \iint\limits_{D_2} Q\big(x,y(x,z),z\big)\,dx\,dz, \qquad \text{(VII.2)}$$

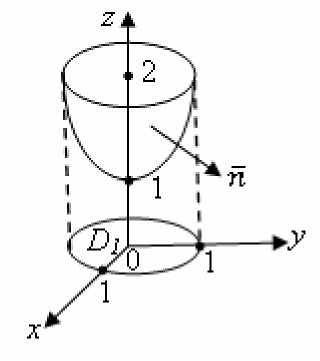
$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm \iint\limits_{D_3} R\big(x(y,z),y,z\big)\,dy\,dz, \qquad \text{(VII.3)}$$

где берется знак $\cos\beta$ и $\cos\alpha$;

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл.

2. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 1. Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma} z^2\,dx\,dy$, где область σ – часть поверхности $z=x^2+y^2+1$, отсеченной плоскостью $z=2$, если нормаль к поверхности σ составляет с осью Oz тупой угол γ.



Решение. Так как γ тупой угол, поэтому $\cos\gamma<0$.

$$I=-\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2+1\right)^2 dx\,dy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$I=-\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^2+1\right)^2\rho\,d\rho=-\varphi\Big|_0^{2\pi}\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\rho^2+1\right)^2 d\left(\rho^2+1\right)=$$

$$=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\left.\frac{\left(\rho^2+1\right)^3}{3}\right|_0^1=-\frac{1}{3}\pi\left(2^3-1\right)=-\frac{7}{3}\pi.$$

Обучающий пример 2. Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz+dx\,dz+xz^2\,dx\,dy$, где σ – внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте.

Решение. Для первого октанта $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma>0$. Если обозначить проекции поверхности σ на координатные плоскости через D_1, D_2, D_3, а данный интеграл рассматривать как сумму трех интегралов

$$I_1=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz,\qquad I_2=\iint\limits_{\sigma} dx\,dz,\qquad I_3=\iint\limits_{\sigma} xz^2\,dx\,dy,$$

то, применив формулы (VII.1) – (VII.3), получим

$$I_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz,\;\; I_2=\iint\limits_{D_2} dx\,dz,\;\; I_3=\iint\limits_{D_3} x\left(1-x^2-y^2\right)dx\,dy.$$

Области D_1, D_2, D_3 являются четвертями кругов единичного радиуса, расположенными в соответствующих координатных плоскостях, поэтому интеграл $I_2=S_{D_2}=\dfrac{\pi R^2}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.

Для вычисления I_1 и I_3 перейдем к полярным координатам, положив $y=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $dy\,dz=\rho d\rho d\varphi$ для I_1; $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dx\,dy=\rho d\rho d\varphi$ – для I_3. В обоих случаях $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 1$. Тогда

$$I_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\;\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=-\frac{\pi}{6}(0-1)=\frac{\pi}{6}.$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3}\rho^2\cos\varphi\left(1-\rho^2\right)\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho=$$

$$=\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

Следовательно, $I=I_1+I_2+I_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{2}{15}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{15}$.

3. Студенты у доски решают.

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл

$$I=\iint\limits_{\sigma}x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy,$$

где σ – верхняя часть поверхности $x+2y+z-6=0$, расположенная в первом октанте. *Ответ*: 54.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{\sigma}(x+y)\,dy\,dz+(y-x)\,dx\,dz+(z-2)\,dx\,dy,$$

если σ – часть поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz.

4. Студенты самостоятельно решают.

Пример 3. Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz\ +\ z^3\,dx\,dy$, если σ – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$. *Ответ*: $\frac{32}{15}\pi$.

Пример 4. Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma}\ yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$, если σ – внешняя сторона пирамиды, гранями которой являются следующие плоскости: $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$. *Ответ*: $\frac{1}{8}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал следующего практического занятия по теме «Вычисление поверхностных интегралов 1 рода».

2. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(y+2z)\,dx\,dy$, если σ – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте. *Ответ*: $\frac{8}{3}$.

3. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} xz\,dy\,dz+(3y-x)\,dx\,dz-\ z\,dx\,dy$, если σ – внешняя часть поверхности тела, ограниченного поверхностями: $z=0$, $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2+2$. *Ответ*: 5π.

VIII. Вычисление поверхностных интегралов 1 рода

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

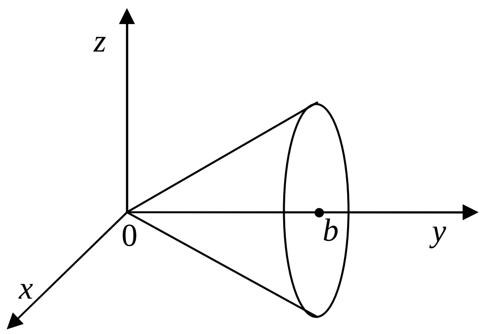
Вычисление поверхностного интеграла $I=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ также сводится к вычислению двойных интегралов по проекции поверхности (σ) на соответствующую координатную плоскость.

Пусть, например, поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, D_1 – ее проекция на плоскость *xOy*. Тогда

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_1} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\ dx\,dy. \qquad \text{(VIII.1)}$$

2. Преподаватель решает у доски.

Обучающий пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{(\sigma)} \left(3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2\right) d\sigma$, где



(σ) – часть конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$.

Решение. Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно y, поэтому воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D_2} f\left(x, y(x,z), z\right) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\, dx\, dz, \qquad \text{(VIII.2)}$$

где D_2 – проекция (σ) на плоскость xOz.

Так как $y_x' = \dfrac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + z^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, $\qquad y_z' = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, то

$$\sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + z^2 + x^2 + z^2}{x^2 + z^2}} = \sqrt{2}.$$

Проекцией D_2 поверхности (σ) на плоскость xOz является круг $x^2 + z^2 \le b^2$, поэтому при переходе к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $dx\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi$, при этом $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le b$. Тогда

$$I = \iint\limits_{D_2} \left(3\left(x^2 + z^2\right) + 5\left(x^2 + z^2\right) - 2\right)\sqrt{2}\, dx\, dz = \iint\limits_{D_2} \left(8\rho^2 - 2\right)\sqrt{2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b \left(8\rho^3 - 2\rho\right) d\rho = \sqrt{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} \left(2\rho^4 - \rho^2\right)\Big|_0^b = 2\sqrt{2}\pi\left(2b^4 - b^2\right).$$

3. Студенты у доски решают примеры.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} x(y + z)\, d\sigma$, где (σ) – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{b^2 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = c$.

Ответ: $b^2 c^2$.

Указание. Так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительно x, то можно использовать формулу

$$I=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_3} f\left(x(y,z),y,z\right)\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}\,dy\,dz, \quad \text{(VIII.3)}$$

где D_3 – проекция (σ) на плоскость yOz. Проекцией будет прямоугольник: $-b\le y\le b$, $0\le z\le c$.

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$, где (σ) – часть конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$, $z=1$.

Ответ: $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Студенты решают самостоятельно.

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} xyz\,d\sigma$, где (σ) – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, если (σ) – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0$, $z=3$.

Ответ: $\frac{160}{3}\pi$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Проработать теоретический материал по теме следующего практического занятия «Применение поверхностных интегралов» (по первому пункту практического занятия IX из данного УМК).

2. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} xyz\,d\sigma$, где (σ) – часть поверхности $z=x^2+y^2$, расположенная между плоскостями $z=0$, $z=1$. *Ответ*: $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

3. Вычислить $I=\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$, где (σ) – полусфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $z=0$. *Ответ*: $\frac{4}{3}\pi a^4$.

IX. Применение поверхностных интегралов

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Площадь σ поверхности (σ) вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma. \tag{IX.1}$$

Если $\delta = \delta(x, y, z)$ – поверхностная плотность массы материальной поверхности (σ), то ***масса*** всей этой поверхности определяется интегралом

$$m = \iint\limits_{(\sigma)} \delta(x, y, z)\, d\sigma. \tag{IX.2}$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ поверхности (σ) вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} x\delta(x, y, z)\, d\sigma, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} y\delta(x, y, z)\, d\sigma,$$
$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_{(\sigma)} z\delta(x, y, z)\, d\sigma. \tag{IX.3}$$

Моменты инерции относительно координатных осей

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \left(y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\, d\sigma, \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\, d\sigma,$$
$$I_z = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y, z)\, d\sigma. \tag{IX.4}$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \iint\limits_{(\sigma)} z^2\delta(x, y, z)\, d\sigma, \quad I_{xz} = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\delta(x, y, z)\, d\sigma,$$
$$I_{yz} = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\delta(x, y, z)\, d\sigma. \tag{IX.5}$$

Если поверхность однородная, то $\delta \equiv 1$.

2. Преподаватель решает у доски.

Обучающий пример 1. Вычислить площадь поверхности сферы радиуса r $\left(x^2+y^2+z^2=r^2\right)$.

Решение. Берем верхнюю часть сферы, для которой $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

Тогда $z'_x=\dfrac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, $\quad z'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$,

$$1+{z'_x}^2+{z'_y}^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{r^2-x^2-y^2}=$$

$$=\frac{r^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{r^2-x^2-y^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}.$$

Поэтому

$$\sigma=2\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=2\iint\limits_{D}\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy=2\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где D – проекция полусферы на плоскость xOy, т. е. круг радиуса r с центром в начале координат.

Перейдем к полярным координатам ρ и φ, тогда $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le r$.

Имеем

$$\sigma=2r\iint\limits_{D}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=2r\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=-r\,\varphi\Big|_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\left(r^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(r^2-\rho^2\right)=$$

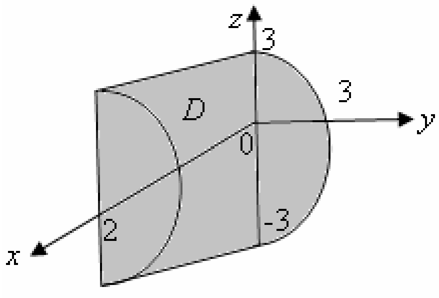
$$=-2\pi r\left.\frac{\left(r^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^r=-4\pi r\sqrt{r^2-\rho^2}\Big|_0^r=-4\pi r(0-r)=4\pi r^2.$$

3. Студент решает у доски.

Пример 1. Вычислить площадь части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая расположена в первом октанте. *Ответ*: 14.

4. Преподаватель решает у доски.

Обучающий пример 2. Найти массу части цилиндрической поверхности $y=\sqrt{9-z^2}$, отсеченной плоскостями $x=0$, $x=2$, если поверхностная плотность $\delta(x,y,z)=k\,y(x+y)$.



Решение. Нарисуем указанную поверхность. Это половина кругового цилиндра $(y\ge 0)$, отсеченного плоскостями $x=0$ и $x=2$.

Проекцией этой поверхности на плоскость *xOy* является прямоугольник *D*: $0\le x\le 2$, $-3\le z\le 3$.

Поэтому по формуле (IX.2) получим

$$m=\iint\limits_{(\sigma)}\delta(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}k\,y(x+z)\,d\sigma.$$

Найдем $d\sigma=\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dx\,dz$.

$$y=\sqrt{9-z^2},\quad y'_x=0,\quad y'_z=\frac{-2z}{2\sqrt{9-z^2}}=-\frac{z}{\sqrt{9-z^2}}.$$

Тогда $\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}=\sqrt{1+\dfrac{z^2}{9-z^2}}=\sqrt{\dfrac{9-z^2+z^2}{9-z^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{9-z^2}}=\dfrac{3}{y}$.

Итак, $m=k\iint\limits_{D}y(x+z)\dfrac{3}{y}dx\,dy=3k\iint\limits_{D}(x+z)\,dx\,dy=3k\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-3}^{3}(x+z)\,d(x+z)=$

$$=3k\int\limits_0^2 dx\left.\frac{(x+z)^2}{2}\right|_{-3}^{3}=\frac{3}{2}k\int\limits_0^2\left((3+x)^2-(x-3)^2\right)dx=$$

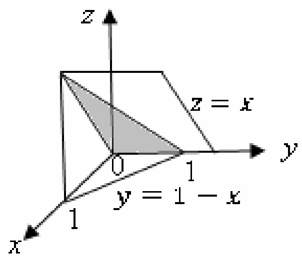
$$=\frac{3}{2}k\int\limits_0^2\left(x^2+6x+9-x^2 6x-9\right)dx=\frac{3}{2}k\int\limits_0^2 12x\,dx=18k\,x\Big|_0^2=36k.$$

5. Студент решает у доски.

Пример 2. Вычислить массу полусферы $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi a^4$.

6. Преподаватель решает у доски.



Обучающий пример 3. Найти координаты центра тяжести однородной плоскости $z=x$, ограниченной плоскостями $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Найдем площадь указанной части плоскости $z=x$. Имеем $z'_x=1$, $z'_y=0$, следовательно,

$$\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = \iint\limits_{D}\sqrt{1+z'_x+z'_y}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\, y\Big|_0^{1-x} =$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^1(1-x)\,dx=-\sqrt{2}\int\limits_0^1(1-x)\,d(1-x)=-\sqrt{2}\,\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(0-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Найдем статические моменты относительно координатных плоскостей $(\delta\equiv1)$.

$$M_{yz}=\iint\limits_{(\sigma)} x\,d\sigma = \iint\limits_{D} x\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x} dy =$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^1 x\,dx\cdot y\Big|_0^{1-x} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$M_{xz}=\iint\limits_{(\sigma)} y\,d\sigma=\iint\limits_{D} y\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} y\,dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^1(1-x)^2\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^1(1-x)^2\,d(1-x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 =$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}(0-1) = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Используя уравнение плоскости $z=x$, получим

$$M_{xy}=\iint\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma=\iint\limits_{D} x\sqrt{2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Итак, $x_c=\dfrac{M_{yz}}{\sigma}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}$, $y_c=\dfrac{M_{xz}}{\sigma}=\dfrac{1}{3}$, $z_c=\dfrac{M_{xy}}{\sigma}=\dfrac{1}{3}$.

7. Студенты решают у доски.

Пример 3. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \dfrac{307 - 15\sqrt{5}}{310}$.

Пример 4. Найти момент инерции однородного параболоида $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ относительно оси Oz $(0 \le z \le 1)$. *Ответ*: $\dfrac{4\pi\left(1 + 6\sqrt{3}\right)}{15}$.

8. Студенты решают самостоятельно.

Пример 5. Найти момент инерции полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ относительно оси Oy. *Ответ*: $I_y = \dfrac{4}{3}\pi a^4$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Вычислить площадь части плоскости $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенной в первом октанте с помощью поверхностного интеграла.

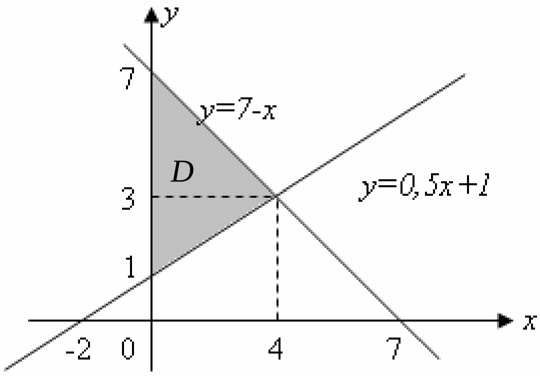
Ответ: $18\sqrt{6}$ кв. ед.

2. Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta = x^2 y^2$. *Ответ*: $\dfrac{128}{15}\pi$.

3. Найти момент инерции однородной полусферы $x = \sqrt{b^2 - y^2 - z^2}$ относительно оси Ox. *Ответ*: $I_x = \dfrac{4}{3}\pi b^4$.

Контрольная работа по теме «Кратные интегралы» (нулевой вариант)

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x-2y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной линиями $x=0$, $y=7-x$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$.



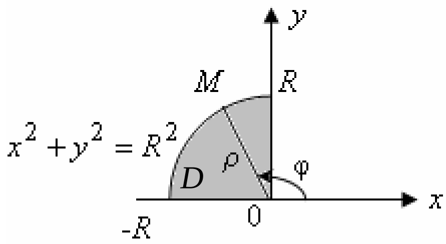
Решение. Если выбрать внутреннее интегрирование по y, а внешнее – по x, то двойной интеграл по этой области выразится одним повторным интегралом:

$$\iint\limits_D (x-2y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} (x-2y)\,dy = \int_0^4 \left(xy-y^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx =$$

$$=\int_0^4 \left(7x-x^2-49+14x-x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2+1\right)dx = \int_0^4 \left(-\frac{9}{4}x^2+21x-48\right)dx =$$

$$=\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{21}{2}x^2-48x\right)\Big|_0^4 = -72.$$

2. Вычислить двойной интеграл $I=\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$, используя полярные координаты. Найти его численное значение при $R=1$.



Решение. Область интегрирования D представляет собой четверть круга, расположенного во втором квадранте.

Перейдем к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$, где $0\le\rho\le R$; $\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$.

Тогда

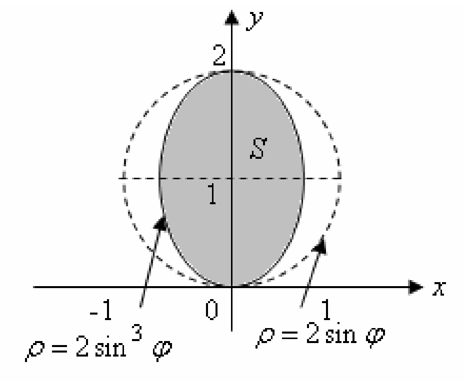
$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\rho d\rho=\left|\begin{array}{c}u=ln(1+\rho),\,du=\dfrac{d\rho}{(1+\rho)},\\ dv=d\rho,\;\;v=\rho\end{array}\right|=$$

$$=\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\rho\ln(1+\rho)\Big|_0^R-\int\limits_0^R\frac{(\rho+1)-1}{1+\rho}d\rho\right)=\frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+\rho)-\rho\Big|_0^R+\ln(1+\rho)\Big|_0^R\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\big(\,R\ln(1+R)-R+\ln(1+R)\,\big).$$

При $R=1$ получаем

$$I=\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1).$$



3. С помощью двойного интеграла вычислить в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=2y^3$.

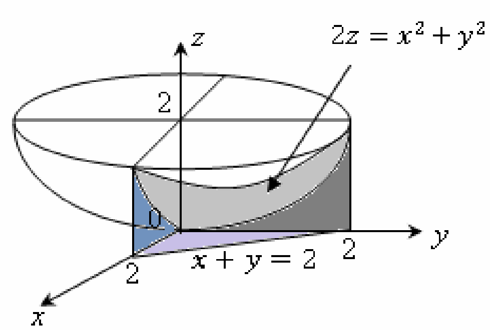
Решение. Уравнение линии в полярных координатах имеет вид $\rho=2\sin^3\varphi$. Полюс O лежит на границе области D, и поэтому имеем

$$S=\iint\limits_D\rho\;d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin^3\varphi}\rho\,d\rho=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\;\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sin^3\varphi}=2\int\limits_0^{\pi}\sin^6\varphi\;d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^3d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi-\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 4\varphi)d\varphi-\int\limits_0^{\pi}\cos 2\varphi\left(1-\sin^2 2\varphi\right)d\varphi\right)=\frac{5}{8}\pi.$$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2z=x^2+y^2$.



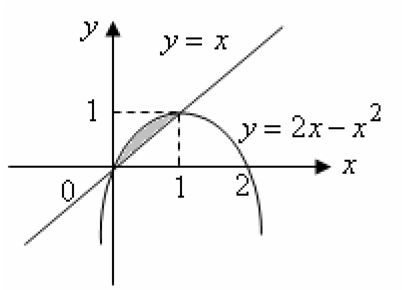
Решение. Уравнение $2z=x^2+y^2$ определяет параболоид вращения, остальные поверхности – плоскости. Его объем вычисляем по формуле:

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{\frac{(x^2+y^2)}{2}}dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\,(z)\Big|_0^{\frac{(x^2+y^2)}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}(2-x)^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

5. Вычислить массу *m* неоднородной пластины *D*, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=x$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta=x^2+2xy$.



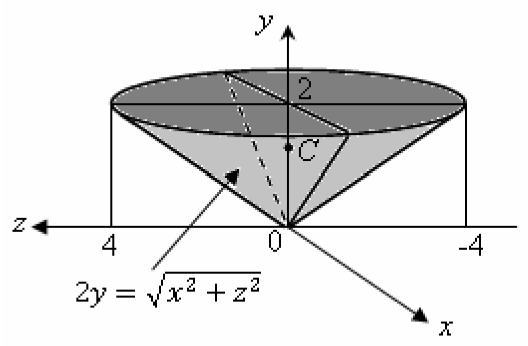
Решение. Для вычисления массы *m* плоской пластины с заданной поверхностной плотностью δ воспользуемся физическим смыслом двойного интеграла и формулой $m=\iint\limits_D\left(x^2+2xy\right)dx\,dy$. Это позволит легко представить записанный двойной интеграл в виде повторного:

$$m=\int_0^1 dx\int_x^{2x-x^2}\left(x^2+2xy\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)\Big|_x^{2x-x^2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3-x^4-x^3+4x^3-4x^4+x^5-x^3\right)dx=\int_0^1\left(x^5-5x^4+4x^3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}-x^5+x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

6. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, $y=2$.



Решение. Данное тело симметрично относительно оси Oy, поэтому $x_c=z_c=0$, а $y_c=\dfrac{\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz}$.

Переходим к цилиндрическим координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=h$. Тогда

$$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\rho h\,d\rho\,d\varphi\,dh=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^2 hdh=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(4-\frac{1}{4}\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 d\varphi=\frac{1}{2}\cdot16\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi,$$

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\rho\,d\varphi\,d\rho\,dh=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^2 dh=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(2-\frac{1}{2}\rho\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{1}{6}\rho^3\right)\Bigg|_0^4 d\varphi=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\pi.$$

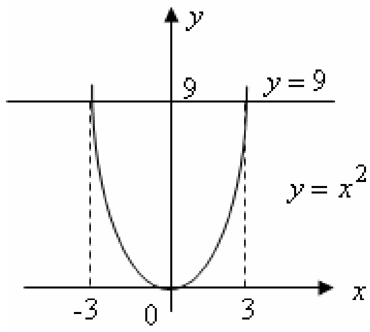
Следовательно,

$$y_c=\frac{16\pi\cdot3}{32\pi}=\frac{3}{2}$$

и центр масс $C\left(0,\ \frac{3}{2},0\right)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл $I=\oint\limits_L 2x\left(y-1\right)dx+x^2dy$, где L – контур фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=9$ при положительном направлении обхода.

Решение. В соответствии со свойствами криволинейных интегралов II рода имеем



$$I=\int\limits_{L_1}2x\left(y-1\right)dx+x^2dy+\int\limits_{L_2}2x\left(y-1\right)dx+x^2dy\ ,$$

где L_1 – дуга параболы $y=x^2$; L_2 – отрезок прямой $y=9$.

Так как парабола и прямая пересекаются в точках $\left(-3{,}9\right)$ и $\left(3{,}9\right)$, то

$$I=\int\limits_{-3}^{3}\left(4x^3-2x\right)dx+16\int\limits_{-3}^{3}x\,dx=0.$$

8. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy$, где L – верхняя дуга астроиды $x=8\cos^3 t$, $y=8\sin^3 t$ от точки $\left(8{,}0\right)$ до точки $\left(-8{,}0\right)$.

Решение. Находим

$$dx=24\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt,\quad dy=24\sin^2 t\cos t\,dt,\quad 0\le t\le\pi.$$

Тогда

$$I=\int\limits_0^{\pi}\left(2\cos t+8\sin^3 t\right)\left(-24\sin t\cos^2 t\right)dt-\int\limits_0^{\pi}\left(2\sin t+8\cos^3 t\right)\cdot 24\sin^2 t\cos t dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(-48\sin t\cos^3 t-192\sin^4 t\cos^2 t-48\sin^3 t\cos t-192\sin^2 t\cos^4 t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(-48\sin t\cos t-192\sin^2 t\cos^2 t\right)dt=\int\limits_0^{\pi}\left(-24\sin 2t-48\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=12\cos 2t\Big|_0^{\pi}-24\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt=-24\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi}=-24\pi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабко, Г.И. Учебно-методический комплекс: теория и практика проектирования (метод. рекомендации для преп. вузов) / Г.И. Бабко. – Минск : РИВШ, 2004.
2. Берман, Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.М. Берман. – М. : Наука, 1971.
3. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980.
4. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск : Навука и тэхника, 1991.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980.
6. Индивидуальные задания по высшей математике / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск : Высш. шк., 2004.
7. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.
8. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М. : Наука,1981.
9. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. комплекс для студ. техн. спец. / сост. и общ. ред. В. С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2007.
10. Яско, Ф.Ф. Методические рекомендации о порядке разработки, утверждения и распространения учеб.-метод. комплексов / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : ПГУ, 2004.
11. Яско, Ф.Ф. Положение о подготовке и выпуске научных и учебных изданий / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : ПГУ, 2005.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы в системах компьютерной алгебры Maple и Mathcad

Maple – программный пакет, система компьютерной алгебры. Это продукт компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование.

Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный язык программирования, напоминающий Паскаль.

Рассмотрим вычисление двойных интегралов с помощью Maple – системы компьютерной алгебры. Интегрирование выражения можно осуществить, используя команду для вычисления определенного интеграла: int(f(x),x=верхний предел..нижний предел), т.е. для двойного интеграла – int(int(f(x),y=верхний предел..нижний предел),x=верхний предел..нижний предел).

Например, чтобы вычислить интеграл вида $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{x^2+2} (x+y)dydx$, в рабочем поле пакета Maple введем >int(int(x+y,y=0..x^2+2),x=0..2).

Необходимо заметить, что если команда int написана со строчной буквы i, то интеграл будет вычислен. Если же мы пишем команду Int с заглавной буквы I, то в результате Maple выдаст только вид интеграла:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{x^2+2} (x+y)dydx.$$

С помощью Maple можно вычислить интеграл численным методом, для этого достаточно перед командой интегрирования, заключенной в круглые скобки, добавить команду evalf.

Например, чтобы вычислить $\int\limits_0^3 \int\limits_0^{x^2+1} e^{(x+y)}dydx$ используем следующую команду в Maple: >evalf(int(int(exp(x+y),y=0..x^2+1),x=0..3)).

Ответ: 66174,35727.

При интегрировании численным методом с помощью Maple, фактически используя определение двойного интеграла, определяют пределы интегрирования, строят разбиение области и приближенно вычисляют объем подынтегральной фигуры.

Для построения графика функции, заданной явно, используют команду plot3d(f(x,y), x=x1…x2, y=y1…y2, options). Параметры этой команды частично совпадают с параметрами команды plot. К часто используемым параметрам команды plot3d относят light=[angl1, angl2, c1, c2, c3] – задание подсветки поверхности, создаваемой источником света из точки со сферическими координатами (angl1, angl2). Цвет определяют с помощью долей красного (c1), зеленого (c2) и синего (c3) цветов, которые находятся в интервале [0,1]. Параметр style=opt задает стиль рисунка: POINT – точки, LINE – линии, HIDDEN – сетка с удалением невидимых линий, PATCH – заполнитель (установлен по умолчанию), WIREFRAME – сетка с выводом невидимых линий, CONTOUR – линии уровня, PATCHCONTOUR – заполнитель и линии уровня. Параметр shading=opt задает функцию интенсивности заполнителя, его значение равно xyz – по умолчанию, NONE – без раскраски.

Трехмерный график поверхности, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=c$, строят с помощью команды пакета plot: implicitplot3d(F(x,y,z)=c, x=x1..x2, y=y1..y2, z=z1..z2), где указывают уравнение поверхности $F\left(x,y,z\right)=c$ и размеры рисунка по координатным осям.

Все примеры, рассмотренные нами во вкладках, снабжены подсказками, объясняющими необходимые функции, и пояснениями для решения заданий. При необходимости, можно воспользоваться приведенными примерами, просто введите свои данные в предложенные нами операторы. Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы: «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

При решении задач по указанной теме с помощью систем компьютерной алгебры рекомендовано разбиение задач на подзадачи или создание блок-схемы.

Рассмотрим на примере.

Вычислим $\iint\limits_S y\cdot\ln(xy)dxdy$ по области, ограниченной прямыми $x=2,\ x=3,\ y=2,\ y=3$.

Блок-схема решения приведена на рисунке П.1.

Обращаем ваше внимание, что компьютерные математические пакеты могут быть полезны для выполнения пунктов 1 и 4; пункты 2 и 3 выполняет пользователь.

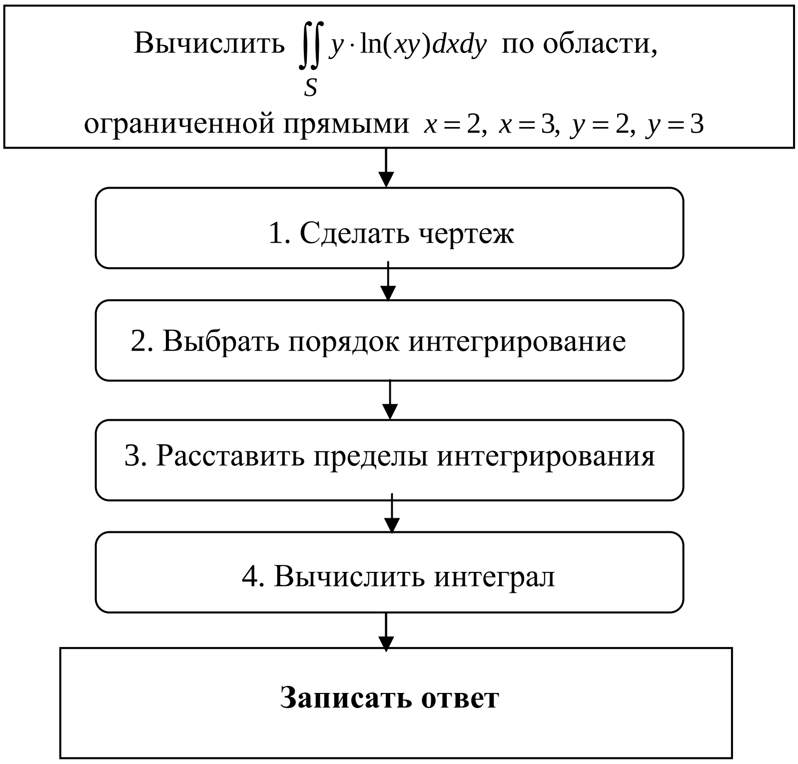


Рис. П.1

Рассмотрим решение этого примера в Maple (рис. П.2).

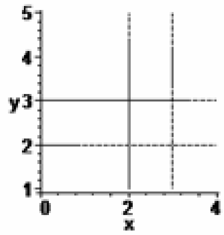
Двойной интеграл

Вычислим $\int\int_S y\ln(x\,y)\,dx\,dy$ по области, ограниченной прямыми $x = 2, x = 3, y = 2, y = 3$.

```
> restart;with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Нарисуем область, по которой будем интегрировать.

```
> setoptions(axes=normal,scaling=constrained):
> implicitplot({x = 2, x =3, y = 2, y = 3}, x=0..4, y=1..5, color=blue);
```



Зададим интегрируемую функцию.

```
> f:=(x,y)->y*ln(x*y);
```

$$f := (x, y) \to y\ln(y\,x)$$

Двойной интеграл сводится к повторному в заданных пределах. Порядок интегрирования в этом примере не имеет значения.

```
> Int(Int(f(x,y),x=2..3),y=2..3)=int(int(f(x,y),x=2..3),y=2..3);
```

$$\int_2^3\int_2^3 y\ln(y\,x)\,dx\,dy = 12\ln(3) - \frac{15}{4} - 7\ln(2)$$

Рис. П.2

Рассмотрим другие задачи по указанной теме (рис. П.3 – П.9).

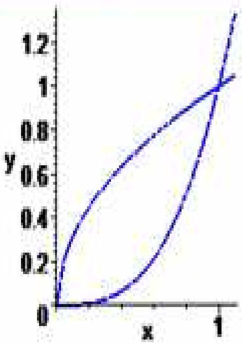
Двойной интеграл

Вычислим $\int\int_S 12\,x^4 + 16\,x^3\,y^3\,dx\,dy$ по области, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

```
> restart;
> with(plots): with(student):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Нарисуем область, по которой будем интегрировать.

```
> setoptions(axes=normal,scaling=constrained):
> implicitplot({y=x^3,y=sqrt(x)},x=0..1.1,y=-1.5..1.5,color=blue,thickness=2);
```



Зададим интегрируемую функцию.

```
> f:=(x,y)->12*x^4+16*x^3*y^3;
```

$$f := (x, y) \rightarrow 12\,x^4 + 16\,x^3\,y^3$$

Перепишем интеграл ввиде повторного. Сначала интегрируем по y в пределах от $\sqrt{x}$ до x^3, а затем по x от 0 до 1.

```
> Doubleint(f(x,y),x,y,S)=Int(Int(f(x,y),y=sqrt(x)..x^3),x=0..1);
```

$$\int\int_S 12\,x^4 + 16\,x^3\,y^3\,dx\,dy = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{x^3} 12\,x^4 + 16\,x^3\,y^3\,dy\,dx$$

Вычислим интеграл, используя функцию int.

```
> Doubleint(f(x,y),x,y,S)=int(int(f(x,y),y=sqrt(x)..x^3),x=0..1);
```

$$\int\int_S 12\,x^4 + 16\,x^3\,y^3\,dx\,dy = \frac{-145}{132}$$

Рис. П.3

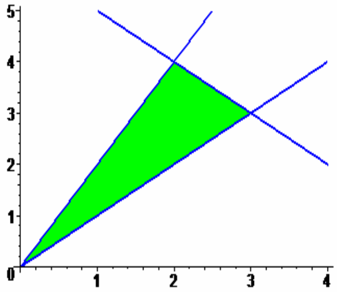
Двойной и тройной интегралы

Вычислим $\int\int_S x + y \, dx \, dy$ по области, ограниченной прямыми $x + y = 6$, $y = x$, $y = 2x$.

```
> restart;
> with(plots):with(student):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Нарисуем область, по которой будем интегрировать. В случае, когда она задана линейными неравенствами, можно использовать функцию inequal.

```
> setoptions(axes=normal,scaling=constrained):
> inequal({x+y<6,y>x,y<2*x}, x=0..4, y=0..5,
  optionsfeasible=(color=green),optionsopen=(color=blue,thickness=2),optionsexcluded=(color=white) );
```



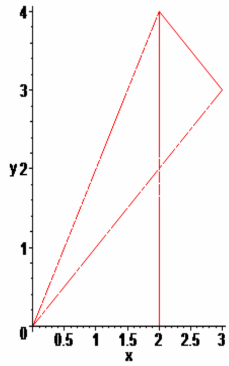
Найдем точки пересечения прямых.

```
> solve({x+y=6,y=2*x}); solve({x+y=6,y=x});
```

$$\{y = 4, x = 2\}$$
$$\{x = 3, y = 3\}$$

нарисуем область, разделенную на две части прямой $x = 2$.

```
> implicitplot({y=x, x+y=6, y=2*x, x=2},x=0..3,y=0..4);
```



Зададим интегрируемую функцию.

```
> f:=(x,y)->x+y;
```

Перепишем двойной интеграл в виде повторного. Разложим интеграл в сумму интегралов по x от 0 до 2 и от 2 до 3. В этих пределах интегрируем сначала по y (в первом интеграле от x до 2x, во втором от x до 6-x), а затем по x.

```
> Doubleint(f(x,y),x,y,S)=Int(Int(f(x,y),y=x..2*x),x=0..2)+Int(Int(f(x,y),y=x..6-x),x=2..3);
```

$$\int\int_S x + y \, dx \, dy = \int_0^2 \int_x^{2x} x + y \, dy \, dx + \int_2^3 \int_x^{6-x} x + y \, dy \, dx$$

Вычислим интеграл, используя функцию int.

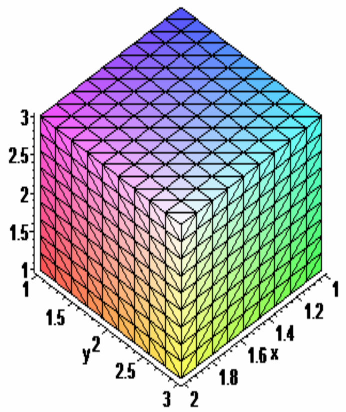
```
> Doubleint(f(x,y),x,y,S)=int(int(f(x,y),y=x..2*x),x=0..2)+int(int(f(x,y),y=x..6-x),x=2..3);
```

$$\int\int_S x + y \, dx \, dy = 12$$

Рис. П.4

Вычислим $\iiint_V x+y+z\,dx\,dy\,dz$ по области, определенной неравенствами $1 \le x, 1 \le y, 1 \le z, x \le 2, y \le 3, z \le 3$.

```
> restart;
> with(plots): with(student):
Warning, the name changecoords has been redefined
> implicitplot3d({x=1,x=2,y=1,y=3,z=1,z=3},x=1..2,y=1..3,z=1..3,axes=frame);
```



Зададим интегрируемую функцию.

```
> f:=(x,y,z)->x+y+z;
```

Тройной интеграл сводится к повторному в заданных пределах. Порядок интегрирования в этом примере не имеет значения.

```
> Tripleint(f(x,y,z),x,y,z,V)=Int(Int(Int(f(x,y,z),x=1..2),y=1..3),z=1..3);
```

$$\iiint_V x+y+z\,dx\,dy\,dz = \int_1^3\int_1^3\int_1^2 x+y+z\,dx\,dy\,dz$$

Вычислим интеграл, используя функцию int.

```
> Tripleint(f(x,y,z),x,y,z,V)=int(int(int(f(x,y,z),x=1..2),y=1..3),z=1..3);
```

$$\iiint_V x+y+z\,dx\,dy\,dz = 22$$

Рис. П.5

Замена переменных в кратных интегралах

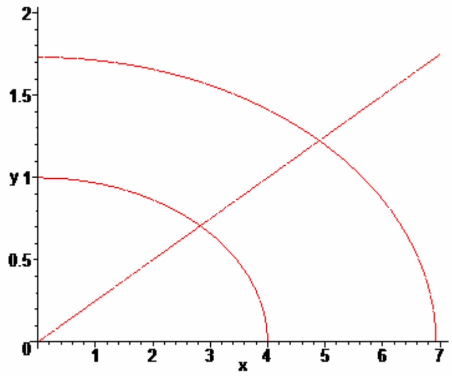
Вычислим двойной интеграл от функции $f(x, y) = \frac{x}{y^5}$ по области $1 \le \frac{1}{16}x^2 + y^2, \frac{1}{16}x^2 + y^2 \le 3, 0 \le x, \frac{1}{4}x \le y$.

```
> restart;
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> f:=(x,y)->x/y^5;
> S:={x^2/16+y^2-1>=0,x^2/16+y^2-3<=0,x>=0,y-x/4>=0};
```

$$S := \{0 \le \frac{x^2}{16} + y^2 - 1, \frac{x^2}{16} + y^2 - 3 \le 0, 0 \le x, 0 \le y - \frac{x}{4}\}$$

Нарисуем заданную область.

```
> implicitplot(S,x=0..7,y=0..2);
```



Перейдем к обощенным полярным координатам.

```
> x:=4*r*cos(t);y:=r*sin(t);
```

$$x := 4\, r \cos(t)$$

$$y := r \sin(t)$$

```
> simplify(S);
```

$$\{0 \le 4\, r \cos(t), 0 \le r^2 - 1, r^2 - 3 \le 0, 0 \le -r\,(-\sin(t) + \cos(t))\}$$

```
> f(x,y);
```

$$\frac{4 \cos(t)}{r^4 \sin(t)^5}$$

```
> S:=Int(Int(f(x,y)*4*r,r=1..sqrt(3)),t=Pi/4..Pi/2);
```

$$S := \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{16 \cos(t)}{r^3 \sin(t)^5}\, dr\, dt$$

```
> S:=value(%);
```

$$S := 4$$

```
>
```

Рис. П.6

Сферические и цилиндрические координаты

Вычислим тройной интеграл $\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2+(z-2)^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\,dx\,dy\,dz$, где V - шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Область интегрирования.

```
> S:={x^2+y^2+z^2<=1};
```

$$S := \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

Перейдем к сферическим координатам.

```
> x:=r*cos(phi)*sin(theta);y:=r*sin(phi)*sin(theta);z:=r*cos(theta);
```

$$x := r\cos(\phi)\sin(\theta)$$

$$y := r\sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$z := r\cos(\theta)$$

Уравнение области в сферических координатах.

```
> simplify(S);
```

$$\{r^2 \le 1\}$$

Интегрируемая функция в сферических координатах.

```
> f:=simplify(1/sqrt(x^2+y^2+(z-2)^2),symbolic);
```

$$f := \frac{1}{\sqrt{r^2-4\,r\cos(\theta)+4}}$$

При интегрировании в сферических координатах умножим функцию на соответствующий якобиан.

```
> Int(Int(Int(f*r^2*sin(theta),theta=0..Pi),phi=0..2*Pi),r=0..1)=int(int(int(f*r^2*sin(
  theta),theta=0..Pi),phi=0..2*Pi),r=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2\sin(\theta)}{\sqrt{r^2-4\,r\cos(\theta)+4}}\,d\theta\,d\phi\,dr = \frac{2\pi}{3}$$

Рис. П.7

Поверхностный интеграл по площади поверхности

Вычислим поверхностный интеграл функции $x^2\,y^2$ по площади полусферы $z=(R^2-x^2-y^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

```
> restart;
```

Поверхность задана уравнением вида $z=\mathrm{f}(x,y)$, поэтому интеграл вычисляется по формуле

$S=\iint_G x^2\,y^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x,y)\right)^2+1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx\,dy$. Здесь G - проекция поверхности на плоскость $x0y$, в задаче это круг с центром в начале координат и радиусом R.

```
> with(student):
> S:=Doubleint(x^2*y^2*sqrt(diff(f(x,y),x)^2+diff(f(x,y),y)^2+1),x,y,G);
```

$$S:=\iint_G x^2\,y^2\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x,y)\right)^2+1}\;dx\,dy$$

```
> f(x,y):=(R^2-x^2-y^2)^(1/2);
```

$$\mathrm{f}(x,y):=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

```
> S;
```

$$\iint_G x^2\,y^2\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}+1}\;dx\,dy$$

Перейдем к полярным координатам. Область G будет иметь вид $\{0\le t,\,t\le 2\,\pi,\,0\le r,\,r\le R\}$.

```
> S:=simplify(changevar({x=r*cos(t),y=r*sin(t)}, S,[t,r] ),trig);
```

$$S:=\iint_G -r^4\,(-1+\cos(t)^2)\sqrt{-\frac{R^2}{-R^2+r^2}}\,|r|\cos(t)^2\,dt\,dr$$

В полярных координатах интеграл сводится к повторному.

```
> S:=Int(Int(-r^4*(-1+cos(t)^2)*(-R^2/(-R^2+r^2))^(1/2)*abs(r)*cos(t)^2,r=0..R),t=0..2*
  Pi);
```

$$S:=\int_0^{2\,\pi}\!\!\int_0^R -r^4\,(-1+\cos(t)^2)\sqrt{-\frac{R^2}{-R^2+r^2}}\,|r|\cos(t)^2\,dr\,dt$$

```
> S:=int(int(-r^4*(-1+cos(t)^2)*(-R^2/(-R^2+r^2))^(1/2)*abs(r)*cos(t)^2,r=0..R),t=0..2*
  Pi) assuming R>0;
```

$$S:=\int_0^{2\,\pi}\!\!\int_0^R -r^4\,(-1+\cos(t)^2)\sqrt{-\frac{R^2}{-R^2+r^2}}\,|r|\cos(t)^2\,dr\,dt$$

```
> S:=int(int(-r^4*(-1+cos(t)^2)*(-R^2/(-R^2+r^2))^(1/2)*abs(r)*cos(t)^2,r=0..R),t=0..2*
  Pi) assuming R>0;
```

$$S:=\frac{2\,R^6\,\pi}{15}$$

Рис. П.8

Криволинейный интеграл по длине дуги

Вычислим $\int_L y\,ds$, где L - дуга параболы $y^2 = 4\,x$, отсеченная параболой $x^2 = 4\,y$.

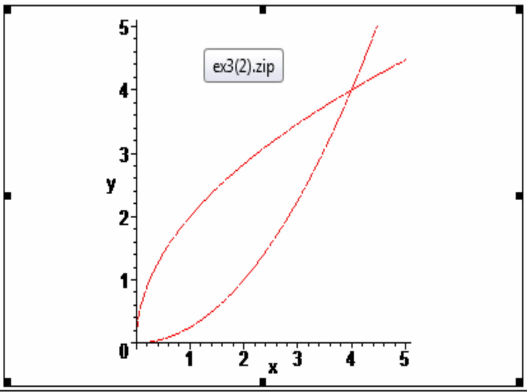
```
> restart;
> with(plots):with(student):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Интегрируемая функция.

```
> f:=(x,y)->y;
```

Нарисуем заданные параболы.

```
> implicitplot({y^2=4*x,x^2=4*y},x=0..5,y=0..5);
```



Точка пересечения парабол - (4, 4). Следовательно, интегрируем по параболе $y^2 = 4\,x$ (верхняя кривая на интервале от 0 до 4) при x от 0 до 4.

```
> L:=Lineint(f(x,y),x=x,y=2*sqrt(x),x=0..4);
```

$$L := \int_0^4 2\sqrt{x}\,\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2\sqrt{x})\right)^2}\,dx$$

```
> L:=value(%);
```

$$L := \frac{20}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}$$

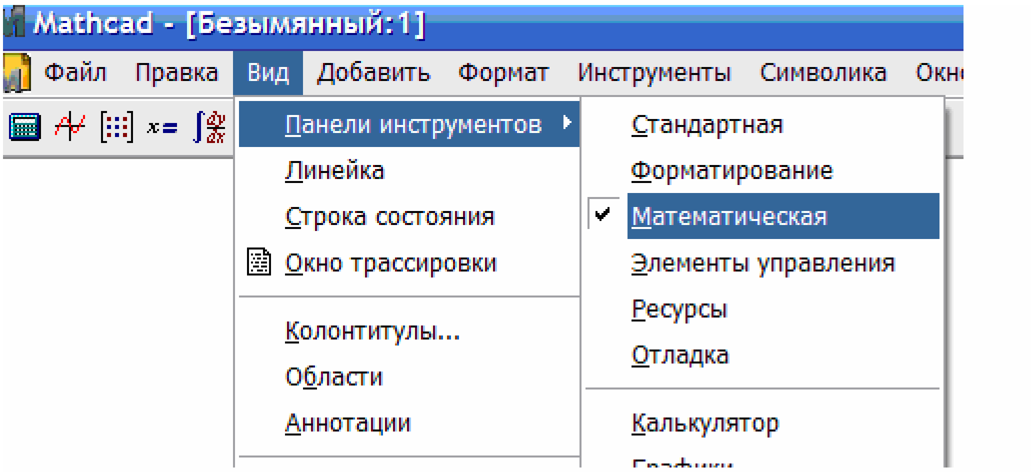
Рис. П.9

Предлагаемые программы помогут вам при проверке домашнего задания или при необходимости предоставят возможность быстрого вычисления интегралов любой сложности.

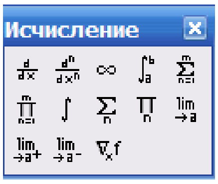
Рассмотрим один из наиболее популярных среди студентов технических специальностей математических пакетов – MathCAD.

Для того чтобы начать работать с приложением вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ →МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



Во вкладке, раскрывающей панель «Математика» 

, необходимо выбирать панель «Математический анализ (Исчисление)» 

и продолжить работу.

Рассмотрим несколько примеров по заданной тематике.

Пример 1.

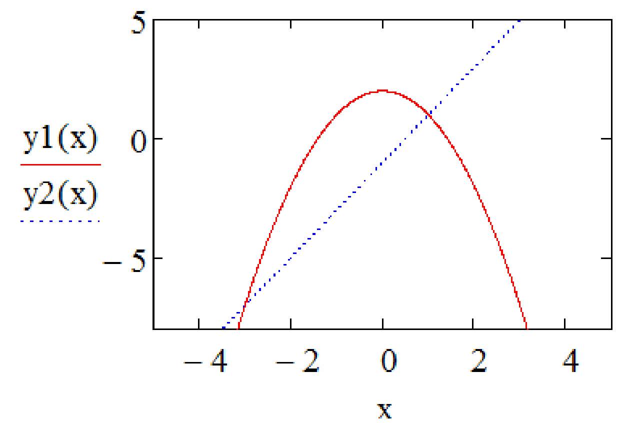
Вычислить $I=\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

Решение подробно рассматривается в разделе методических указаний к проведению практических занятий. Продемонстрируем вычисление задания в Mathcad – системе компьютерной алгебры.

Решение.

1. Сделаем чертеж.

$y1(x) := 2 - x^2 \qquad y2(x) := 2x - 1$



Для построения графика, щелкните по символу декартова графика в панели «Graph (График)» и введите в помеченных позициях возле координатных осей имена аргумента и функции.

Для того чтобы изобразить на одном графике несколько функций одного и того же аргумента, введите в позиции возле оси ординат имя первой функции, введите запятую, имя следующей функции, запятую и т.д., разделяя имена функций запятой.

Стиль изображения можно поменять, щелкнув по графику дважды и изменив параметры изображения в открывшемся временном окне настройки изображения.

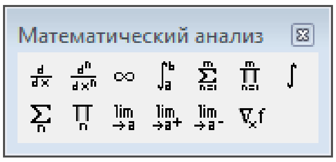
2. Найдем точки пересечения.

Для того чтобы найти точки пересечения, введите y1(x)-y2(x) [в рассматриваемом случае 2-x^2-(2x-1)], выделите переменную x и щелкните по строке Solve (Решить) пункта Variable (Переменная) в меню Symbolics (Символьные вычисления).

$$2 - x^2 - (2x - 1) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим заданный интеграл.

Для того чтобы ввести двойной интеграл, дважды щелкните по символу определенного интеграла на панели «Математический анализ»



.

$$\int_{-3}^{1}\int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)\, dy\, dx \to \frac{64}{15}.$$

Ответ: $\frac{64}{15}$

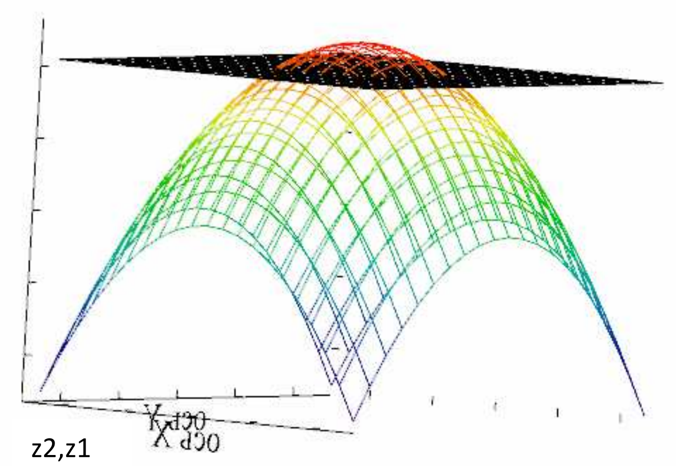
Пример 2.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1$ и $z = 5 - x^2 - y^2$.

Решение.

1. Выполним построение.

$z1(x, y) := 1 \qquad z2(x, y) := 5 - x^2 - y^2$



2. Вычислим тройной интеграл, используя цилиндрическую систему координат, так как в декартовых системах координат вычисление невозможно.

$$\int_0^{-2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_1^{5-x^2-y^2} 1\,dx\,dy\,dz \;\rightarrow\; \int_0^2 \frac{2\cdot(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\,dx\,.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^{5-\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi \;\rightarrow\; 8\cdot\pi\,.$$

Ответ: $8\cdot\pi$.

Обращаем ваше внимание на то, что всю информацию, предлагаемую во вкладках, следует проработать с использованием компьютера. Это будет способствовать приобретению прочных навыков применения систем компьютерной алгебры для решения конкретных простейших задач и поможет подготовиться к решению заданий более сложного уровня.

Учебное издание

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В 2 частях

Часть 1

Редактор *О. П. Михайлов*а
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 25.02.2013. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,89. Уч.-изд. л. 6,18. Тираж 99 экз. Заказ № 483.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440 г. Новополоцк.