Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Составление и общая редакция
Н. В. Цывиса

Новополоцк 2007

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ф 94

Рекомендован к изданию учебно-методической комиссией
радиотехнического факультета

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

К. О. Ананченко, доктор пед. наук, профессор УО «ВГТУ им. П. М. Машерова»;
И. Б. Сороговец, канд. физ.-мат. наук, доцент

Ф 94 **Функции нескольких переменных. Интегральные исчисления** : учеб.-метод. комплекс для студ. техн. спец. заоч. формы обучения / сост. и общ. ред. Н. В. Цывиса. – Новополоцк : ПГУ, 2007. – 264 с.
ISBN 978-985-418-530-9.

Рассмотрены функции нескольких переменных, неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойной и тройной интегралы. Приведены примеры решения основных задач.

Предназначен для преподавателей и студентов заочной формы обучения технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-418-530-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание высшей математики в высших учебных заведениях имеет цель:

– развитие интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

– обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений и выбора наилучших способов реализации этих решений; методам обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов.

Задачи преподавания высшей математики состоят в том, чтобы на примерах математических понятий и методов продемонстрировать студентам действие законов материалистической диалектики, сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в осуществлении научно-технического прогресса. Необходимо научить студентов приемам исследования и решения математических формализованных задач, выработать у студентов умение анализировать полученные результаты, привить им навыки самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

Математическое образование современного специалиста включает изучение общего курса математики и специальных математических курсов. Общий курс высшей математики является фундаментом математического образования специалиста, но уже в рамках этого курса должно проводиться ориентирование на приложение математических методов в профессиональной деятельности. Преподавание специальных разделов ориентировано главным образом на применение математических методов к решению прикладных задач. При этом студенты сначала знакомятся с постановкой типичной прикладной задачи, затем изучают общий курс математических задач, к которому относится эта задача, далее – математические методы решения задач данного класса и, наконец, изученные методы применяют для решения исходной задачи. Выбор специальных разделов математики, которые должны изучать студенты, осуществляется с учетом характера их будущей профессиональной деятельности и согласуется с выпускающими кафедрами. Все вопросы преподавания этих разделов специальными кафедрами должны быть согласованы с кафедрой математики.

В результате изучения курса высшей математики студент должен иметь представление:

– о месте математики в системе естественных наук;

– математике как особом способе познания мира;
– содержании основных разделов высшей математики,
– отличии прикладной математики от фундаментальной.

Знать и уметь использовать:

– методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, теории поля;
– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Владеть:

– методами дифференциального и интегрального исчисления;
– методами решения уравнений математической физики;
– аналитическими методами решения прикладных задач.

Иметь навыки:

– аналитического и численного решения уравнений;
– качественного исследования, аналитического и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
– самостоятельной смысловой постановки прикладных задач.

Программа определяет основное содержание тем и разделов курсов, подлежащих изучению. Последовательность их изложения и распределения по семестрам, исходя из задач своевременного математического обеспечения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и сохранения логической стройности и завершенности самих математических курсов. При выборе цели ознакомить студентов с максимальным числом математических понятий и методов или выработать у них твердые навыки исследования и решения определенного круга задач. При этом предполагается, что глубокое овладение основными понятиями и методами высшей математики позволит студентам освоить те дополнительные разделы, которые им понадобятся в будущем.

В данной книге рассмотрены следующие модули:

– функции нескольких переменных (ФНП);
– неопределенный интеграл;
– определенный интеграл;
– двойной и тройной интегралы.

МОДУЛЬ 1
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. О функциональных зависимостях между несколькими переменными

При изучении многих вопросов естествознания приходится встречаться с такими зависимостями, в которых задействованы несколько переменных величин, когда значения одной из этих переменных величин полностью определяются значениями остальных переменных. Так, например, температура T или плотность ρ тела изменяются при переходе от одной точки данного тела к другой, но так как каждая точка определяется тремя декартовыми координатами x, y, z, то температура T или плотность ρ определяются значениями трех переменных x, y и z.

§ 2. Понятие евклидового пространства R^2 и R^3. Топология R^2

Известные из аналитической геометрии понятия координат точек на плоскости и в пространстве и формула для определения расстояния между двумя точками позволяют ввести аналитическое определение евклидового пространства R^2 и R^3.

Множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x и y называется координатной плоскостью, а каждую пару (x, y) будем называть точкой этой плоскости и обозначать буквой M. Числа x и y называются координатами точки $M(x,y)$.

Координатная плоскость называется евклидовым пространством R^2, если для любых двух точек плоскости определено расстояние $\rho(M_1, M_2)$ по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Аналогичным образом вводится понятие евклидова пространства R^3. Множество упорядоченных троек (x, y, z) чисел x, y и z называется координатным пространством. При этом каждую тройку (x, y, z) будем называть точкой этого пространства и обозначают $M(x, y, z)$. Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y и z.

Координатное пространство называется евклидовым пространством R^3, если для любых двух точек пространства определено расстояние $\rho(M_1, M_2)$ по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Введенные выше понятия координатной плоскости и координатного пространства представляют собой аналоги числовой прямой, а R^2 и R^3 – евклидовы пространства – аналог евклидовой прямой R^1 расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ определяются по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

Множество E точек (x, y) плоскости R^2 называется ***окрестностью точки*** $M_0(x_0, y_0)$, если M_0 является внутренней точкой E, т.е. M_0 входит в E вместе с некоторым кругом:

$$B(M_0, r) = \left\{(x, y) \middle| (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}, \ \ r > 0$$

Круг $B(M_0, r)$ также является окрестностью точки M_0. Отметим, что наряду с круговыми окрестностями точки можно рассматривать как квадратные окрестности так и прямоугольные окрестности точки.

Точка пространства R^2 называется граничной для множества $E \in R^2$, если ее любая окрестность содержит как точки из E, так и точки, не принадлежащие E (рис. 1) – точка M_1. Точка M_2 – внешняя точка множества E.

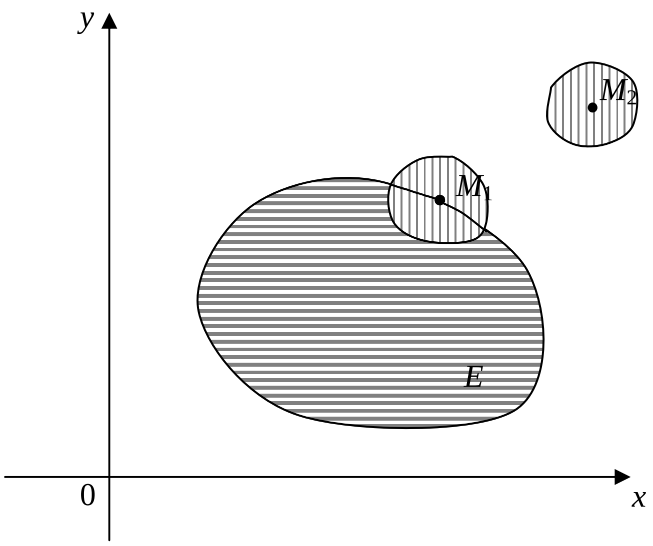

Рис. 1

Множество E называется ***открытым***, если оно служит окрестностью каждой своей точки. Рассмотрим примеры некоторых множеств.

1. $E_1 = \left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2<2^2\right\}$ – круг радиуса R = 2 без границы (рис. 2);
2. $E_2 = \left\{(x,y)\middle|(x-1)+(y-2)^2\le 1^2\right\}$ – круг радиуса R = 1 с границей (рис. 3);
3. $E_3 = \left\{(x,y)\middle|1<x<3,\ 2<y<3\right\}$ – прямоугольник без границ (рис. 4);
4. $E_4 = \left\{(x,y)\middle|1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\right\}$ – квадрат с границей (рис. 5);
5. $E_5 = \left\{(x,y)\middle|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ x^2<y<1-x^2\right\}$ (рис. 6)
6. $E_6 = \left\{(x,y)\middle|\ 0<x<1,\ 0<y<1-x\right\}$ – треугольник без границы (рис. 7).

Множества E_1, E_3, E_5, E_6 – открытые.

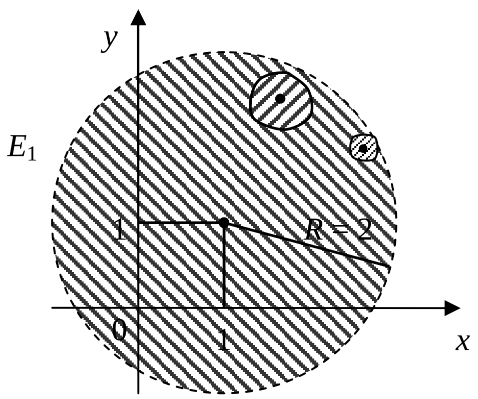

Рис. 2

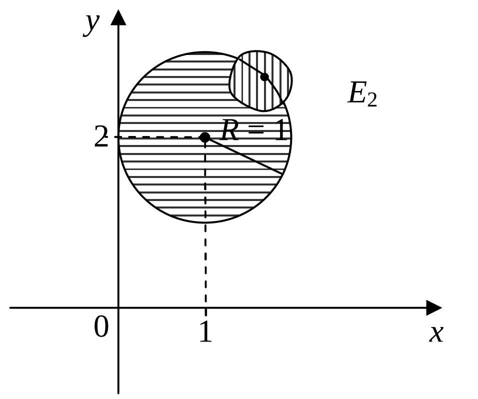

Рис. 3

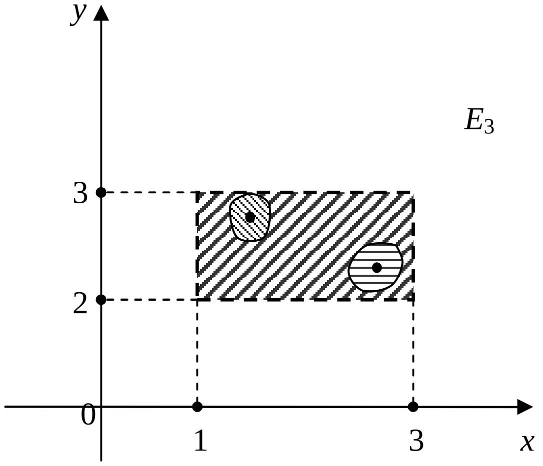

Рис. 4

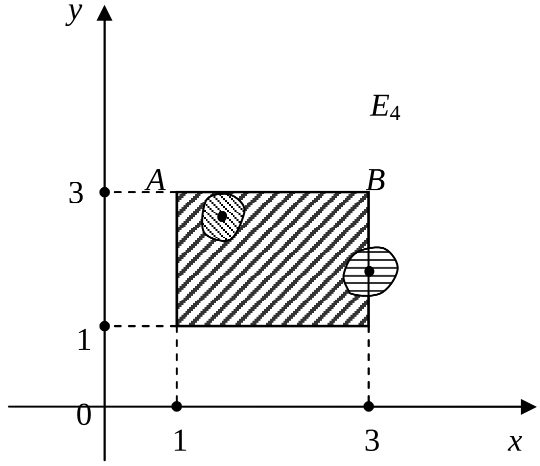

Рис. 5

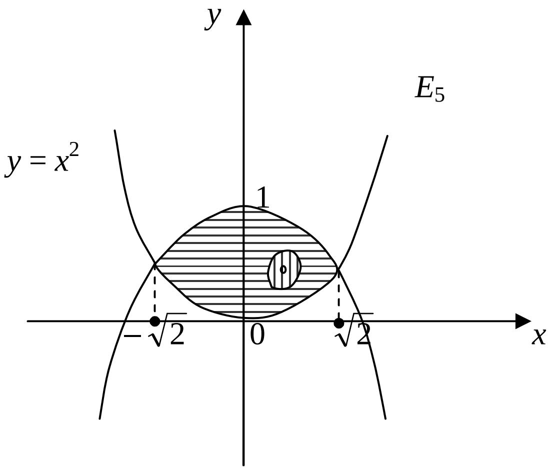

Рис. 6

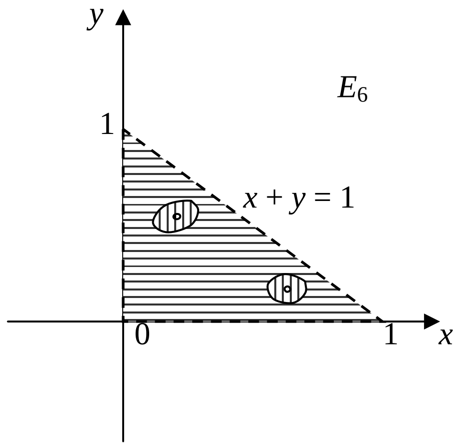

Рис. 7

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Объединение совокупности открытых множеств есть открытое множество.

Теорема 2. Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Множество E евклидова пространства R^2 ***замкнуто***, если оно содержит все свои граничные точки (см. например, множества E_2 (рис. 3) или E_4 (рис. 5)). Если из замкнутого множества удалить часть граничных точек (например, из E_4 (рис. 5) удалить сторону AB), то получим множество, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

Множество $E \in R^2$ замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение этого множества (т.е. множество всех точек R^2, которые не входят в E) открыто.

Множество $E \in R^2$ называется связным, если любые две точки из E можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Рассмотрим примеры некоторых множеств.

7. $E_7 = \left\{(x, y) \middle| \ 1 \le (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2\right\}$ (рис. 8), E_7 – связное замкнутое множество.
8. $E_8 = \left\{(x, y) \middle| \ xy < 0\right\}$ (рис. 9). E_8 – несвязное открытое множество.
9. $E_9 = \left\{(x, y) \middle| \ xy \ge 0\right\}$ (рис. 10). E_9 – связное замкнутое множество.
10. $E_{10} = \left\{(x, y) \middle| \ x + y < 1, \ x > y^2\right\}$ (рис. 11). E_{10} – связное открытое множество.

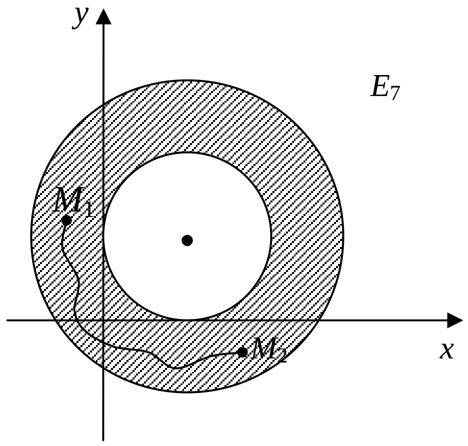

Рис. 8

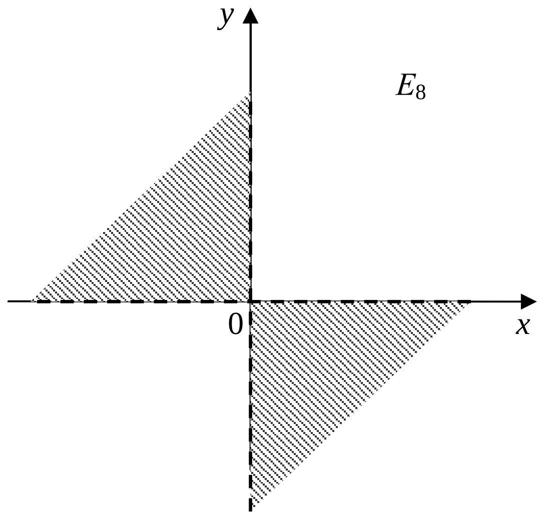

Рис. 9

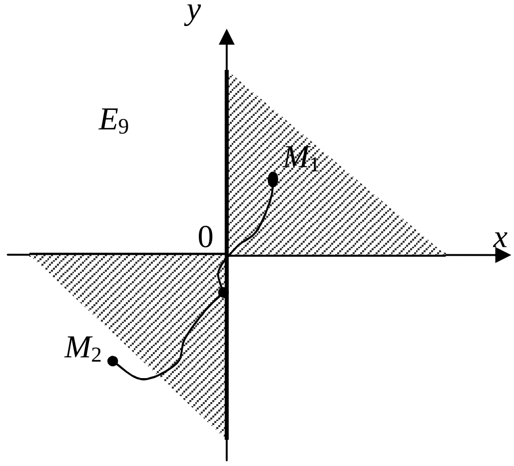

Рис. 10

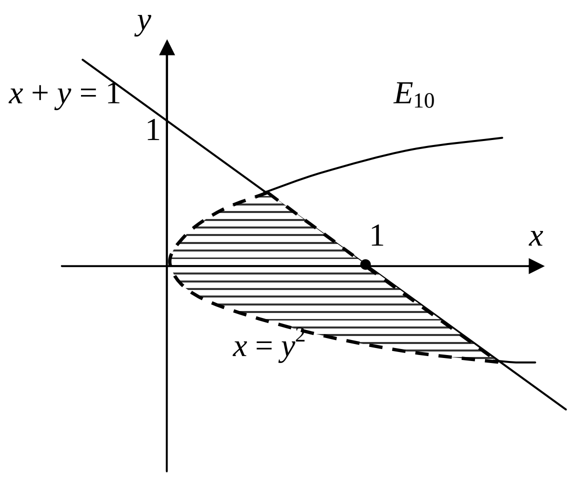

Рис. 11

Множество $E \in R^2$ называется областью в R^2, если данное множество E связное и открытое.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется предельной точкой множества $E \in R^2$, если в любой ее окрестности содержаться точки, отличные от $M_0(x_0, y_0)$. Так, для множества E точек прямоугольника $ABCD$ (рис. 12)

$$E = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}.$$

Без границы каждая точка $(x, y) \in E$ является предельной точкой множества. Предельными точками будут и точки границы, например точка (x_2, y_2). Точка (x_3, y_3) предельной точкой множества E не будет, хотя существует такая окрестность, в которой содержатся точки из E. (**Обратите внимание**, в определении о предельной точке требуется, чтобы в любой окрестности содержались точки из множества E).

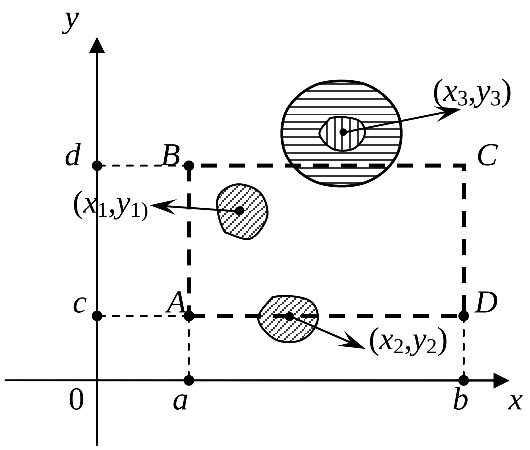

Рис. 12

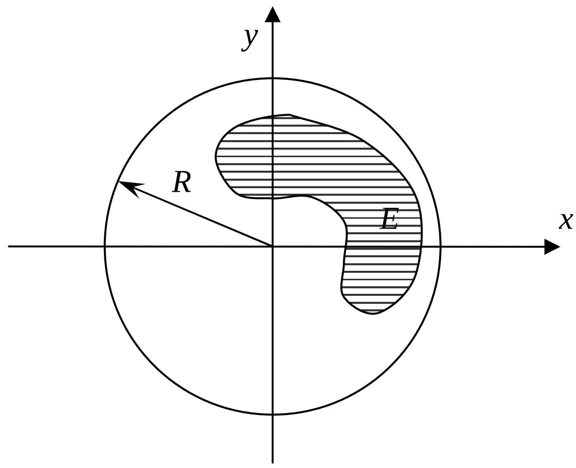

Рис. 13

Множество $E \in R^2$ ограничено, если оно содержится в некотором круге с центром в начале координат радиусом R, $R > 0$ (рис. 13).

Замкнутое ограниченное множество E называется компактным.

§3. Функции двух переменных. Понятие функции *n* переменных

Функцией двух независимых переменных (x, y), определенной на множестве $D \in R^2$, называется соответствие f, которое каждому элементу $(x, y) \in D$ ставит в соответствие единственный элемент $F \in R$, обозначаемый $f(x, y)$ (рис. 14, 15).

Множество D называют областью определения (множество заданий) функции f, а совокупность (множество) всех элементов $f(x, y)$, $(x, y) \in D$ – множеством значений $E(f)$ функции f. Тот факт, что f – функция, заданная (область определения) на $D \in R^2$, со значениями в $E \in R$, обозначают следующим образом $f : D \to E$.

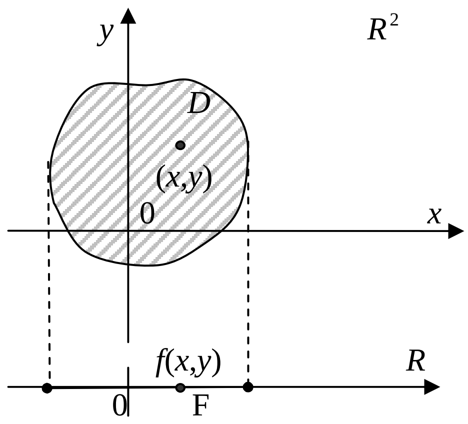

Рис. 14

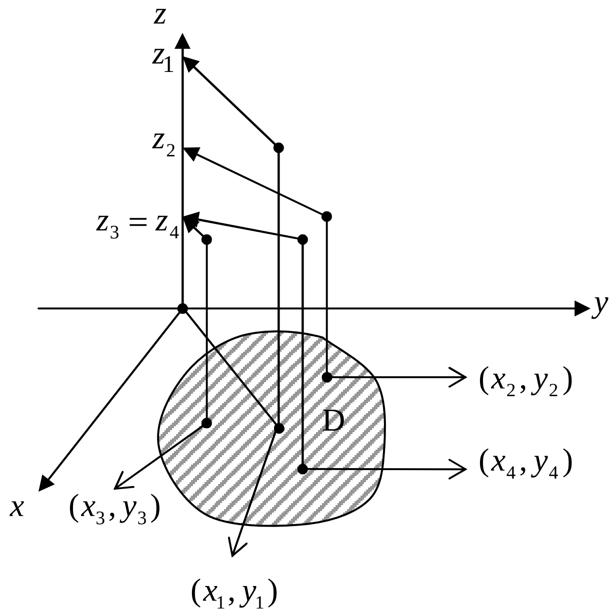

Рис. 15

Соответствие f, устанавливаемое между точками из $D \in R^2$ и $E \in R$, геометрически можно изобразить в пространстве R^3 (рис. 15).

Функцию $Z = f(x, y)$ – двух переменных можно задать:

– аналитическим способом (используя формулы);

– табличным (используя таблицы);

– графическим (построить график);

– программным (построить алгоритм вычисления z по x и y).

Графиком Γ_f функции f называется множество точек пространства R^3 с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, т.е.

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) / (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

Для построения графика функции Γ_f – функции двух переменных – из точки $(x, y) \in D(f)$ перпендикулярно к плоскости Oxy отложим отрезок длиной $|z|$ в положительном направлении оси Oz, если $z > 0$, и в отрицательном направлении, если $z < 0$. Точка пространства R^3 с координатами (x, y, z) будет точкой графика Γ_f.

График функции Γ_f, вообще говоря, есть некоторая поверхность в R^3. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Соответствие, устанавливаемое между элементами $(x, y, z) \in D \subset R^3$ и элементами множества $E \subset R$, при котором каждому элементу из D ставится в соответствие один элемент из E, называется функцией трех переменных. Область определения D данной функции есть множество точек пространства R^3. Поскольку каждая точка $(x,\ y,\ z)$ определяет в пространстве R^3 радиус-вектор, то функцию f трех переменных можно рассматривать как соответствие, устанавливаемое между множеством векторов и множеством действительных чисел. Значит, функцию трех переменных можно рассматривать как скалярную функцию векторного аргумента. График функции трех переменных определяется аналогично, но изобразить графически функцию трех и более переменных невозможно.

Рассмотрим примеры функций двух переменных и их графики.

1) $f = x^2 + y^2$. Область определения функции $D(f) = R^2$, множество значений $E(f) = [0;\ +\infty)$, график функции в R^3 – круговой параболоид (рис. 16).

2) $f = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$. Область определения $D(f) = R^2$, множество значений $E(f) = [0;\ 2]$, график функции изображен на рис. 17;

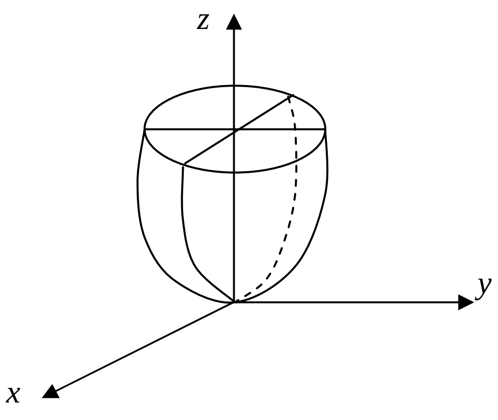

Рис. 16

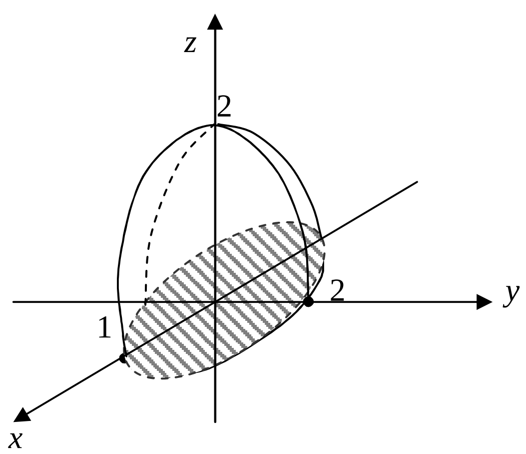

Рис. 17

3) $f = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Область определения $D(f) = R^2 \setminus (0, 0)$. Множество значений $E(f) \subset (0; +\infty)$, график функции изображен на рис. 18.

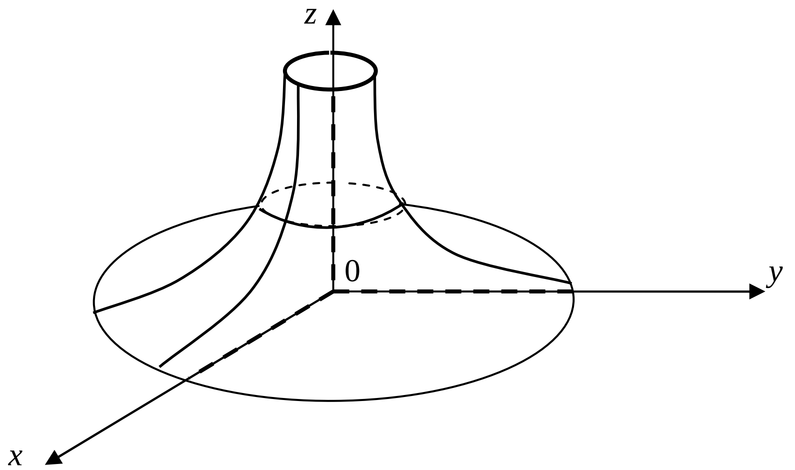

Рис. 18

Рассмотрим **примеры** и **задачи** на определение функции нескольких переменных и нахождение области определения.

1. Найти область определения функций:

а) $z = xy^2 - 4y - x + 1$; б) $z = \dfrac{2x - y}{x - y}$;

в) $z = \sqrt{(x-1)(y-2)}$; г) $z = \ln x + \ln y$;

д) $z = \ln xy$; е) $z = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

Решение:

а) в данном случае выражение, стоящее в правой части имеет смысл при любых x и y, следовательно, область определения данной функции вся плоскость, т.е. R^2;

б) выражение, стоящее в правой части, не имеет смысла (на 0 делить нельзя), когда $y = x$. Значит, областью определения является вся плоскость, за исключением прямой $y = x$ (рис. 19);

в) квадратный корень принимает действительные значения, если подкоренное выражение принимает неотрицательные значения, т.е. область определения данной функции совпадает с множеством решения неравенства $(x-1)(y-2) \geq 0$ (рис. 20);

г) так как выражение, стоящее под знаком логарифма должно быть положительным, то область определения данной функции совпадает с множеством решения системы неравенств $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ – а это первая четверть для xOy;

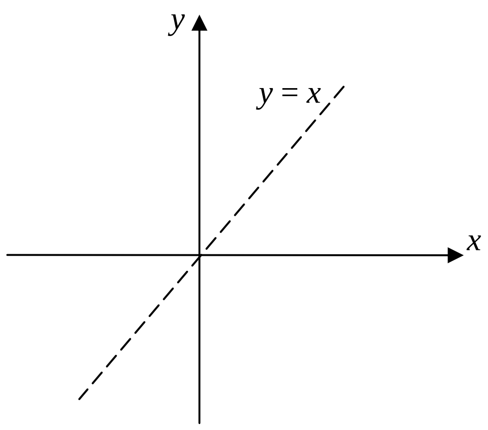

Рис. 19

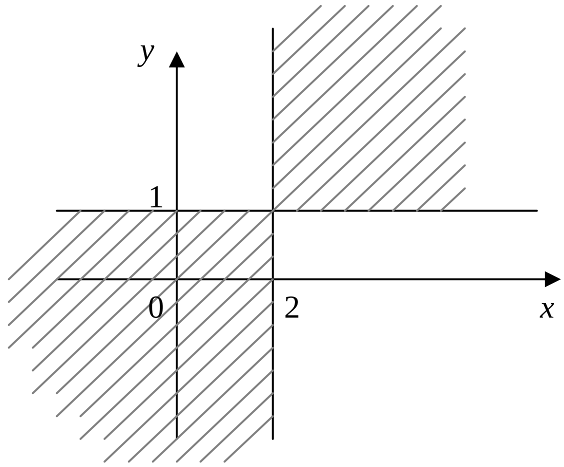

Рис. 20

д) так как выражение, стоящее под знаком логарифма должно быть выражение положительное, то область определения данной функции совпадает с множеством решения неравенства $xy > 0$, из которого следует: либо $x > 0$ и $y > 0$; либо $x < 0$ и $y < 0$. Таким образом, имеем область, состоящую из первой и третьей четвертей координатной плоскости;

е) нахождение области определения функции трех переменных выполняется точно так же, как и в случае функций двух переменных. В данном примере область определения функции совпадает с множеством решения неравенства $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. А это открытый шар с центром в начале координат радиуса 1.

§ 4. **Предел функции нескольких переменных**

Пусть на плоскости R^2 задана последовательность точек $\{M_k(x_k, y_k)\}$. Говорят, что эта последовательность сходится к точке $M_0(x_0, y_0) \in R^2$, если расстояние

$$\rho(M_k, M_0) = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \rho(M_k, M_0) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = 0$$

Множество внутренних точек круга с центром в точке P_0 и радиусом R называют окрестность точки P_0. Таким образом, последовательность точек $M_k \in R^2$, $k = \overline{1,\infty}$ сходится к точке M_0, если в любой окрестности точки M_0 находятся все точки последовательности M_k «быть может» за исключением конечного числа, т.е., начиная с некоторого номера N.

Точка $M_0 \in D \subset R^2$ – предельная точка множества D, то существует последовательность точек $M_k \in D$, сходящихся к M_0, т.е. $M_0 = \lim\limits_{k\to\infty} M_k$, или $\forall \varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall m \in N$ и $m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \rho(M_0, M_k) \leq \varepsilon$ (рис. 21).

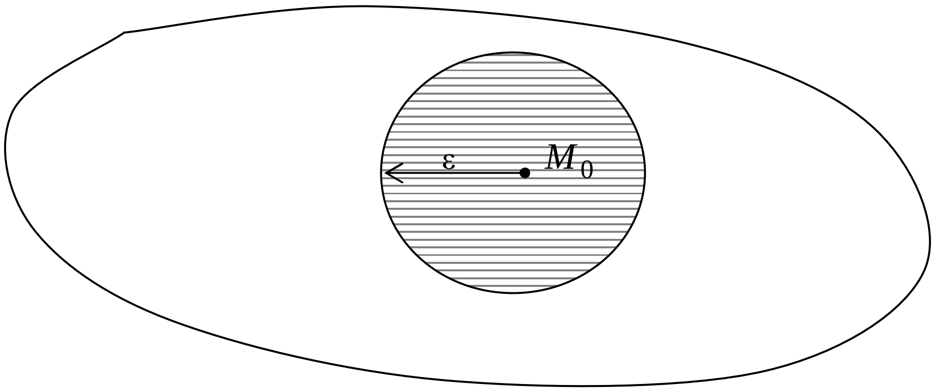

Рис. 21

Определение предела функции двух переменных по Коши (рис. 22).

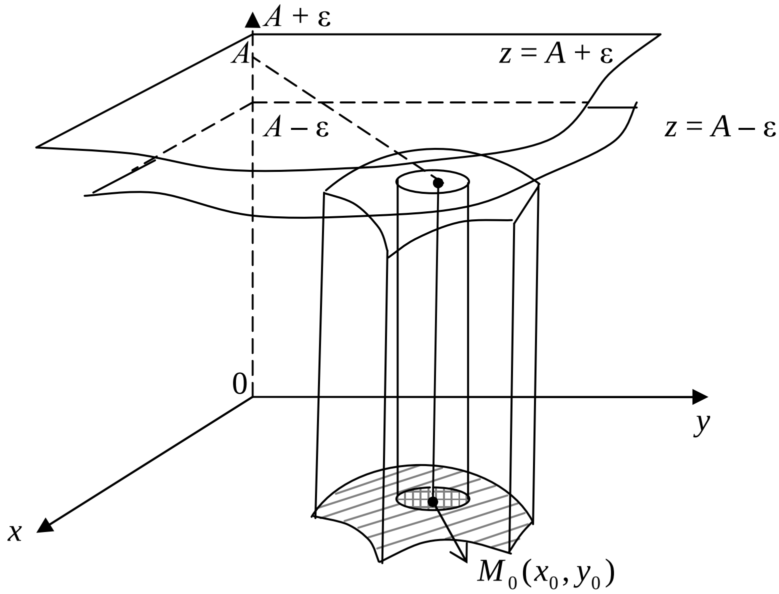

Рис. 22

Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, т.е. в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любой точки $M(x, y)$

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow \left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

Определение предела функции двух переменных по Гейне.

Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любой сходящейся к $M_0(x_0, y_0)$ последовательности точек $M_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, \infty}$, соответствующая последовательность $f(M_k)$ значений функции сходится к A (рис. 23).

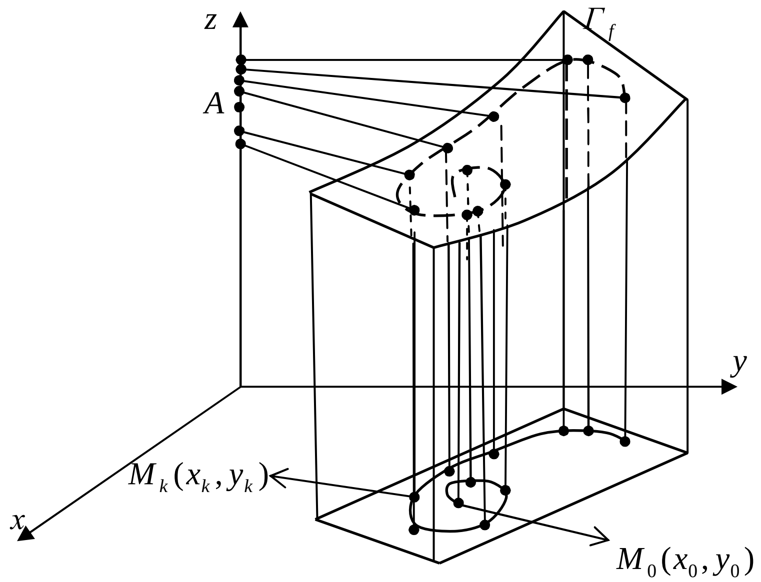

Рис. 23

Доказывается, что приведенные два определения предела функции двух переменных эквивалентные, но при доказательстве того, что данное число A не является пределом функции, удобно пользоваться определением предела по Гейне (т.е. через последовательности).

При определении предела функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ полагают, что функция может быть не определена в точке M_0. Из этого следует, что значения функции $f(M)$ отличаются от числа A на достаточно малую величину, если точка M выбрана достаточно близко к точке M_0. Из определения предела функции по Коши получаем неравенство вида

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon, \qquad (1)$$

для любой точки $M(x, y)$, такой, что

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 . \qquad (2)$$

С геометрической точки зрения неравенство (1) означает следующее: любая точка $M(x, y)$, удовлетворяющая условию (2) (лежит в окрестности точки M_0) находится между двумя плоскостями $z = A - \varepsilon$ и $z = A + \varepsilon$, или, другими словами, предел функции $z = f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ определяется поведением функции в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Отметим, что размеры δ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ существенно зависит от величины ε.

Так, например, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2 - 1) = 1$, если выбираем $\varepsilon = 1$, то $\delta \le 1$ (рис. 24), а при $\varepsilon = 0{,}5$ $\delta \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 25).

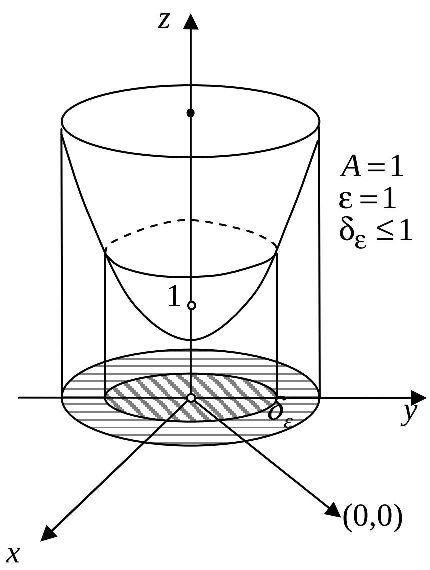

Рис. 24

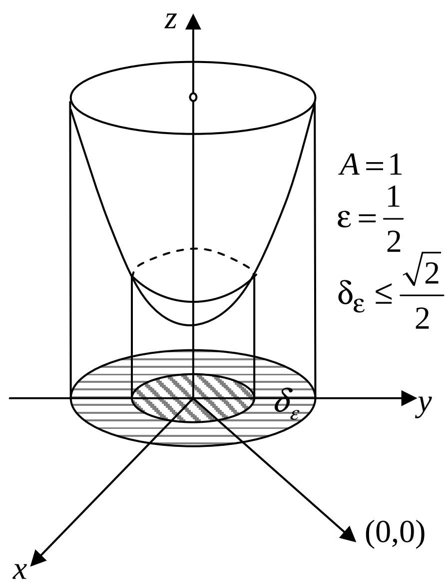

Рис. 25

А если ищем предел $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ в точке $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, то пределом является число $A = 1{,}5$ и при $\varepsilon < 0{,}5$ δ-окрестность точки $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$– это круг с центром в этой точке, расположенный в кольце $1{,}5 - \varepsilon < x^2 + y^2 + 1 < 1{,}5 + \varepsilon$ (рис. 26). Если выбрать $\varepsilon > 0{,}5$, то размеры δ должны быть такие, чтобы δ-окрестность располагалась внутри круга $x^2 + y^2 < R^2$, где $R > 1$ (рис. 27).

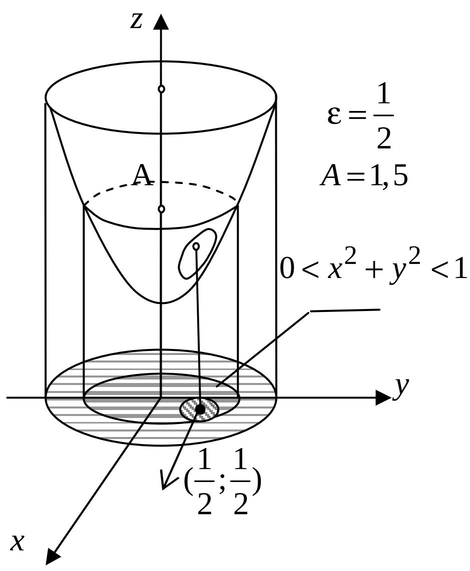

Рис. 26

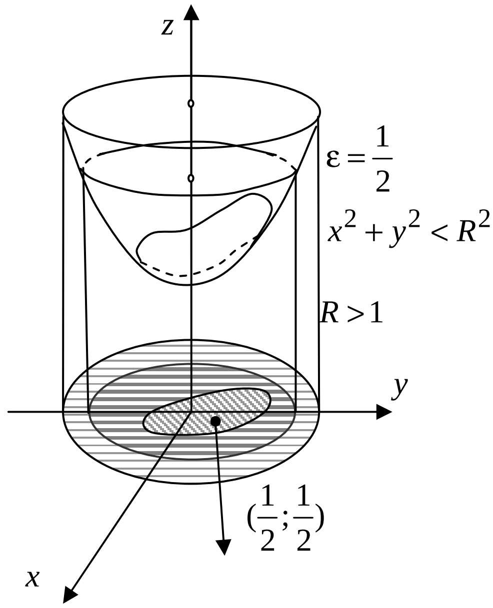

Рис. 27

Пример 1. Доказать, что функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

Решение:

Выберем две сходящиеся к точке $O(0, 0)$ последовательности точек, например, $M_1 = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{\text{n}}\right)$ и $M_2 = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(M_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-3}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = -\frac{3}{5}; \quad \lim_{n\to\infty} f(M_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Таким образом, двум различным последовательностям точек, сходящимся к точке $O(0, 0)$ (т.е. имеющим один и тот же предел), соответствуют две последовательности значений функции, имеющие разные пределы. Тогда, согласно определению предела функции по Гейне, данная функция не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

Приведенные выше определения предела функций двух переменных аналогично обобщаются на случай функции трех и большего числа переменных. Используя понятие предела, вводится понятие бесконечно малой функции, изучаются свойства бесконечно малых функций, теоремы об арифметических операциях над пределами и другие свойства, аналогичные случаю одной переменной.

Наряду с указанными выше пределами у функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например по различным координатам, т.е. пределы вида (для случая двух переменных)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{или} \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) кроме, «быть может», в самой точке.

Пределы указанного вида называются ***повторными пределами***, они представляют собой специфику функций нескольких переменных. Таким образом, повторные пределы соответствуют предельному переходу (для двух переменных x и y) сначала по x при постоянном значении y $(y \neq y_0)$, а затем по y при постоянном значении x $(x \neq x_0)$ или наоборот.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0), кроме «может быть» прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. При фиксированном значении переменной y функция $z = f(x, y)$ – функция одной переменной x. Пусть для любого фиксированного значения y из окрестности точки y_0, существует предел функции $f(x,y)$ при $x \to x_0$ (это предел зависит «вообще говоря» и от y):

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y-\text{фиксир.}}} f(x,y) = \varphi(y).$$

Пусть предел функции $\varphi(y)$ при $y \to y_0$ существует и равен A:

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = A.$$

Тогда говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует ***повторный предел*** функции $f(x, y)$ и записывают его следующим образом

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = A.$$

При этом $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$; y – фиксированное значение называется ***внутренним пределом*** в повторном пределе.

Аналогичным образом определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, в котором внутренним пределом является $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$; x – фиксированное значение.

Например, для функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, область определения которой является вся плоскость за исключением начала координат, оба повторных предела существуют и

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

Предел $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует, т.к. например, вдоль координатных осей он равен 0, а вдоль прямой $y = x$ предел равен 0,5.

Для функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 y^2}$ при $(x, y) \to (0,0)$ существует предел, равный нулю, существуют и равны нулю оба повторных предела:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{1 + x^2 y^2} \right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0, \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{1 + x^2 y^2} \right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

Таким образом, только из существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке, и, наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке. Тем не менее, определенную связь между этими пределами (понятиями) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует предел функции $f(x, y)$, равный A ($\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = A$), а также пределы в повторных пределах этой функции, тогда существуют повторные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, причем имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Отметим, что обратное утверждение неверно.

Замечание. Понятие повторных пределов функции можно ввести и для случая, когда x_0 (либо y_0, либо x_0 и y_0) равна $+\infty$ (или $-\infty$, или $+\infty$).

§5. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть в пространстве R^2 задана область D и точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая D. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если выполняются следующие условия:

1. $f(M)$ определяется в точке M_0 и некоторой ее окрестности;
2. существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;
3. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если в точке M_0 одно из условий, приведенных выше, не выполняется, то точка M_0 – точка разрыва функции $z = f(x, y)$.

Аналогично определяется непрерывность в точке для функций трех и большего числа независимых переменных.

Для функции $z = f(x, y)$ – двух независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва, а для функции $w = f(x, y, z)$ – трех независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Пример 1. Найти точки разрыва функций:

а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; б) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + (y-2)^2}$;

в) $z = \dfrac{2x+y}{x^2 - y^2}$; г) $w = \dfrac{x+y}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

Решение:

а) данная функция определена на R^2 всюду, кроме точки $O(0,0)$, которая и является точкой разрыва функции;

б) точка разрыва функции – $A(4; 2)$;

в) данная функция определена для любых x и y, таких, что $x^2 - y^2 \neq 0$. Следовательно, прямые $x = y$ и $x = -y$ являются линиями разрыва данной функции;

г) данная функция определена для любых x, y и z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$. Сфера с центром в начале координат, радиусом 2 является поверхностью разрыва функции.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функции нескольких переменных, непрерывные на замкнутых ограниченных множествах, обладают свойствами аналогичными свойствам функции одной переменой, непрерывной на отрезке.

Сформулируем некоторые из этих свойств.

1. Если функция $z = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она ограничена на нем и достигает в некоторых точках $M_1 \in D$ и $M_2 \in D$ своих точных верхней и нижней граней.

2. Если функция $z = f(M)$ непрерывна на замкнутом связном ограниченном множестве D, то она принимает на нем все промежуточные значения.

3. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в точке $M_0 \in D$, то существует окрестность точки M_0, в которой данная функция ограничена.

4. Если функция непрерывна в точке M_0, причем $f(M_0) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой знак $f(M)$ совпадает со знаком $f(M_0)$.

5. Если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и непрерывны в точке M_0, тогда:

а) $f(M) \pm g(M)$ непрерывна в точке M_0;

б) $f(M) \cdot g(M)$ непрерывна в точке M_0;

в) $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ непрерывна в точке M_0, при $g(M_0) \neq 0$.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных и $D(f)$ – область ее определения. Выбираем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in D(f)$ и дадим x_0 приращение Δx, а y_0 оставим без изменения. Тогда данная функция $f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

которое называется ***частным приращением*** функции $z = f(x, y)$ ***по переменой x*** в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Таким же образом, считая x_0 постоянной и придавая y_0 приращение Δy, получим ***частное приращение*** функции $z = f(x, y)$ по переменой y в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется функция $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Геометрически частные и полное приращение функции $\Delta_x z,\ \Delta_y z,\ \Delta z$ – это отрезки (рис. 28).

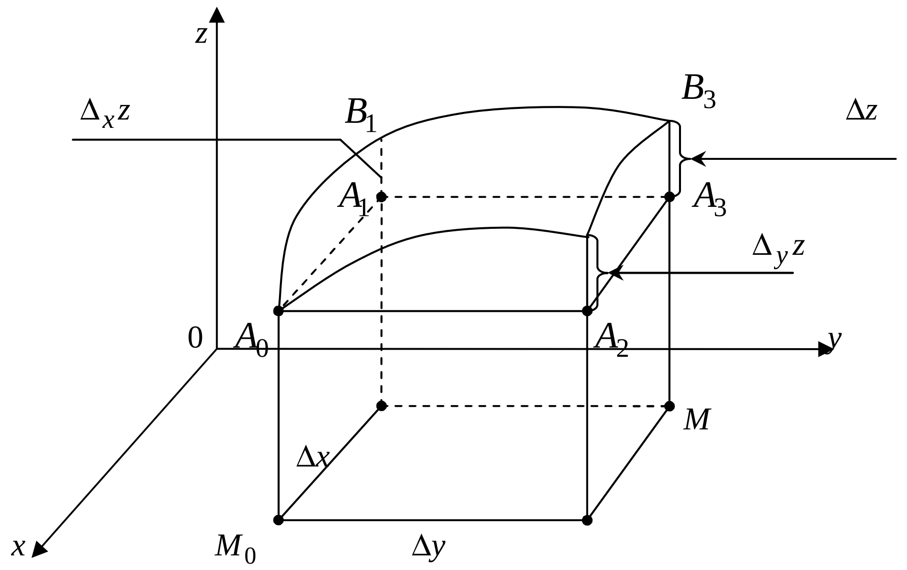

Рис. 28

Пример 2. Найти частные и полное приращение функции $z = x + y^2$ в точке $M_0(2,1)$, если $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. По определению частных и полного приращения функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x) + y_0^2 - x_0 - y_0^2 = \Delta x; \quad \Delta_x z = -0{,}1;$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = x_0 + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0 - y_0^2 =$$

$$= (y_0 + \Delta y)^2 - y_0^2 = (y_0 + \Delta y - y_0) \cdot (y_0 + \Delta y + y_0) = \Delta y \cdot (2y_0 + \Delta y)$$

$$\Delta_y z = 0{,}2 \cdot (2 \cdot 1 + 0{,}2) = 0{,}2 \cdot 2{,}2 = 0{,}44 \qquad \Delta_y z = 0{,}44$$

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= (x_0 + \Delta x + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0 - y_0^2 = \Delta x + (y_0 + \Delta y)^2 - y_0^2 =$$

$$= \Delta x + (y_0 + \Delta y - y_0)(y_0 + \Delta y + y_0) = \Delta x + \Delta y(2y_0 + \Delta y)$$

$$\Delta z = -0{,}1 + 0{,}44 = 0{,}43.$$

Если $w = f(x, y, z)$ – функция трех независимых переменных, то для нее вводятся частные и полные приращения $\Delta_x w$, $\Delta_y w$, $\Delta_z w$ и Δw в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\Delta_x w = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta_y w = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta_z w = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Аналогично определяются полное и частные приращения функции n независимых переменных.

Замечание 1. Определение непрерывности функции нескольких переменных можно дать следующим образом: функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(\lim\limits_{M \to M_0} M) = f(M_0)$, что равносильно:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall M \in D, \quad \rho(M, M_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon.$$

Замечание 2. Определение непрерывности функции нескольких переменных можно дать, используя полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке M. Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Замечание 3. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменой x, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0$. Аналогично определяется непрерывность по любой переменой для функции n независимых переменных. Отметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ определена в точке M и некоторой ее окрестности и непрерывна в точке M, то она непрерывна в этой точке по каждой переменной.

Заметим, что обратное утверждение неверно.

Пример 3. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, \ x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0,\ 0)$ по каждой переменой x и y, но не является непрерывной как функция двух переменных.

Решение:

1) найдем частное приращение по x функции $f(x,y)$ в точке $O(0,\ 0)$

$$\Delta_x z = f(\Delta x,0)-f(0,0)=0-0=0.$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x z\to 0$, а это значит, что $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,\ 0)$ по переменой x;

2) найдем частное приращение по y функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$

$$\Delta_y z = f(0,\Delta y)-f(0,0)=0-0=0.$$

А $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y z=0$, а это значит, что $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменой y;

3) докажем, что функция $z=f(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$. Для этого найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Если точка $M(x,\ y)$ стремится к точке $O(0,\ 0)$ по прямой $y=kx$, тогда получим, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2+x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Следовательно, для различных k получают разные предельные значения, а это значит, что предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует, т.е. функция $f(x,\ y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$.

Замечание. При решении данной задачи непрерывность функции $f(x,y)$ по переменным x и y можно установить следующим образом: рассмотрим функцию $f(x,y)$ при $y=0$, т.е. $f(x,0)$, но так как $f(x,0)=0$ для всех x, то функция $f(x,\ 0)$ непрерывна на всей числовой оси Ox, в частности и в точке $x=0$. А это означает непрерывность функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ по переменой x.

§6. Дифференцирование функций нескольких переменных

Производная функции $y = f(x)$ одной переменой характеризует скорость изменения функции в точке x. Для случая функции двух или нескольких переменных можно говорить о скорости изменения функции в точке только в заданном направлении, так как скорость изменения функции двух или нескольких переменных в точке по различным направлениям будет различна.

Отношения:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

определяют среднюю скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении изменения независимых переменных x и y соответственно, от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M_0(x_0 + \Delta x, y_0)$ и $M_0(x_0, y_0 + \Delta y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменой x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему отношению приращения аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частная производная по переменой y определяется аналогично, как и для переменой x, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные для функции n независимых переменных определяются аналогичным образом.

Следовательно, частная производная функции нескольких независимых переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Значит, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменой, имеет место и для частных производных. Но при этом необходимо помнить, что во всех этих правилах и формулах *при нахождении частной производной* по какой-либо переменой *все остальные переменные считаются постоянными*.

Пример 1. Найти по определению частные производные функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1, 2)$.

Решение. По определению частной производной по переменой x в точке $M(1, 2)$ имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + 2^2 - (1^2 + 2^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2.$$

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 2$.

Частная производная по переменой y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1 + (2+\Delta y)^2 - 1 - 2^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y \cdot (4 + \Delta y)}{\Delta y} = 4.$$

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial y}(M) = 4$.

Пример 2. Для функции $z = 3x^2 y + x^2 - y^3$ найти частные производные z_x', z_y'.

Решение. Чтобы найти, например, частную $z_x' = \frac{\partial z}{\partial x}$ функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$, нужно в выражении $f(x,y)$ второй аргумент y принять за постоянную и дифференцировать $f(x,y)$ как функцию одной переменной x. В нашем случае будем иметь: $z_x' = 6xy + 2x$.

При дифференцировании по y за постоянную принимаем x, тогда z_y' будет равна $z_y' = 3x^2 - 3y^2$.

Пример 3. Найти все точки, где не существуют частные производные функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Эти формулы теряют смысл в точке $(0,0)$. Выясним, имеет ли частные производные данная функция в точке $(0, 0)$. По определению частной производной по переменой x для точки $(0, 0)$ имеем

$$z_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но последний предел не существует, значит, не существует частная производная по x в точке $(0, 0)$.

Поступая таким же образом для y, доказываем, что не существует частная производная по переменой y в точке $(0, 0)$.

Физический смысл частной производной:

$\frac{\partial f}{\partial x}(M),\ \frac{\partial f}{\partial y}(M),\ \frac{\partial f}{\partial z}(M)$ – это скорость изменения функции в точке M в направлении осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Геометрический смысл частных производных функции двух независимых переменных.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Выясним геометрический смысл частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$. График функции $z = f(x, y)$ – это некоторая поверхность Q в R^3. Пусть точка $P_0(x_0, y_0) \in D(f)$, на этой поверхности ей соответствует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пересекаем график данной функции плоскостью $y = y_0$ – получим кривую $z = f(x\ , y_0)$ (рис. 29).

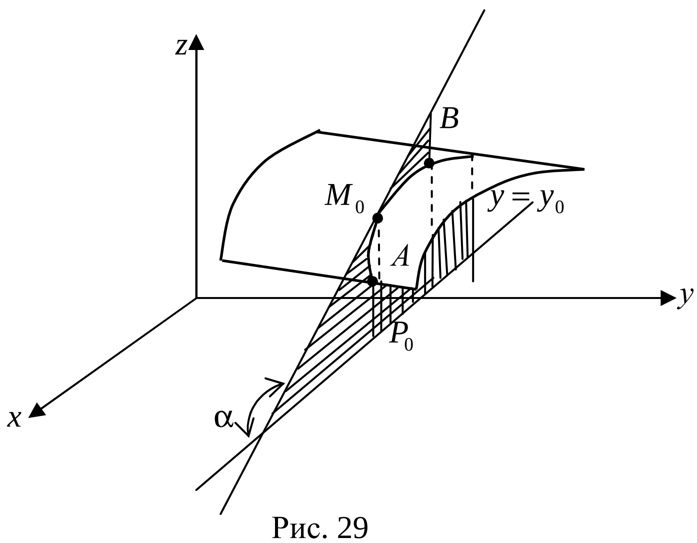

Рис. 29

Это кривая AM_0B, которая есть график функции одной переменной $z = f(x\ , y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функции одной переменой, значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ численно равно тангенсу угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y_0)$ и плоскости $y = y_0$. (рис. 29). Аналогичная геометрическая интерпретация частной производной функции $z = f(x, y)$ по y (рис. 30).

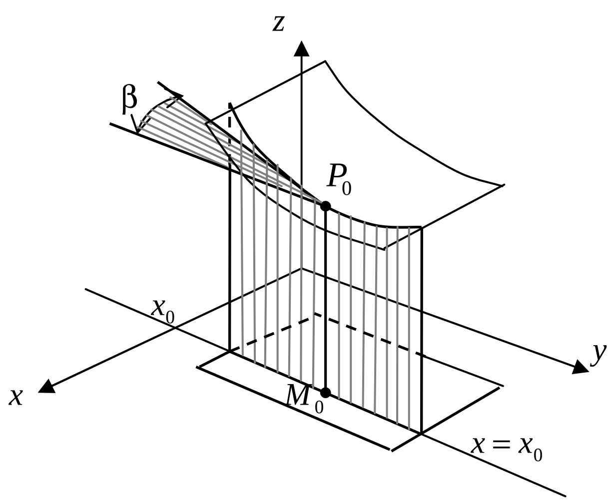

Рис. 30

§ 7. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Понятие «дифференцируемость функции» $y = f(x)$ одной переменой было определено следующим образом: функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции в точке x_0 можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 является существование производной в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0).$$

Введем понятие дифференцируемости для функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$.

Равенство (1) выражает условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Функцию $z = f(x, y)$, дифференцируемую в каждой точке некоторого множества, называют дифференцируемой на этом множестве.

Пример 1. Доказать, что функция $z = x^2 y$ дифференцируема на R^2.

Решение. Полное приращение функции в любой точке $M(x, y) \in R^2$ имеет вид

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y =$$

$$= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)(y + \Delta y) - x^2 y = x^2 y + 2x \cdot y\Delta x + y(\Delta x)^2 + x^2 \Delta y +$$

$$+2x\Delta x \cdot \Delta y + \Delta y \cdot (\Delta x)^2 - x^2 y = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \Delta y +$$

$$+(y + \Delta y) \cdot (\Delta x) \cdot \Delta x + 2x \cdot \Delta x \cdot \Delta y = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $A(x, y) = 2xy$; $B = x^2$; $\alpha = (y + \Delta y) \cdot \Delta x$; $\beta = 2x \cdot \Delta x$.

Отметим, что A и B в фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$ – постоянные числа, а α и $\beta \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$.

Это значит, что данная функция дифференцируема в любой точке $M \in R^2$.

В равенстве (1) выражение $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ – линейное относительно Δx и Δy называют ***главной частью полного приращения*** функции, а выражение $\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$ – является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Следующая теорема устанавливает связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции двух переменных.

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то полное приращение Δz в этой точке имеет вид

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \tag{2}$$

где A и B – некоторые числа, не зависящие от Δx и Δy;

α и $\beta \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$.

Переходя к пределу в равенстве (2) при Δx и $\Delta y \to 0$ получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y) = 0$$

А это значит, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Обратная теорема неверна, т.е. непрерывность является только необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции.

Обратите внимание, что для функции одной переменой $y = f(x)$ существование производной в точке x_0 является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в этой точке.

Для функций нескольких переменных дифференцируемость и существование частных производных не являются эквивалентными свойствами функции нескольких переменных.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она имеет частные производные, причем $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = A$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = B$.

Доказательство. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее полное приращение представимо в виде

$$\Delta z = a(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y. \tag{3}$$

Полагая в формуле (3) $\Delta y = 0$, получим $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Разделим последнее равенство на Δx и, переходя к пределу в полученном равенстве при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Следовательно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует частная производная по переменой y, причем $B = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Теорема доказана.

Теорема обратная для теоремы 2 неверна, т.е. из существования ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции (см. пример 3, § 6).

Пример 2. Доказать, что функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$, но в данной точке существуют обе частные производные, равные между собой

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \ x = y = 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Функция $f(x, y)$ не имеет предела при $(x, y) \to (0,0)$ (для доказательства положим, например, $y = kx$), а, следовательно, не является непрерывной в точке $(0,0)$.
2. С другой стороны имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. Получаем, что существование частных производных функции в точке не гарантирует даже непрерывности функции в этой точке.

Отметим, чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, на нее налагают условия более жесткие, чем существование частных производных.

Теорема 3. (достаточные условия дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, непрерывные в самой точке, то она дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Отметим, что непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке. Так функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \ x = y = 0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке $O(0, 0)$. Но при $x^2+y^2 \neq 0$ частная производная

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$ и, следовательно, не является непрерывной функцией в точке $O(0,0)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*. Например, функция $z = y^2 e^{x^2+y^2}$ дифференцируема в любой точке $M(x,y)\in R^2$, так как ее частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2\cdot e^{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + 2y^3e^{x^2+y^2}$$

всюду непрерывны.

Понятие дифференцируемости для функций трех и более независимых переменных водится аналогично как для функции двух переменных.

***Геометрический смысл дифференцируемости*.**

Для функций одной переменной $y = f(x)$, дифференцируемость функции в точке x_0, означает, что существует касательная к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Пусть задана непрерывная функция двух переменных $z = f(x,y)$, $(x,y)\in 0$. График этой функции представляет некоторую поверхность $S\in R^3$.

Пусть плоскость P проходит через точку $N_0(x_{0,}y_0,z_0)$ поверхности S; $N(x,y,f(x,y))$ – произвольная точка на поверхности S; N_1 – основание перпендикуляра, проведенного из точки N на плоскость P (рис. 31).

Плоскость P, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности S, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если при $N\in N_0$ $(N\in S)$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)} = 0.$$

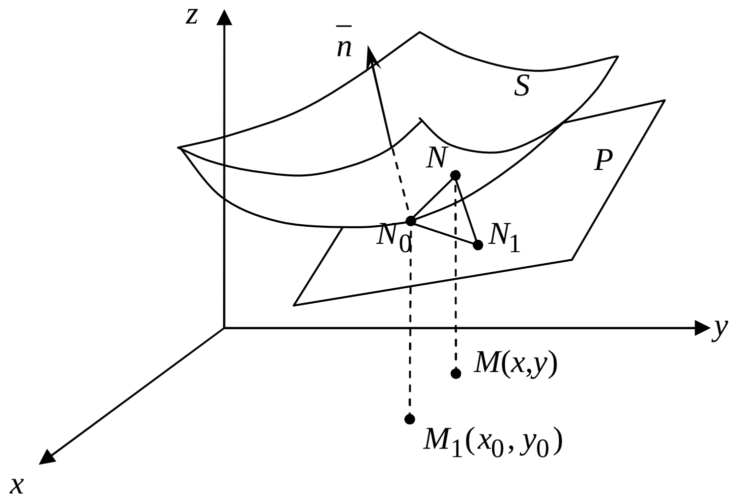

Рис. 31

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ существует касательная плоскость к поверхности S (графику этой функции), причем уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а вектор $\vec{n}$ к касательной плоскости, $\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \frac{\partial z}{\partial y}(M_0), \ -1 \right)$, называется вектором нормали (нормалью) к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Прямая, проходящая через точку N_0 и параллельная вектору $\vec{n}$, называется нормалью к поверхности S в точке N_0, уравнение которой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Правило дифференцирования сложной функции.

Пусть $z = f(u, v)$ – функция двух переменных, каждая из которых является функцией независимых переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тогда $z = f(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные аргументы.

Имеет место следующая теорема (правило дифференцирования сложной функции).

Теорема 4. Если функция $z = f(u, v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0, v_0)$, а функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке

$P_0(x_0, y_0) \in D(f)$, то сложная функция $z = f(u,v)$, где $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$, причем ее частные производные находят по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем формулу (4). Так как функция $z = f(u,v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0, v_0)$, тогда ее полное приращение в этой точке имеет вид

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_y v + \alpha \cdot \Delta_x u + \beta \cdot \Delta_x v.$$

Полученное равенство разделим на $\Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_y v}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}. \tag{6}$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ в силу непрерывности функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{1}{\Delta x} \alpha \cdot \Delta_x u = \alpha \frac{\Delta_x}{\Delta x}; \quad \frac{1}{\Delta x} \beta \cdot \Delta_x v = \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу в равенстве (6) с учетом того, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = 0$, имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Аналогичным образом доказываем (5). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи задания сложной функции:

1. $z = f(x,y)$, $x = x(t)$ и $y = y(t)$, тогда $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

2. $z = f(x,y)$, $y = y(x)$, т.е. $z = f(x, y(x))$ – сложная функция одной независимой переменой, тогда $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ – формула полной производной.

Рассмотрим случай функции трех переменных.

1) Пусть $\psi = f(u,v,w), \;\; u=u(x,y,z), \;\; v=v(x,y,z), \;\; w=w(x,y,z)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}.$$

2) Пусть $z=f(x,y,u)$, где $y=y(x)$ и $u=u(x)$. Тогда $z=f(x,y(x),u(x))=F(x)$ – функция одной переменой x.

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$ или с учетом того, что $x=x, \;\; y=y(x), \;\; u=u(x)$ получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Эту формулу называют формулой ***полной производной***.

Замечание. Между частной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\dfrac{dz}{dx}$ производными, входящими в формулу $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}$ имеется существенное различие. Полная производная $\dfrac{dz}{dx}$ – это обычная производная от z как функция x, а $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная от z по переменой x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u), зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными.

Пример 3. Найти производную функции $u=x^2y^3z$, где $x=t, \;\; y=t^2, \;\; z=\sin t$.

Решение. Так как u является функцией одной независимой переменой t, то $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dt}$. Подставляя x, y и z, получим

$$\frac{du}{dt}=2xy^2z\cdot 1+3x^2y^3z\cdot 2t+x^2y^3\cos t=t^7(8\sin t+t\cos t).$$

Пример 4. Найти частные производные функции $z = f(x^2 y, x^y)$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $z = f(u,v)$, где $u = x^2 y$ и $v = x^y$. Таким образом, z является функцией двух переменных u и v, а u и v являются функциями от двух переменных x и y. Для нахождения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ воспользуемся формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2xy + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot y \cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot x^2 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot x^y \cdot \ln x .$$

Пример 5. Доказать, что функция $z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет соотношению $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \varphi' \cdot 2x = 2xy \cdot \varphi'; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi + y \cdot \varphi'(-2y) = \varphi - 2y^2 \cdot \varphi'.$$

Подставляя их в левую часть соотношения, получим

$$\frac{1}{x} \cdot 2x \cdot y \cdot \varphi' + \frac{1}{y}(\varphi - 2y^2 \varphi') = 2y\varphi' + \frac{\varphi}{y} - 2y\varphi' = \frac{\varphi}{y} = \frac{y \cdot \varphi}{y^2} = \frac{z}{y^2} .$$

Что и требовалось доказать.

§ 8. Дифференциал функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования

Важной частью исследования функций является локальное исследование, под которым понимается сравнение значения функции в данной точке со значениями функции в точках, близких к данной.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y . \qquad (1)$$

Главная линейная часть полного приращения функции (z) относительно аргументов (Δx и Δy) называется полным (первым) дифференциалом функции (z)в точке M_0, обозначается

$$dz(M_0) = df(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y . \tag{2}$$

Приращения независимых Δx и Δy называют дифференциалами независимых переменных x и y и обозначают соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функций $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ записывают в виде

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot dy . \tag{3}$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$ называют частными дифференциалами функции $z = f(x, y)$ и обозначают $d_x z$ и $d_y z$.

Замечание. Равенство (2), приводящее к понятию дифференциала, позволяет говорить о дифференциале как о главной линейной части приращения Δf функции $f(x, y)$. Действительно, $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$ – часть полного приращения Δf, линейно зависящая от Δx и Δy, называется ***главной*** потому, что ее доля (вес) в полном приращении Δf стремится к единице при α и $\beta \to 0$ в равенстве (2).

Пример 1. Найти по определению первый дифференциал функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 2)$.

Решение. Найдем полное приращение функции z в точке $M_0(1;2)$

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$

$$\Delta f(1, 2) = f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - f(1, 2) = (1 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta y)^2 - (1^2 + 2^2) =$$

$$= (1 + \Delta x)^2 - 1 + (2 + \Delta y)^2 - 2^2 = \Delta x \cdot (2 + \Delta x) + \Delta y \cdot (4 + \Delta y) =$$

$$= 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4\Delta y + (\Delta y)^2.$$

То есть $\Delta f(1, 2) = 2 \cdot \Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

Главная линейная часть полного приращения функции z в точке M_0 – это $2\cdot\Delta x+4\Delta y$, следовательно, полный (первый) дифференциал имеет вид $dz=2\cdot dx+4\cdot dy$.

Частные дифференциалы $d_x z=2dx;\ d_y z=4dy$.

Замечание. Определение первого (полного) дифференциала аналогично обобщается на случай функции любого числа переменных.

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $z=f(x,y);\ x=x(u,v);\ y=y(u,v)$, тогда по определению первого дифференциала имеем

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $z(x(u,v),y(u,v))$ как функцию переменных u и v. Считая, что u и v независимые переменные найдем дифференциал функции z. Согласно определению имеем

$$dz=\frac{\partial f(x(u,v),y(u,v))}{\partial u}du+\frac{\partial f(x(u,v),y(u,v))}{\partial v}dv. \tag{5}$$

Так как

$$\frac{\partial f(x(u,v),y(u,v))}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f(x(u,v),y(u,v))}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

то формула (5) будет иметь вид

$$dz=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv. \tag{6}$$

Перегруппировав слагаемые в (6), получим

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Но для функций $x(u,v),y(u,v)$ независимых переменных u, v дифференциалы имеют вид

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv;\ \ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv. \tag{7}$$

Тогда из соотношений (6) и (7) получаем

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (8)$$

В сопоставлении формул (5) и (8) и заключается свойство, называемое ***инвариантностью формы первого дифференциала***. Остановимся подробнее на этом.

Если $z = f(x, y)$, а x и y – независимые переменные, то

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy.$$

Если же x, y – переменные, зависящие от других (независимых) переменных u, v, то дифференциал dz сложной функции $z(x(u,v), y(u,v))$ равен правой части в формуле (5). В силу доказанного выше, правые части формул (5) и (8) совпадают. Поэтому равенство $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ справедливо не только для независимых переменных x и y, но также и для тех, которые являются функциями от других переменных (в рассматриваемом нами случае – от u, v).

Другими словами, свойство инвариантности первого дифференциала состоит в следующем: форма (структура) первого дифференциала (4) не меняется независимо от того, аргументы функции независимые переменные или являются функциями от других переменных, то есть формальная запись дифференциала в обоих случаях одинакова.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет установить следующие правила дифференцирования.

Пусть u и v – дифференцируемые функции каких-либо переменных. Тогда имеет место теорема 1.

Теорема 1.

1) $d(c \cdot u) = c \cdot du,\ c - \text{const}$; 2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3) $d(u, v) = udv + vdu$; 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0$.

Доказательство. (Докажем, например, свойство (3)). Рассмотрим функцию $z = u \cdot v$ двух переменных u и v. Дифференциал этой функции dz равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial u} = v$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = u$, то $dz = udv + vdu$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала выражение $udv + vdu$ будет дифференциалом функции $u \cdot v$ и в случае, когда u и v являются дифференцируемыми функциями нескольких переменных. Свойство (3) доказано.

Пример 2. Найти дифференциал функции $z = arctg\frac{y}{x}$.

Решение. Пусть $u = \frac{y}{x}$, тогда

$$d\text{arctg}\frac{y}{x} = d\text{arctg}u = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{ydx}{x^2+y^2}.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $z = z(u,v)$, где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

Решение:

Первый способ. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} 2y + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot x.$$

Тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = 2\frac{\partial z}{\partial u}(xdx + ydy) + \frac{\partial z}{\partial v}(ydx + xdy).$$

Второй способ. Будем непосредственно вычислять полный дифференциал, используя инвариантность его формы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial y}2(xdx + ydy) + \frac{\partial z}{\partial v}(ydx + xdy)$$

Полученные выражения dz в обоих случаях совпадают.

Пример 4. Найти дифференциал функции $z = f(x + y^2, y + x^2)$ в точке $M(-1,1)$.

Решение. Запишем функцию $z = f(x + y^2, y + x^2)$ в виде $z = f(u,v)$, где $u = x + y^2; v = y + x^2$. Вычисляя частные производные, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{\partial f(0;2)}{\partial u} - 2\frac{\partial f(0;2)}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 2\frac{\partial f(0;2)}{\partial u} + \frac{\partial f(0;2)}{\partial v}.$$

Тогда

$$dz(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y}dy =$$

$$= \left(\frac{\partial f(0;2)}{\partial u} - 2\frac{\partial f(0;2)}{\partial v} \right)dx + \left(2\frac{\partial f(0;2)}{\partial u} + \frac{\partial f(0;2)}{\partial v} \right)dy.$$

Данную задачу можно решить и другим способом, используя свойство инвариантности формы первого дифференциала.

В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$du(M) = \frac{\partial f(0;2)}{\partial u}du + \frac{\partial f(0;2)}{\partial v}dv,$$

где du и dv дифференциалы функций $u = x + y^2$ и $v = y + x^2$ в точке $M(-1,1)$.

Так как $\frac{du(M)}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 2$; $\frac{\partial v(M)}{\partial x} = -2$; $\frac{\partial v(M)}{\partial y} = 1$, то

$$dv(M) = dx + 2dy; \; dv(M) = -2dx + dy,$$

тогда $du(M) = \left(\frac{\partial f(0;2)}{\partial u} - 2\frac{\partial f(0;2)}{\partial v} \right)dx + \left(2\frac{\partial f(0;2)}{\partial u} + \frac{\partial f(0;2)}{\partial v} \right)dy$.

Что совпадает с результатом, полученным выше.

§ 9. Функции нескольких переменных, заданные неявно

Пусть дана функция $F(x,y)$ двух переменных. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

Для каждого фиксированного x уравнение (1) относительно переменой y имеет некоторое множество решений, которое обозначим через A_x (оно может быть и пустым, т.е. не содержать ни одного элемента). Будем рассматривать только такие значения x, для которых A_x не пусто. Тогда соответствие $f: x \to A_x$ определяет (многозначную) функцию переменой x. Такая функция называется ***неявной***. Название «неявная функция» отражает способ задания этой функции: для каждого x значения неявной функции $f(x)$ по определению являются решениями уравнения (1) при заданном x. Эти решения не всегда можно записать в виде явной формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ – элементарная функция.

Пример 1.

1. Уравнение $x - y - 1 = 0$ определяет функцию $y = x - 1$, при этом $D(y) = E(y) = R$.

2. Уравнение $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ выполняется только при $x = 1$ и $y = 2$ и задает точку $A(1,2)$.

3. Уравнение $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не определяет никакой функции на R, т.к. оно не имеет действительных корней, а, значит, нельзя рассматривать y как функцию от x.

4. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет неявно функцию $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ (двузначную при $|x| < 1$ и однозначную при $x = \pm 1$). Действительно, $x^2 + (\pm\sqrt{1-x^2})^2 = 1$.

5. Для уравнения $y^5 + y - x = 0$ невозможно записать решение в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ – элементарная функция, хотя сама зависимость $y = f(x)$ определена правилом $x \to A_x = f(x)$ (напомним, что $f(x)$ может быть многозначной функцией).

Если в каждом множестве A_x выбрать по одному элементу, то получим (однозначную) функцию $y = f(x)$, тоже называемую неявной.

Сформулируем условия, при которых уравнение (1) определяет одну из переменных как функцию другой.

Теорема 1 (о неявной функции). Пусть функция $F(x,y)$ двух переменных удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(x,y)$ – определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и $F(x_0,y_0)=0$.

2. Частные производные $F_x'(x,y)$, $F_y'(x,y)$ существуют и непрерывны в выбранной окрестности $M_0(x_0,y_0)$.

3. $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда в достаточно малой окрестности точки x_0 существует одна и только одна однозначная непрерывная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$y_0=f(x_0),\ F(x,f(x))=0, \tag{2}$$

причем

$$y'(x)=\frac{-F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}. \tag{3}$$

Пример 2. Установить, что уравнение $y^5+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию.

Решение. Пусть $F(x,y)=y^5+2xy+x^4-4$, тогда

1) $F(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0(1,1)$ и $F(1,1)=0$;

2) $F_x'=2y+4x^3$ и $F_y'(x,y)=5y^4+2x$ существуют и непрерывны в любой окрестности точки $M_0(1,1)$.

3) $F_y'(x_0,y_0)=F_y'(1,1)=7\neq 0$.

Следовательно, существует одна и только одна однозначная непрерывная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^5+2xy+x^4-4=0$ и условию $1=f(1)$.

§ 10. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух независимых переменных

Графиком функции двух независимых переменных $z=f(x,y)$ в пространстве R^3 является некоторая поверхность Q (рис. 32). Для геометрической интерпретации полного дифференциала функции двух независимых требуется ввести понятие касательной плоскости к поверхности Q в некоторой точке M (аналогично, как касательная к кривой (графику) $y=f(x)$ на R^2 для функции одной независимой переменой.

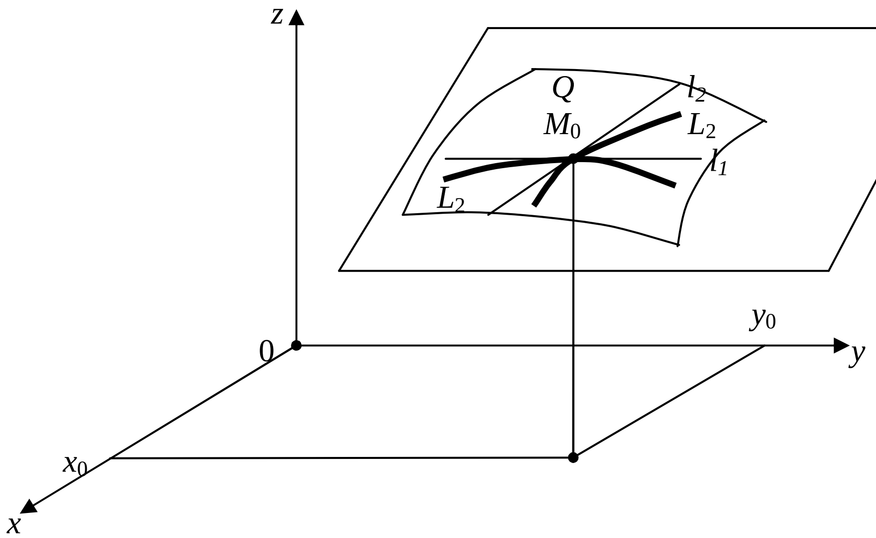

Рис. 32

Касательной плоскостью к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется плоскость, которая содержит все касательные прямые к кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Напишем уравнение касательной плоскости L к поверхности Q $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Построим сечение поверхности Q $z = f(x, y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$; получим соответственно кривые $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$ на поверхности Q, которые определяются следующими системами уравнений:

$$L_1 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x, y); \end{cases} \qquad L_2 \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y). \end{cases}$$

Тогда уравнения касательных (прямых) l_1 и l_2 в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$l_1 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0), \end{cases} \tag{1}$$

$$l_2 \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0). \end{cases} \tag{2}$$

Прямые l_1 и l_2 проходят через точку M_0, пересекаются в этой точке, а, следовательно, можно написать уравнение касательной плоскости L в точке M_0, как уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые, причем полученная плоскость будет единственной.

Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3)$$

Касательные прямые l_1 и l_2 получаются сечением плоскости (3) плоскостями $x=x_0$ и $y=y_0$. Тогда уравнения касательных прямых l_1, l_2 определим системами

$$l_1 \quad \begin{cases} x=x_0 \\ B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases} \qquad l_2 \quad \begin{cases} y=y_0 \\ A(x-x_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases}$$

или

$$l_1 \quad \begin{cases} x=x_0 \\ (z-z_0)=\dfrac{-B}{C}(y-y_0) \end{cases} \quad (4), \qquad l_2 \quad \begin{cases} y=y_0 \\ (z-z_0)=\dfrac{-A}{C}(x-x_0). \end{cases} \quad (5)$$

Но уравнения (1), (2), (4) и (5) – это уравнения прямых l_1 и l_2 соответственно, но записанных в различной форме. Сравнивая коэффициенты при одинаковых переменных в формулах (1), (2), (3) и (4) получим

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{-A}{C}; \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{-B}{C}. \qquad (6)$$

Подставляя полученные значения в уравнение (3), получим уравнение плоскости L (касательной) к поверхности Q $(z=f(x,y))$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в виде

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0. \qquad (7)$$

Если уравнение поверхности Q задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, тогда

$$f_x'(x_0,y_0)=-\frac{F_x'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}; \qquad f_y'(x_0,y_0)=-\frac{F_y'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)},$$

а, следовательно, уравнение касательной плоскости L имеет вид

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0. \; (8)$$

Точка, в которой $F_x'=F_y'=F_z'=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует, называется особой точкой поверхности. В такой точке поверхность может не иметь касательной.

Нормаль к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Если поверхность Q задана неявно $F(x,y,z)=0$, то уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

Геометрический смысл полного дифференциала

Пусть $z=f(x,y)$ – функция двух независимых переменных, рассматривается в окрестности точки (x_0,y_0). Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности, задаваемой уравнением $z=f(x,y)$, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (9)$$

Так как $\Delta x=x-x_0=dx$; $\Delta y=y-y_0=dy$, то правая часть (9) представляет собой полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а левая часть $z-z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания

$$z-z_0=df(x_0,y_0). \qquad (10)$$

Формула (10) устанавливает геометрический смысл дифференциала: при $x=x_0$, $y=y_0$ и произвольных Δx и Δy значение дифференциала равно $z-z_0$, т.е. приращению аппликаты точки касательной плоскости к графику функции $z=f(x,y)$ (рис. 33)

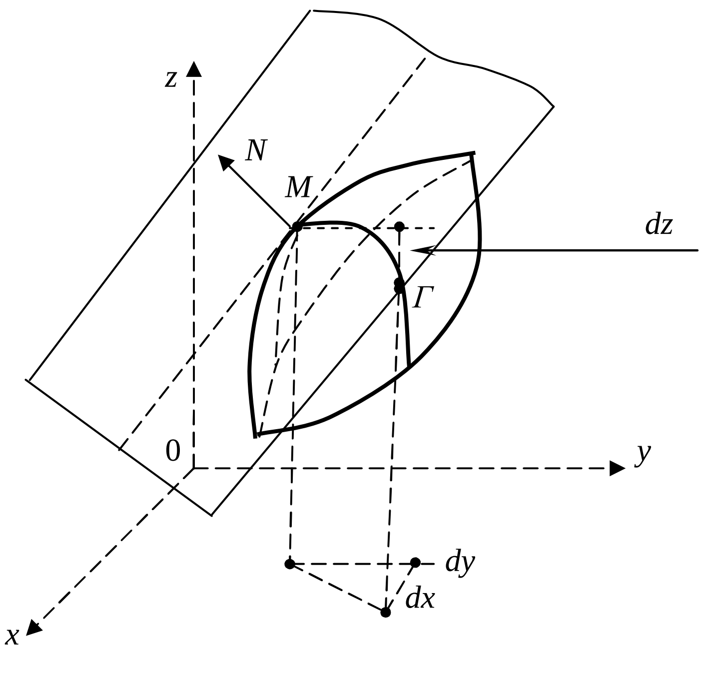

Рис. 33

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0:

1) $z = 4 - x^2 - y^2 \qquad M_0(1,2,2)$;

2) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 4 \qquad M_0(1,2,1)$.

Решение:

1) Уравнение поверхности задано явной функцией $z = f(x,y)$, поэтому уравнения касательной плоскости и нормали (соответственно) имеют вид

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0;$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Находим частные производные в точке M_0

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y;\quad \frac{\partial z(1,2)}{\partial x}=-2;\quad \frac{\partial z(1,2)}{\partial y}=-4.$$

Тогда искомые уравнения (соответственно) имеют вид

$$-2(x-1)-4(y-2)-(z-2)=0.$$

$2x+4y+z-12=0$ – уравнение касательной плоскости.

А уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{1}.$$

2) Уравнение поверхности задано неявно. Для того чтобы записать уравнения касательной плоскости и уравнения нормали, вычислим частные производные в точке M_0.

$$F_x' = 2x;\quad F_y' = 6y;\quad F_z' = 4z$$

$$F_x'(1,2,1)=2;\quad F_y'(1,2,1)=12;\quad F_z'=4$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$2(x-1)+12(y-2)+4(z-1)=0 \quad \text{или} \quad x+6y+2z-15=0.$$

А уравнение нормали

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-1}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{2}.$$

§ 11. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x, y) \in D(f)$. Эти производные являются функциями двух переменных, которые называют частными производными первого порядка. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, если они существуют, называются частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и обозначаются

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{x^2},\ f''_{xx};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(f дифференцируется последовательно два раза по x);

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ f''_{y^2},\ f''_{yy};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(f дифференцируется последовательно два раза по y);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ f''_{xy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$ – смешанная производная

(f дифференцируется сначала по x, а затем по y);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ f''_{yx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ – смешанная производная

(f дифференцируется сначала по y, а затем по x).

Производные второго порядка – функции переменных x и y, которые снова можно дифференцировать как по x, так и по y. В результате будем иметь восемь частных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

то есть, например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right).$$

Подобным образом по индукции определяются частные производные любого порядка.

Частная производная по любой из независимых переменных от частной производной $(n-1)$-го порядка функции $f(x, y, z...)$ называется частной производной n-ного порядка.

Количество частных производных от функции f при увеличении n растет. Но при некоторых условиях многие из частных производных совпадают, а именно, оказывается, что частная производная порядка n не зависит от того, в каком порядке проведено дифференцирование, а зависит от того, по каким переменным и сколько раз была взята производная.

Так как частная производная функции, например, по переменой (аргументу) x определяется как обыкновенная производная функции одной переменной x при фиксированных значениях остальных переменных, то методика вычисления частных производных высших порядков предполагает умение вычислять только обыкновенные производные первого порядка.

Пример 1. Найти частные производные первого и второго порядков для функции $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Решение. При вычислении частной производной по некоторой переменой все остальные независимые переменные рассматриваются как постоянные. Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = y \cdot \left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) \cdot 2x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2xx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)}.$$

Выясним достаточные условия независимости значений смешанных производных от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Говорят, функция $u = f(x, y, z)$ n раз дифференцируема в точке M_0, если все частные производные $(n - 1)$-го порядка этой функции являются дифференцируемыми функциями в точке M_0.

Отметим следующее утверждение: для того, чтобы функция $u = f(x, y, z)$ была n раз дифференцируемой в точке M_0 достаточно, чтобы все ее частные производные n-ного порядка были непрерывными в точке M_0.

Теорема 1. Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда в этой точке частные производные f''_{xy} и f''_{yx} равны.

Доказательство теоремы проводится с использованием свойств дифференцируемости функции $z = f(x, y)$, теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

Замечание. Теорема 1 утверждает, что в данной точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет место равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$, если в данной точке дифференцируемы f'_x и f'_y. Из дифференцируемости f'_x и f'_y в точке M_0 вытекает существование в этой точке всех частных производных второго порядка. Однако равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$ имеет место и при условии существования лишь производных f''_{xy} и f''_{yx}, но при дополнительном требовании непрерывности этих производных в рассматриваемой точке.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, а функции f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке M_0. Тогда в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Пример 2. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^y.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln y.$$

Находим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \cdot (\ln x)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y \cdot x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x).$$

§ 12. Дифференциалы высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$.

Тогда в любой точке $M(x, y) \in D(f)$ первый дифференциал (или дифференциал первого порядка) имеет вид

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{1}$$

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $M(x, y) \in D(f)$, если он существует, называется дифференциалом второго порядка и обозначается

$$\partial^2 z = d(dz).$$

Считая в выражении (1) dx и dy постоянными, получим

$$\partial^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2.$$

Для дифференцирования третьего порядка имеем

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$$

$$+3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3.$$

Найденные дифференциалы позволяют предположить, что символическая формула для дифференциала любого порядка имеет вид

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f. \tag{2}$$

Эту формулу (2) следует понимать так: сумму, стоящую в круглых скобках возводим в степень *n*, например, применяя формулу бинома Ньютона, затем показатели степеней y: $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ – считаем как порядок производных по x и y от функции *f*.

Для $n=1$; $n=2$; $n=3$ формулу (2) доказали, для полного доказательства (метод математической индукции) покажем, что если формула (2) верна для n, то она верна и для $n+1$. Пусть (2) верна для n. Тогда

$$d^{n+1} f = d(d^n f) = \frac{\partial(d^n f)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^n u)}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)d^n f,$$

где символом $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\varphi$ обозначено выражение $\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$.

Учитывая, что формула для $d^n f$ доказана при помощи метода математической индукции, можно записать

$$d^{n+1} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1}\cdot f.$$

Что и требовалось доказать.

Формула (2) обобщается и на случай любого числа независимых переменных. Формула (1) справедлива не только в том случае, когда x и y независимые переменные (инвариантность формы первого дифференциала). Но при нахождении $\partial^2 f$ существенную роль играет то, что величины dx и dy являются постоянными, и формула (2) справедлива только в тех случаях, когда dx и dy – постоянны. Это будет справедливо, если x и y являются независимыми переменными.

Рассмотрим случай, когда x и y – линейные функции независимых переменных z и t:

$$x = az + bt + c; \quad y = a_1 z + b_1 t + c_1,$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 – постоянные.

Для dx и dy получим выражения:

$$dx = adz + bdt; \qquad dy = a_1 dz + b_1 dt.$$

Но dz и dt, как дифференциалы независимых переменных, должны считаться постоянными; тоже можно сказать относительно dx и dy. Поэтому можно утверждать, что символическая формула (2) справедлива как в случае, когда x и y независимые переменные, так и в случае, когда они линейные функции.

Если же dx и dy нельзя считать постоянными, то формула (2) уже не будет справедливой.

Вычислим $\partial^2 z$ в общем случае. При вычислении $d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right)$ и $d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)$ мы уже не имеем права выносить dx и dy за знак дифференциала, а должны применять формулу для дифференцирования произведения. Тогда будем иметь

$$d^2 z = dxd\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + dyd\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2 y =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2 y,$$

т.е. в рассматриваемом общем случае выражение для $d^2 z$ будет содержать дополнительные слагаемые, зависящие от $d^2 x$ и $d^2 y$.

Пример 1. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = x\ln(x + y^2)$.

Решение. Дифференциал первого порядка функции определяется формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\ln(x + y^2) + \frac{x}{x + y^2} \right)dx + \frac{2xy}{x + y^2}dy .$$

Дифференциал второго порядка определяется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x + y^2} + \frac{x + y^2 - x}{(x + y^2)^2} = \frac{x + 2y^2}{(x + y^2)^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x + y^2) - 2xy}{(x + y^2)^2} = \frac{2y^3}{(x + y^2)^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x(x + y^2) - 2xy2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2x(x - y^2)}{(x + y^2)^2} .$$

Следовательно,

$$d^2 u = \frac{x + 2y^2}{(x + y^2)^2}dx^2 + \frac{4y^3}{(x + y^2)^2}dxdy + \frac{2x(x - y^2)}{(x + y^2)^2}dy^2 .$$

13. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия. Достаточные условия

Точку $M_0(x_0, y_0)$ называют точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что для всех точек $M(x, y)$ из окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) < f(x, y))$.

Значение $f(x_0, y_0)$ называют ***локальным максимумом*** (минимумом) ***функции***.

Точки максимума или минимума функции называют ***точками экстремума функции,*** а максимумы или минимумы функции – ***экстремумами функции***.

Геометрически понятие локального экстремума иллюстрируют рис. 34 и 35.

Отметим, что если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет локальный экстремум, то

– для случая локального максимума

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta z < 0 ; \qquad (1)$$

– и в случае локального минимума

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\Delta z>0. \tag{2}$$

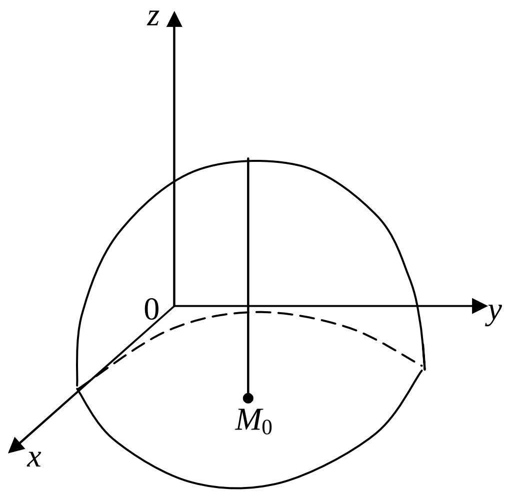

Рис. 34

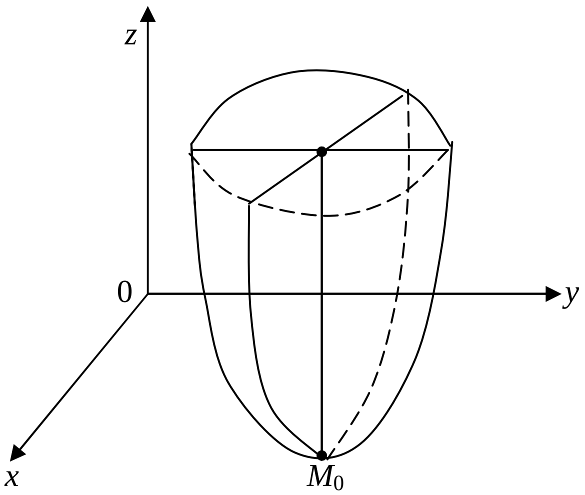

Рис. 35

Из отмеченного выше следует, что полное приращение функции не меняет знак в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Но для всех точек $M(x,y)$ из окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ определить знак приращения Δz практически невозможно, поэтому требуется искать другие условия или требования, которые давали бы возможность судить о наличии и характере экстремума функции в данной точке.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума). Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка локального экстремума функции $f(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке, то

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0 \tag{3}$$

или, по крайней мере, одна из частных производных не существует.

Доказательство. Так как

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y+r. \tag{4}$$

Допустим, что функция

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y \tag{5}$$

не есть тождественный нуль, т.е. хотя бы одно из чисел $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ отлично от нуля. В сколь угодно малой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ знак Δf совпадает со знакам выражения (5); r в равенстве (4) бесконечно малая.

Если $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума, то Δf сохраняет знак в малой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ в силу определения экстремумов (1) и (2). Но выражение (5) (знак которого совпадает со знаком Δf) меняет знак при замене Δx на $(-\Delta x)$ и Δy на $(-\Delta y)$. Таким образом, в точке экстремума выражение (5) тождественно равно нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Второе утверждение данной теоремы проиллюстрируем примером.

Пример 1. Показать, что функция $f(x,y)=2+\sqrt{x^2+y^2}$ имеет экстремум в точке $M_0(0,0)$, но $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ не существуют.

Решение. Так как $f(0,0)\le 2$, для любых $(x,y)\in R^2$, то точка $M_0(0,0)$ – точка максимума данной функции. Частные производные данной функции имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

В точке $O(0,0)$ частные производные не существуют (рис. 36)

Замечание 2. Если точка $M_0(x_0,y_0)$ – точка локального экстремума функции $z=f(x,y)$, то ее дифференциал в этой точке равен нулю или не существует.

Точки, в которых частные производные данной функции равны нулю или не существуют, называются критическими или стационарными точками данной функции.

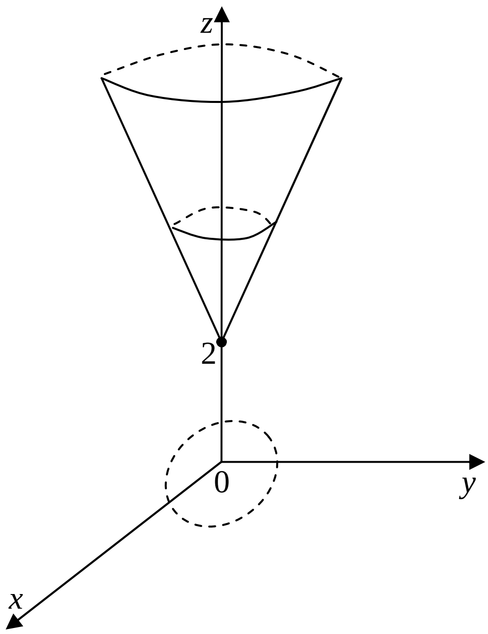

Рис. 36

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 2. Доказать, что в точке $O(0,0)$ функция $z = xy$ не имеет экстремума, хотя частные производные первого порядка равны нулю.
Решение. Действительно, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

в точке $O(0,0)$. Но в тоже время в любой окрестности точки $M_0(0,0)$ функция $z = xy$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, а следовательно точка $O(0,0)$ не является точкой экстремума.

Уравнение $z = xy$ определяет поверхность – гиперболический параболоид.

Замечание 3. Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$, уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = (z - z_0) = 0.$$

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ достигает максимума или минимума, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ касательная плоскость параллельна плоскости xOy, т.е. частные производные обращаются в нуль, а поверхность будет расположена на одну сторону от касательной плоскости, в окрестности точки касания (рис. 37).

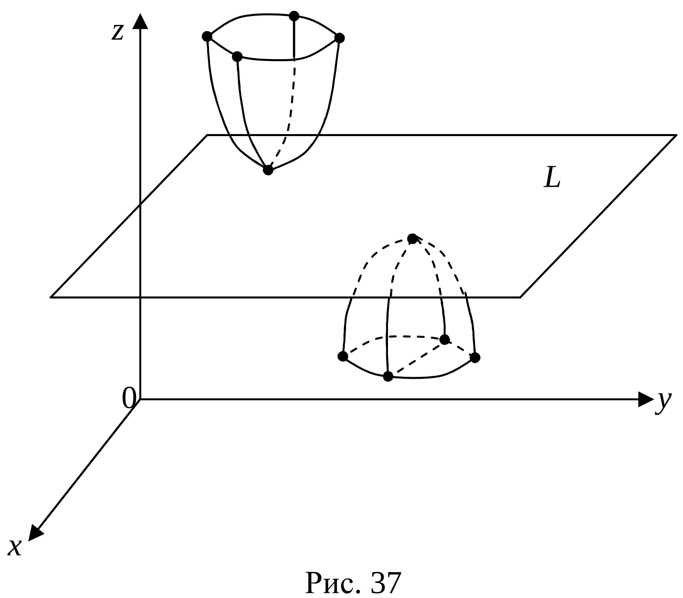

Рис. 37

Но может получиться, что частные производные первого порядка в некоторой точке обращаются в нуль, т.е. касательная плоскость параллельна плоскости xOy, но поверхность $z = f(x, y)$ в окрестности этой точки расположена по обе стороны от касательной плоскости, то в этом случае функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума в этой точке.

Рассмотрим еще один случай. Положим, что при $x = x_0$ и $y = y_0$ касательная плоскость параллельна плоскости xOy и поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости, но имеет с нею общую линию, проходящую через точку касания. В этом случае разность $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, не меняя знака при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, будет обращаться в нуль при x_0 или y_0, отличных от нуля. Примером для этого случая может быть круговой цилиндр, ось которого параллельна плоскости xOy. В этом случае функция $z = f(x, y)$ имеет максимум или минимум при $x = x_0$ и $y = y_0$.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума).

Пусть функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая в этой точке непрерывные частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}; \qquad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}; \qquad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}.$$

Пусть, кроме того, в точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \qquad (6)$$

Пусть

$$D(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (7)$$

Тогда стационарная (критическая) точка M_0 функции $z = f(x, y)$ является:

1) точкой локального максимума, если $D(M_0) > 0$ и $A < 0$;

2) точкой локального минимума, если $D(M_0) > 0$ и $A > 0$;

3) если $D(M_0) < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке M_0 экстремума не имеет.

4) если $D(M_0)=0$, то экстремум в точке M_0 может быть, а может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z=3xy-(x^3+y^3)$ в области $x>0, \quad y>0$.

Решение. Необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, получим $x=1, \ y=1$. В точке $M(1;\ 1)$ выполнены необходимые условия экстремума, т.е. данная точка – точка, подозрительная на экстремум. Проверим достаточные условия экстремума. Найдем второй дифференциал функции в точке $M(1;\ 1)$

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x\partial y}\cdot\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2}\cdot\Delta y^2=-6\Delta x^2+6\Delta x\Delta y-6\Delta y^2.$$

Дискриминант этой квадратичной формы

$$B^2-AC=3-(-6)(-6)<0.$$

Следовательно, достаточное условие существования локального экстремума выполнено и точка $M(1,\ 1)$ является точкой локального экстремума, а именно: локального максимума, так как $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A=-6<0$.

§ 14. Условный экстремум функции нескольких переменных

Понятие условного экстремума. Рассмотрим функцию

$$u=f(x_1,x_2,x,....x_n)=f(M) \tag{1}$$

при условии, что ее аргументы $x_1,x_2,...,x_n$ являются независимыми переменными и связаны между собой k соотношениями $(k<n)$:

$$F_i(x_1,x_2,...x_n)=0; \quad i=\overline{1,k} \tag{2}$$

Пусть координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям (2). Говорят, что функция (1) имеет в точке M_0 условный минимум (максимум) при условиях связи (2), если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M $(M \neq M_0)$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ $(f(M) < f(M_0))$.

Другими словами, условный максимум (минимум) – это наибольшее (наименьше) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам, из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Рассмотрим задачу на отыскание условного экстремума для функции двух переменных, т.е. требуется найти экстремум функции

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

при условии (уравнение связи)

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{4}$$

Возможны следующие случаи:

1. Уравнение связи (4) однозначно разрешено относительно одной из переменных, например y, т.е. выразить y как функцию x: $y = \psi(x)$, то подставляя полученное y в (4) получим функцию одной переменой $z = f(x, \psi(x))$. Находим значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, мы тем самым определим искомые точки условного экстремума.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2 + 2$ при условии $x + y = 2$ (уравнение связи).

Решение. Из уравнения связи имеем $y = 2 - x$ и, подставляя в исходную функцию, получим $z = x^2 + (2 - x)^2 + 2 = 2x^2 - 4x + 6$.

Для полученной функции одной переменой находим экстремум: $z' = 4x - 4$; $x = 1$. $z'' = 4 > 0$, значит точка $x = 1$ – точка минимума.

Следовательно, в точке $M_0(1,1)$ (из уравнения $x + y = 2$) функция $z = x^2 + y^2 + 2$ имеет минимум относительно уравнения связи $x + y = 2$ и ее значение $z(1,1) = 4$.

С геометрической точки зрения это означает следующее: точка параболоида $z = x^2 + y^2 + 2$, находящаяся над точкой $M_0(1;1)$, является самой низкой из всех точек, лежащих над прямой $x + y = 2$ (рис. 38).

2. Уравнение связи задается параметрическими уравнениями: $x = x(t)$ и $y = y(t)$ $t \in [T_1, T_2]$. Подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$, приходим тем самым к решению задачи на экстремум функции одной переменой.

3. Пусть уравнение связи (2) не разрешимо относительно x и y, и нельзя представить параметрическими уравнениями, т.е. рассмотрим решение поставленной задачи, не разрешая уравнение связи.

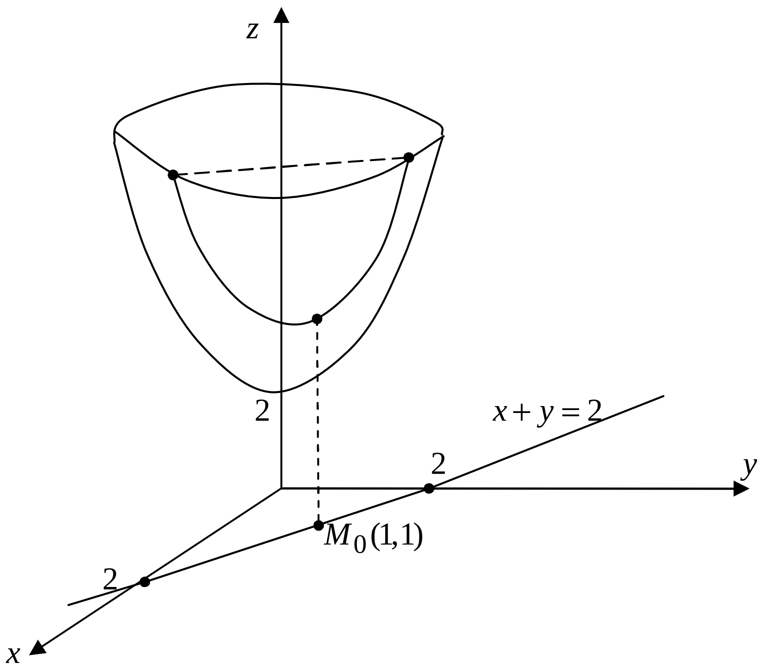

Рис. 38

Решение этой задачи – отыскание условного экстремума проводят ***методом множителей Лагранжа,*** суть которого состоит в следующем:

1. Функция $z = f(x, y)$ может иметь максимум или минимум при тех значениях x, при которых $z'_x = 0$.

2. Находим полную производную $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Значит, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \qquad (5)$$

Дифференцируя уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$ по x, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (6)$$

3. Равенству (6) удовлетворяют все точки x, y, лежащие на линии L, определяемой уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$.

4. Умножая равенство (6) на неизвестный, пока, коэффициент λ, и сложив с равенством (5), получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (7)$$

Равенство (7) выполняется во всех точках локального экстремума, лежащего на линии L, определяемой уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$. Подберем неопределенный множитель λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции $z = f(x, y)$, коэффициент $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ обратился в нуль. Тогда и $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

Следовательно, точки локального экстремума, лежащие на лини L, определяемой уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$, должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

5. Решая систему (8), найдем критические точки и вспомогательный множитель λ. Система уравнений представляет собой необходимые условия существования условного экстремума: не всякая критическая точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты x_0 и y_0 которой удовлетворяют системе уравнений (8), будет точкой условного экстремума.

6. Для исследования характера критической точки требуется провести дополнительный анализ приращения Δz в окрестности критической точки M_0, лежащей на линии L.

Заметим, что левые части уравнений системы (8) являются частными производными вспомогательной функции трех переменных $F(x, y, \lambda)$, называемой ***функцией Лагранжа***:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \qquad (9)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция, $\varphi(x, y)$ – левая часть уравнения связи.

Таким образом, можно ввести правило нахождения ***точек условного экстремума*** для функции двух переменных:

1) строим функцию Лагранжа по формуле (9);

2) находим частные производные по x, y и λ, составляем систему (8). Решения данной системы – точки возможного условного экстремума (критические точки функции Лагранжа);

3) определяем знак Δz (приращения функции) в окрестностях критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$, т.е. лежат на линии L.

Если при этом будем иметь, что для любых указанных точек M, лежащих на L $\Delta z = f(M)-f(M_0)>0$, то $M_0(x_0,y_0)$ – точка условного минимума, если же $\Delta z = f(M)-f(M_0)<0$, то $M_0(x_0,y_0)$ – точка условного максимума.

Пример 2. Найти экстремум функции $z=x^2+y^2+2$ при условии $x+y=2$ (уравнение связи).

Решение. В примере 1 аналогичную задачу решили методом исключения или методом сведения к исследованию на экстремум функции одной переменой. В этом примере найдем условный экстремум, используя функцию Лагранжа, для этого поступим следующим образом:

1) строим функцию Лагранжа

$$f(x,y,\lambda)=x^2+y^2+2+\lambda(x+y-2);$$

2) составим систему уравнений для определения критических точек $F(x,y,\lambda)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{2} \\ y=-\dfrac{\lambda}{2} \\ -\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{\lambda}{2}=-2. \end{cases}$$

Откуда имеем $\lambda=-2$, а критическая точка $M_0(1,1)$;

3) проведем дополнительный анализ приращения функции Δz в критической точке $M_0(1,1)$. Имеем: пусть x_0 удовлетворяет уравнению связи $x_0+y=2$, тогда $y_0=2-x_0$, а, следовательно, $M(x_0,2-x_0)$

$$\Delta z = f(M)-f(M_0)=f(x_0,2-x_0)-f(1,1)=$$

$$=x_0^2+(2-x_0)^2+2-4=2x_0{}^2-4x_0+2=2(x_0^2-1)^2>0.$$

для всех $M \neq M_0$ и для точек M, координаты которых удовлетворяют уравнению связи $(x+y=2)$, т.е. $f(M) > F(M_0)$, следовательно, точка $M_0(1,1)$ – точка условного минимума, $z(1,1)=4$.

Полученный результат полностью совпадает с результатом примера 1.

§ 15. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D и имеет в этой области конечные частные производные. По теореме Вейерштрасса (если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то $m \leq f(x,y) \leq M$) в этой области найдется точка (x_0, y_0), в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если эта точка лежит внутри области D, то в ней функция имеет максимум (минимум), так что в этом случае интересующая нас точка, наверное, содержится среди «подозрительных» по экстремуму стационарных (критических) точек. Но своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x,y)$ может достигать и на границе области. Таким образом, точки, в которых функция $z = f(x,y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области D.

Значит, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в ограниченной замкнутой области D, следует вычислить значения функции в критических точках области D, а также наибольшее и наименьшее значения на ее границе.

Если *граница области* D задана уравнением $\varphi(x,y)=0$ или несколькими уравнениями такого же типа, и данное уравнение разрешимо относительно x или y, то задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x,y)$ на границе области D приводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке.

Если *граница области* D задана параметрически: $x = x(t)$ и $y = y(t)$ или уравнением $\varphi(x,y)=0$, которое можно представить в параметрическом виде, то, подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в уравнение $z = f(x,y)$, приходим к выводу, что для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ на границе области D достаточно найти наибольшее и наименьшее значения функции одной переменой t на отрезке.

Если граница области D задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$, которое нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y, и также нельзя представить в параметрическом виде, то задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ на границе области D сводится к нахождению условного экстремума.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в замкнутой области D, заданной неравенствами $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le x + y \le 1$.

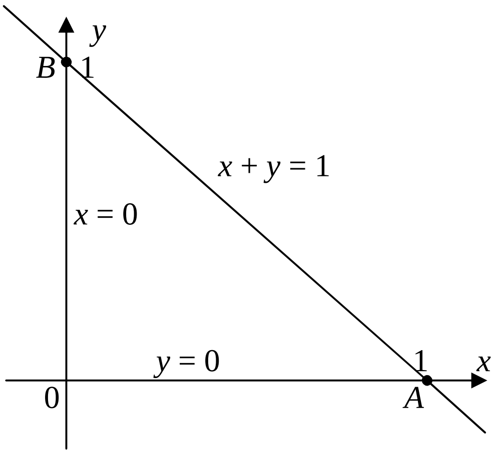

Рис. 39

Решение. Область задания функции D – треугольник ΔAOB (рис. 39).

1. Находим критические точки внутри области D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{8};\ \ y = \frac{1}{8}$$

Точка $M\left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$ не принадлежит области D, поэтому значение функции в этой точке не учитывается.

2. Исследуем функцию на экстремум на границе области D:

а) рассмотрим границу OA; $y = 0;$ $x \in [0;1]$, тогда $z = x^2$; $z'_x = 2x = 0$; $x = 0$, следовательно $z_1(0) = z(0;0) = 0;$ $z_2(1) = z(1;0) = 1;$

б) рассмотрим границу OB; $x = 0;$ $y \in [0;1]$, тогда $z = -3y^2 + y;$ $z'_y = -6y + 1 = 0;$ $y = \frac{1}{6} \in [0;1]$.

$$z_3\left(\frac{1}{6}\right) = z_3\left(0; \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12};\ \ z(0) = z(0,0) = z_1(0,0) = 0$$

$$z(0;1) = z_4(0,1) = -2;$$

в) рассмотрим границу BA: $x + y = 1$, т.е. $y = 1 - x \quad x \in [0;1]$, а

$$z(x) = x^2 + 2x(1-x) - 3(1-x)^2 + (1-x) = -4x^2 + 7x - 2.$$

Итак $z(x) = -4x^2 + 7x - 2;$ $z'_x = -8x + 7;$ $z'_x = 0$

при $x = \frac{7}{8}$, $y = \frac{1}{8}$, $x = \frac{7}{8} \in [0;1]$, поэтому $z_5\left(\frac{7}{8}\right) = z_5\left(\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$

$$z(0;1) = z_4(0;1) = -2; \quad z(1;0) = z_2(1;0) = 1.$$

3. Сравнивая полученные значения z_1, z_2, z_3, z_4 и z_5, получаем, что наименьшее значение – $z(0,1) = -2$, а наибольшее значение – $z\left(\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$.

§ 16. Основные задачи и примеры для функции нескольких переменных

16.1. Топология плоскости

1. Описать геометрическое место точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству $(x-1)^2 + (y-3)^2 < 9$.

Решение. Так как $(x-1)^2 + (y-3)^2$ – квадрат расстояния от точки $M(x, y)$ до точки $O(1,3)$, то данному неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри окружности радиуса $R = 3$ с центром в точке $O(1,3)$. Точки самой окружности (граница) не принадлежат искомому множеству. Данное множество является открытым связным множеством. В то же время это множество ограничено, но не является замкнутым, а, следовательно, данное множество не является компактом.

2. Описать геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 \le 25 \\ x - 2y - 3 \le 0. \end{cases}$$

Решение. Данной системе неравенств удовлетворяют координаты точек кругового сектора AMB (рис. 40).

Данное множество является связным, ограниченным и замкнутым, следовательно, компактным.

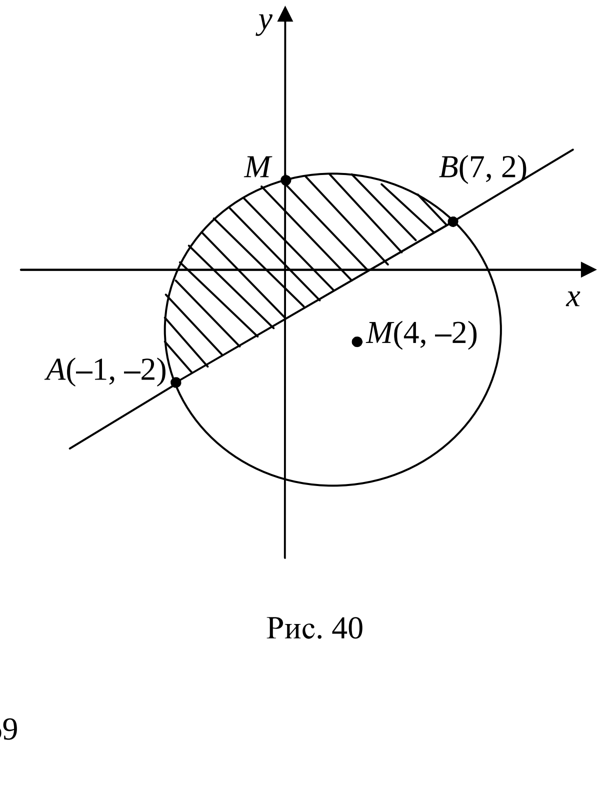

Рис. 40

3. Пусть множество A задано неравенством $x^2 + y^2 \ge 1$, множество B – неравенством $x^2+y^2\le 4$, множество C – неравенством $y\ge x^2$, множество D – неравенством $y\le 8-x^2$.

Описать следующие множества:

а) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$; б) $(A\cap B)\cup(C\cup D)$;

в) $(A\cup B\cup C)\cap D$; г) $(A\cap B\cap C)\cup D$;

д) $(A\cup B\cup C)\setminus D$.

4. Доказать, что множество *M*, задаваемое системой неравенств:

а) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2>16\\ x+3y-2z>6\end{cases}$ – открыто; б) $\begin{cases}x^2+y^2\le 16\\ x+3y-2z\le 16\end{cases}$ – замкнуто;

в) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\ge 25\\ x+3y-2z>6\end{cases}$ – не является ни открытым, ни замкнутым.

Найти предельные точки множества *M*, не принадлежащие этому множеству.

Найти точки множества *M*, не являющиеся внутренними.

16.2. Функция двух (нескольких) переменных

1. Найти и изобразить область определения функции:

а) $z=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$; б) $z=\sqrt{y\sin x}$;

в) $z=\arccos(x^2+y^2)$; г) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$;

д) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; е) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$.

Ответы: а) $|y|<|x|$;

б) если $y\ge 0$, то $2\pi n\le x\le(2n+1)\pi$;

если $y\le 0$, то $(2n+1)\pi\le x\le(2n+2)\pi$; $n\in z$;

в) $x^2+y^2\le 1$;

г) криволинейный треугольник, ограниченный параболами $y^2=x$, $y^2=-x$ и прямой $y=2$ вместе с точками границы, кроме (0,0);

д) первый октант (включая границу);

е) куб, ограниченный плоскостями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$, включая его грань.

Замечание. **Линия уровня** функции $z = f(x, y)$ на плоскости – это такая линия, в которой функция принимает одно и то же значение $z = c$ $(f(x, y) = c)$. **Поверхность уровня** функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ – такая поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой принимает постоянное значение $u = c$.

2. Найти линии уровня функции и выяснить характер (вид) поверхностей:

а) $z = xy$; б) $z = x + y$;

в) $z = x^2 + y^2$; г) $z = x^2 - y^2$;

д) $z = \sqrt{xy}$; е) $z = (1 + x + y)^2$.

Используя определение линии уровня, получим:

а) $xy = c$ – семейство гипербол;

б) уравнение $z = x + y$ задает поверхность, а линии уровня – прямые $x + y = c$, параллельные прямой $x + y = 0$;

в) поверхность, задаваемая уравнением – параболоид вращения: линии уровня – множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = c$ с центром в начале координат;

г) поверхность – гиперболический параболоид: линии уровня – равносторонние гиперболы;

д) поверхность – конус 2-го порядка: линии уровня – равносторонние гиперболы $xy = c^2$;

е) поверхность – параболический цилиндр, образующие которого параллельны прямой $x + y + 1 = 0$; линии уровня – параллельные прямые.

3. Найти лини (поверхности) уровня следующих функций:

а) $z = \ln(x^2 + y)$; б) $z = \arcsin xy$;

в) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$; г) $u = x + y + z$;

д) $u = x^2 + y^2 + z^2$; д) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Ответы: а) параболы $y = C - x^2$, $C > 0$;

б) гиперболы $xy = C$ $(|C| \le 1)$; в) окружности $x^2 + y^2 = C^2$;

г) плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 0$;

д) концентрические сферы с центром в начале координат;

е) при $n > 0$ однополостные гиперболоиды вращения вокруг оси *OZ*; при $n < 0$ двуполостные гиперболоиды вращения вокруг оси *OZ*; оба семейства поверхностей разделяет конус $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

4. Выразить объем конуса V как функцию ее образующей x и радиуса основания y (рис. 41).

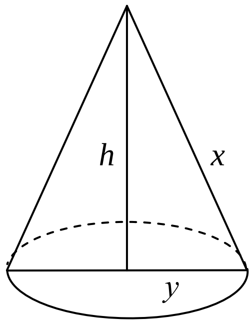

Рис. 41

Решение. Объем конуса $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$,

где h – высота конуса; $h = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Тогда $V = \frac{1}{3} \pi y^2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$.

Область определения полученной функции – это множество точек $(xy) \in R^2$, таких, что $|x| \geq |y|$.

5. Выразить объем конуса как функцию его полной поверхности S и длины образующей l.

Ответ: $V(S,l) = \frac{S^2}{3\pi^2 l} \cdot \sqrt{l^2 - \frac{S^2}{\pi^2 l^2}}$; $0 < S < \pi \cdot l^2$.

6. Выразить объем конуса как функцию от углового осевого сечения конуса α и от радиуса r шара, вписанного в конус.

Ответ: $V(\alpha, r) = \dfrac{\pi \cdot r^3 \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3 \sin\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

16.3. Предел функции нескольких переменных

1. Вычислить предел и повторные пределы функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $O(0,0)$.

Решение. Пусть произвольная точка плоскости $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по прямой $y = kx$, которая проходит через точку $O(0,0)$. Тогда имеем

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ (y = kx)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

При различных значениях k (т.е. приближаясь к точке $O(0,0)$ по различным прямым) получим различные значения искомого предела (при $k = 1$ имеем $\frac{1}{2}$; при $k = 2$ – $\frac{2}{5}$).

Следовательно, предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует. Вычислим повторные пределы функции в точке $O(0,0)$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ y-\text{фиксир.}(y\neq 0)}}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Отметим, что из существования и равенства повторных пределов функции в данной точке не следует существование предела функции в этой точке.

2. Вычислить предел и повторные пределы функции:

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0,0)$;

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ в точке $O(0,0)$.

Ответы: а) $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ предела не имеет; повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$; $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$.

б) $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ предела не имеет

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1.$$

3. Вычислить повторные пределы функции $f(x,y)=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ в точке $O(0,0)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4x+1}{2x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4+\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}\right) = 2.$$

Таким же образом устанавливаем, что $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+1}{2x-1}=-1$.

4. Найти пределы функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$:

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y}$; б) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$.

Ответ: пределы не существуют.

5. Найти предел функции $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$ при $x\to\infty$ и $y\to\infty$.

Решение. Пусть $x=t,\ y=t^4$. Тогда при $t\to\infty$ имеем $x\to\infty$ и $y\to\infty$, а следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t,t^4)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4+t^8}{t^4+t^{16}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+t^6}{1+t^{14}}=0$.

Если же $x=t^2,\ y=t$, тогда $\lim\limits_{t\to\infty} f(t^2,t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^8+t^2}{t^4+t^4}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^6+1}{2t^2}=\infty$.

Полученные различные пределы показывают, что предела не существует.

6. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

Ответы: а), б), в) – 0.

7. Вычислить предел функции $f(x,y)$ и повторные пределы:

а) $f(x)=\log_x(x+y)$ в точке M(1:0);

б) $f(x)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$ в точке M(0;0).

Ответы: а) предел не существует

$$\lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)=1;\qquad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to1} f(x,y)\right)=\infty;$$

б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0} f(x,y))=\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0} f(x,y))=1$.

16.4. Непрерывность функции нескольких переменных

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Решение. Для всех точек $(x,y)\in R^2$, кроме точки (0,0), функция $f(x,y)$ непрерывна – как частное непрерывных функций (многочленов), причем знаменатель отличен от нуля при $(x,y)\neq(0,0)$. Для исследования на непрерывность данной функции в точке $(x,y)=(0,0)$ необходимо исследовать существование предела $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Если предположить, что этот предел существует, то будем иметь

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{y\to 0} f(0,y).$$

Но последнее равенство для данной функции не выполняется, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1, \text{ а } \lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует. Значит точка (0,0) – точка разрыва функции $f(x,y)$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)$ отдельно по переменным x и y и по совокупности переменных x и y в точках $O(0,0)$, $M(0,1)$, $B(1,0)$, если $f(x,y)=\begin{cases} 1, & xy=0 \\ \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0. \end{cases}$

Решение. Данную функцию $f(x,y)$ представим в виде (используя формулу разности косинусов)

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & xy=0 \\ \dfrac{\sin x\cdot\sin y}{x\cdot y}, & xy\neq 0. \end{cases}$$

1) Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin y}{y}=1=f(0,0)$, то $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ и, следовательно, непрерывна в этой точке по отдельным переменным x и y.

2) Рассмотрим функцию $f(0,y)$. Тогда из определения функции $f(x,y)$ имеем, что $f(0,y)=1$ для всех y, и, следовательно, эта функция непрерывна в точке $y=1$. А это означает, что $f(x,y)$ непрерывна в точке $M(0,1)$ по переменой y.

Рассмотрим функцию $f(x,1)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin 1, & x\neq 0 \\ 1, & x=0. \end{cases}$

Так как $\lim\limits_{y\to 0} f(x,1) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \sin 1 = \sin 1 \neq 1 = f(0,1)$, то функция $f(x,1)$ не является непрерывной по переменой x в точке $M(0,1)$. Отсюда имеем, что $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $M(0,1)$ по совокупности переменных x и y, так как в противном случае в силу теоремы 1 из §5 она была бы непрерывной по переменой x.

3) Рассуждая аналогично пункту 2 относительно точки $B(1,0)$, устанавливаем, что $f(x,y)$ непрерывна в точке B по переменой x, и не является непрерывной как по переменой y, так и по совокупности переменных x и y.

3. Найти точки разрыва функций:

а) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$; б) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$;

в) $f(x,y) = \dfrac{3}{x^2+y^2-z^2}$; г) $f(x,y) = \sin\dfrac{y}{x}$;

д) $f(x,y) = \dfrac{\sin x \cdot \cos y}{xy}$; е) $f(x,y) = tg(x^2+y^2+z^2)$.

Ответы: а) $O(0,0)$; б) точки окружности $x^2+y^2=9^2$; в) точки конической поверхности $x^2+y^2=z^2$; г) все точки прямой $x=0$; д) все точки прямых $x=0$ и $y=0$; е) все точки сфер $x^2+y^2=z^2=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k=0,1,2...$

16.5. Дифференцирование функций нескольких переменных

1. Найти частные производные и полные дифференциалы первого порядка от функции $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(1;2)$.

Решение. Найдем частные производные и полный дифференциал функции в произвольной точке $M(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{-x}{y^3}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\partial f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy .$$

Подставляя в полученные выражения $x=1$ и $y=2$, получим

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=\frac{2}{5}; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{5}; \quad \partial f(M_0)=\frac{2}{5}dx-\frac{1}{5}dy.$$

При решении данной задачи мы сначала находили частные производные функции, а потом ее полный дифференциал.

Но данную задачу во многих случаях можно решать следующим образом: сначала находят полный дифференциал, пользуясь правилами вычисления дифференциала суммы, произведения, частного и элементарных функций, а потом собирают коэффициенты при dx и dy. Коэффициент при dx – это $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, а коэффициент при dy – $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции

$$z=\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}.$$

Решение. 1) По определению дифференциала имеем

$$dz=d\sin u=\cos u du,$$

где $u=\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$;

2) $du=d\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)=\dfrac{(x^3+y^3)d(x^2+y^2)-(x^2+y^2)d(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)^2}$;

3) $d(x^2+y^2)=2xdx+2ydy$; $d(x^3+y^3)=3x^2dx+3y^3dy$;

4) Собирая коэффициенты при dx и dy, получим

$$dz=\cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2}dx+\cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{(2x^3y-3x^2y^2-y^4)}{(x^3+y^3)^2}dy;$$

5) Коэффициенты при dx и dy – это $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ соответственно;

3. Найти точки, где не существуют частные производные функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Но при $x=0$ и $y=0$ эти формулы теряют смысл. Найдем частные производные функции z в точке $O(0,0)$. Имеем

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но этот предел не существует, а, следовательно, и $\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x}$ не существует. Аналогичным образом доказываем, что $\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x}$ не существует.

4. Найти частные производные функции:

а) $z = x^y \quad (x > 0)$; б) $u = \left(\dfrac{u}{x}\right)^z \quad \left(\dfrac{y}{x} > 0\right)$;

в) $u = x^{y^z}$; г) $u = x^y \cdot y^z \cdot z^x$.

Решение:

а) при нахождении частной производной функции $z = x^y$ по переменой x искомую функцию z рассматриваем как функцию одной переменой x, т.е. y считаем фиксированной переменной (параметром) или, другими словами, y считаем постоянным числом.

Тогда, при фиксированном y функция $z = x^y$ является степенной функцией от x. Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$.

Аналогично, при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ считаем, что x фиксированное значение (постоянное), поэтому функцию $z = x^y$ рассматриваем как показательную функцию аргумента y.

Тогда получим $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

б) $u'_x = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$; $u'_y = \dfrac{z}{y} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$; $u'_z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z \ln \dfrac{y}{x}$;

в) $u'_x = y^z \cdot x^{y^z - 1}$; $u'_y = x^{y^z} \cdot z \cdot y^{z-1} \cdot \ln x$; $u'_z = x^{y^z} \ln xy^2 \cdot \ln y$;

г) $u'_x = x^{y-1} \cdot y^{z+1} \cdot z^x + x^y y^z z^x \ln z$; $u'_y = x^y \ln xy^z z^x + x^y y^{z-1} \cdot z^{x+1}$;

$$u'_z = x^y \cdot y^z \cdot \ln y \cdot z^x + x^{y+1} \cdot y^z \cdot z^{x-1}.$$

5. Доказать, что функция $z = x^y \cdot y^x$ удовлетворяет соотношению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z) \cdot z.$$

6. Доказать, что функция $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ удовлетворяет соотношению $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

7. Найти скорость изменения функции $z = x^3 + y^2$ в точке $(1,1)$ в зависимости от изменения каждой из переменных x и y.

Ответ: скорость изменения по x равна 3, по y равна 2.

8. Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка функции: $z = \varphi(u, \upsilon)$, где $u = x^2 + y^2$, $\upsilon = x \cdot y$.

Решение. Данную задачу решим двумя способами.

Первый способ:

1) Найдем частные производные и полный дифференциал первого порядка. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 2y + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} x .$$

Тогда $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2\frac{\partial z}{\partial u}(xdx + ydy) + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}(ydx + xdy)$.

2) Найдем частные производные и полный дифференциал второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} 2x + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) 2x + 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\right) \cdot y + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot 0 =$$

$$= 2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \upsilon} y\right) + 2\frac{\partial z}{\partial u} + y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2 \partial \upsilon} \cdot 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2} y\right).$$

Так как смешанные производные равны между собой, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \upsilon} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u} .$$

Таким же образом находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot x\right) = 2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2y) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x) = 2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} 2y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \upsilon} x\right) + 2\frac{\partial z}{\partial u} + x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon \partial u} \cdot 2y + \frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2} x\right) + \frac{\partial z}{\partial \upsilon} \cdot 0 =$$

$$=4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial \upsilon}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2}+2\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Смешанная производная имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}y\right)=2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(2x)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y)=2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2y+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial \upsilon}x\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 0+y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2}x\right)+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot 1,$$

то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2x^2+2y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial \upsilon}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}.$$

Тогда полный дифференциал имеет вид

$$\partial^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

где $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ определены выше.

Второй способ.

Находим непосредственно полные дифференциалы первого и второго порядков. Используя свойство инвариантности формы первого дифференциала, получим

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}d\upsilon=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 2(xdx+ydy)+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}(ydx+xdy)$$

$$\partial^2 z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial u}2(xdx+ydy)+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}(ydx+xdy)\right)=2(xdx+ydy)d\frac{\partial z}{\partial u}+$$

$$+2\frac{\partial z}{\partial u}d(xdx+ydy)+(ydx+xdy)d\frac{\partial z}{\partial \upsilon}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}d(ydx+xdy)=$$

$$=2(xdx+ydy)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2(xdx+ydy)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial \upsilon}(ydx+xdy)\right]+2\frac{\partial z}{\partial u}(dx^2+dy^2)+$$

$$+(ydx+xdy)\cdot\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon\partial u}\cdot 2(xdx+ydy)+\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2}(ydx+xdy)\right]+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}2dxdy.$$

Группируя выражения, стоящие при dx^2, $dxdy$ и dy^2, получим $\partial^2 z$.

16.6. Дифференцируемость функции нескольких переменных

1. Установить, дифференцируема ли функция $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $O(0,0,0)$.

Решение. Находим частные производные данной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Полученные формулы в точке $O(0,0,0)$ не имеют смысла. Более того, частные производные функции $u(x,y,z)$ в этой точке не существуют. Действительно, $u(x,y,z)=\sqrt{x^2}=|x|$, а

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(0,\Delta x,0,0)-u(0,0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Значит, частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в точке $O(0,0,0)$ не существует.

Таким же образом показываем, что частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в точке $O(0,0,0)$ также не существуют. Это означает, что функция $u(x,y,z)$ не дифференцируема в точке $O(0,0,0)$ (не существуют частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в $O(0,0,0)$.

Отметим, что функция $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ непрерывна в точке $O(0,0,0)$ ($\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\Delta u=0$), но не дифференцируема в этой точке. Это показывает, что непрерывность является только необходимым условием дифференцируемости, а не достаточным.

2. Для функции $u(x,y)$ найти частные производные в точке $O(0,0)$ и установить дифференцируема ли $u(x,y)$ в точке $O(0,0)$, если:

а) $u=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $u=\sqrt{x^4+y^4}$; в) $u=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

г) $u=\sqrt[4]{x^4+y^4}$; д) $u=\sqrt[3]{x^4+y^4}$; е) $u=\sqrt[3]{xy}$;

ж) $u=\sqrt[3]{x}\sin y$; з) $u=\sqrt[3]{y}\cdot \mathrm{tg}x$.

Ответы:

а) частные производные $\frac{\partial u(0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(0)}{\partial y}$ не существуют, функция $u(x,y)$ не дифференцируема;

б) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=0$ и $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$;

в) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=1$, но $u(x,y)$ не дифференцируема в точке $O(0,0)$;

г) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(0)}{\partial y}$ не существуют, функция $u(x,y)$ не дифференцируема в точке $O(0,0)$;

д) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=0$; $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$;

е) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=0$, но $u(x,y)$ не дифференцируема в точке $O(0,0)$;

ж) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=0$, $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$;

з) $\frac{\partial u(0)}{\partial x}=\frac{\partial u(0)}{\partial y}=0$, $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

16.7. Дифференциал функции нескольких переменных. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Найти полный дифференциал функции $u=x^2+y^2+z^2+2$ по определению.

Решение. Для решения данной задачи находим полное приращение функции в произвольной точке $M(x,y,z)$.

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-u(x,y,z)=$$

$$=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2+(z+\Delta z)^2+2-(x^2+y^2+z^2+2)=$$

$$=(x+\Delta x)^2-x^2+(y+\Delta y)^2-y^2+(z+\Delta z)^2-z^2=$$

$$=(2x+\Delta x)\cdot\Delta x+(2y+\Delta y)\cdot\Delta y+(2z+\Delta z)\cdot\Delta z=$$

$$=2x\cdot\Delta x+2y\cdot\Delta y+2z\cdot\Delta z+(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2).$$

Тогда главная линейная часть полного приращения $2x\cdot\Delta x+2y\cdot\Delta y+2z\cdot\Delta z$ будет определять полный дифференциал, т.е.

$$du=2xdx+2ydy+2zdz\,.$$

2. Найти полный дифференциал функции $u=x^{y^2z}$.

Решение. Полный дифференциал функции трех переменных определяем по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\,.$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z\cdot x^{y^2z-1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\cdot\ln x\cdot 2yz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2zx}\cdot\ln x\cdot y^2$,

тогда искомый дифференциал равен

$$du=y^2\cdot z\cdot z^{y^2z-1}dx+2yzx^{y^2z}\ln xdy+y^2x^{y^2z}\ln xdz\,.$$

3. Найти дифференциал второго порядка функции $z=e^{x-y^2}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-y^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2ye^{x-y^2}.$$

Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-y^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2ye^{x-y^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{x-y^2}(1-2y^2),$$

тогда

$$d^2z=e^{x-y^2}dx^2-4ye^{x-y^2}dxdy+2e^{x-y^2}(2y^2-1)dy^2.$$

4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, если $u=(x^2+y^2)^2$.

Решение. Находим частные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3+4xy^2;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4x^2y+4y^3.$$

Находим частные производные второго порядка (смешанные):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3+4xy^2)=8xy\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y+4y^3)=8xy\,.$$

Что и требовалось доказать.

5. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=x^2-y^2$, где $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=2x\cos v-2y\sin v=2u\cos^2 v-2u\sin^2 v=2u\cos 2v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=-2xu\sin v-2yu\cos v=-2u^2\sin 2v,$$

тогда полный дифференциал имеет вид

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=2u\cos 2vdu-2u^2\sin 2vdv.$$

16.8. Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-y^2$ в точке $M_0(2,1,3)$. Найти направляющие косинусы нормали.

Решение. Методом сечения устанавливаем, что данная поверхность – гиперболический параболоид. Так как

$$z'_x=2x;\;\; z'(2;1)=4;\;\; z'_y=-2y;\;\; z(2;1)=-2$$

Тогда уравнение касательной плоскости и нормали (прямая) соответственно имеют вид

$4(x-2)-2(y-1)-(z-3)=0$ – уравнение касательной плоскости;

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$ – уравнение нормали.

Направляющие косинусы нормали равны

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{1^2+4^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{21}};\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{21}};\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{21}}$$

2. К поверхности $x^2+y^2+z^2=24$ провести касательную плоскость, параллельную заданной $x-4y+z=0$.

Решение. Пусть точка касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$. По условию задачи данная точка не задана, поэтому ее нужно найти. Так как $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-24$, тогда $F'_x=2x;\; F'_y=4y;\; F'_z=2z$, а искомая касательная плоскость (в точке M_0) – определяется уравнением

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

или

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Из условия параллельности плоскостей получим

$$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{-4}=\frac{z_0}{1}=k \quad \text{или} \quad x_0=k;\ \ y_0=-2k;\ \ z_0=k\,.$$

Подставляя значения x_0, y_0 и z_0 в уравнение поверхности (точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на данной поверхности), находим значение k:

$$k^2+4k^2+k^2=24 \ \text{ или } \ k^2=4, \text{т.е. } \ k=\pm 2\,.$$

Так как $k=\pm 2$ (два значения), то имеем две касательные плоскости. Если $k=2$, тогда $2(x-2)+4(y+4)+2(z-2)=0$ или $x+2y+z+4=0$ – уравнение касательной плоскости.

Если $k=-2$, имеем вторую касательную плоскость:

$$-2(x+2)-4(y-4)-2(z+2)=0 \quad \text{или} \quad x+2y+z-4=0\,.$$

3. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=4t \end{cases} \quad \text{в точке } M_0, \text{ если } t_0=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Определим координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$x_0=1;\ \ y_0=1;\ \ z_0=\pi\,.$$

Находим производные функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и их значения в точке $M_0(1{,}1,\frac{\pi}{4})$, получим

$$\begin{aligned} x'_t&=-\sqrt{2}\sin t; & x'_t(t_0)&=-1; \\ y'_t&=\sqrt{2}\cos t; & y'_t(t_0)&=1; \\ z'_t&=4 & z'_t(t_0)&=4 \end{aligned}$$

Тогда уравнения касательной прямой и уравнение нормальной плоскости соответственно имеют вид

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\pi}{1}$$

$$-1(x-1)+(y-1)\cdot 1+1\cdot(z-\pi)=0 \quad \text{или} \quad x-y-4z+4\pi=0\,.$$

4. Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к заданным поверхностям в указанных точках:

1) $z=x\cdot y$ в точке $M(1{,}1,-1)$;

2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$ в точке $M(5,-4,3)$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$;

4) $x^3+y^3+z^3+xyz=6$ в точке $M(1,2,-1)$;

5) $xy^2+z^3=12$ в точке $M(1,2,2)$.

Ответы: 1) $x+y-z-1=0;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$;

2) $12x-15y-20z-60=0;\ \dfrac{x-5}{12}=\dfrac{y+4}{-15}=\dfrac{z-3}{-20}$;

3) $\dfrac{a^2}{x_0}(x-x_0)-\dfrac{b^2}{y_0}(y-y_0)-\dfrac{c^2}{z_0}(z-z_0)=0;\quad \dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=1$;

4) $x+11y+5z-18=0;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}$;

5) $x+y+3z=9;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{3}$.

5. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии в точке:

1) $x=t;\ y=t^2;\ z=t^2;\ t=-1$;

2) $x=z;\ y=x=z^2$ в точке $M(-1,1,-1)$.

Ответы:

1) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{x+1}{3};\quad x-2y+3z+6=0$;

2) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1};\quad x-2y+z+4=0$.

6. На линии $x=t^3,\ y=t^2-2t;\ z=t^2+2t$ найдите точки, в которых касательная прямая параллельна плоскости $2x-3y-3z+5=0$.

Ответ: $O(0,0,0),\ M(8,0,8)$.

Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции

7. Исследовать на экстремумы функцию

$$z=(y-x)^2+(y+2)^3.$$

Решение. Определим критические точки данной функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2(y-x) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(y-x) + 3(y+2)^2. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $x=-2$; $y=-2$, т.е. точку $M_0(-2,-2)$. Проверим достаточные условия экстремума в этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2;\ A=2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2;\ B=-2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2+6(y+2);\ C=2;\ AC-B^2=0$$

Так как $AC-B^2=0$, то в этом случае для решения вопроса об экстремуме функции z нужны дополнительные исследования. Учитывая, что $z(-2,-2)=0$, то достаточно исследовать знак функции z в окрестности точки $M_0(-2,-2)$.

Исследуем знак функции z вдоль прямой $y=x$ (первое слагаемое в функции z в этом случае равно 0). Знак функции z определяется знаком слагаемого $(y+2)^3$. Так, если $y<-2$, то $(y+2)^3<0$; если $y>-2$, то $(y+2)^3>0$. Таким образом, в любой окрестности точки $M_0(-2,-2)$ есть как положительные, так и отрицательные значения функции, т.е. функция сохраняет определенный знак. В точке $M_0(-2,-2)$ функция экстремума не имеет.

8. Исследовать на экстремум

1) $z = x^3y^2 \cdot (6-x-y)$;

2) $z = x^3 + y^3 - 3axy$;

3) $z = x \cdot e^{y + x\sin y}$;

4) $z = x^2 - 2xy + y^4 - y^5$;

5) $z = 2 + (x-y)^2 + (y-1)^4$.

Ответы:

1) максимум (3; 2);

2) минимум (a, a) при $a>0$, максимум (a, a) при $a<0$;

3) экстремума нет;

4) в точке (0,0) нужны дополнительные исследования. Экстремума нет;

5) в точке (1, 1) нужны дополнительные исследования. Минимум.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ в области D: $x+y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (рис. 42).

Решение.

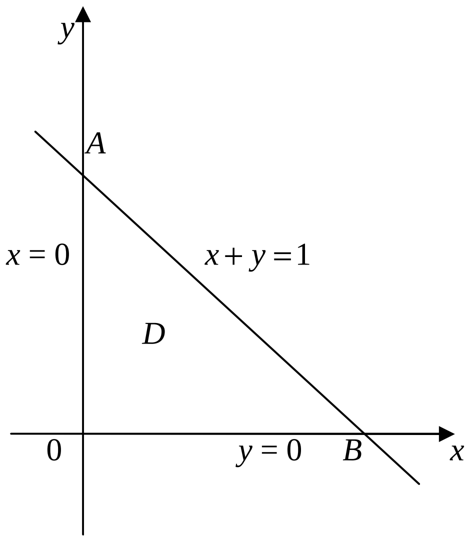

Рис. 42

1. На плоскости xOy построим область D.

2. Найдем критические точки функции $f(x,y)$ в области D.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+1=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \qquad M_0\left(-\frac{1}{2},0\right).$$

Точка $M_0\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ не принадлежит области D.

3. Исследуем на наибольшее и наименьшее значение функцию $f(x,y)$ на границе области D.

3.1. $OB: y=0;\ x\in[0;1]\ \ f(x,0)=x^2+x;\ \dfrac{df}{dx}=2x+1;\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}.$

Следовательно, $f(x,0)$ не имеет критических точек на *OB*, т.к. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\notin[0,1]$. Найдем значение $f(x,0)$ на концах отрезка $[0,1]$, получим

$$f(0,0)=0,\ \ f(1,0)=2.$$

3.2. $AB:\ y+x=1;\ \ x\in[0,1];\ f(x,\ 1-x)=x^2+(1-x)^2+x;$

$$\frac{df}{dx}=2x-2(1-x)+1=4x-1;\ 4x-1=0;\ \ x=\frac{1}{4}.$$

Единственная критическая точка $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$; $f\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$. Найдем значение $f(x,x-1)$ на концах отрезка $[0,1]$, получим

$$f(0,\,0)=0;\ \ f(0,1)=1.$$

3.3. $AO: x=0;\ \ y\in[0,1];\ \ f(0,y)=y^2;\ \dfrac{df}{dy}=2y=0.$

Критическая точка $(0,0)$: $f(0,0)=0$, а $f(0,1)=1$.

4. Сравнивая значения функции в полученных точках, имеем

$$\max_D\ f(x,y)=f(1,0)=2;\ \ \min_D\ f(x,y)=f(0,0)=0.$$

МОДУЛЬ 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятие неопределенного интеграла

1.1. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл

Раньше мы уже познакомились с тем фактом, что математические действия (операции) встречаются попарно, образуя пары двух взаимообратных действий: сложение и вычитание (+, –), умножение и деление (×, :). Характеристики функций так же как действия (операции) распределяются попарно: на прямые и обратные. Так, если задана функция $f(x)$, то, чтобы найти для функции $f(x)$ обратную функцию $\varphi(x)$, надо в равенстве $y = f(x)$ поменять местами буквы y и x, $x = f(y)$, затем решить полученное уравнение относительно y, $y = \varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ будет обратной для $f(x)$. Например, функции $f(x) = x^2 + 4$ и $\varphi(x) = \sqrt{x-4}$; $f(x) = e^x$ и $\varphi(x) = \ln x$; $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = \arcsin x$ – обратные функции.

Отметим, что в то время как прямые действия (операции) почти всегда однозначные, действия (операции) обратные чаще всего многозначные.

Определение. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на отрезке $[ab]$, причем функция $F(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), непрерывна на отрезке $[ab]$ и для любого $x \in (ab)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \qquad (1)$$

то функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$.

Таким образом, дифференциальное исчисление имеет своей основной задачей следующую прямую задачу: по заданной функции $f(x)$ найти (вывести) ее производную $F(x)$. Эту задачу можно символически записать в виде

$$f(x) \to F(x).$$

Эту задачу дифференциальное исчисление решает с помощью своего основного действия: дифференцирования (нахождения производной).

Интегральное исчисление имеет своей основной задачей следующую обратную задачу: по заданной производной $F(x)$ требуется найти функцию $f(x)$. Эту задачу символически можно записать в виде

$$f(x) \leftarrow F(x).$$

Интегральное исчисление решает эту задачу с помощью своего основного действия – интегрирования – операции нахождения первообразной для заданной функции.

Следовательно, действие интегрирования обратно действию дифференцирования. Действительно, действие (операция) дифференцирование есть действие прямое и однозначное, т.к. непрерывная функция $f(x)$ не может иметь двух различных производных $F(x)$.

Интегрирование же есть действие (операция) обратное, и подобно большинству обратных действий, оно есть действие многозначное, дающее для заданной функции не один результат, а бесчисленное множество.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (ab), то для всех $x \in (ab)$ справедливо равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \tag{1}$$

где C – постоянная.

Доказательство. Пусть $\phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. По определению первообразной и в силу условий теоремы для всех $x \in (ab)$ выполняются равенства

$$F_2'(x) = f(x), \quad F_1'(x) = f(x).$$

откуда имеем, что функция $\phi(x)$ дифференцируема на интервале (ab) и для любого $x \in (ab)$ имеет место равенство

$$\phi'(x) = 0 \tag{2}$$

С другой стороны, применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему о среднем Лагранжа, имеем

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \phi'(c), \; c \in (x_1, x_2)$$

и в силу (2) имеем, что $\phi'(c) = 0$, а отсюда следует, что $\phi(x) = C$, а значит и $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Таким образом, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется не однозначно, а с точностью до постоянной. Что и требовалось доказать.

Отметим, чтобы из множества (совокупности) первообразных $F(x)$ выбрать одну $F_1(x)$ достаточно указать точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую графику функции $y = F_1(x)$.

Замечание. Так как производная функции $y = F(x)$ угловой коэффициент к соответствующему графику. Следовательно, задачу нахождения первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$ можно интерпретировать так: требуется найти кривую $y = F(x)$, для которой имел бы место заданный закон изменения углового коэффициента касательной $tg\alpha = f(x)$. Если $y = F(x)$ есть одна из таких кривых, то все остальные можно получить сдвигом вдоль оси y на произвольную постоянную (рис. 1).

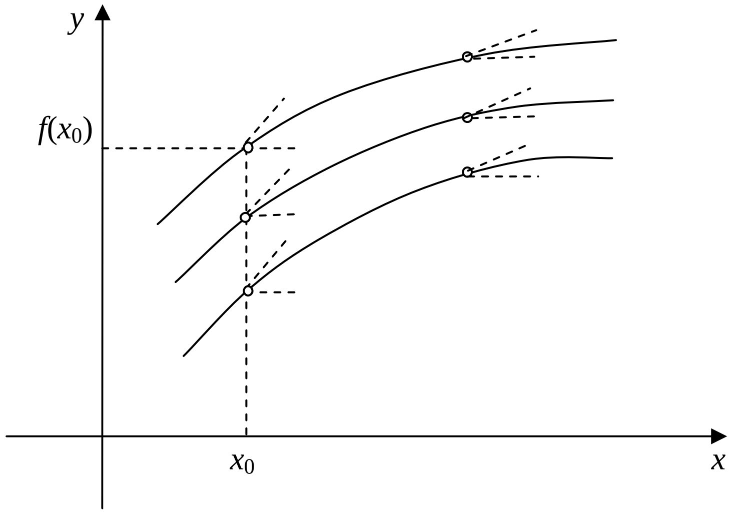

Рис. 1

Понятие неопределенного интеграла. Совокупность (множество) всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке (ab) называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке (ab), обозначают символом $\int f(x)dx$ и записывают

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке (ab), C – произвольная постоянная. Знак $\int$ называют знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют интегрированием.

Из определения неопределенного интеграла имеем:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$, т.е. знаки d и $\int$, когда первый помещен перед вторым, взаимно сокращаются (уничтожаются).

2. Так как $F(x)$ есть первообразная функции для $F'(x)$, то имеем

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

что можно записать так

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Отсюда следует, что знаки d и $\int$, стоящие перед $F(x)$ сокращаются и тогда, когда d стоит после $\int$, но только к $F(x)$ следует прибавить произвольную постоянную.

1.2. Таблица неопределенных интегралов

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производной будет $f(x)$, приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Используя таблицу производных функций, можно составить следующую таблицу интегралов:

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int 1dx = \int dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$;

6. $\int e^x dx = e^x + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a > 0$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.a > 0$;

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, a \neq 0$.

1.3. Свойства неопределенного интеграла

1) Если c – const $(c \neq 0)$, то

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx, \qquad (1)$$

т.е. постоянный множитель можно выносить из под знака интеграла.

Доказательство. Равенство (1) – это равенство двух первообразных, поэтому для доказательства его достаточно показать, что они имеют равные производные. Дифференцируя левую и правую часть равенства (1) получим

$$(\int cf(x)dx)' = cf(x)$$

$$(c\int f(x)dx)' = c \cdot (\int f(x)dx)' = c \cdot f(x).$$

Откуда следует справедливость равенства (1).

2) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы интегралов равен алгебраической сумме неопределенных интегралов, т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (2)$$

Доказательство равенства проводим аналогично для свойства 1, используя правило производной суммы и определение неопределенного интеграла (первообразной).

Замечание. Относительно доказанных формул заметим следующее. Эти формулы содержат неопределенные интегралы и произвольные постоянные слагаемые. Равенства подобного типа понимают в следующем смысле: разность между правой и левой частями его есть постоянная или равенство с точностью до постоянной.

Эти равенства можно понимать и буквально, но тогда один из фигурирующих в них интегралов перестает быть произвольной первообразной: постоянная в нем устанавливается после выбора постоянных в других интегралах.

3) Если

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

4) Знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

5) Знак интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются (без учета постоянной c), если знак интеграла стоит перед знаком дифференциала.

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

6) Инвариантность формул интегрирования. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной: если

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C\,,$$

где $u = u(x)$ – дифференцируемая функция.

Доказательство. На основании свойства инвариантности формы дифференциала первого порядка имеем: $dF(x) = F'(x)dx$, то $dF(u) = F'(u)du$, где $u = u(x)$.

Тогда, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $F'(x) = f(x)$.

Докажем, что $\int f(u)du = F(u) + C$. Для этого найдем дифференциал от левой и правой частей последнего равенства:

$$d(\int f(u)du) = f(u)du \qquad d(F(u) + c) = F'(u)du = f(u)du\,.$$

Из равенств этих дифференциалов следует справедливость свойства 6.

§ 2. Основные методы интегрирования

2.1. Метод непосредственного интегрирования

Суть метода непосредственного интегрирования состоит в следующем: данный интеграл с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределенного интеграла приводится к табличному интегралу.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int (6x^2 - 3x + 2)dx$.

Решение. Используя свойства линейности для неопределенного интеграла, получим

$$I = \int (6x^2 - 3x + 2)dx = \int 6x^2 dx - \int 3x dx + 2\int dx = 6\int x^2 dx - 3\int x dx + 2\int dx =$$

$$= 6\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + c = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int(2x^2+1)^3dx$.

Решение.

$$I=\int(2x^2+1)^3dx=\int(8x^6+12x^4+6x^2+1)dx=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int(\sqrt{x}+1)^2dx$.

Решение. $I=\int(\sqrt{x}+1)^2dx=\int(x+2\sqrt{x}+1)dx=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$.

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx=\int\left(\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int x+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}dx=\int\left(e^{2x}-e^x+1-e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+e^{-x}+C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{ax+b}{cx+d}dx$.

Решение. Подынтегральное выражение представим в виде (разделив числитель на знаменатель)

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}.$$

Тогда искомый интеграл

$$I=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{c}\ln|cx+d|+C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $I=\int\frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx=\int\frac{(2x-5)(x+1)+6}{x+1}dx=\int(2x-5)dx+6\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=x^2-5x+6\ln|x+1|+C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

Решение. Так как справедливо равенство

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(a-b)}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(a-b)}\cdot\left[\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right],$$

то

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\left[\int\frac{dx}{x+b}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{a-b}\Big[\ln|x+b|-\ln|x+a|\Big]+C=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $I=\int\cos^2 mxdx$.

Решение. $I=\int\cos^2 mxdx=\left|1+\cos 2mx=2\cos^2 mx\right|=$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2mx)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C.$$

2.2. Метод «подведения под знак дифференциала»

Суть метода интегрирования, основанного на «подведении под знак дифференциала» базируется на установленном выше свойстве 6 неопределенных интегралов: если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то будет справедливо равенство $\int f(u)du=F(u)+C$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int (x+3)^5 dx$.

Решение. $I=\int (x+3)^5 dx = \left| d(x+3)=dx \right| = \int (x+3)^5 d(x+3) =$

$$=\int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C=\frac{(x+3)^6}{6}+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int (3x+5)^7 dx$.

Решение. $I=\int (3x+5)^7 dx = \left| d(3x+5)=3dx \right| = \frac{1}{3}\int (3x+5)^7 d(3x+5) =$

$$=\frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\frac{t^8}{8}+C=\frac{1}{24}(3x+5)^8+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=-\int \mathrm{tg}x dx$.

Решение.

$$I=-\int \mathrm{tg}x dx=-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{d\cos x}{\cos x}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\cos x|+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx=\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+\int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=-\int \frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\int \frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2\mathrm{tg}^2 x+b^2}=\int \frac{d\mathrm{tg}x}{a^2\mathrm{tg}^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\mathrm{arctg}\frac{a\mathrm{tg}x}{b}+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I=\int \operatorname{tg}\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

Решение. $I=\int \operatorname{tg}\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}=-\int \operatorname{tg}\frac{1}{x}d\frac{1}{x}=-\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=\int\frac{d\cos\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}=\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|+C$.

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int e^{-x^2}xdx$.

Решение. $I=\int e^{-x^2}xdx=\left|d(-x^2)=-2xdx\right|=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=\frac{e^{-x^2}}{-2}+C$.

Пример 8. Вычислить интеграл $I=\int\cos(\ln x)\frac{dx}{x}$.

Решение. $I=\int\cos(\ln x)\frac{dx}{x}=\left|d\ln x=\frac{dx}{x}\right|=\int\cos(\ln x)d\ln x=\sin(\ln x)+C$.

Пример 9. Вычислить интеграл $I=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}}$.

Решение. $I=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}}=\int\frac{de^x}{\sqrt{(e^x)^2+5}}=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+5}\right)+C$.

Пример 10. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$.

Решение. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}=\left|d\ln x=\frac{dx}{x}\right|=\int\frac{d\ln x}{\sqrt{3^2-\ln^2 x}}=\arcsin\frac{\ln x}{3}+C$.

Пример 11. Вычислить интеграл $I=\int x(x+5)^7dx$.

Решение.

$$I=\int x(x+5)^7dx=\int(x+5-5)(x+5)^7dx=\int(x+5)(x+5)^7dx-5\int(x+5)^7dx=$$

$$=\int(x+5)^8d(x+5)-5\int(x+5)^7d(x+5)=\frac{1}{8}(x+5)^9-\frac{5}{8}(x+5)^8+C.$$

Замечание. Если подынтегральная функция является дробью, числитель которой равен производной знаменателя, то искомый интеграл равен логарифму модуля знаменателя, т.е.

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $I=\int\frac{3x^2+2}{x^3+2x+10}dx.$

Решение. $I=\int\frac{3x^2+2}{x^3+2x+10}dx=\left|d(x^3+2x+10)=(3x^2+2)dx\right|=$

$$=\int\frac{d(x^3+2x+10)}{x^3+2x+10}=\ln\left|x^3+2x+10\right|+C.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}.$

Решение. $I=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{\cos^2\mathrm{tg}x}=\int\frac{d\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x}=\ln\left|\mathrm{tg}x\right|+C.$

или другим способом – данный интеграл вычислим следующим образом

$$I=\int\frac{1\cdot dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\sin^2 xdx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}+$$

$$+\int\frac{\cos xdx}{\sin x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}+\int\frac{d\sin x}{\sin x}=-\ln\left|\cos x\right|+\ln\left|\sin x\right|+C=\ln\left|\mathrm{tg}x\right|+C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $I=\int\frac{(\ln x-3)dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

Решение. $I=\int\frac{(\ln x-3)dx}{x\sqrt{\ln x}}=\int\frac{\ln xdx}{x\sqrt{\ln x}}-3\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx-3\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=$

$$=\int(\ln x)^{\frac{1}{2}}d\ln x-3\int(\ln x)^{-\frac{1}{2}}d\ln x=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}x-3\cdot 2\ln^{\frac{1}{2}}x+C=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}x-6\ln^{\frac{1}{2}}x+C.$$

Пример 15. Вычислить интеграл $I=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}.$

Решение.

$$I=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{(\sin x-\cos x)^{\frac{1}{3}}}=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

2.3. Метод замены переменной или подстановки

Рассмотрим один из сильнейших методов интегрирования – метод замены переменной или подстановки.

Теорема 1. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на $[t_1, t_2]$, а множество $[x_1, x_2]$ – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Если на $[x_1, x_2]$ $f(x)$ имеет первообразную, то для любого $t \in [t_1, t_2]$ справедлива формула

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) – формула замены переменной в неопределенном интеграле. Суть метода замены переменной в неопределенном интеграле состоит в следующем: интеграл, стоящий в правой части формулы (1) получаем «проще» или табличного вида, чем интеграл, стоящий в левой части.

Доказательство. Равенство (1) – равенство двух первообразных, поэтому, дифференцируя обе части (1), получим

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx = |x = \varphi(t)| = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

$$d(\int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt) = f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t))dt$$

Из последних равенств следует справедливость формулы (1).

Замечание. Если известен интеграл в правой части формулы (1), т.е.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C.$$

Тогда искомый интеграл – как функция от *x* находим следующим образом: уравнение $x = \varphi(t)$ решают относительно *t*, т.е. $t = \varphi^{-1}(x)$, получим

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(t)) + C.$$

Замечание. При интегрировании методом замены переменной очень важно удачно найти соответствующую подстановку, т.к. не существует общих правил выбора замены переменной для интегрирования любой функции. Умение находить выгодные подстановки можно достичь практикой.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int x \cdot \sqrt{x-3}dx$.

Решение. $I = \int x\sqrt{x-3}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x-3} = t \\ x = t^2 + 3 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2tdt = \int (2t^4 + 6t^2)dt =$

$$= 2\frac{t^5}{5} + \frac{6}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 3(x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. $$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \\ \sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\end{array}\right|=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=-\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение.

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos tdt \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\end{array}\right|=a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\left|t=\arcsin\frac{x}{a}\right|=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\sin 2(\arcsin\frac{x}{a})=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\sin(\arcsin\frac{x}{a})\cdot\cos(\arcsin\frac{x}{a})=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\left|\begin{array}{c} x=a\cos^2 t+b\sin^2 t \\ x-a=(b-a)\sin^2 t \\ b-x=(b-a)\cos^2 t \\ dx=2(b-a)\sin t\cos tdt\end{array}\right|=2\int dt=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=\left|\begin{array}{l}x+1=t^2\\ x=t^2-1\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=2t-2\ln|t+1|+c=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение.

$$I=\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\left|\begin{array}{c}x=\mathrm{tg}t\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\\ 1+x^2=1+\mathrm{tg}^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{tg}^2t\cos^4 tdt}{\cos^2 t}=\int\sin^2 tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{4}\sin 2\mathrm{arctg}t+C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

Решение.

$$I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\left|\begin{array}{l}x=a\cos 2t\\ dx=-2a\sin 2tdt\\ \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\dfrac{a(1+\cos 2t)}{a(1-\cos 2t)}}=\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=\dfrac{\cos t}{\sin t}\end{array}\right|=-4a\int\cos^2 t=$$

$$=-2a\int(1+\cos 2t)dt=-2at-2a\int\cos 2tdt=-2at-a\sin 2t+C=$$

$$=-a\left[\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C.$$

Пример 8. Вычислить интегралы:

8.1. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, применяя подстановку $x=\frac{1}{t}$.

Ответ: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$.

8.2. $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$, применяя подстановку $x=-\ln t$.

Ответ: $I=-\ln(1+e^{-x})+C$.

8.3. $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$, применяя подстановку $t=\sqrt{x+1}$.

Ответ: $I=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$.

8.4. $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, применяя подстановку $x=\frac{1}{t}$.

Ответ. $I=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$.

8.5. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$, применяя подстановку $x=\sin^2 t$.

Ответ. $I=2\arcsin\sqrt{x}+C$.

2.4. Метод интегрирования по частям

К числу эффективных методов интегрирования относится метод интегрирования по частям. Основывается этот метод на следующей теореме.

Теорема 1. Если каждая из функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$ дифференцируема на множестве x и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $\upsilon(x)\cdot u'(x)$, тогда на множестве x существует первообразная и для функции $\upsilon(x)\cdot u'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)\cdot\upsilon'(x)dx=u(x)\upsilon(x)-\int\upsilon(x)u'dx. \qquad (1)$$

Замечание. Определение дифференциала первого порядка и свойство инвариантности его формы позволяет записать формулу (1) в виде

$$\int ud\upsilon=u\cdot\upsilon-\int\upsilon du. \qquad (2)$$

Доказательство. Для функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$ запишем формулу для производной произведения двух функций

$$(u(x)\cdot\upsilon(x))' = u(x)\cdot\upsilon'(x) + u'(x)\cdot\upsilon(x). \qquad (3)$$

Интегрируя обе части равенства (3) и, учитывая, что для всех $x\in X$ существует $\int \upsilon(x)u'(x)dx$ и $\int (u'(x)\upsilon(x))'dx = u(x)\cdot\upsilon(x)+C$, то для всех x из множества X существует и интеграл $\int u(x)\upsilon'(x)dx$, причем справедливы формулы (1) и (2) – формулы интегрирования по частям.

Суть метода интегрирования по частям состоит в следующем: интеграл, стоящий в правой части равенства (2) табличный, «проще» или совпадающий с интегралом, стоящим в левой части равенства (2).

Для применения метода интегрирования по частям, в конкретном случае, требуется уметь разбить заданное подынтегральное выражение на два множителя – u и $d\upsilon$. Общих правил для этого, к сожалению, нельзя дать, кроме:

а) dx всегда должен быть частью $d\upsilon$;

б) надо уметь интегрировать $d\upsilon$ (т.е. находить υ);

в) если подынтегральное выражение есть произведение двух функций, тогда наиболее сложный множитель надо рассматривать как часть $d\upsilon$.

Практика интегрирования показывает, что значительная часть интегралов, берущихся посредством интегрирования по частям, может быть разбита на следующие группы:

1. К первой группе относятся интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $(\mathrm{arctg}\,x)^2$, $\ln\varphi(x)$. Для вычисления интегралов первой группы выбирают в качестве $u(x)$ одну из указанных выше функций.

2. Ко второй группе относятся интегралы вида

$$\int (ax+b)^n \cos mx dx, \qquad \int (ax+b)^n \sin mx dx, \qquad \int (ax+b)^n e^{kx} dx,$$

где a, b, k – некоторые постоянные, n – целое положительное число.

Интегралы второй группы берутся путем n-кратного применения формулы интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ всякий раз следует брать $(ax + b)$ в соответствующей степени. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.

3. К третьей группе относятся интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin bx dx, \ \int e^{ax} bx dx, \ \int \sin(\ln x) dx.$$

Обозначая любой из интегралов этой группы через I и дважды интегрируя по частям, получим уравнение первого порядка относительно I, решая которое, находим I, а, следовательно, и искомый интеграл.

Замечание. Повторное применение формулы (2) позволяет получить обобщенную формулу интегрирования по частям: если функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ имеют непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно $u', \upsilon', u'', ..., u^{(n)}, \upsilon^{(n)}, u^{(n+1)}, \upsilon^{(n+1)}$, то

$$\int u\upsilon^{(n+1)}dx = u\upsilon^{(n)} - u'\upsilon^{(n-1)} + u''\upsilon^{(n-2)} + ... + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}\upsilon dx. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $n = 1$, получим

$$\int u\upsilon'' dx = u\upsilon' - u'\upsilon + \int u'\upsilon dx \qquad (5)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int x\cos x dx$.

Решение.

$$I = \int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x; du = dx \\ d\upsilon = \cos x dx; \upsilon = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int x^2 \ln x dx$.

Решение.

$$I = \int x^2 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; du = \dfrac{dx}{x} \\ d\upsilon = x^2 dx; \upsilon = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int \arcsin x dx$.

Решение.

$$I = \int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x; du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ d\upsilon = dx; \upsilon = x \end{matrix} \right| = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение.

$$I=\int x\operatorname{arctg}x dx=\left|\begin{matrix}u=\operatorname{arctg}x; du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ d\upsilon=xdx; \upsilon=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x d\operatorname{tg}x=\left|\begin{matrix}u=x; du=dx\\ d\upsilon=d\operatorname{tg}x; \upsilon=\operatorname{tg}x\end{matrix}\right|=x\operatorname{tg}x-\int\operatorname{tg}x dx=$$

$$=x\operatorname{tg}x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=x\operatorname{tg}x+\int\frac{d\cos x}{\cos x}=x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$$

§3. Интегрирование рациональных функций

3.1. Понятие о рациональных функциях

Рациональная функция – функция вида

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены степени n и m (n и m – целые неотрицательные числа).

Рациональная функция называется правильной рациональной функцией, если $n<m$. Если $n\geq m$, то рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{N(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен степени $(n-m)$, многочлен $N(x)$ степени меньше, чем m. Такое представление однозначно и обычно находится с помощью непосредственного деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ «уголком». Многочлены $M(x)$, $N(x)$ можно найти из формулы

$$P(x)=M(x)\cdot Q(x)+N(x)$$

методом неопределенных коэффициентов.

Правильную рациональную функцию можно разложить на простейшие дроби, т.е. представить в виде конечной суммы многочлена и простейших дробей.

Корнем многочлена $P_n(x)$ называется такое число x_0 переменной x, при котором $P_n(x_0)=0$.

Если x_1 – корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $(x-x_1)$, т.е. $P_n(x)=(x-x_1)\cdot P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$.

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен n-ной степени ($n>0$) имеет, по крайней мере, один корень действительный или комплексный.

Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при x^n.

Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot...\cdot(x-x_p)^{k_p}\cdot(x^2-p_1x+q_1)^{S_1}\times$$

$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{S_2}\cdot...\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{S_m},$$

где все квадратичные трехчлены не имеют действительных корней ($D<0$), а $k_1+k_2+k_r+2(S_1+S_2+...+S_m)=n$.

3.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

К простейшим рациональным дробям относятся дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; **II**. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; **IV.** $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

где A, M, N, a, p, q – некоторые действительные числа, а квадратичный трехчлен в дробях III и IV типов не имеет действительных корней, т.е.

$$\frac{p^2}{4}-q<0 \quad \text{или} \quad q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Проинтегрируем простейшие дроби:

I. $I=\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot \ln|x-a|+C$.

II. $I=\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$.

Замечание. Найдем интеграл следующего вида

$$I=\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)= \\ =\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2 \\ D<0, \frac{p^2}{4}-q<0; q-\frac{p^2}{4}=m^2>0 \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Ш. $$I=\int \frac{(Mx+N)}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{p})}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{(2N-Mp)}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

IV. $$I=\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx=\left|\begin{array}{c} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2} \\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2 \\ D<0;\frac{p^2}{4}-q<0'q-\frac{p^2}{4}=m^2 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right)^n}=\frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{(1-n)}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{at}{(t^2+m^2)^n}$$

Оставшийся интеграл можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)I_{n-1}.$$

Этим исчерпывается вопрос об интегрировании простейших рациональных дробей.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx$.

Решение.

$$I=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx=\left|\begin{array}{l} d(x^2+2x+5)=(2x+2)dx \\ 2x+1=2(x+1)-1 \\ x^2+2x+5=(x+1)^2+2^2 \end{array}\right|=\int\frac{((2x+2)-1)1}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\int\frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+5}-\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

3.3. Разложение рациональной дроби на простейшие

Пусть дана рациональная дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые многочлены от x.

Если степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$, то разделим $P(x)$ на $Q(x)$ по правилам алгебры («уголком», используя тождественные преобразования) получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{F(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

где $T(x)$ и $F(x)$ – многочлены; при этом степень $F(x)$ будет ниже степени $Q(x)$.

Таким образом, интегрирование любой дроби (1) будет сводиться к интегрированию (2), т.е. интегрированию многочлена $T(x)$ и дроби $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. будем интегрировать только правильные дроби. Считаем, что многочлены $F(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты, т.е. не имеют общих множителей, содержащих x. Это не умоляет общности задачи, так как при наличии общих множителей у многочлена в $F(x)$ и $Q(x)$ – их сокращают.

1. Пусть правильная несократимая дробь $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ такова, что

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n), \tag{3}$$

знаменатель имеет простые действительные различные корни, тогда разложение дроби $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ имеет вид

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}\equiv\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}. \qquad (4)$$

Определим коэффициенты в разложении (4).

Первый способ. В правой части равенства (4) приводим к общему знаменателю и, учитывая, что знаменатели правой и левой части полученного тождества одинаковы, получим, что дроби будут равны, если будут одинаковы числители, т.е. получим тождество вида

$$F(x)\equiv A_1(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)+A_2(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+$$
$$+A_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}). \qquad (5)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в (5) получим совместимую систему n линейных уравнений с n неизвестными $A_1, A_2, ..., A_n$.

Решая полученную систему, находим $A_1, A_2, ..., A_n$ и, следовательно, разложение (4) рациональной дроби.

Второй способ. Этот способ называют метод частных значений.

Так как (5) – тождество, то, полагая в (5) последовательно $x=x_1$, $x=x_2,...,x=x_n$ находим соответственно $A_1, A_2, ..., A_n$, а, следовательно, и разложение (4).

Пример 1. Найти разложение дроби $\dfrac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ на простейшие и коэффициенты.

Решение. Данная дробь неправильная, т.к. степень числителя выше степени знаменателя, поэтому нужно выделить целую часть. Разделив числитель на знаменатель («уголком» или с помощью тождественных преобразований) получим

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}.$$

Разлагаем правильную дробь на простейшие

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1},$$

отсюда имеем

$$x+2 \equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Подставляя последовательно в обе части полученного тождества корни знаменателя $x = 0$, $x = 2$, $x = –1$, находим $A = –1$, $B=\frac{2}{3}$, $C=\frac{1}{3}$.

Тогда окончательно получим

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=(x+1)+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}.$$

Пример 2. Найти разложение дроби $\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$ на простейшие дроби и определить коэффициенты разложения.

Решение. Корнями знаменателя правильной дроби являются числа $x = –1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = –2$, следовательно $x^4-5x^2+4=(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$.

Поэтому разложение на простейшие дроби

$$\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}. \tag{6}$$

Приводя к общему знаменателю в правой части (6), приравнивая числители (6), имеем

$$x^2-x+2=A(x-1)(x+2)(x-2)+B(x+1)(x+2)(x-2)+$$

$$+C(x+1)(x-1)(x-2)+D(x+1)(x-1)(x+2).$$

После преобразований получим

$$x^2-x+2=x^3(A+B+C+D)+x^2(-A+B-2C+2D)+$$

$$+x(-4A-4B-C-D)+(4A-4B+2C-2D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим совместную систему четырех уравнений с четырьмя переменными

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ -A+B-2C+2D=1 \\ -4A-4B-C-D=-1 \\ 4A-4B+2C-2D=2 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим

$$A=\frac{2}{3};\quad B=-\frac{1}{3};\quad C=-\frac{2}{3};\quad D=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-2)}.$$

2. Пусть правильная несократимая дробь $\frac{F(x)}{Q(x)}$ такова, что

$$Q(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)....(x^2+p_nx+q_n) \tag{7}$$

знаменатель не имеет действительных корней, т.е. для всех n дискриминанты $x^2+p_nx+q_n$ отрицательны, тогда разложение дроби $\frac{F(x)}{Q(x)}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{Q(x)}&=\frac{F(x)}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)...(x^2+p_nx+q_n)}=\\&=\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+p_2x+q_2}+....+\frac{A_nx+B_n}{x^2+p_nx+q_n}.\end{aligned} \tag{8}$$

Для определения коэффициентов A_i и B_i $(i=\overline{1,n})$ в разложении (8) поступают следующим образом: приводят к общему знаменателю в правой части (8), то знаменатели этого тождества одинаковы, а, следовательно, и числители должны быть тождественно равны между собой. После приведения подобных в числителе правой части (8), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числителей полученного тождества, получим совместную систему линейных уравнений относительно A_i и B_i $(i=\overline{1,n})$. Решая ее, определим коэффициенты A_i и B_i $(i=\overline{1,n})$, а, следовательно, и разложение дроби (8) на простейшие.

Пример 3. Найти разложение дроби на простейшие $\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}$.

Решение. Знаменатель правильной дроби не имеет действительных корней, поэтому разложение на простейшие имеет вид

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть последнего тождества и приравнивая числители, получим тождество

$$3x^2+5x+12 \equiv (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D)$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим совместную систему

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=3 \\ A+3C=5 \\ B+3D=12 \end{cases},$$

решая которую, получим $A=-\dfrac{5}{2}$, $B=-\dfrac{3}{2}$, $C=\dfrac{5}{2}$, $D=\dfrac{9}{2}$.

А разложение будет иметь вид

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{5x+3}{x^2+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5x+9}{x^2+1}$$

3. Пусть правильная несократимая дробь $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ такова, что

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^k\dots(x-x_n)$$

знаменатель имеет действительные различные корни, среди которых имеются кратные корни, тогда разложение дроби $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^k\dots(x-x_n)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}+ \\ +\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\frac{B_3}{(x-x_2)^3}+\dots+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}+\dots+\frac{C}{x-x_n}\end{gathered} \tag{9}$$

Для определения коэффициентов в разложении (9) поступают аналогично, как в случае 2.

Пример 4. Найти разложение дроби на простейшие дроби $\dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$.

Решение. Данная дробь правильная, знаменатель которой имеет действительные корни, но среди них есть кратные $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$. Следовательно, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{D}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}.$$

После тождественных преобразований получим тождество

$$2x^2-3x+3\equiv(A+D)x^2+(-2A-D+B)x+A. \qquad (*)$$

Находить коэффициенты можно, как и выше, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая совместную систему уравнений.

Несколько проще можно определить коэффициенты A, D, B в тождестве (*), полагая $x_1=0,\ x_2=1$ (корни знаменателя), а x_3 – любое число. X = 0, тогда A = 3; x = 1, тогда B = 2; при x = 2 получим 5 = A + 2B + 2D или 2D = – 2, т.е. D = –1.

Тогда разложение имеет вид

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

4. Пусть правильная несократимая дробь $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ такова

$$Q(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^k...(x^2+p_nx+q_n),$$

что знаменатель имеет комплексные корни, среди которых есть кратные, тогда разложение дроби $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ имеет вид

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^k...(x^2+p_nx+q_n)}=$$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}++\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+... \qquad (10)$$

$$+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+p_2x+q_2)^k}+...+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+p_nx+q_n)^n}$$

Коэффициенты в разложении (10) определяем как в случае 3, т.е. решением совместной системы линейных уравнений.

Пример 5. Найти разложение дроби на простейшие дроби $\dfrac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}$.

Решение. Знаменатель данной дроби имеет два линейных корня $x = \pm i$ кратности 3. Поэтому разложение имеет вид

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} = \frac{A_1 x + B_1}{1+x^2} + \frac{A_2 x}{(1+x^2)^2} + \frac{A_3 x + B_2}{(1+x^2)^3}.$$

Используя один из рассмотренных методов определения коэффициентов, получим, что $A_0 = 0$, $B_1 = 1$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $A_3 = 0$, $B_2 = 3$, а, следовательно, разложение имеет вид

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Если правильная рациональная дробь $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ такова, что знаменатель $Q(x)$ имеет корни как действительные, так и комплексные, среди которых могут быть и кратные, то разложение дроби $\dfrac{F(x)}{Q(x)}$ на простейшие проводим, используя рассмотренные выше случаи $1 - 4$.

3.4. Интегрирование рациональных дробей

Для нахождения интеграла

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx, \tag{1}$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ многочлены с действительными коэффициентами степени m и n соответственно и $m < n$, то есть $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь, значит ее можно представить в виде суммы простых дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^s}, \quad k, s \in N, \; p^2 - 4q < 0. \tag{2}$$

Если $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – дробь неправильная $(m \ge n)$, то, разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}, \tag{3}$$

где $S(x)$ – многочлен (частное от деления $P_m(x)$ на $Q_n(x)$);

$R(x)$ – остаток от деления, причем $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ – правильная дробь.

Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ в равенстве (3).

Для интегрирования правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ используем разложения на простейшие рациональные дроби вида (2), рассмотренные в п. 3.3.

Рассмотрим примеры интегрирования рациональных функций.

Пример 1. Найти интеграл $I=\int\dfrac{x^4}{x^2-x+1}dx$.

Решение. Так как подынтегральная дробь неправильная, но, выполнив деление, получим

$$\frac{x^4}{x^2-x+1}=x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1}=x^2+x-\frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Тогда $I=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. Знаменатель подынтегральной дроби имеет две пары различных комплексных сопряженных корней, поэтому разложение имеет вид

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Откуда имеем тождество $1\equiv(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1)$.

Можно построить систему линейных уравнений и найти их решение (четыре уравнения и четыре неизвестных). Но удобнее применить метод частных значений с использованием комплексных чисел – корней знаменателя $x=\pm i,\quad x=\pm 2i$.

Полагая $x = i$, получим $3B + 3Ai = 1$, т.е. $A = 0$, $B=\dfrac{1}{3}$.

Полагая $x = 2i$, получим $-3E - 6Di = 1$, т.е. $D = 0$, $E+-\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, $I=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{dx}{x^2+1}-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{dx}{x^2+4}=\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}x-\dfrac{1}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{6}+C$.

Замечание 1. Рассмотренный пример разобран с точки зрения разложения на простейшие дроби для того, чтобы показать, что находить коэффициенты разложения можно, используя и множество комплексных чисел, и довольно успешно.

Замечание 2. Интегралы данного вида находят значительно проще, а именно

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)$$

откуда получаем табличные интегралы.

В некоторых случаях для вычисления интегралов от рациональной дроби целесообразно, вместо разложения ее на простейшие дроби применить другой метод – преобразование дроби, использование подходящей подстановки или метод интегрирования по частям.

Пример 3. Вычислить интегралы

3.1. $I_1=\int\frac{x^2}{(x-1)^5}dx$; 3.2. $I_2=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; 3.3. $I_3=\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

Решение.

3.1. $I_1=\int\frac{x^2}{(x-1)^5}dx=\int\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^5}dx=$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+C$$

3.2. $I_2=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

3.3. Так как $\frac{1}{x^4(1+x^2)}=\frac{1-x^4+x^4}{(1+x^2)x^4}=\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{1}{1+x^2}$.

Тогда $I_3=\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}=-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x}+\text{arctg}x+C$.

§ 4. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Суть интегрирования выражений, содержащих тригонометрические функции, состоит в следующем: с помощью подходящей замены переменной или подстановки интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции, приводятся к интегрированию рациональных или дробно-рациональных функций.

4.1. Интегрирование дифференциалов $R(\sin x,\ \cos x)dx$

Вычисление интегралов вида $I=\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Действительно, в силу того, что

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$x=2\operatorname{arg\,tg} t$: $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, тогда $R(\sin x,\ \cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, интегралы вида

$$I=\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}dt \tag{1}$$

всегда берутся в конечном виде.

Отметим, что если функция $R(\sin x,\ \cos x)$ линейная относительно $\sin x$ и $\cos x$ (содержит выражения $\sin x$ и $\cos x$ в первой степени), то универсальная тригонометрическая подстановка $(t=tg\frac{x}{2})$ приводит к эффективному вычислению интегралов вида (1). Если же функция $R(\sin x,\ \cos x)$ содержит выражения $\sin x$ и $\cos x$ в высоких степенях, то универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводит к слишком громоздким выкладкам, но всегда интегралы вида (1) берутся в конечном виде.

Пример 1. Найти интеграл $I=\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

Решение.

$$I=\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=\left|\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}: x=2\mathrm{arctg}\, t \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}: \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}: \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+\dfrac{2t}{1+t^2})\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2})}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t+1)dt}{t}=\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|)+C=\frac{\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{4}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right|}{2}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Используя универсальную тригонометрическую подстановку $(t=\mathrm{tg}\frac{x}{2})$, получим $I=\int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

Пример 3. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\cos x}$.

Решение. Этот интеграл можно найти, используя универсальную тригонометрическую подстановку $(t=\mathrm{tg}\frac{x}{2})$, или свести к нахождению интеграла в примере 2.

Действительно, $I=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}=\ln\left|tg(x+\frac{\pi}{2})\right|+C$.

Приведем другой способ вычисления интегралов $I=\int\frac{dx}{\sin x}$; $I=\int\frac{dx}{\cos x}$.

Пример 4. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. $I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$.

Ниже рассмотрим случаи вычисления интегралов, содержащих тригонометрические функции и дающих результаты эффективнее, чем использование универсальной тригонометрической подстановки. Предварительно сделаем следующие замечания из алгебры.

Замечание. Если целая или дробно-рациональная функция $R(u, g)$ не меняет своего значения при изменении знака одного из аргументов, например u, т.е., если $R(-u, g) = R(u, g)$, то она может быть приведена к виду $R(u, g) = R_1(u^2, g)$, содержащему лишь четные степени u.

Замечание. Если целая или дробно-рациональная функция $R(u, g)$ при изменении знака одного из аргументов также меняет знак, т.е., если $R(-u, g) = -R(u, g)$, то она приводится к виду $R(u, g) = R_2(u^2, g)\cdot g$; это следует из предыдущего замечания, если его применить к функции $\dfrac{R(u,g)}{u}$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int R(\sin x,\ \cos x)dx. \tag{2}$$

Тогда

I. Если $R(u, g)$ меняет знак при изменении u, тогда

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x\cdot dx = -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)d\cdot\cos x,$$

то есть, если

$$\boldsymbol{R(-\sin x, \cos x) = -(\sin x, \cos x),}$$

то интеграл (2) приводим к интегрированию рациональной функции относительно переменной t, с помощью подстановки $t = \cos x,\ \ x \in (0;\pi)$.

II. Если $R(u, g)$ меняет знак при изменении знака g, то

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x\cdot dx = R_1(\sin x, (1 - \sin^2 x)dx,$$

то есть, если

$$\boldsymbol{R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),}$$

то интеграл (2) приводим к интегрированию рациональной функции относительно переменной t, с помощью подстановки $t = \sin x$, $x \in (-\dfrac{\pi}{2}:\dfrac{\pi}{2})$.

III. Если $R(u, g)$ не меняет своего значения при одновременном изменении знаков u и g, то

$$\boldsymbol{R(-u,-g) = R(u,g) = R(\frac{u}{g}\cdot g, g) = R^*(\frac{u}{g}, g) = R_1^*(\frac{u}{g}, g^2)}.$$

Поэтому $R(\sin x,\ \cos x) = R_1^*(\mathrm{tg}x,\ \cos^2 x) = R_1^*\left(\mathrm{tg}x,\ \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\right) = \overline{R}(\mathrm{tg}x)$, а следовательно, интеграл (2) приводим к интегрированию рациональной функции относительно переменной t, с помощью подстановки $t = \mathrm{tg}x : x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}:\dfrac{\pi}{2}\right)$, ибо

$$\boldsymbol{R(\sin x, \cos x)dx = \overline{R}(t)\frac{dt}{1+t^2}}.$$

Замечание. Отметим, что, какова бы не была рациональная функция $R(u, g)$, ее всегда можно представить в виде суммы трех слагаемых, рассмотренных выше, то есть

$$R(u,g)=\frac{R(u,g)-R(-u,g)}{2}+\frac{R(-u,g)-R(-u,-g)}{2}+\frac{R(-u,-g)+R(u,g)}{2}. \quad (3)$$

В равенстве (3) первое слагаемое меняет знак при изменении знака u, второе меняет знак при изменении знака g, а третье сохраняет значение при одновременном изменении знаков u и g. Поэтому, представив выражение $R(\sin x, \cos x)$ в виде (3), к первому слагаемому применим подстановку $t = \cos x\, t$, ко второму – подстановку $t=\sin x$, и к третьему – $t=\mathrm{tg} x$.

Следовательно, для вычисления интегралов вида (2) достаточно трех подстановок.

Пример 5. Найти интеграл $I=\int\frac{\cos x+\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$.

Решение. Функция $R(\sin x,\cos x)=\frac{\cos x+\cos^3 x}{1+\sin^2 x}$, нечетная относительно $\cos x$, поэтому $t = \sin x : dt = \cos x\cdot dx$, а следовательно

$$I=\int\frac{(1+\cos^2 x)\cos x dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{(2-\sin^2 x)\cos x dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{2-t^2}{1+t^2}dt=$$

$$=-\int dt+3\int\frac{dt}{1+t^2}=-\sin x+3\mathrm{arctg}\ \sin x+C$$

4.2. Интегралы вида $I_{m,n}=\int\sin^m x\ \cos^u x\ dx$

При нахождении интегралов вида $I_{m,n}$ применяют следующие правила:

1. n – целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $t = \sin x$.

2. m – целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $t = \cos x$.

3. $m + n$ – четное целое число, то применяются подстановки либо $t = \mathrm{tg}\, x$, либо $t = \cos 2x$.

Пример 1. Найти интеграл $I_{4,5}=\int\sin^4 x\ \cos^5 x\ dx$.

Решение. Используем подстановку $t = \sin x$, тогда $dx=\frac{1dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\cos x=\sqrt{1-t^2}$.

Следовательно,

$$I=\int \sin^4 x\ \cos^5 x\ dx=\int (t^4-2t^6+t^8)dt=\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Замечание. Интеграл $I=\int \sin^4 x\ \cos^5 x\ dx$ можно найти следующим образом

$$I_{4,5}=\int \sin^4 x\ \cos^4 x\ \cos x\ dx=\int \sin^4 x\ \cos^4 x\ d\sin x=\int \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)^2 d\sin x=$$

$$=\int \sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d\sin x=\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

Пример 2. Найти $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$.

Решение. Данный интеграл можно найти, используя подстановку $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$, но проще найти данный интеграл преобразованием подынтегральной функции, используя основное тригонометрическое тождество («разбиение единицы») $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ или соответствующую степень тригонометрической единицы. В данном примере можно использовать равенство $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, но эффективнее будет – $I^2=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$, получим

$$I=\int \frac{I\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=\int \frac{(\sin_4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=$$

$$=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx+2\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\int \mathrm{tg}^2 x\ d\mathrm{tg}x+2\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+2\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C.$$

Замечание. При вычислении интегралов вида $I=\int \frac{1\cdot dx}{\sin^n x\cos^{\mathrm{m}} x}$, удобно использовать «разбиение единицы» ($1=\sin^2 x+\cos^2 x$) или соответствующую степень тригонометрической единицы.

Замечание. Интегралы вида $I=\int \sin^p x\ \cos^g x\ dx$ (p и g – рациональные числа, $x\in(0:\frac{\pi}{2})$) подстановкой $\sin x=t$ приводятся к интегралу от биномиального дифференциала

$$I=\int \sin^p x\ \cos^g x\ dx=\int t^p(1-t^2)^{g-1}dt.$$

4.3. Интегралы вида $\boldsymbol{I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx}$, $\boldsymbol{I_n = \int \mathrm{ctg}^n x\, dx}$

Для нахождения интеграла $I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx$ $(n \geq 2)$ поступают следующим образом

$$I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)\mathrm{tg}^{n-2} x\, dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, d\mathrm{tg} x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx,$$

т.е. $I_n = \dfrac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ – рекуррентное соотношение.

Аналогично находим интеграл $I_n = \int \mathrm{ctg}^n x dx$.

4.4. Интегралы вида $\boldsymbol{I = \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx}$, $\boldsymbol{I = \int \cos ax \cdot \cos bx}$, $\boldsymbol{I = \sin ax \cdot \sin bx}$

Интегралы вида

$$I = \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx,\ I = \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx,\ I = \int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx$$

находим преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул:

$$2\sin ax \cdot \cos bx = \sin(a - b)x + \sin(a + b)x;$$

$$2\cos ax \cdot \cos bx = \cos(a - b)x + \cos(a + b)x;$$

$$2\sin ax \cdot \sin bx = \cos(a - b)x - \cos(a + b)x.$$

Пример 1. Найти интеграл $I = \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx$.

Решение. $I = \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx = \dfrac{1}{2}\int [\sin(a-b)x \cdot dx + \sin(a+b)x] dx =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right) + C.$$

§5. Интегрирование выражений, содержащих радикалы

Основной прием интегрирования выражений, содержащих радикалы, – нахождение таких подстановок $t = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ – выражается через элементарные функции), которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду, так называемый *метод рационализации подынтегрального выражения*.

5.1. Интегрирование функций вида $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right)$

Пусть

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \qquad (1)$$

где R – рациональная функция от двух аргументов; n – натуральное число; a, b, c, d – постоянные числа.

Для нахождения интеграла (1) положим

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t; \;\; t^n = \frac{ax+b}{cx+d}; \; x = \varphi(t) = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},$$

тогда интеграл (1) примет вид

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt, \qquad (2)$$

где дифференциал имеет рациональный вид, так как $R(t)$, $\varphi(\mathrm{t})$, $\varphi'(\mathrm{t})$ – рациональные функции от t, а, следовательно, интеграл (2) находится в конечном виде и, тем самым, находим интеграл (1).

К интегралу вида (1) сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_1}, \; ...., \; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_k}\right) dx, \qquad (3)$$

где $n_s \in Q \; (s = \overline{1,k}); \;\; a, \; b, \; c, \; d \in R, \;\; ad - bc \neq 0$.

Используя подстановку $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p$, где p – общий знаменатель чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, приводятся к интегралам от рациональных функций.

Пример 1. Найти интеграл $I = \int \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \cdot \dfrac{dx}{x+1}$.

Решение. Пусть $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}l; \; x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}; \; dx = -\dfrac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$,

тогда $I = -3\int \dfrac{dt}{t^3-1} = \int\left(\dfrac{-1}{t-1} + \dfrac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$,

где $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Пример 2. Найти интеграл $I=\int \frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}dx$.

Решение. Наименьшее общее кратное знаменателей (1; 3; 6) равно числу 6, поэтому применим подстановку $x=t^6$; $dx=6t^5dt$, тогда

$$I=6\int \frac{(t^6+t^4+t)t^5dt}{t^6(1+t^2)}=6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt=6\int (t^3+\frac{1}{t^2+1})dt=\frac{3}{2}t^4+6\operatorname{arctg}t+C,$$

где $x = t^6$.

5.2. Интегрирование функций вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

Интегралы вида

$$I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a\neq 0; \;\; b^2-4ac\neq 0. \tag{1}$$

Сводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановок Эйлера:

$$1) \;\; \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}x, \quad a>0, \tag{2}$$

$$2) \;\; \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}, \quad c>0, \tag{3}$$

$$3) \;\; \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-\alpha), \quad b^2-4ac>0, \tag{4}$$

где α – один из корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Действительно, например, в первой подстановке Эйлера – формула (2) – положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x, \quad a>0. \tag{5}$$

Возводя равенство (5) в квадрат, получим

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}; \;\; \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Суть подстановки Эйлера состоит в том, что для определения x получается уравнение первой степени, таким образом, что x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, выражаются рационально через t. Следовательно, первая подстановка Эйлера (2) сводит интеграл (1) к интегрированию рациональной функции от t.

Вторая подстановка Эйлера (3), например, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$, $c>0$. После возведения в квадрат и приведения подобных, получим $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$ – уравнение первой степени относительно x. Откуда

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2};\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2};dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

а, следовательно, интеграл (1) сводится к интегрированию рациональной функции от t.

Замечание. Рассмотренные выше первая и вторая подстановки (a > 0 и c > 0) приводятся одна к другой подстановкой $x=\frac{1}{t}$. Следовательно, всегда можно избежать применения второй подстановки.

Третья подстановка применяется в том случае, если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет различные действительные корни α и β, т.е.

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$, после возведения в квадрат и сокращая на $(x-\alpha)$, получим и здесь уравнение первой степени относительно x, так что $x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a^2}$; $\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a^2}$; $dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt$, а следовательно интеграл (1) сводится к интегрированию рациональной функции от t.

Замечание. При $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$ интеграл $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(x,\left((x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\right)\right)dx$ сводится к интегрированию рациональной функции с помощью подстановки $t=\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$.

Пример 3. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, используя подстановки Эйлера.

Решение. *a*) интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$ – табличный интеграл;

b) для нахождения $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ применим третью подстановку Эйлера:

$\sqrt{1-x^2}=t(1-x)$, тогда $x=\frac{t^2-1}{t^2+1};\sqrt{1-x^2}=\frac{2dt}{t^2+1};dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$ и

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Так как имеет место тождество

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\arcsin x+\frac{\pi}{2},\quad (-1<x<1),$$

то полученный результат в случае *b*) лишь по форме отличается от результата в случае *a*).

Пример 4. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. *a*) применим первую подстановку Эйлера

$\sqrt{x^2-x+1}=t-x;\ x=\frac{t^2-1}{2t-1};\ dx=\frac{2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)^2}$, тогда

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C;$$

б) применим вторую подстановку Эйлера для вычисления данного интеграла

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$$

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1};\ \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1};\ dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}dt,$$

а $x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}$, тогда

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{(-2t^2+2t-2)dt}{t(t-1)(t+1)^2}=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+$$

$$+2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right|+C.$$

Отметим, что результаты интегрирования в случаях *а*) и *б*) отличаются по форме, но в случаях *а*) и *б*) подстановки Эйлера приводят к громоздким преобразованиям. Поэтому, если есть возможность, то применяют другие способы нахождения интегралов вида (1), которые рассмотрим ниже.

5.3. Интегрирование функций вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок

С помощью тригонометрических или гиперболических подстановок интеграл $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно свести к нахождению интегралов одного из следующих видов:

1. $I=\int R(t,\ \sqrt{p^2t^2+g^2})dt$,

2. $I=\int R(t,\ \sqrt{p^2t^2-g^2})dt$,

3. $I=\int R(t,\ \sqrt{g^2-p^2t^2})dt$,

где $t=x+\dfrac{b}{2a}$; $ax^2+bx+c=\pm p^2a^2\pm g^2$ (выделение полного квадрата в зависимости от знаков a, b и c).

Интегралы вида 1 – 3 сводятся к интегралам от выражений, рациональных относительно синуса и косинуса с помощью следующих подстановок:

1. $t=\dfrac{g}{p}\mathrm{tg}Z$ или $t=\dfrac{g}{p}\mathrm{sh}Z$;

2. $t=\dfrac{g}{p}\sec Z$ или $t=\dfrac{g}{p}\mathrm{ch}Z$;

3. $t=\dfrac{g}{p}\sin Z$ или $t=\dfrac{g}{p}\mathrm{th}Z$.

Пример 1. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2x+5\right)^3}}$.

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2x+5\right)^3}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{((x+1)^2+4)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{\left(4+t^2\right)^3}}=\left|\begin{array}{c} t=2tgZ: \\ dt=\dfrac{2dZ}{\cos^2 Z}: \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos ZdZ=\frac{1}{4}\sin Z+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{tgZ}{\sqrt{1+tg^2Z}}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}}+C$$

5.4. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Операция интегрирования в целом является действием более трудным, чем дифференцирование функции. Выбор пути интегрирования, не единственность способа решения поставленной задачи выдвигают очень сложные вопросы при решении этих задач. Но кроме этой задачи стоит очень важный вопрос: а всегда ли у заданной функции $f(x)$ существует первообразная? Утвердительный ответ на этот вопрос дал О. Коши – в том случае, когда функция $f(x)$ непрерывна.

Следует иметь ввиду следующее обстоятельство – если при дифференцировании любой элементарной функции получается снова элементарная функция, то для первообразной от элементарной функции может и не быть элементарной и, следовательно, она не может быть записана через привычные символы степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Например, первообразная от такой простой функции, как $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, не является элементарной (хотя и существует, по Коши).

О функциях, у которых первообразная не является элементарной, говорят, что они не интегрируемы в конечном виде или представляют собой так называемые «неберущиеся» интегралы. Так, например нельзя взять интеграл $\int\sqrt{x}\sin xdx$, так как не существует никакой элементарной функции (являющейся комбинацией конечного числа функции от функций, начиная с записанных в таблице производных), производная которой была бы равной $x\sin x$.

Приведем примеры некоторых функций, интегралы от которых не берутся в конечном виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};\quad \int\frac{e^x}{x}dx;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},k^2<1.$$

Таким образом, необходимость изучения первообразных от ряда элементарных функций приводит к необходимости расширения запаса функций, к необходимости рассматривать и такие функции, которые не являются элементарными.

Приведем примеры «неберущихся» интегралов, которые играют большую роль, как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях:

а) $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона (теория вероятностей);

б) $\int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx$ – интегралы Френеля (физика);

в) $\int\frac{1}{\ln x}dx$ – интегральный логарифм;

г) $\int\frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус;

д) $\int\frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус;

е) $\int\frac{e^x}{x}dx$ – интегральная показательная функция.

Первообразные от ряда функции хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений функций для различных значений аргумента x.

МОДУЛЬ 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1.1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [ab]$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$ называется криволинейной трапецией. Вычислим площадь этой трапеции (рис. 1).

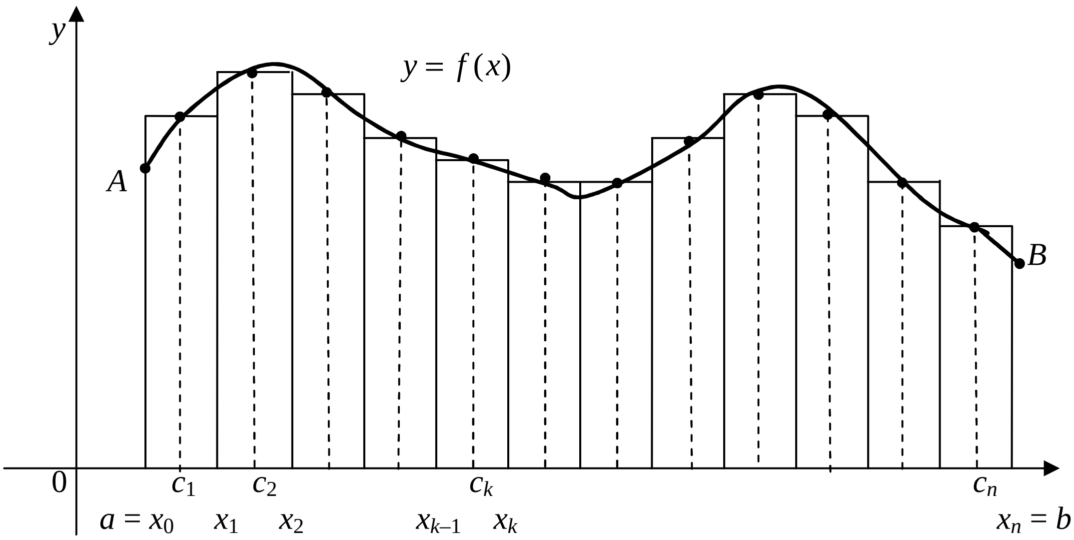

Рис. 1

Для этого отрезок $[ab]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., b = x_n$ $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ разбиваем на n отрезков $[x_0x_1]$, $[x_1x_2]$, ..., $[x_{n-1}x_n]$. Через точки $x_1, x_2, ..., x_n$ проведем прямые, параллельные оси Oy, которые исходную криволинейную трапецию разбивают на n частей, каждая из которых является криволинейной трапецией. В каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольную точку c_i, вычисляем значение функции $f(x)$ в выбранных точках c_i. Тогда произведение $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ (где Δx_i – длина отрезка $[x_{i-1}x_i]$) – площадь прямоугольника с основанием $[x_{i-1}x_i]$ и высотой $f(c_i)$. Тогда сумма всех таких произведений

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i ,$$

не зависящая от способа разбиения отрезка $[ab]$ и выбора точки c_i, равна приближенно площади криволинейной трапеции. Увеличивая число точек разбиения отрезка $[ab]$, так чтобы наибольшая из длин Δx_i стремилась к нулю, и если при этом сумма S_n будет иметь предел S, не зависящий ни от способа разбиения $[ab]$, ни от выбора точек c_i, то естественно считать, что площадь криволинейной трапеции

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми: $y = 0$; $x = a$; $x = b$, $0 < a < b$ (рис. 2).

Решение.

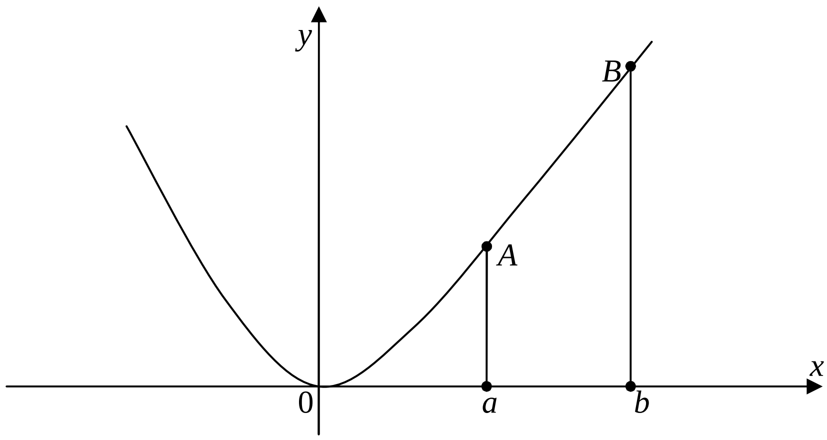

Рис. 2

Площадь искомой криволинейной трапеции $aABb$ равна S

$$S = S_{0Bb} - S_{0Aa}\,.$$

Находим площади S_{0Bb} и S_{0Aa}. Так площадь S_{0Aa} найдем, разбивая $[0a]$ на n отрезков равной длины, а в качестве точки $c_i\,(i = \overline{1,n})$ выбираем правый конец отрезка $[x_{i-1}x_i]$. Тогда $c_i = x_i = \frac{a}{n} i$; $\Delta x_i = \frac{a}{n}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Здесь использована формула $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, тогда

$$S_{0Aa} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{3}\,.$$

Поступая аналогично для криволинейной трапеции $0Bb$, получим $S_{0Bb} = \frac{b^2}{3}$. Тогда искомая площадь

$$S = \frac{b^2 - a^2}{3}.$$

1.2. Работа переменной силы

Пусть материальная точка движется вдоль числовой прямой Ox под действием силы $F(x)$ (считаем $F(x)$ непрерывной функцией от координаты x), причем направление действия силы $F(x)$ совпадает с направлением движения материальной точки. Найдем работу силы $F(x)$ при перемещении материальной точки от $x = a$ до $x = b$, т.е. на отрезке $[ab]$. Для решения этой задачи поступаем следующим образом: разобьем отрезок $[ab]$, как и в задаче о площади криволинейной трапеции, точками x_i и выберем $c_i \in [x_{i-1}x_i]$ $(i = \overline{1,n})$.

Тогда работа силы $F(x)$ на отрезке $[x_{i-1}x_i]$ приближенно равна $F(c_i) \cdot \Delta x_i$, а на отрезке $[ab]$

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Это предел A (при тех же условиях, что и в задаче о площади) называют работой переменной силы при перемещении материальной точки из точки a в точку b.

Отвлекаясь от задачи о площади криволинейной трапеции и от задачи о работе переменной силы, попробуем перечислить математические операции, используя которые мы решили эти задачи. Прежде всего, отметим, что была задана функция $f(x)$ для площади криволинейной трапеции, либо $F(x)$ – для работы; данные функции рассматривались как непрерывные на $[ab]$. Для получения равенств типа (1) были выполнены следующие операции:

1) отрезок $[ab]$ произвольным образом разбивается на конечное (n) число частей (отрезков $[x_{i-1}x_i]$);

2) на каждом из отрезков $[x_{i-1}x_i]$ выбирается произвольная точка $c_i\, (i = 1, \overline{n})$ и вычисляется значение функции $f(c_i)$ $F(c_i)(i = \overline{1,n})$ в этой точке;

3) значение $f(c_i)$ $F(c_i)(i = 1, \overline{n})$ умножается на Δx_i длину отрезка $[x_{i-1}x_i]$;

4) все полученные произведения складываются.

Полученная в результате перечисленных действий сумма носит название n-ной интегральной суммы. В наших задачах о площади криволинейной трапеции и о работе переменной силы на отрезке $[ab]$ n-ная интегральная сумма имеет следующий вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\cdot\Delta x_i$$

Отметим, что при заданном числе n частей (отрезков), на которые разбивали $[ab]$, можно составить сколько угодно n-ных интегральных сумм. Это можно сделать, так как, во-первых, по разному разбивали отрезок $[ab]$ на n частей, а во-вторых, на каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}x_i]$ можно произвольным образом выбрать точку c_i $(i=\overline{1,n})$.

Для получения точного значения площади криволинейной трапеции мы выполняли пятую операцию – находили предел n-ной интегральной суммы при $n\to\infty$ или $\max\Delta x_i\to 0$. При решении рассмотренных задач о площади криволинейной трапеции или о работе переменной силы на отрезке $[ab]$ важно заметить, что предел не должен зависеть от способа разбиения отрезка $[ab]$ и от выбора точек c_i $(i=\overline{1,n})$. При различном способе разбиения и выборе точек c_i, вообще говоря, будут получаться приближенные значения, как площади, так и работы. Но в пределе эти различия должны стереться, т.е. предел не должен зависеть от способа составления интегральных сумм.

§ 2. Определенный интеграл

2.1. Интегральная сумма. Определение определенного интеграла

В рассмотренном выше параграфе при решении задач о площади криволинейной трапеции и работе переменной силы на отрезке $[ab]$ была введена n-ная интегральная сумма: если функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[ab]$, то, разбивая $[ab]$ на n частей произвольным образом точками $a=x_0, x_1,..., x_n=b$, получим некоторое разбиение $[ab]$.

Пусть длина отрезка $[x_{i-1}x_i]$ равна $\Delta x_i\,(i=\overline{1,n})$. Выбирая произвольным образом точку $c_i\in[x_{i-1}x_i]$, составляем сумму

$$S_n = f(c_i)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,. \qquad (1)$$

Она называется n-ной интегральной суммой Римана для функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$ соответствующей данному разбиению отрезка $[ab]$ и выбору точек $c_i\,(i=\overline{1,n})$.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при $n\to\infty$ $(\max\Delta x_i\to 0)$, не зависящей от способа разбиения отрезка $[ab]$ и выбора точек $c_i\,(i=\overline{1,n})$, то этот предел называют определенным интегралом (интегралом Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$ и записывают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta x\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ . \qquad (2)$$

Если предел в (2) существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[ab]$ (или интегрируемой по Риману). Выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a и b – нижним и верхним пределами интегрирования.

Замечание. Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции, то есть определенный интеграл не зависит от выбора (обозначения) переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du\,.$$

Итак, определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$ есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма при $n\to\infty$ (или $\max\Delta x_i\to 0$).

С **геометрической точки зрения** определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

С **физической точки зрения** определенный интеграл – это величина работы, совершаемая переменной силой при перемещении материальной точки из точки a в точку b или величина пути, пройденного материальной точкой, скорость которой $\upsilon(t)$ за промежуток времени $[T_0,T]$.

Необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечание. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости. Так, функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \ - \text{ рациональное число}\\ 0, \text{ если } \ x \ - \text{ иррациональное число}\end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0,1]$, хотя и ограничена.

Классы интегрируемых функций:

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$, то она интегрируема на $[ab]$.
2. Если функция определена на отрезке и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.
3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[ab]$ и непрерывна во всех точках отрезка $[ab]$, кроме конечного числа точек, то эта функция интегрируема на отрезке $[ab]$.
4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то она интегрируема на любом $[\alpha,\beta]\in[a,b]$.
5. Если изменить значения интегрируемой функции в конечном числе точек, то интегрируемость ее не нарушится.
6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[ab]$, то и функции $c\cdot f(x)$, $|f(x)|$ интегрируемы на этом отрезке.
7. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[ab]$, то их сумма, разность и произведение также интегрируемы на этом отрезке.

2.2. Основные свойства определенного интеграла

Докажем следующие свойства определенного интеграла:

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a = b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

Это свойство следует из определения интеграла и его должны рассматривать как соглашение, т.к. его нужно рассматривать как естественное распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

2. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_b^a f(x)dx\,.$$

Это свойство должно также рассматриваться как соглашение, т.к. это естественное обобщение понятия определенного интеграла на случай, когда отрезок $[ab]$ при $a < b$ пробегается в направлении от b к a (в этом случае в интегральной сумме все разности Δx_i имеют отрицательный знак).

3. Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = b - a\,.$$

Доказательство. Действительно, если $f(x) = 1$, то по определению определенного интеграла имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a\,.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то функция $c\cdot f(x)$ (c – const) интегрируема на $[ab]$, причем

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\,,$$

значит, постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Доказательство. Действительно, интегральные суммы функций $f(x)$ и $C(x)$ отличаются постоянным множителем C, поэтому имеем

$$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} cf(b_i)\cdot \Delta x_i = C \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\cdot \Delta x_i = C\int_a^b f(x)dx\,.$$

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ – обе интегрируемы на $[ab]$, то и $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема на $[ab]$, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$

Доказательство. Доказательство этого свойства проведем с помощью перехода к пределу в интегральных суммах.

Разобьем отрезок $[ab]$ произвольным образом на отрезки $[x_{i-1}x_i]$ длины $\Delta x_i\,(i=\overline{1,n})$ и составим интегральные суммы для всех трех интегралов, при этом точки c_i в каждом отрезке выбираем произвольно, но для всех интегральных сумм одни и те же. Тогда будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}(f(c_i)\pm g(c_i))\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\pm\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\,.$$

Пусть $n\to\infty$ или $\max\Delta x_i\to 0$; так как для обеих сумм в правой части предел существует, то существует предел и для суммы слева, чем устанавливается интегрируемость функции $f(x)\pm g(x)$. Переходя к пределу в последнем равенстве, устанавливаем данное свойство.

Замечание. Свойства 4 и 5 называют *свойством линейности* для определенного интеграла.

6. Аддитивность определенного интеграла. Если функция интегрируема на отрезке $[ab]$ и $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[ab]$ на $[x_{i-1}x_i]$ и от выбора точек p_i, то точку c при составлении интегральной суммы можно включить в число точек разбиения. Так, если $c=x_m$, тогда интегральную сумму для функции $f(x)$ можно разбить на две:

$$\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{m}f(c_i)\Delta x_i+\sum_{i=m}^{n}f(c_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

В последнем равенстве каждая из написанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[ab]$, $[ac]$ и $[cb]$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ $(\max\Delta x_i\to 0)$, имеем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,.$$

Геометрический смысл свойства 6 состоит в следующем: площадь криволинейной трапеции с основанием $[ab]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[ac]$ и $[cb]$.

Замечание. Установленное свойство 6 справедливо для любого конечного числа точек и при любом расположении. Так, например, если $a < b < c$, то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Откуда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[ab]$ и для любого $x \in [ab]$ $f(x) \geq 0 \quad (a < b)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. Так как $f(x) \geq 0$ и $\Delta x_i \geq 0$, то интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \geq 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty \ (\max \Delta x_i \to 0)$, получим

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Замечание. Имеет место более точный результат. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, положительна – $f(x) > 0$ и $a < b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Следствием из установленного свойства 7 является следующее свойство:

8. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[ab]$ и для всех $x \in [ab]$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$ или $f(x) < g(x)$, то и $\int f(x)dx \leq \int g(x)dx$ или $\int f(x)dx < \int g(x)dx$ в предположении, что $a < b$.

Доказательство данного свойства проводим аналогично доказательству свойства 7 только для функции $g(x) - f(x)$.

С *геометрической точки зрения* свойство 8 означает следующее: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b (рис. 3).

Замечание. Установленное свойство 8 для определенного интеграла называют монотонностью определенного интеграла.

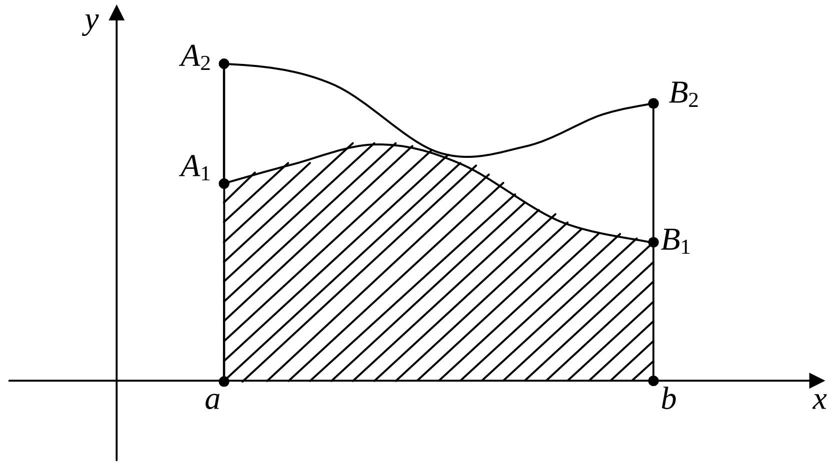

Рис. 3

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$ $(a < b)$, тогда справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Так как $f(x)$ интегрируема на $[ab]$, то будет интегрируема и функция $|f(x)|$ на $[ab]$, а это значит, что интеграл в правой части (1) существует. Для доказательства неравенства (1) применим свойство 7 к функциям:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

10. Если $f(x)$ интегрируема на $[ab]$ (a < b) и для любого $x \in [ab]$ справедливо $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (2)$$

Доказательство. Применяя свойство 8 к функциям m, $f(x)$ и M получим искомое неравенство.

С геометрической точки зрения свойство 10 означает следующее: если $f(x) \ge 0$ для любого $x \in [ab]$, то площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b равна $M(b-a)$. А установленное неравенство (2) означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади прямоугольника aA_1B_1b и не больше площади прямоугольника aA_2B_2b (рис. 4).

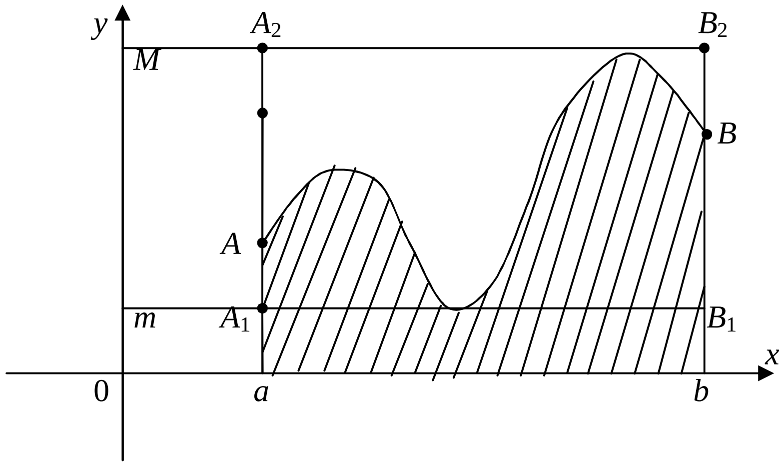

Рис. 4

11. **Теорема** о среднем значении. Если функция $f(x)$ непрерывна (а значит, интегрируема) на $[ab]$, то существует точка $c \in [ab]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a). \tag{3}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$, то она достигает своих наименьшего m и наибольшего M значений, т.е. для любого $x \in [ab]$

$$m \le f(x) \le M. \tag{4}$$

На основании свойства 10 и в силу неравенства (4) имеем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Так как $b - a > 0$, то, разделив двойное неравенство на $(b - a)$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M. \tag{5}$$

В неравенстве (5) число $\lambda = \dfrac{\int f(x)dx}{b-a}$ находится между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной на $[ab]$ функции $f(x)$, которая принимает все промежуточные значения из отрезка $[mM]$, в том числе и значение λ. Следовательно, существует точка $c \in [ab]$, такая, что $f(c) = \lambda$.

Значит

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}. \tag{6}$$

Откуда $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c)$, определяемое по формуле (6) называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$.

С *геометрической точки зрения* теорема о среднем означает следующее: пусть $f(x) \geq 0$, рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$ под кривой $y = f(x)$ (рис. 5).

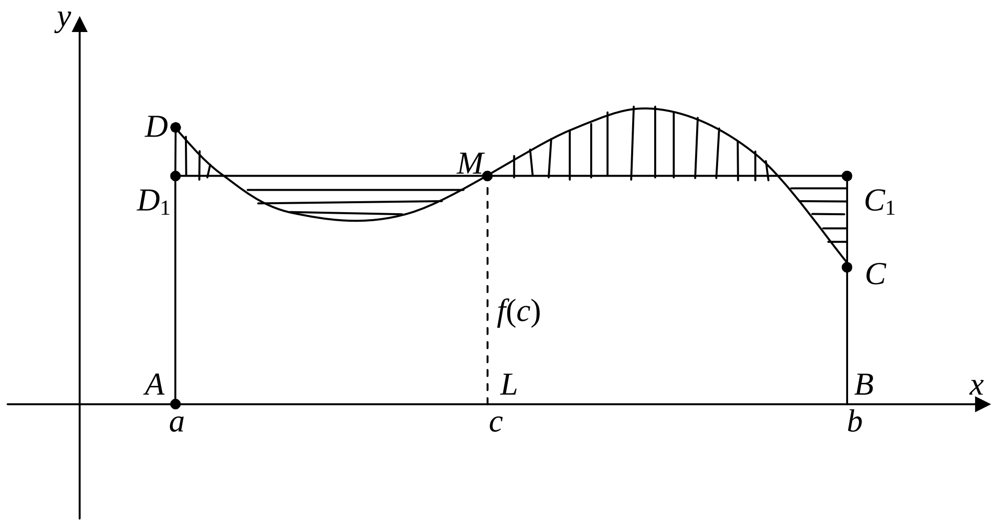

Рис. 5

Тогда площадь криволинейной трапеции, выражаемая определенным интегралом равна площади прямоугольника AD_1C_1B с тем же основанием AB и с некоторой средней ординатой $ML = f(c)$ в качестве высоты.

2.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то для любого $x \in [ab]$ она интегрируема на любом отрезке $[ax]$, то есть для любого $x \in [ab]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{1}$$

называют интегралом с переменным верхним пределом.

Рассмотрим некоторые свойства функции $F(x)$:

а) непрерывность интеграла

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть $x \in [ab]$ и $x + \Delta x \in [ab]$. Докажем, что

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$, то она ограничена, т.е.

$$\exists M > 0; \;\; \forall x \in [ab] \to |f(x)| \le M.$$

Тогда $$|\Delta F(x)| \le \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(x)| dx \right| \le M \cdot \Delta x.$$

Откуда получаем, что $\Delta F(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. функция $F(x)$ непрерывна в точке x. Но так как x – произвольная точка отрезка $[ab]$, то $F(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$;

б) дифференцируемость интеграла

Теорема 2. (Теорема Барроу). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[ab]$ и непрерывна в точке $x \in [ab]$, тогда функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2}$$

дифференцируема в точке x, причем $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Пусть $\Delta x \ne 0$ и $x + \Delta x \in [ab]$, тогда

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} =$$

$$= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \underset{x<c<x+\Delta x}{f(c) \cdot (x + \Delta x - x)} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } f(t) \; - \\ \text{непрерывна} \end{array} \right| = f(x).$$

Таким образом, получили, что $F'(x) = f(x)$.

Доказанная теорема имеет огромнейшее теоретическое и прикладное значение. Если предположить, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$, то она интегрируема и, следовательно, установленное выше утверждение справедливо для любой точки $x \in [ab]$; производная от интеграла (2) по переменному верхнему пределу x равна значению $f(x)$ подынтегральной функции на этом пределе. Другими словами, для непрерывной на $[ab]$ функции $f(x)$ всегда существует первообразная, примером которой является определенный интеграл (2) с переменным верхним пределом.

Замечание. Утверждения, доказанные выше имеют место и для случая интеграла с переменным нижним пределом, так как

$$\int_x^a f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt.$$

Пример 1. Найти производную по x от функций:

1. $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t dt,\ x > 0$;   2. $F(x) = \int_{x^2}^{x^2} \ln t dt,\ \text{x} > 0$;

3. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt,\ x > 0$.

Решение. Для решения данных задач будем использовать правило дифференцирования сложной функции и теорему о производной интеграла с переменными верхним пределом.

1. $F'_x(x) = \left[\int_1^{x^2} \ln t dt\right]'_{x^2} \cdot (x^2)'_x = 2x \cdot \ln x^2 = 4x \ln x$;

2. $F'_x(x) = \left[\int_{x^2}^{x^2} \ln t dt\right]'_x = \left[\int_{x^2}^{c} \ln t dt + \int_c^{x^3} \ln t dt\right]'_x = \left[-\int_c^{x^2} \ln t dt + \int_c^{x^3} \ln t dt\right]'_x =$

$$= \left[\int_c^{x^3} \ln t dt\right]'_{x^3} \cdot (x^3)'_x - \left[\int_c^{x^2} \ln t dt\right]'_{x^2} \cdot (x^2)' = 3x^2 \ln x^3 - 2x \ln x^2 =$$

$$= 9x^2 \ln x - 4x \ln x.$$

Итак $F'_x(x) = x \cdot \ln x(9x - 4)$.

3. Так как

$$F(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\sin t^2dt=\int_{1/x}^{c}\sin t^2dt+\int_{c}^{\sqrt{x}}\sin t^2dt=-\int_{c}^{1/x}\sin t^2dt+\int_{c}^{\sqrt{x}}\sin t^2dt\,.$$

Тогда $F'(x)=-\left[\int_{c}^{1/x}\sin t^2dt\right]'_{1/x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+\left[\int_{c}^{\sqrt{x}}\sin t^2dt\right]'_{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=$

$$=-\sin\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}+\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}.$$

Итак $F'(x)=\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}+\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}\,.$

Пример 2. Найти y'_x, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x=\int\limits_{2}^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z \\ y=\int\limits_{\sqrt{t}}^{2}z^2\ln zdz \end{cases}$$

Решение. Для решения данной задачи будем использовать правило дифференцирования функции, заданной параметрически, и теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Так как $y_x{}'=\dfrac{y_t{}'}{x_t{}'}$, то находим $x_t{}'$ и $y_t{}'$:

$$x_t{}'=\left(\int_{2}^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln zdz\right)'_{t^3}\cdot\left(t^3\right)'_t=t\ln t^3\cdot 3t^2=9t^3\ln t.$$

$$y_t{}'=\left(\int_{\sqrt{t}}^{2}z^2\ln zdz\right)'_{\sqrt{t}}\left(\sqrt{t}\right)'_t=-t\ln\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1\sqrt{t}}{4}\ln t.$$

а, следовательно, искомая производная

$$y_x{}'=\frac{9t^3\ln t}{-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t}=-36t^2\sqrt{t}=-36t^{\frac{5}{2}},\ t>0\,.$$

Пример 3. Найти производную y_x функции, заданной неявно

$$\int_{0}^{y}e^t dt+\int_{0}^{x}\cos tdt=0\,.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства по переменной x, считая y – сложной функцией x, получим $e^y \cdot y_x' + \cos x = 0$.

Откуда $y_x' = -\dfrac{\cos x}{e^y} = -e^{-y}\cos x$.

Итак $y_x' = -e^{-y}\cos x$.

Пример 4. Найти производную y_x' функции, заданной неявно

1. $\int\limits_1^y e^{-t^2}dt + \int\limits_1^{x^2}\sin^2 t dt = 0$; 2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^x \sqrt{3 - 2\sin^2 z}dz + \int\limits_0^y \cos t dt = 0$.

Решение. 1. Дифференцируем обе части равенства по x, считая $y = y(x)$ – сложной функцией:

$$\left[\int\limits_1^y e^{-t^2}dt\right]_y' \cdot y_x' + \left[\int\limits_1^x \sin^2 t dt\right]_{x^2}' \cdot \left(x^2\right)_x' = 0$$

$$e^{-y^2} \cdot y' + 2x\sin^2 x^2 = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно y_x', получим

$$y' = -2xe^{y^2} \cdot \sin^2 x^2.$$

2. Ответ: $y' = -\dfrac{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}}{\cos y}$.

Пример 5. Определить точки экстремума функции $F(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$ в области $x > 0$.

Решение. Находим критические точки $F(x)$ $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$: $F'(x) = 0$ при $\sin x = 0$ $x = \pi n$.

Находим $F''(x)$ в этих точках

$$F''(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}; \qquad F''(\pi n) = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{(-1)^n}{\pi n} \neq 0.$$

Так как $F''(\pi n) \neq 0$, то $x = \pi n$ – точки экстремума, а именно: если $n = 2m$ (четное), то $x = \pi n$ – точки максимума $F(\pi n) > 0$; если $n = 2m + 1$ (нечетное), то точки $x = \pi n$ – точки минимума $F(\pi n) < 0$.

Пример 6. Найти точки экстремума и точки перегиба функции

$$y=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$$

Ответ: точка минимума при $x = 1$; точки перегиба $x=\dfrac{4}{3}$: $x=2$.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2}{x}dx$.

Решение. При вычислении данного предела используем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=\left(\frac{1}{1}\right)=1.$$

Пример 8. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^4}\sin\sqrt{x}dx}{x^3}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}x}dx}{\int_0^{tgx}\sqrt{\sin x}dx}$;

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x (\arg\mathrm{tg}x)^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin\sqrt{x}dx}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

2. **Ответ**: 1.

3. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\cdot\int_0^x e^{x^2}dx\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}=0$$

§3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и пусть $F(x)$ является какой-либо ее первообразной на этом отрезке, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Доказательство. Для непрерывной на отрезке $[ab]$ функции $f(x)$ интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \tag{2}$$

является первообразной функцией. Полагая в формуле (2) $x = a$, получим $F(a) = C$, т.е.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \tag{3}$$

полагая в выражении (3) $x = b$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Формулу Ньютона-Лейбница называют основной формулой интегрального исчисления.

Замечание. Если применить к интегралу с переменным пределом теорему о среднем и вспомнить, что $F'(x) = f(x)$, получим

$$F(b) - F(a) = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a), \quad c \in [ab],$$

а это формула Лагранжа для функции $F(x)$.

Таким образом, с помощью формулы Ньютона-Лейбница устанавливается связь между теоремами о среднем в дифференциальном и интегральном исчислении.

§4. Вычисление определенных интегралов

4.1. Вычисление определенных интегралов с помощью интегральных сумм

Пусть требуется вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на $[ab]$. Для этого строим интегральную сумму для $f(x)$ на $[ab]$ и находим соответствующий предел полученной интегральной суммы, тем самым находим определенный интеграл.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $I=\int\limits_0^1 xdx$.

Решение. Из определения определенного интеграла имеем

$$\int\limits_0^1 xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(\varepsilon_i)\Delta x=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\varepsilon_i)\Delta x,$$

где 1. $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 1$, $\varepsilon_i \cdot\in [x_i \cdot x_{i+1}]$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

2. Отрезок [0,1] разбиваем на n равных частей (в общем случае не обязательно) точками деления $x_i=\frac{1}{n}(i=\overline{1,n})$, при этом $\Delta x_i=\frac{1}{n}\to 0$, при $n\to\infty$.

3. В качестве точек ε_i выбираем правые точки отрезков $[x_i;x_{i+1}]$ $\varepsilon_i = x_{i+1} = \frac{i+1}{n}:(i=\overline{0,n-1})$.

4. Тогда интегральная сумма имеет вид

$$S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)=\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

5. $I=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

Значит $I=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

Замечание. В данном примере можно выбрать точки ε_i другим способом, а предел интегральной суммы будет тот же. Действительно, если в качестве ε_i выбрать середины отрезков $[x_i;x_{i+1}]$ $(i=\overline{0,n-1})$, то есть $\varepsilon_i = (i+\frac{1}{2})\frac{1}{n}$.

Тогда интегральная сумма имеет вид

$$S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{2n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n^2}[1+3+5+...+(2n-1)]=\frac{2n^2}{4n^2}=\frac{1}{2},$$

откуда имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$, то есть $\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $I=\int\limits_0^1 e^x dx$.

Решение. Отрезок [0,1] разбиваем на n равных частей точками

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} \ldots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots = x_u = \frac{u}{n} = 1.$$

Длина каждого из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ равна $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Выбираем $\varepsilon_k = x_k = \frac{k}{n}$ $(k = \overline{0, n-1})$. Тогда $f(\varepsilon_k) = e^{\frac{k}{n}} (k = \overline{0, n-1})$, а интегральная сумма S_n будет равна $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = (1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}})\frac{1}{n} = \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$ (сумма членов геометрической прогрессии $b_0 = 1$ $q = e^{\frac{1}{n}}$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e - 1$ так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$.

Таким образом, $I = \int\limits_0^1 e^x dx = e - 1$.

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. В силу определения определенного интеграла (произвольным способом разбиваем отрезок интегрирования, произвольно выбираем точки деления, строим интегральную сумму) его предел, если существует, то он не зависит от способа разбиения и выбора точек. Отрезок [1;2] разбиваем на n частей так, чтобы точки деления $x_i (i = \overline{0, n})$ составляли геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \sqrt[n]{2}$, т.е. $x_0 = 1$ $x_1 = q$ $x_2 = q^2$ … $x_n = q^n = 2$.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = q^{i+1} - q^i = q^i (q-1)$$

$\max \Delta x_i = q^i (q-1) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. при $q \to 1$.

Точки ε_i выбирают так: правые концы отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, то есть $\varepsilon_i = x_{i+1} = q^{i+1}$.

В этом случае интегральная сумма имеет вид

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{i+1}} q^i (q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{h(2^{\frac{1}{n}} - 1)}{2^{\frac{1}{n}}}.$$

Тогда $I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n[2^{\frac{1}{n}}-1]}{2^{\frac{1}{n}}} = \ln 2$, так как используя, например, правило Лопиталя, или то, что $2^x - 1 \approx x\ln 2$ при $x \to 0$. Следовательно, $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

4.2. Вычисление определенных интегралов, опираясь на их геометрический смысл

Данный метод вычисления определенных интегралов основан на том, что определенный интеграл от непрерывной функции на отрезке $[a,b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной сверху функцией $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Пример 1. Найти величину интеграла $I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$.

Решение. Уравнение $y = \sqrt{16 - x^2}$ определяет верхнюю половину окружности $x^2 + y^2 = 16$. Та часть линии, которая получается при $x \in [0, 4]$, лежит в первой координатной четверти. Отсюда заключаем, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{16 - x^2}$ есть четверть круга $x^2 + y^2 = 16$; ее площадь равна 4π.

Следовательно $I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx = 4\pi$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int_0^2 |1 - x|\,dx$.

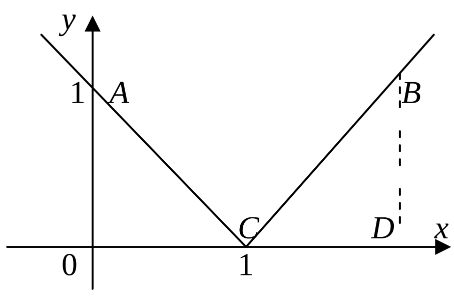

Рис. 6

Решение. На отрезке [0;2] построим график функции $y = |1 - x|$ (рис. 6).

Величина искомого интеграла I – это площадь треугольников ΔAOC и ΔCBD. Так как $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2}$ то $I = 2S_{\Delta AOC} = 1$.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx$.

Решение. 1) Если 0 < a < b, тогда искомый интеграл – это площадь прямоугольника с основанием длины (b – a) и высотой 1 – $I = 1 \cdot (b - a) = b - a$;

2) если a < b < 0 тогда искомый интеграл – это площадь прямоугольника с основанием длинны (a – b) и высотой 1 – $I = 1 \cdot (a - b)$;

3) если a < 0 < b, то в этом случае искомый интеграл – это площадь прямоугольников с высотой (–a) и основанием b, то есть

$$I = 1 \cdot (-a) + 1 \cdot b = 1 \cdot (-a + b).$$

Рассмотренные случаи можно записать одной формулой

$$I = \int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx = 1 \cdot (|b| - |a|) = |b| - |a|.$$

Пример 4. Опираясь на геометрический смысл определенного интеграла, доказать, что

1. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^5 x dx = 0$;   2. $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2 dx} = 2\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

Решение. 1. Докажем, что площадь, ограниченная кривой $y = \sin^5 x$ на отрезке $[0, \pi]$, лежащая над осью Ox, равна площади ограниченной кривой $y = \sin^5 x$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$, лежащей над осью Ox (рис. 7). Действительно, если $\pi < x \le 2\pi$, тогда $x = x_1 + \pi,\ 0 < x_1 < \pi$ и $\sin^5 x = \sin^5(\pi + x_1) = -\sin^5 x_1$.

Значит, вторая половина графика $x \in [\pi, 2\pi]$, которую получают из первой половины $x \in [0, \pi]$ сдвигом вправо на π и симметрично относительно оси Ox.

Следовательно $\int\limits_0^{2\pi} \sin^5 x dx = 0$.

График функции $y = \sin^5 x$ на отрезе $[0, 2\pi]$ имеет следующий вид

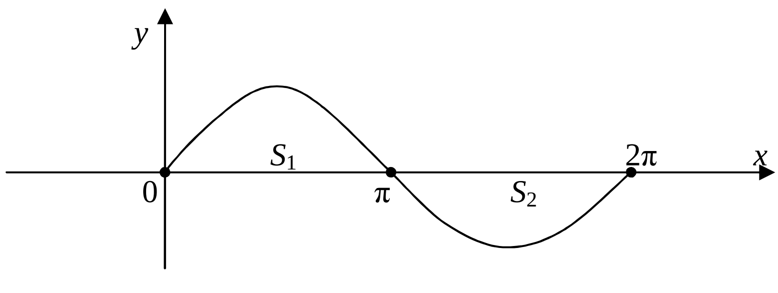

Рис. 7

4.3. Вычисление интегралов по формуле Ньютона-Лейбница

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Одной из первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ является функция $F(x)=\operatorname{arctg}x$, тогда применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^4 f(x)dx,\ f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x}, & 1< x\le 4. \end{cases}$

Решение. Используя свойство определенного интеграла, имеем

$$I=\int\limits_0^4 f(x)dx=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(8-1)=\frac{1}{3}(1+16-2)=5.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4}$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4}=\int\limits_1^2 x^{-4}dx=-\frac{1}{3}x^{-3}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-1\right)=\frac{7}{24}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^7 \frac{dx}{(x-4)^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение. Вычислить данный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница, нельзя. Если применить формулу Ньютона-Лейбница формально, то получим неверный результат. Действительно,

$$I=\int\limits_0^7 \frac{dx}{(x-4)^2}=-\frac{1}{(x-4)}\Bigg|_0^7=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}.$$

Отметим, что подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}>0$, и, следовательно, согласно свойствам определенного интеграла I не может равняться отрицательному числу. Дело в том, что подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}$ в точке $x = 4$ имеет разрыв второго рода (бесконечный), принадлежащий отрезку интегрирования. Значит, применять формулу Ньютона-Лейбница *нельзя*.

Пример 5. Доказать, что для любых $m\in N$ и $n\in N$ справедливы равенства:

1. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=0$; 2. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=0$, $m\neq n$;

3. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=0$, $m\neq n$; 4. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx$.

Решение.

1. Так как $2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, тогда

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)xdx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)xdx.$$

Если $m\neq n$, тогда

$$I=\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

так как $\cos\pi k=(-1)^k$ для любого $k\in Z$.

Если $m = n$, то $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2nxdx=0$ для любого $n\in N$. Следовательно, $I = 0$ для любых m, $n\in N$.

2. Так как $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$; $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ и учитывая, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2nxdx=0$ при любом $n\in N$, а $\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$, получим искомое равенство.

Равенства 3 и 4 в примере 5 решаются аналогично.

Замечание. При вычислении определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница, следует проверять условия законности его применения. Формула Ньютона-Лейбница применяется для вычисления определенного интеграла от непрерывности на $[ab]$ функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда равенство $F'(x)=f(x)$ выполняется для любого

$x \in [ab]$. ($F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[ab]$). В частности, $F(x)$ первообразная должна быть непрерывной функцией на всем отрезке $[ab]$. Так как при нарушении законности применения формулы Ньютона-Лейбница, приходим к неверному результату.

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. 1. Так как одна из первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ непрерывной на $[0;\sqrt{3}]$ – функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывная на $[0;\frac{\pi}{3}]$, и равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется на всем этом отрезке, то формула Ньютона-Лейбница применима, и получим искомый интеграл

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}.$$

2. Рассмотрим другой способ вычисления исходного интеграла

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} 0] = -\frac{\pi}{6},$$

где $\quad (\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2})' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \neq \pm 1$.

Результат неверный, так как интеграл отовсюду положительной, непрерывной функции на $[0;\sqrt{3}]$ оказался отрицательным. Ошибка связана с тем, что функция $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ в точке $x = 1 \in [0;\sqrt{3}]$ терпит разрыв первого рода:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Правильный результат можно найти и при помощи функции

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

Для этого отрезок интегрирования $[0;\sqrt{3}]$ следует разбить на два отрезка $[0;1]$ и $[1;\sqrt{3}]$, и учесть предельные значения функции $F(x)$ при $x \to 1 \mp 0$. В этом случае на каждом из отрезков первообразная – непрерывная функция, а, следовательно, законно применение формулы Ньютона-Лейбница

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2})\Big|_0^1+(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2})\Big|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=(\frac{\pi}{4}-0)+(-\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{4}))=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

Решение. Так как $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|=\begin{cases}\cos x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$

Следовательно,

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-0)-(-1-0)=2.$$

Замечание. Если не обратить внимание на то, что cos x отрицателен на отрезке $[\frac{\pi}{2};\pi]$, то получим заведомо неверный результат так как

$$I=\int_0^{\pi}\cos xdx=0.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $I=\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}=0.$

Решение. 1) так как имеет место $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$. Поэтому

$$I=\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_0^{100\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,dx=\sqrt{2}(\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin xdx-$$

$$-\int_{3\pi}^{4\pi}\sin xdx+...+\int_{99\pi}^{100\pi}\sin xdx)=\sqrt{2}(2+2+...+2)=200\sqrt{2};$$

2) предложим второй способ решения данной задачи.

Так как имеет место равенство $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$ и так как $|\sin x|$ имеет период равный π, то

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|\,dx=100\cdot\sqrt{2}\int_0^{100\pi}\sin xdx=200\sqrt{2}.$$

§5. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a_0;b_0)$, а функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на интервале $(\alpha_0;\beta_0)$ причем $\varphi(t)\in(a_0,b_0)$ при всех $t\in(\alpha_0,\beta_0)$. Тогда если $\alpha\in(\alpha_0,\beta_0)$, $\beta\in(\alpha_0,\beta_0)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $a\in(a_0,b_0)$ и $b\in(a_0,b_0)$, а функция $f(x)$ непрерывна на (a_0,b_0), то в силу формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

где $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a_0,b_0)$

Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции, стоящей под знаком интеграла в правой части равенства (1), так как

$$\frac{d}{at}F(\varphi(t))=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t). \tag{2}$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница к функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ с учетом $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, получим

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a). \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует формула (1).

Замечание. Одна из важных особенностей формулы (1) состоит в следующем: при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной, получив искомую функцию, выраженную через новую переменную t, мы должны были возвращаться к старой переменной x, в определенном интеграле нет надобности. Если вычислен второй из определенных интегралов в равенстве (1), который представляет собой число, то тем самым вычислен и первый.

Пример 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-a,a]$. Доказать что:

1) если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

2) если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Решение: 1) если $f(x)$ нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-a, a]$, то, полагая $x = -t$ и используя формулу (1) получаем

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} (-f(t))dt = -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx,$$

откуда следует, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} (x)dx = 0$;

2) если $f(x)$ четная функция, то $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Откуда следует, что имеет место равенство $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Пример 2. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на R и периодическая с периодом T функция, то для любого $a \in R$ справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \qquad (4)$$

Решение. В силу свойств определенного интеграла имеем

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx. \qquad (5)$$

Полагая $x = t + T$ и учитывая, что функция $f(x)$ определена на R и $f(t + T) = f(t)$ для всех $t \in R$ в силу периодичности функции $f(x)$, получаем

$$\int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = -\int\limits_{a}^{0} f(x)dx. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует формула (4)

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{2{,}5\pi} \sin^7 x \cdot \cos^{10} x dx$.

Решение. Подынтегральная функция периодическая с периодом 2π и нечетная, поэтому

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cdot \cos^{10} x dx = 0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

а) $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ б) $I=\int\limits_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Решение:

а) $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx;$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left|\begin{matrix}x=\pi-t\\ t\in[\frac{\pi}{2},0]\\ dx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Тогда

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi(\mathrm{arctg}(\cos\frac{\pi}{2})-\mathrm{arctg}(\cos 0))=\frac{\pi^2}{4}.$$

Замечание. Неопределенный интеграл $I=\int\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ не выражается в элементарных функциях. Но данный определенный интеграл, как показано выше, вычисляется, если использовать прием, связанный со свойствами функции и области интегрирования.

б) Ответ $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$. Применяя подстановку $x=\mathrm{tg}t$, получим

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(t+\frac{\pi}{4})-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt=\frac{\pi}{2}+I_1-I_2,$$

затем доказываем, что $I_1=I_2$, применяя к интегралу I_2 подстановку $t=\frac{\pi}{4}-U$.

Данный пример по содержанию аналогичен 4 а), т.к. неопределенный интеграл $I=\int\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ не выражается в элементарных функциях, а соответствующий определенный интеграл вычисляется.

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Пусть $x=2\sin t$, $-\frac{\pi}{4}\le t\le+\frac{\pi}{4}$. Функция $x=\varphi(t)=\sin 2t$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной в определенном интеграле, так как она непрерывна, дифференцируема, монотонна и $\varphi(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

$$dx=2\sin tdt,\quad \sqrt{4-x^2}=2\sqrt{\cos^2 t}=2\,|\cos t|=\cos 2t,$$

так как $\cos t>0$ для $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

Тогда

$$I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=2[t+\frac{1}{2}\sin t]\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi+\sqrt{2}.$$

Вычислить интегралы, применяя следующие подстановки:

1. $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=4-2\ln 3$, полагая $t=\sqrt{x}$; 2. $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{2}$, полагая $x = 2t$;

3. $\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1$, полагая $t=\sqrt{1-x^2}$; 4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx=\frac{1}{3}$, полагая $\sin x=t$;

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)dx}{3+\sin 2x}=\frac{\ln 3}{4}$, полагая $\sin x-\cos x=t$;

6. $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\mathrm{arctg}e-\frac{\pi}{4}$, полагая $e^x=t$; 7. $\int\limits_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\pi$, полагая $x=\sin^2 t$;

8. $\int\limits_{3}^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = 8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$, полагая $x-2=t^3$;

9. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = \frac{4-\pi}{2}$, полагая $e^x-1=t^2$;

10. $\int\limits_{1}^{4} \frac{ydy}{\sqrt{2+4y}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, полагая $2+4y=t$.

Проверить следующее интегрирование:

1. $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}dx = \frac{98}{3}$;

2. $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{52}{9}$;

3. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x^2+9} = 10+\frac{9}{2}\ln 3$;

4. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$;

5. $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx = 1$;

6. $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$;

7. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$;

8. $\int\limits_{0}^{4} \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\pi$;

9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$;

10. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Обосновать, справедлива ли подстановка или замена переменных в следующих интегралах:

1. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{12-5\cos x}$, подстановка $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$;

2. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, подстановка $t=\mathrm{tg}x$;

3. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, подстановка $t=\mathrm{tg}x$;

4. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt[3]{1-x^2}dx$, подстановка $x=\cos t$;

5. Можно ли в интеграле $I=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ при использовании замены переменной $x=\sin t$ в качестве новых пределов интегрирования взять числа π и $\dfrac{\pi}{2}$?

Ответ: 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да.

§6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu. \qquad (1)$$

Доказательство. Так как $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$ то

$$d(uv)=udv+vdu.$$

Интегрируя последнее равенство на отрезке $[a,b]$, получим

$$\int\limits_a^b d(uv)=\int\limits_a^b udv+\int\limits_a^b vdu.$$

Откуда, согласно формуле Ньютона-Лейбница, интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_a^b d(uv)=uv\Big|_a^b,$$

тогда имеем

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

А это и есть формула (1) – формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1 x^3\operatorname{arctg}xdx.$$

Решение.

$$I=\int_0^1 x^3\operatorname{arctg}x\,dx=\begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg}x; du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x^3dx; v=\dfrac{x^4}{4}\end{vmatrix}=\frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}dx=\frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\frac{1}{4}[\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x]\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл:

1. $I=\int_0^1 xe^x dx$;   2. $I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{4}dx$.

Решение.

1. $I=\int_0^1 xe^x dx=\begin{vmatrix} u=x; du=dx \\ dv=xe^x; v=e^x\end{vmatrix}=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=x e^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=1$.

Заметим, что выбор u и v в данном интеграле законен, т.к. функции $u = x$ и $v=e^x$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[0;1]$.

$$2.\quad I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{x}dx=\begin{vmatrix} \sqrt{x}=t;\ x=t^2;\ dx=2tdt \\ x=0;\ t=0;\ x=\dfrac{\pi^2}{4};\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{vmatrix}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=$$

$$=\begin{vmatrix} u=t;\ du=dt \\ dv=\sin tdt;\ v=-\cos t\end{vmatrix}=2\left[-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt\right]=2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

Итак $I=2$.

Пример 3. Проверить справедливость равенства:

1. $\int_0^1\arcsin x dx=\frac{\pi}{2}-1$;   2. $\int_0^3\ln(x+3)dx=3(\ln 12-1)$;

3. $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;   4. $\int_{-a}^{a}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=a^2(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$;

5. $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx=\pi\sqrt{2}-4$;   6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$;

7. $\int\limits_{-a}^{a}\frac{\ln(2a-x)dx}{\ln(4a^2-x^2)}=a;\ \ (\mathrm{a}>\frac{\sqrt{3}}{3})$; 8. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+e^{\cos x}})dx=1$;

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\sin x)dx}{1+\cos x}=\frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3})$; 10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\cos(m+2)xdx=0$;

11. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos(m+2)xdx=\frac{-2}{m+1}$; 12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nxdx=\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$;

13. $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)\cdot P_m(x)dx=0,\ \ \mathrm{m}\neq\mathrm{n}$; 14. $\int\limits_{-1}^{1}x^n\cdot P_n(x)dx=\frac{n!}{(2n+1)!!}$;

15. $\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$.

Пример 4. Доказать, что если $f''(x)$ непрерывная функция на отрезке $[ab]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b xf''(x)dx=(bf'(b)-f(b))-(af'(a)-f(a)).$$

Пример 5. Доказать, что если $u^{(n)}(x)$ и $v^{(n)}(x)$ непрерывные функции на отрезке $[ab]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b u\cdot v^{(n)}dx=u^{(n-1)}\cdot v\Big|_a^b-v^{(n-2)}\cdot u^1\Big|_a^b+\ldots+(-1)^n\int v\cdot u^{(n)}dx.$$

§7. Несобственные интегралы

Определение несобственных интегралов

При определении интеграла Римана как предела интегральной суммы предполагалось, что справедливы следующие условия:

1) пределы интегрирования a и b конечные числа;
2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае интегралы называют собственными. Если хотя бы одно из условий, указанных выше, нарушено, то определение интеграла по Риману теряет смысл, а интегралы в этом случае называют несобственными. Действительно, если пределы интегрирования бесконечные отрезки, то нельзя данный отрезок разбить на n частичных отрезков конечной длины, а если функция не ограничена на отрезке $[a,b]$, то интегральная сумма не имеет конечного предела. Поэтому, естественно возникает вопрос о расширении понятия интеграла на случай бесконечного промежутка, а так же на случай, когда подынтегральная функция является неограниченной.

Несобственные интегралы являются обобщением определенных интегралов в случае бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций.

7.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (несобственный интеграл первого рода)

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,\infty)$, тогда $f(x)$ будет непрерывна на любом конечном отрезке $[a,b]$, $a<b$ и для нее существует определенный интеграл

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx,$$

который с геометрической точки зрения определяет площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс.

Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называют *несобственным интегралом* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a,b)$.

Итак, по определению, имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Если предел в равенстве (1) существует и он – конечное число, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ является сходящимся (сходится).

Если предел (1) не существует, или равен бесконечности, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Аналогичным образом определяют несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty, b]$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и он конечный, то несобственный интеграл называют сходящимся, если предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл – расходящийся.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$, обозначаемый $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

По определению имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx. \tag{3}$$

Причем данный несобственный интеграл называется сходящимся, если оба предела в (3) существуют. Если хотя бы один из пределов (3) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Интегралы (1) – (3) называют также несобственными интегралами первого рода.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл означает, что фигура ограничена кривой $y = f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$, осью Ox и промежутком $-\infty < x < +\infty$ $(x\in[a;+\infty)$ или $x\in(+\infty;a])$ и имеет конечную площадь S. Если площадь соответствующей фигуры не ограничена, то соответствующий интеграл является расходящимся.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл:

1) $\int\limits_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+6}$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x\,dx$.

Решение: 1) По определению имеем

$$\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^b\frac{dx}{\ln^2 x}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^b\frac{d\ln x}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_e^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln e}\right)=1.$$

Таким образом, данный интеграл сходится и его величина равна 1.

2) При решении данного примера учитываем, что оба предела бесконечны, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+6}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Bigg|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Bigg|_0^b=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Значит, данный интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{3}$.

3) Если $\alpha\neq 1$, тогда имеем $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b=\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$.

Если $\alpha>1$, существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$, т.е. исходный интеграл сходится, причем $I(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$.

Если $\alpha<1$, то интеграл будет расходящимся, т.к. $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$.

Если $\alpha=1$, искомый интеграл также расходится, т.к.

$$\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\ln|b|\to+\infty\quad\text{при}\quad b\to+\infty.$$

4) По определению имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}x\sin x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b x\sin x\,dx=\begin{vmatrix}u=x;\ du=dx\\ dv=\sin x;\ v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-x\cos x\Big|_0^b+\int\limits_0^b\cos x\,dx\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[-b\cos b+\sin b\right].$$

Но этот предел не существует, значит, данный интеграл расходится.

7.2. Несобственные интегралы от неограниченной функции на конечном промежутке (несобственный интеграл второго рода)

1. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;c]$ при любом $c\in[a;b)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx$, то этот предел называют несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$. Таким образом, по определению имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел (1), то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, если предел (1) не существует или равен бесконечности, то данный интеграл называется расходящимся.

2. Аналогично для функции $f(x)$, определенной на конечном промежутке $[a;b)$ и интегрируемой на любом отрезке $[c;b]$ при любом $c\in[a;b)$, по определению принимают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Если предел (2) существует и он конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся; в противном случае – расходящимся.

3. Если функция $f(x)$ определена на конечном интервале $(a;b)$ интегрируема на отрезке $[m;n]$, $[m;n]\subset(a;b)$ то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $(a;b)$ определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{m\to a+0\\ n\to b-0}}\int\limits_n^m f(x)dx. \qquad (3)$$

Если предел (3) существует и он конечный, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

4. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ за исключением точки $c\in(a;b)$, и интегрируема на отрезках $[a;m]$ и $[n;b]$ при любых m и n

таких, что $a \le m < c < n \le b$, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m \to c-0} \int_a^m f(x)dx + \lim_{n \to c+0} \int_n^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Если оба предела в правой части выражения (4) существуют и конечны, то интеграл называется сходящимся, и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ не определена на конечном промежутке $(a;b)$ за исключением точек $x_k \left(k = \overline{1,n}\right)$, где $a = x_0 < x_1 < ... x_n = b$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ понимается как сумма несобственных интегралов по промежуткам $(x_{k-1}, x_k)\left(k = \overline{1,n}\right)$, и по определению считается сходящимся по всем промежуткам $(x_{k-1}, x_k)\left(k = \overline{1,n}\right)$. Если хотя бы по одному промежутку $(x_{k-1}, x_k)\left(k = \overline{1,n}\right)$ имеем расходимость, то исходный интеграл является расходящимся.

С *геометрической точки зрения* несобственный интеграл второго рода означает следующее: площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a,\ x = b\ (x \to b-0;\ x \to a+0;\ x \to c \pm 0)$, имеет конечную площадь S (рис. 8).

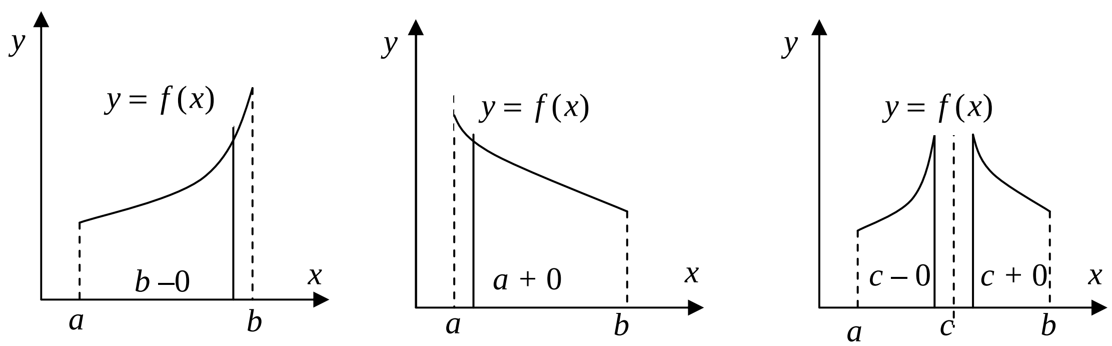

Рис. 8

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл

$$1)\ I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}; \quad 2)\ I = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx; \quad 3)\ I = \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{x^{2/3}}dx.$$

Решение.

1) функция $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[5]{\ln x}}$ неограниченна в окрестности точки $x=1$. На любом отрезке $[1+\varepsilon;e]$, $\varepsilon>0$ функция интегрируема, так как она непрерывна. Следовательно

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\ln^{-\frac{1}{5}}x\,d\ln x=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{5}{4}\ln^{\frac{4}{5}}x\Big|_{1+\varepsilon}^{e}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{5}{4}\Big[1-\sqrt[5]{\ln^4(1+\varepsilon)}\Big]=\frac{5}{4}.$$

Значит, данный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{5}{4}$;

2) так как данный интеграл I можно представить в виде

$$I=\int_1^2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx-\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\int_1^2\sqrt{x-1}dx-\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=I_1+I_2.$$

В интеграле I_1 подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[1;2]$ поэтому

$$I_1=\int_1^2(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$$

Интеграл I_2 несобственный, подынтегральная функция неограниченна в окрестности точки $x=1$, поэтому

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=2.$$

Тогда $I=\dfrac{2}{3}-2=-\dfrac{4}{3}$;

3) так как

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{x^{2/3}}dx=3\int_{-1}^{1}x^{\frac{4}{3}}dx+2\int_{-1}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx=3\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{18}{7}+2\cdot I_1.$$

Так как I_1 – несобственный интеграл, $x=0$ – точка разрыва, поэтому

$$I_1=\int_{-1}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx=\int_{-1}^{0}x^{-\frac{2}{3}}dx+\int_{0}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}x^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}x^{-\frac{2}{3}}dx=3+3=6.$$

Тогда $I=\dfrac{18}{7}+12=\dfrac{102}{7}$.

§ 8. Интегрирование как процесс суммирования. Приложения определенного интеграла

До сих пор процесс интегрирования рассматривался как процесс обратный дифференцированию. Это была одна сторона дела, если можно сказать, чисто математическая, в большей степени формальная. Другая сторона, и притом несравненно более значимая для разнообразных применений интегрального исчисления к естествознанию, – это, то обстоятельство, что интегральное исчисление дает эффективный способ находить пределы сумм бесконечно увеличивающегося числа бесконечно уменьшающихся слагаемых. Еще до Ньютона решение ряда проблем естествознания сводились к отысканию пределов таких сумм, потом все это было систематизировано. Таким образом, самой жизнью было востребовано интегральное исчисление несколько раньше, чем дифференциальное исчисление. С этой точки зрения интегральное исчисление получает вид уже не исчисления, обратного дифференцированию, а процесса суммирования.

Две эти стороны интегрального исчисления тесно переплетаются между собой и, без процесса дифференцирования, интегральное исчисление как процесс суммирования не много бы стоил. Это действительно так, потому, что процесс суммирования – это процесс не прямой, а косвенный.

Прямым образом находить пределы сумм удается в крайне редких случаях. Так как решена проблема *обратная дифференцированию*, то есть нахождение неопределенного интеграла $\int f(x)dx$, то естественно, и решается задача суммирования, так как предел суммы

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1},$$

где $x_0 = a, x_n = b$ и $n \to +\infty$ при $\Delta x_i \to 0$ равен определенному интегралу

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Таким образом, вся эффективность интегрального исчисления основана на возможности находить определенный интеграл (1), не производя никаких переходов к пределу.

8.1. Общая схема применения интегрального исчисления

Разнообразные области естествознания (физика, химия, механика, геометрия) являются постоянными источниками, ставящими задачи для применения интегрального исчисления.

Так как математика изучает объекты любой природы, то естественно ожидается, что и применение интегрального исчисления будет иметь одну и ту же схему. Эта схема имеет следующую структуру:

1. Пусть при изучении некоторого процесса требуется определить некоторую величину V.

2. Разбиваем V на большое число мелких частей и представляем каждую из полученных частей в виде произведения

$$f(c_i)\cdot\Delta x_i,$$

где $f(x)$ – функция известная нам и непрерывна;
$c_i \in [x_{i-1}x_i]$.

3. Получаем равенство вида (интегральная сумма)

$$V=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

где $x_0=a,\quad x_n=b$.

4. Переходим к пределу при $\max\Delta x_i \to 0$, находим выражение искомой величины V в виде определенного интеграла

$$V=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

5. Если найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, то искомую величину V определим по формуле Ньютона-Лейбница.

8.2. Площадь плоской фигуры

1. Площадь криволинейной трапеции.

Если задана криволинейная трапеция (рис. 9): $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$, то

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

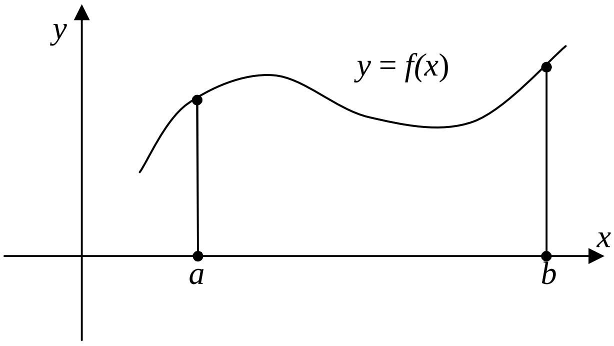

Рис. 9

Пример 1. Вычислить площадь фигуры (рис. 10), заключенной между параболой $y = x^4$ и прямыми $x = 1$ и $y = 0$.

$$S = \int_0^1 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры (рис. 11), заключенной между параболой $y = x^4$ и прямыми $y = 1$ и $x = 0$.

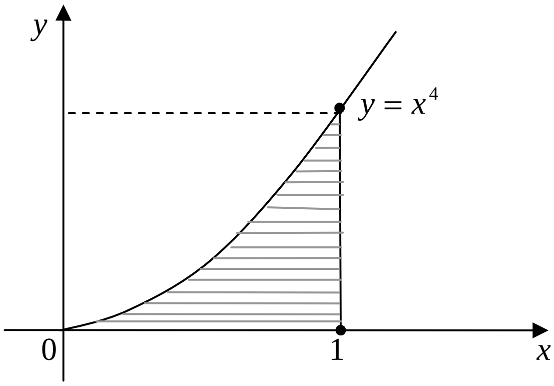

Рис. 10

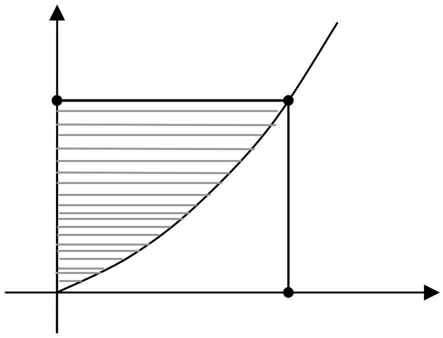

Рис. 11

$$S = S_{OABC} - S_{OBC} = 1 - \int_0^1 x^5 dx = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Или другим способом $x = \sqrt[4]{y}$, тогда $S = \int_0^1 y^{\frac{1}{4}} dy = \left.\frac{4}{5} y^{\frac{5}{4}}\right|_0^1 = \frac{4}{5}.$

Пример 3. Вычислить площадь треугольника ΔABC (рис. 12), если $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,0)$.

Решение. Треугольник ΔABC представляет собой криволинейную трапецию, где криволинейная сторона – это ломаная линия ABC. Напишем уравнение ABC.

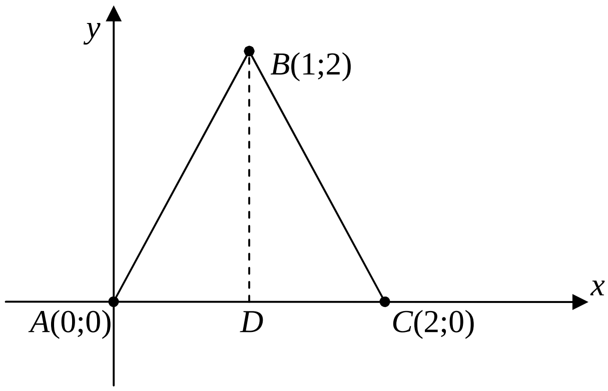

Рис. 12

Уравнение стороны AB: $f(x) = 2x$ при $x \in (0;1]$.
Уравнение стороны BC: $f(x) = -2(x-2)$ при $1 \le x \le 2$.
Поэтому имеем

$$S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 2xdx + \int_1^2 -2(x-2)dx = 2.$$

Этот результат можно получить и геометрически

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

Пример 4. Найти площадь, заключенную между параболой $x^2 = 4ay$ и локоном Аньези $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, a > 0.

Решение. Для определения пределов интегрирования решаем совместно уравнения данных кривых. Получим $A(-2a;a)$ и $C(2a;a)$ – точки пересечения (рис. 13).

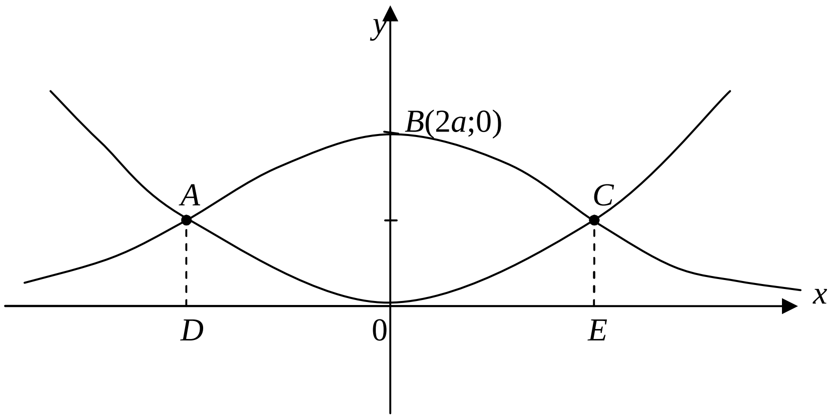

Рис. 13

$$S = S_{DECBA} - S_{DECOA} = 2\int_0^{2a} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}dx - 2\int_0^{2a} \frac{x^2 dx}{4a} = 2\pi a^2 - \frac{4}{3}a^2 = 2a^2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$

Пример 5. Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение. Искомая площадь равна $4 \cdot S_1$, где S_1 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной осями координат Ox и Oy и графиком функции

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad 0 \le x \le a.$$

$$S = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left.\left(\frac{bx}{2a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\right|_0^a = \pi ab.$$

Таким образом, имеем $S = \pi ab$.

В частности, площадь круга радиуса R равна πR^2.

Отсюда следует, что площадь кругового сектора (радиуса R), соответствующего центральному углу α, равна

$$\frac{\pi R^2}{2\pi}\alpha = \frac{R^2\alpha}{2}.$$

2. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме.

В случае, когда уравнение кривой задается в параметрической форме $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$, формулу вычисления площади можно получить из формулы

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

В самом деле, уравнения $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ можно рассматривать как формулы замены переменной, тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие значениям $x = a$ и $x = b$, т.е.

$$a = \varphi(t_1) \quad \text{и} \quad b = \varphi(t_2).$$

Это и есть формула вычисления площади кривой, заданной параметрически.

Замечание. Если граница фигуры задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь фигуры можно вычислить по одной из трех формул

$$S = -\int_a^b y(t)\cdot x'(t)dt; \qquad S = \int_a^b x(t)y'(t)dt; \qquad S = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - yx')dt,$$

где a и b – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (фигура остается слева).

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение. Запишем уравнение эллипса в параметрической форме

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad \mathrm{t}\in[0;2\pi].$$

В этом случае удобно вычислить сначала

$$xy'-yx'=a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t=ab.$$

Тогда $S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(xy'-yx')dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}abdt=\pi ab$.

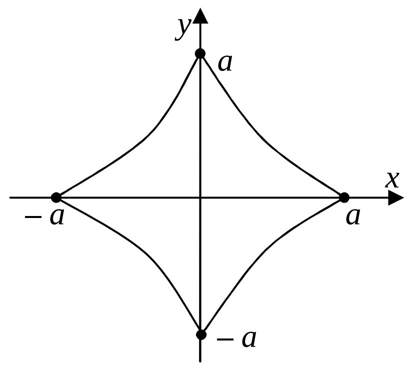

Рис. 14

Пример 7. Вычислить площадь астроиды (рис. 14) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Запишем уравнение астроиды в параметрической форме

$$x=a\cos^3 t;\quad y=a\sin^3 t,\quad t\in[0;2\pi].$$

Здесь также удобно вычислить сначала

$$xy'-yx'=a^2(\cos^3 t\cdot 3\sin^2 t\cos t+\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t)=3a^2\cos_2 t\sin{}^2 t.$$

Тогда $S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(xy'-yx')dt=\frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}a^2\pi$.

Пример 8. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

Граница фигуры в этом случае состоит из дуги циклоиды $(0\le t\le 2\pi)$ и отрезка оси Ox $(0\le x\le 2\pi a)$ (рис. 15).

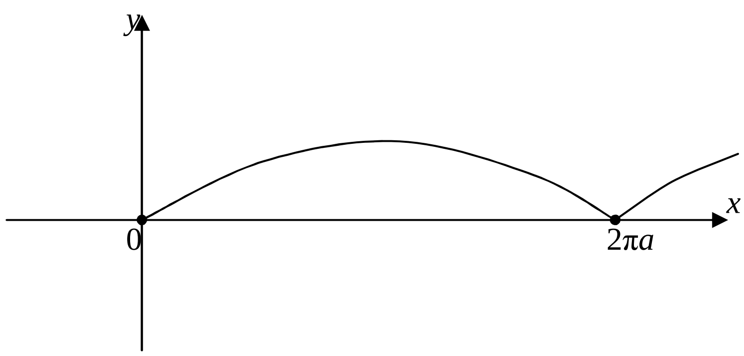

Рис. 15

Применим формулу $S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} y x' dt$.

На отрезке оси Ox имеем $y = 0$, то остается вычислить интеграл (с учетом направления обхода)

$$S = -\int\limits_{2\pi}^{0} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой (рис. 16)

$$x = a \sin t, \quad y = b \sin 2t.$$

Решение. Проведем исследование данной кривой. Отметим, если заменить t на $(\pi - t)$, то переменная x не меняется, y меняет свой знак, а это значит, что данная кривая симметрична относительно оси Ox. Если же заменить t на $(t + \pi)$, то переменная y не меняет знак, а x – меняет, следовательно, это симметрия кривой относительно Oy. Таким образом, данная кривая симметрична относительно осей координат.

В силу того, что функции $x = a \sin t$ и $y = b \sin 2t$ имеют общий период 2π, то $t \in [0; 2\pi]$.

Переменная x и y сохраняют одновременно знак (положительный) при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаем часть кривой, лежащей в первой четверти. Затем, в силу симметрии относительно осей координат, строим искомую кривую, общий вид которой приведен ниже

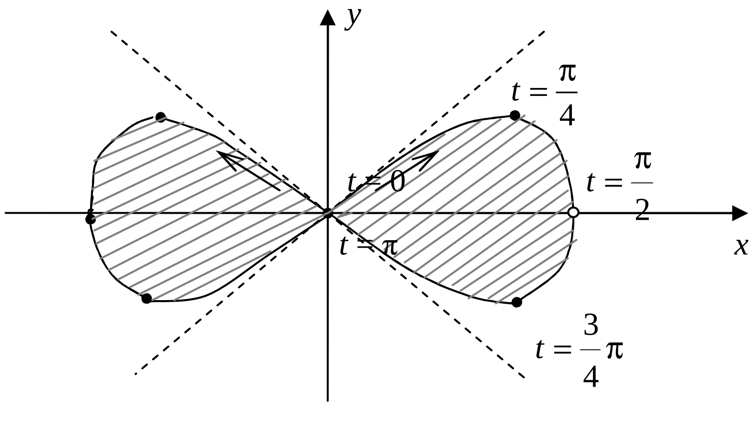

Рис. 16

Искомая площадь будет равна

$$S = 2\int\limits_0^{\pi} y x' dt - 2ab\int\limits_0^{\pi} \sin 2t \cos t = 4ab\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = -\frac{4ab}{3}\cos^3 t \Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}ab.$$

3. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат.

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченную кривой $\rho = f(\theta)$ и двумя радиус-векторами с полярными углами α и β. Такую фигуру называют криволинейным сектором.

Теорема. Криволинейный сектор *Д* – квадрируемая фигура, площадь которой S выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Доказательство. Пусть для отрезка (рис. 17) $[\alpha,\beta]$ построено разбиение $T = \left\{\varphi_i, i = \overline{0,n}\right\}$.

Пусть для данного разбиения T $\Delta\varphi_i (i = \overline{0,n})$ – центральные углы секторов и $\rho_i (i = \overline{0,n})$ – соответственно их радиусы. Тогда имеем

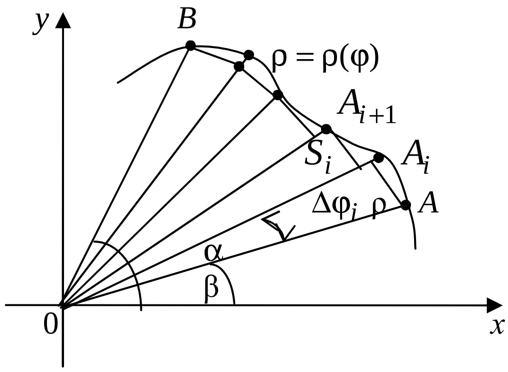

Рис. 17

$$S_{OAB} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta\varphi_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\Delta\varphi_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Данная фигура *Д* квадрируема, т.к. квадрируема каждая из фигур S_i (сектор OA_iA_{i-1}).

Таким образом, имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 10. Найти площадь фигуры *Д*, которая ограничена лемнискатой Бернулли, заданной уравнением $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Решение. Данная фигура (рис. 18) симметрична относительно координатных осей. Поэтому искомая площадь в 4 раза больше площади, расположенной в первой четверти, угол φ меняется в пределах $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

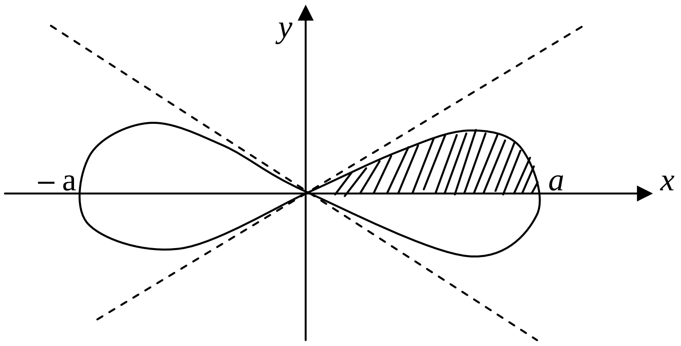

Рис. 18

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi=a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

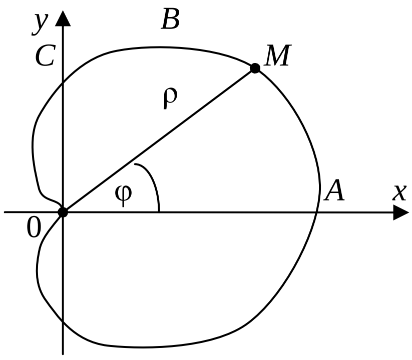

Рис. 19

Пример 11. Вычислить площадь кардиоиды (рис. 19)

$$\rho=a(1+\cos\varphi).$$

Решение. Так как кривая симметрична относительно полярной оси, то искомая площадь равна удвоенной площади *OABC*.

$$S=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

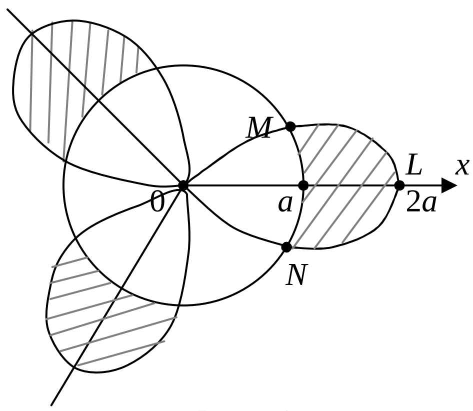

Рис. 20

Пример 12. Вычислить площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho=a$ и ограниченной кривой $\rho=2a\cos 3\varphi$ (рис. 20).

Решение. Так как функция $\rho=2a\cos 3\varphi$ имеет период $T=\frac{2\pi}{3}$, то при изменении φ от $-\pi$ до π радиус-вектор описывает три равных лепестка кривой, при этом следует учесть, что $\cos 3\varphi \ge 0$, т.е.

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, \quad k \in Z .$$

Значит, один из лепестков получаем при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$, другие при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$ и $\varphi \in \left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Вырезая из полученных лепестков части, принадлежащие кругу $\rho = a$, получим фигуру, площадь которой требуется найти

Для определения координат M и N точек пересечения кривых решаем уравнение $2a\cos 3\varphi = a$, т.е. $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = -\frac{\pi}{9}$ и $\varphi = \frac{\pi}{9}$.

Тогда

$$S = S_{OMLNO} - S_{OMN} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 4a^2\cos^2 3\varphi \, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} a^2 d\varphi = a^2\left(\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{18}\right)$$

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ (рис. 21).

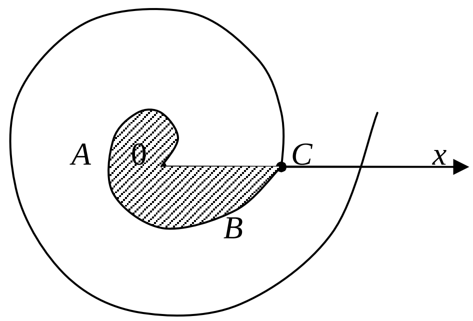

Рис. 21

Решение.

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 .$$

Пример 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ и $\rho = 3a\sin\varphi$ (рис. 22).

Решение. Окружность $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ расположена в правой полуплоскости, проходит через полюс $\rho = 0$. Окружность $\rho = 3a\sin\varphi$ расположена в верхней полуплоскости и проходить через полюс $\rho = 0$. Таким образом, полюс

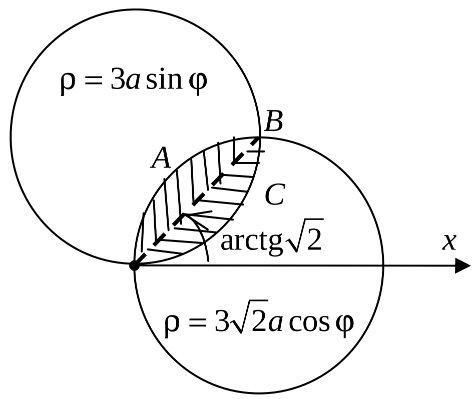

Рис. 22

есть точка пересечения окружностей. Другую точку пересечения найдем из уравнения $3\sqrt{2}a\cos\varphi = 3a\sin\varphi$. Точка B имеет координаты $(\operatorname{arctg}\sqrt{2}, a\sqrt{6})$.

$$S = S_{OABO} + S_{OCBO} = \int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9a^2\cos^2\varphi\, d\varphi + \int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \frac{9}{2}a^2\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{9}{4}a^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$= \frac{9a^2}{4}\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$$

8.3. Длина дуги плоской кривой

1. ***Определение длины дуги***. Пусть дана кривая AB (рис. 23).

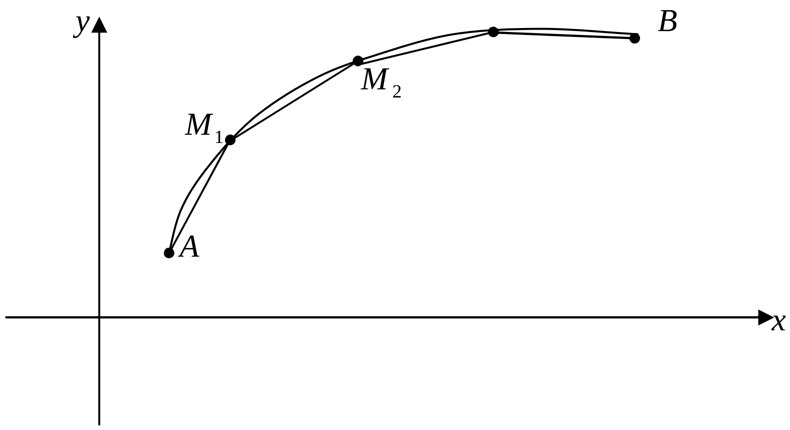

Рис. 23

Точками $M_0 = A,\ M_1,\ M_2, ..., M_n = B$ разбиваем дугу AB на n частей и рассмотрим ломаную l_n, вершинами которой служат точки $A,\ M_1,\ M_2, ..., M_{n-1}, B$. Впишем ее в дугу AB.

За длину дуги AB принимают

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l_n .$$

Дугу, имеющую конечную длину, называют спрямляемой.

2. ***Длина дуги плоской кривой, заданной явно***.

Пусть даны кривая $y = f(x)$ и две точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Требуется вычислить длину дуги AB.

1. Дугу AB точками $M_i\,(i=0,\overline{n-1})$ разбиваем на n дуг, концы которых попарно соединяем хордами, – получим вписанную ломаную. Искомая длина дуги AB есть предел суммы длин этих хорд или предел ломаной, вписанной в дугу AB (рис. 24).

2. Найдем длину одной из хорд, например, M_iM_{i+1} (рис. 25)

$$\left|M_iM_{i+1}\right| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot \Delta x_i\,.$$

По теореме о среднем имеем

$$\Delta y_i = f(x_i+\Delta x) - f(x_i) = f'(c_i)\cdot \Delta x_i;\ c_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right].$$

Тогда $\left|M_iM_{i+1}\right| = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot \Delta x_i$.

Аналогично и для других хорд находим их длины.

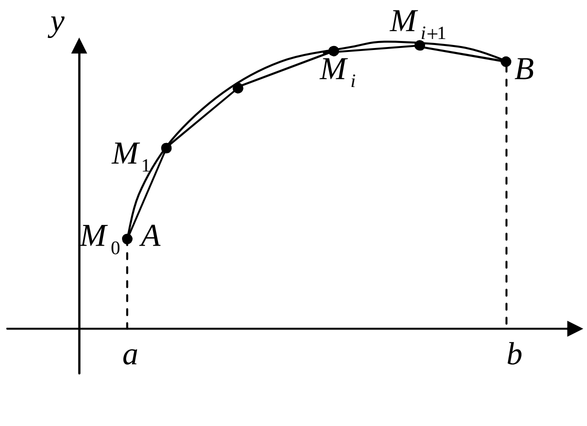

Рис. 24

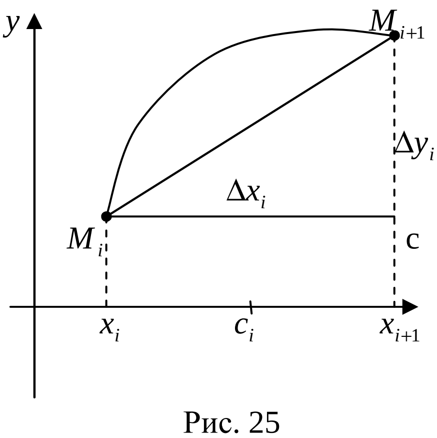

Рис. 25

3. Тогда

$$l_{AB} = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\max \Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\left|M_iM_{i+1}\right| = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\max \Delta x_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Таким образом, длина дуги кривой, заданной явно $y = f(x)$ на отрезке $[ab]$ определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Пример 1. Вычислить длину дуги параболы $x^2 = 2py$ на отрезке [0,1].

Решение. В данном случае имеем $y = \dfrac{x^2}{2p}$; $y' = \dfrac{x}{p}$.

Тогда $$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^1 \sqrt{x^2 + p^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\ln\left(1 + \sqrt{1+p^2}\right) - \frac{p}{2}\ln p.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{\ln y}{2}$, заключенной между точками с ординатами $y = 1$ и $y = 2$.

Решение. В этом случае за независимую переменную принимаем y, тогда

$$x' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + (x')^2} = \sqrt{\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{2y}.$$

Следовательно,

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \int_1^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)dy = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Пример 3. Вычислить длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Решение. Астроида симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов. Поэтому достаточно найти длину дуги астроиды, заключенной между биссектрисой $y = x$ и осью Ox, и результат умножить на 8.

Для первой четверти имеем

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2} \quad \text{и} \quad y = 0 \ \text{при} \ x = a, y = x \ \text{при} \ x = \frac{a}{2^{3/2}}.$$

Тогда $$y' = \frac{3}{2}\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} = -x^{-1/3}\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad l = 8\int_{\frac{a}{2^{3/2}}}^{a} a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 6a.$$

3. Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме.

Пусть теперь кривая задана в параметрической форме

$$x=\varphi(t),\;\; y=\psi(t).$$

Рассмотрим случай, когда обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_1,t_2]$, причем нет таких $t\in[t_1,t_2]$, в которых одновременно $\varphi'(t)=0$ и $\psi'(t)=0$. Это условие означает следующее: для любого t всегда существует малый отрезок $[t-\Delta t,t+\Delta t]$, что на этом отрезке либо $\varphi'(t)\neq 0$, либо $\psi'(t)\neq 0$, т.е. либо $\varphi(t)$, либо $\psi(t)$ – монотонна. Значит на этом отрезке:

1) либо t выражается через x с помощью однозначной и монотонной функции $t=\varphi^{-1}(x)$, т.е. уравнение кривой можно записать в форме

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))=f(x);$$

2) либо t выражаем через y с помощью однозначной и монотонной функции $t=\psi^{-1}(y)$, т.е. уравнение кривой может быть записано в форме

$$x=\varphi(\psi^{-1}(y))=g(y).$$

Тогда имеем, что

$$\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Тогда длина искомой кривой, заданной в параметрической форме определяется по формуле

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Пример 4. Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$

Решение. Астроида симметрична относительно осей координат, поэтому найдем ее длину в первой четверти и умножим на 4.

$$l=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\left|\begin{array}{l} x'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t\\ y'=3a\sin^2 t\cdot\cos t\\ (x')^2+(y')^2=9a^2\cdot\cos^2 t\sin^2 t\end{array}\right|=$$

$$=4\cdot\frac{3a}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,d2t=3a(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2}=6a.$$

4. Длина дуги пространственной кривой.

Для пространственной кривой, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \lambda(t)$$

без кратных точек определение длины дуги дается в таком же виде, как и для плоской кривой. В этом случае получается формула длины дуги, аналогичная формуле, как и для плоской кривой с учетом третьей координаты, т.е.

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt .$$

Пример 5. Вычислить длину винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $z = ct$ от точки $A(t = 0)$ до точки M (t – любая).

Решение. В данном случае имеем

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

тогда

$$l = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2}\, t .$$

Этот результат действительно такой, потому что при разворачивании цилиндрической поверхности винтовая линия на ней превратится в наклонную прямую.

Пример 6. Вычислить длину кривой Вивиани

$$x = R\sin^2 t,\ \ y = R\sin t\cos t,\ \ z = R\cos t$$

Решение. В данном случае имеем

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} = R \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} .$$

Тогда длина кривой выразится эллиптическим интегралом 2-го рода

$$l = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} = 4\sqrt{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}\, dt.$$

5. Длина дуги, заданной в полярных координатах.

Получим формулу вычисления длины дуги кривой в случае, когда уравнение кривой задано в полярных координатах

$$\rho = f(\theta) .$$

Для получения формулы длины дуги, заданной в полярных координатах, используем формулу длины дуги в параметрической форме. Так как соотношение между декартовыми и полярными координатами точки имеют следующий вид

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

а ρ и θ связаны уравнением кривой $\rho = f(\theta)$, то, как x, так и y можно выразить через одну переменную (параметр) θ:

$$x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta.$$

Таким образом, получаем, что искомая кривая задана в параметрической форме, тогда

$$x' = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta, \; y' = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (\rho')^2 + \rho^2,$$

а, следовательно,

$$l = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\theta,$$

где $\rho = f(\theta), \; \rho' = f'(\theta)$.

При этом соответствующая формула дифференциала дуги в полярных координатах

$$(de)^2 = (dp)^2 + \rho^2 (d\theta)^2.$$

Пример 7. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1-\cos\theta)$ (рис. 26).

Решение. Кардиоида симметрична относительно Ox и в начале координат имеет точку возврата, а касательная совпадает с осью Ox.

Мы получим половину длины кардиоиды, при изменении полярного угла от 0 до π. Тогда

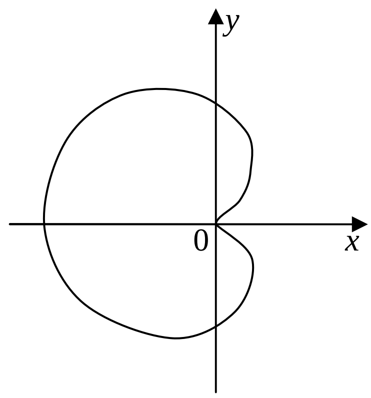

Рис. 26

$$\frac{l}{2} = a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2a\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a.$$

Следовательно, длина всей кардиоиды равна $8a$.

8.4. Объем тела

1. Понятие объема тела. Понятие объема вводится аналогично понятию площади. При конструктивном определении объема рассматриваются *кубильяжи*, т.е. разбиение пространства на одинаковые кубы.

Рассмотрим кубильяж, у которого длина ребер кубов равна $\dfrac{1}{10^n}$. Пусть пространственная фигура (тело) F содержит фигуру, составленную из a_n кубов этого кубильяжа, и содержится в фигуре, составленной из b_n таких кубов. Тогда $\dfrac{a_n}{10^{3n}}$ – значение объема фигуры F с недостатком, а $\dfrac{b_n}{10^{3n}}$ – с избытком.

Если фигура F такова, что пределы

$$\underline{V(F)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^{3n}}, \quad \overline{V(F)} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{10^{3n}}$$

совпадают, то фигура F называется *кубируемой*, а число $\underline{V(F)} = \overline{V(F)}$ называется объемом фигуры F и обозначается $V(F)$. Объем V есть функция, заданная на множестве всех кубируемых фигур и принимающая неотрицательные значения.

Как и площадь, объем может быть определен аксиоматически, причем аксиомы, на которых основывается понятие объема, совершенно аналогичны аксиомам площади:

1) функция V неотрицательна, то есть $V(F)\ge 0$ для любой кубируемой фигуры (тела);

2) функция V аддитивна, то есть, если F_1 и F_2 – кубируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то

$$V(F_1 \cup F_2) = V(F_1) + V(F_2);$$

3) функция V инвариантна относительно перемещений, то есть, если F_1 подобна F_2, то $V(F_1) = V(F_2)$;

4) единичный куб (то есть куб, ребро которого имеет длину 1) имеет объем 1.

2. Метод вычисления объемов методом сечений.

Пусть дано некоторое тело T, объем которого требуется вычислить. Построим сечения этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox

(поперечные сечения). Считаем, что в сечении получаются фигуры (рис. 27), площадь которых мы сможем вычислить. Отметим, что построенные сечения будут иметь площадь $S(x)$ – функция от x, $x \in [ab]$. Тогда объем тела, заключенного между двумя сечениями $x = a$ и $x = b$, определим следующим образом.

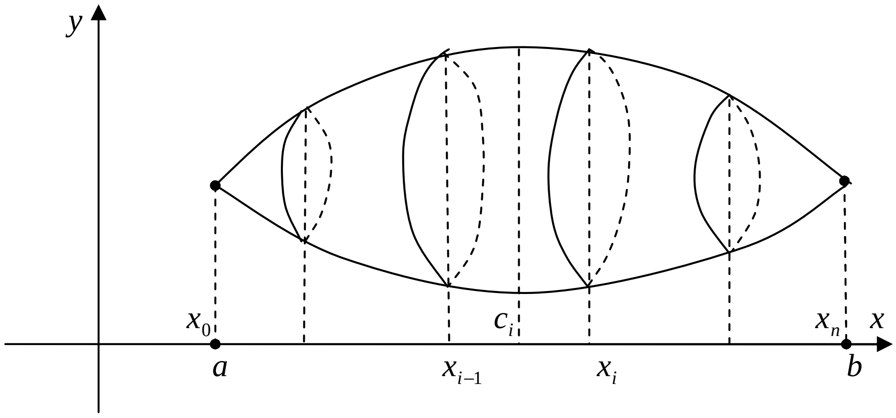

Рис. 27

Считаем, что данное тело имеет такую форму, что каждое сечение – квадрируемая фигура, площадь которой $S(x)$, причем $S(a) = S(b) = 0$, а функция $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Отрезок $[a,b]$ разбиваем на части точками деления:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b;$$

внутри каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку c_i и проведем через нее сечение $x = c_i$, перпендикулярное оси Ox; тогда тело T разобьется на слои. Каждый i-тый слой заменим цилиндром, имеющим основанием сечение, проходящее через точку c_i, а высоту – расстояние между двумя сечениями, то есть величина $[x_{i-1}, x_i] = \Delta x_i$.

Тогда $V_i = S(c_i) \cdot \Delta x_i$, а

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S(c_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx.$$

Следовательно, рассматриваемый объем равен

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения тела, проведенного через x перпендикулярно оси Ox.

Пример 1. Вычислить объем трехосного эллипсоида, то есть тела, поверхность которого выражается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Сечение, перпендикулярное оси Ox есть эллипс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

полуоси которого соответственно равны

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Площадь эллипса $S=\pi a\cdot b$, где a и b – его полуоси. Следовательно, площадь рассматриваемого сечения

$$S(x)=\pi\cdot bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

а объем эллипсоида

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\pi bc\left(x-\frac{x^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Отметим, что если $a=b=c=r$, то мы получим шар, и $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Пример 2. Вычислить объем пирамиды высотой H и площадью основания S_0 (рис. 28).

Решение. Рассмотрим четырехугольную пирамиду. Вершину пирамиды S примем за начало координат, а ось Ox направим по высоте H пирамиды к основанию.

Проведем сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от вершины S на расстоянии x, $0\le x\le H$. Площадь этого сечения является функцией от x, т.е. пусть она равна $S(x)$.

В силу свойств сечений пирамиды, параллельных основанию имеем

$$\frac{S(x)}{S_0}=\frac{x^2}{H^2}.$$

Откуда получим $S(x)=\dfrac{S_0}{H^2}x^2$. Тогда объем пирамиды равен

$$V=\int_0^H S(x)dx=\int_0^H\frac{S_0}{H^2}x^2dx=\frac{S_0}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H=\frac{1}{3}S_0H.$$

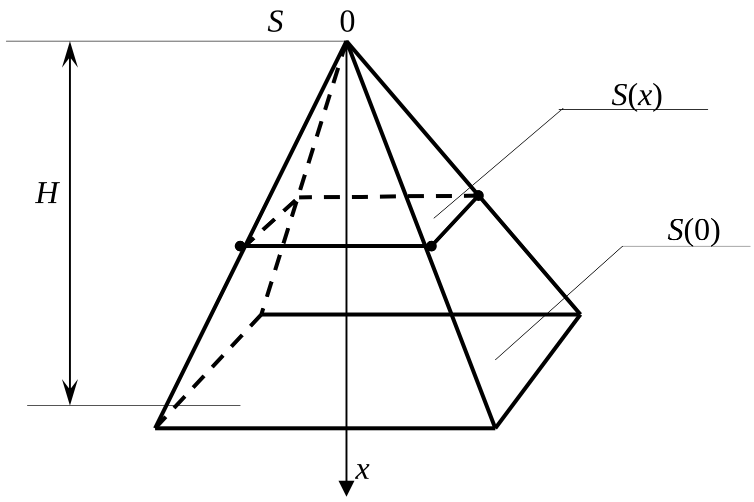

Рис. 28

3. Принцип Кавальери для объемов.

Если в пространстве заданы два тела V_1 и V_2, и любая плоскость, параллельная данной, в сечении с этими телами образует две фигуры, площади которых равны друг другу: $S_1 = S_2$ (при этом сечения каждого тела, вообще говоря, являются переменными). Тогда два тела имеют равные объемы $V_1 = V_2$.

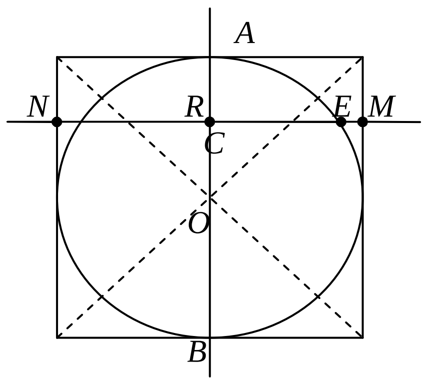

Рис. 29

Возьмем круг радиуса R и опишем около него квадрат. Проведем диагонали квадрата (рис. 29) и, вращая рисунок вокруг вертикальной оси *AB*, получим шар радиуса *R*, описанный около шара цилиндр и вписанный в цилиндр «двойной» круговой конус с вершиной в центре шара *O*. На рис. 30 показаны эти три тела.

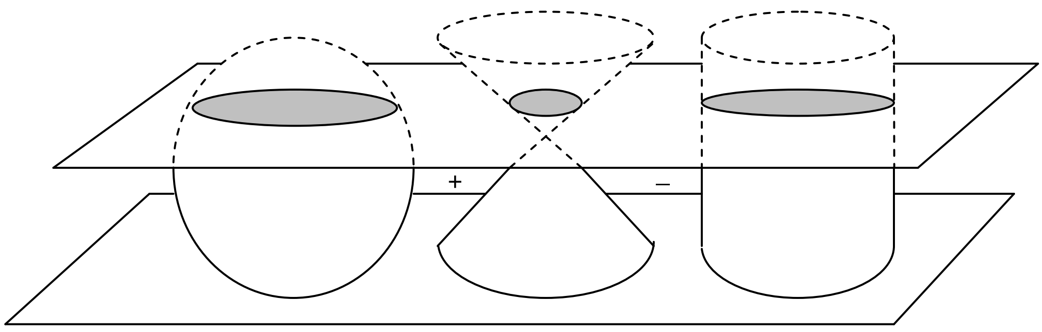

Рис. 30

Возьмем точку C на оси вращения AB на некотором расстоянии x от центра шара и проведем через C горизонтальную плоскость (MN). Эта плоскость в сечении с цилиндром образует круг радиуса $|CM| = R$, в сечении с конусом – круг радиуса $|CD| = |OC| = x$ (т.к. угол при вершине конуса прямой) и в сечении с шаром – круг радиуса $|CE|$.

По теореме Пифагора имеем

$$|OE|^2 = |CE|^2 + |OC|^2 \quad \text{или} \quad |CM|^2 = |CE|^2 + |CD|^2.$$

Умножая обе части последнего соотношения на число π, получим $\pi \cdot |CM|^2 = \pi|CE|^2 + \pi|CD|^2$, т.е.

$$S_{ц} = S_{ш} + S_{к},$$

где $S_{ц}$, $S_{ш}$ и $S_{к}$ – соответственно площади кругов, получающихся при пересечении цилиндра, шара и конуса плоскостью (MN). Это соотношение выполняется для любых сечений цилиндра, шара и конуса, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. В силу принципа поперечных сечений перейдем от соотношения

$$S_{ц} = S_{ш} + S_{к}$$

для площадей к такому же соотношению для объемов

$$V_{ц} = V_{ш} + V_{к}.$$

8.5. Объем тела вращения

На основании формулы вычисления объема тела по площадям поперечного сечения

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

получаем формулу для нахождения объема тела вращения вокруг оси.

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная дугой L, перпендикулярами, опущенными из концов этой дуги на ось Ox, и отрезком $[ab]$, заключенным между основаниями перпендикуляров, вращается вокруг Ox. Полученное при этом тело называется телом вращения вокруг оси Ox с образующей L (рис. 31).

Получим формулу объемов тел вращения вокруг осей координат. Сечениями, перпендикулярными к оси вращения, будут круги; поэтому, если знаем закон изменения радиусов этих кругов, то получим искомый объем, используя форму объема по площадям поперечного сечения.

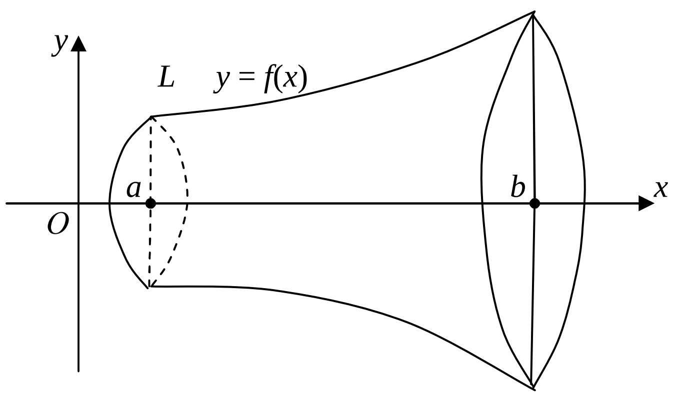

Рис. 31

Пусть ось вращения – Ox, а уравнение образующей – $y = f(x)$. Тогда площадь сечения равна πy^2, и объем тела, ограниченного двумя сечениями $x = a$ и $x = b$, равен

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

При вычислении объема тела вращения вокруг оси Oy пишут уравнение кривой, выражая x через y, т.е. $x = \varphi(y)$. Тогда искомый объем тела вращения вокруг оси Oy равен

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta (\varphi(y))^2 dy .$$

Пример 1. Вычислить объем конуса и шара.

Решение. 1) пусть конус имеет радиус основания R и высоту h. Конус получается при вращении ΔOAB вокруг оси Ox (рис. 32).

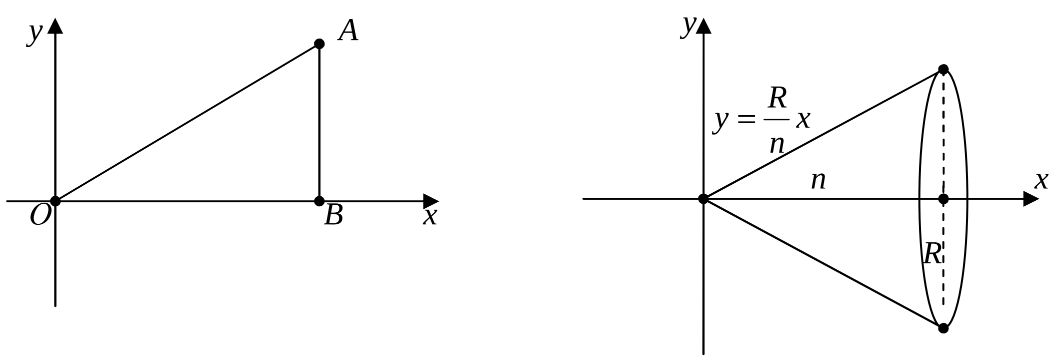

Рис. 32

Уравнение образующей конуса $y=\frac{R}{h}x$, а пределы интегрирования – от 0 до h, тогда искомый объем

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h}{3};$$

2) пусть данный шар радиуса R, а уравнение вращающейся полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (рис. 33).

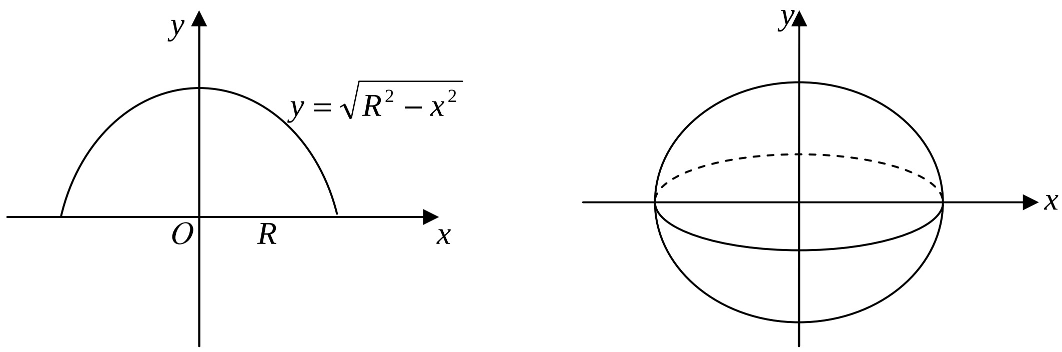

Рис. 33

Тогда

$$V=\pi\cdot\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением части OB параболы $y^2=2px$ вокруг оси Oy (рис. 34).

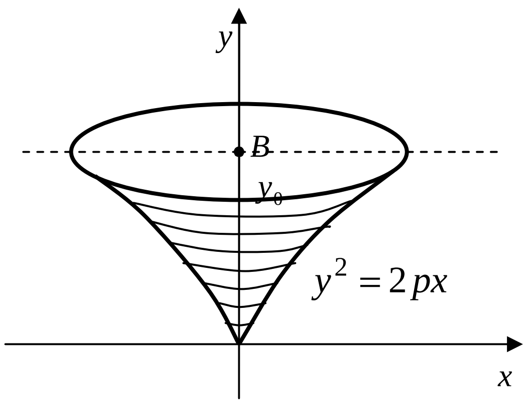

Рис. 34

Решение. Уравнение параболы, разрешенное относительно x имеет вид

$$x=\frac{y^2}{2p}.$$

Тогда искомый объем

$$V=\pi\int_0^{y_0}\frac{y^4}{4p^2}dy=\frac{\pi y_0^5}{20p^2}.$$

8.6. Площадь поверхности вращения

Пусть на отрезке $[ab]$ $y = f(x)$ имеет непрерывную производную. Рассмотрим поверхность, образуемую вращением дуги AB вокруг оси Ox, уравнение этой дуги задается в виде $y = f(x)$ (рис. 35). Площадь поверхности, описываемой дугой некоторой кривой, определим как предел площадей тех поверхностей, которые образованы вращением вписанных в дугу ломанных (хорд) при условии, что наибольшее звено этих ломанных стремится к нулю.

Отрезок $[ab]$ разбиваем точками $x_0, x_1, ..., x_n$ на отрезки длины $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_n$, восстанавливаем ординаты $y_0, y_1, ..., y_n$ в точках деления. Строим хорды $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1,n})$. Когда кривая вращается вокруг оси Ox, каждая из хорд $M_{i-1}M_i$ описывает боковую поверхность усеченного конуса. Искомая поверхность тела вращения – сумма боковых поверхностей этих усеченных конусов:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot |c_i k_i|.$$

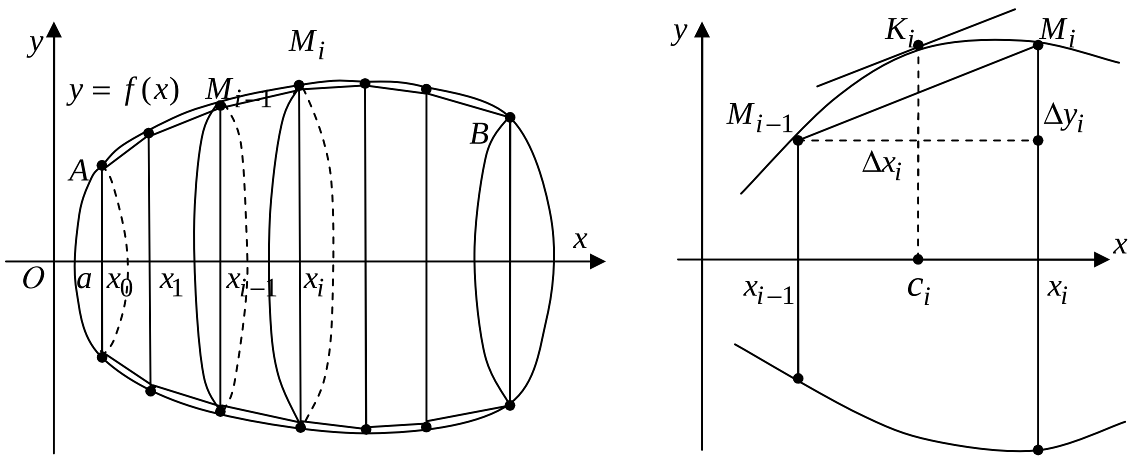

Рис. 35

Тогда

$$P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Таким образом, площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти площадь поверхности вращения дуги кубической параболы $a^2 y = x^3$ между точками $x = 0$ и $x = a$ вокруг оси Ox.

Решение. Так как $y' = \dfrac{3x^2}{a^2}$, тогда $\sqrt{1+(y')^2} = \dfrac{1}{a^2}\sqrt{a^4 + 9x^4}$.

Имеем

$$P = \frac{2\pi}{a^4}\int_0^a \sqrt{a^4 + 9x^4}\,x^3 dx = \frac{\pi a^2}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Пример 2. Найти площадь поверхности вращения вокруг оси Ox астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 36).

Решение. Здесь имеем $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$; $y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$.

Отметим, что дуга BA дает только половину искомой поверхности.

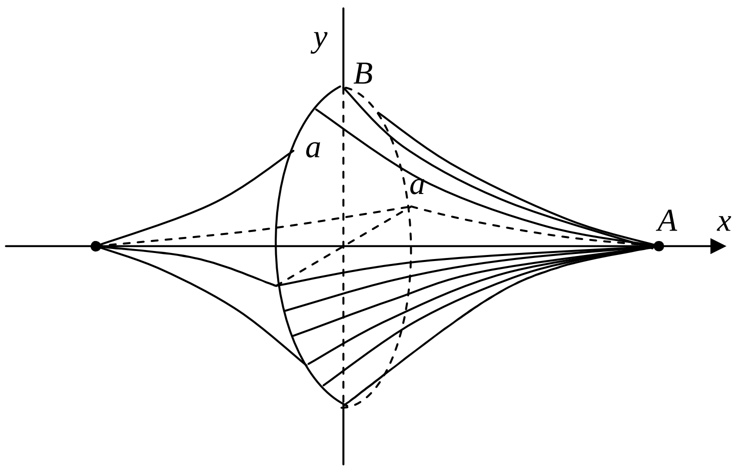

Рис. 36

Тогда имеем

$$P = 2\cdot 2\pi\int_0^a \left(a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Если вращающаяся кривая задана параметрически уравнениями: $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$, и при этом считаем, что производные x' и y' существуют и непрерывны, а для функции существует обратная, тогда

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt\,.$$

Если вращающаяся кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$ и ρ' существует и непрерывна, то

$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

8.7. Приложение определенных интегралов к вопросам физики, механики и техники

1. Вычисление давления жидкости. Работа.

Пример 1. Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластину, имеющую основание b и высоту h, погруженную в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды.

Решение. Выберем систему координат, как на рис. 37.

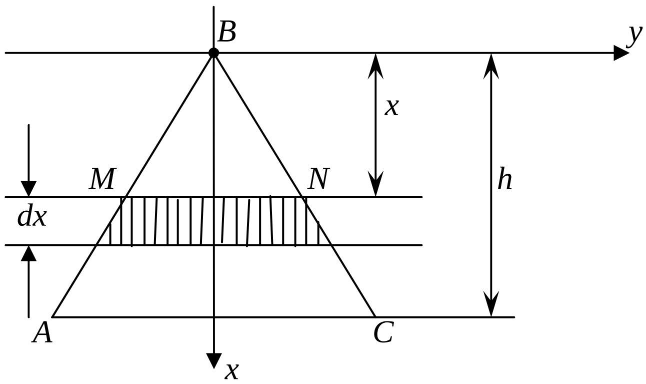

Рис. 37

Рассмотрим горизонтальную полоску, находящуюся на произвольной глубине x и имеющую толщину $\Delta x \approx dx$. Применяя эту полоску в качестве прямоугольника, находим дифференциал площади $dS = MNdx$. Из подобия треугольников ΔBMN и ΔABC имеем $MN = \dfrac{b}{h}x$, тогда

$$dS = \frac{b}{h}x \cdot dx\,.$$

Сила давления воды на эту полоску $dP = x \cdot dS$ (с учетом удельного веса воды – 1).

Тогда сила давления воды на всю пластину ABC равна

$$P = \int_0^h x dS = \frac{b}{h}\int_0^h x^2 dx = \frac{b}{3}h^2 .$$

Пример 2. Найти величину давления на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен R, а диаметр его лежит на свободной поверхности жидкости (удельный вес жидкости равен γ).

Решение. Разобьем площадь полукруга на элементы – полоски, параллельные поверхности воды (рис. 38). Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии x от поверхности, равна

$$dS = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx .$$

Сила давления жидкости на элементарную полоску равна

$$dP = \gamma x \cdot dS .$$

Тогда

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\gamma\int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, d(R^2 - x^2) = \frac{2}{3}\gamma R^3 .$$

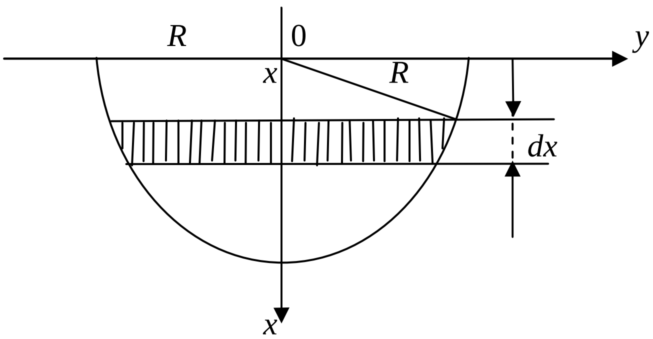

Рис. 38

Пример 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из цилиндрической цистерны, радиус основания равен R, а высота h (γ – плотность жидкости).

Решение. Разобьем объем цилиндра плоскостями, параллельными основанию, расстояние между которыми равно dx. Тогда объем полученного элемента цилиндра будет равен

$$dV = \pi R^2 dx ,$$

а численная величина массы – $\gamma \cdot \pi R^2 dx$.

Тогда элементарная работа dA, затраченная на поднятие этой массы, находящейся на глубине x будет равна

$$dA = x \cdot \gamma\pi R^2 dx .$$

А величина работы

$$A = \gamma\pi R^2 \int_0^h x dx = \frac{\gamma\pi R^2 h^2}{2} .$$

Пример 4. Определить количество тепла, выделяемое переменным током

$$I = I_0 \left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi \right)$$

в течение периода T в проводнике с сопротивлением R.

Решение. Количество тепла в единицу времени для постоянного тока определяется законом Джоуля – Ленца

$$Q = 0,24 I^2 R .$$

Для переменного тока элемент (дифференциал) количества тепла будет равен

$$dQ = 0,24 I^2(t) R dt .$$

Тогда

$$Q = 0,24 R I_0^2 \int_0^T \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi \right) dt = 0,12 R T I_0^2 .$$

Путь, пройденный материальной точкой. Если точка движется по некоторой кривой и величина ее скорости известная функция $v = f(t)$ времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt .$$

Работа переменной силы. Если переменная сила $F = f(x)$ действует в направлении оси Ox, то работа этой силы на отрезке $[x_1, x_2]$ равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx .$$

Статистические моменты, моменты инерции и координаты центра масс плоской линии. Пусть плоская кривая AB задана уравнениями $y = f(x)$, $x \in [ab]$, плотность которой $\rho = \rho(x)$, тогда

- масса кривой определяется по формуле

$$M = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (y')^2 dx} ;$$

- статические моменты относительно оси Ox и Oy:

$$M_x = \int_a^b \rho \cdot y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b \rho \cdot x\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

- моменты инерции I_x, I_y, I_0 – относительно оси Ox, Oy и точки O:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad I_0 = I_x + I_y;$$

- координаты центра масс кривой:

$$x_c = \frac{M_y}{M}; \; y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Статистические моменты, моменты инерции и координаты центра масс плоской фигуры. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x) \geq 0$, $x \in [ab]$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$; ρ – плотность. Тогда

- масса криволинейной трапеции

$$M = \int_a^b \rho y dx;$$

- моменты инерции:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b \rho xy dx;$$

- моменты инерции I_x, I_y, I_0:

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3 dx; \; I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx; \; I_0 = I_x + I_y;$$

- координаты центра масс плоской фигуры:

$$x_c = \frac{M_y}{M}; \; y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Теорема Гульдена.

1. Площадь поверхности, полученной от вращения дуги плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в одной плоскости с кривой и не пересекающей ее, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги кривой.

2. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры.

МОДУЛЬ 4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение двойного интеграла

Рассмотрим в плоскости Oxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Область D сетью производных кривых (прямых) разбиваем на n частей, площади которых $\Delta S_i (i = \overline{1,n})$. В каждой из полученных частей выбираем точку $P_i = P(x_i, y_i)$, найдем значения функции в этих точках $f(P_i)$ (рис. 1) и составим сумму произведений вида $f(P_i) \cdot \Delta S_i$

$$V_n = f(P_i) \cdot \Delta S_i + f(P_2) \cdot \Delta S_2 + ... + f(P_n) \cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i$$

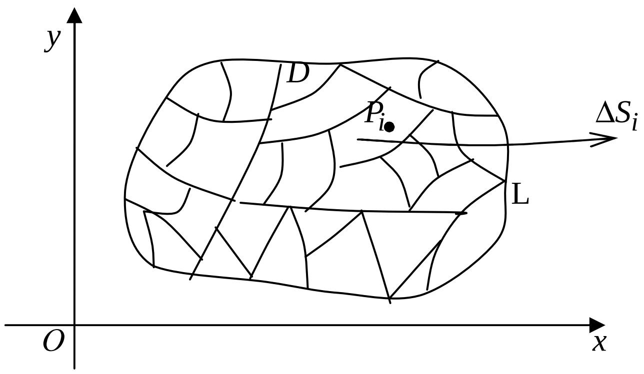

Рис. 1

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$ в области D.

Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, построенных с помощью функции $f(x,y)$ для данной области D

$$V_{n_1},\ V_{n_2},\ ...,\ V_{nk} \qquad (2)$$

при различных способах разбиения области D на части ΔS_i.

Если существует конечный предел

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (mzx \Delta S_i \to 0)}} V_{n_k} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max \Delta S_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i,$$

независящий от способа разбиения области D на части, выбора точек P_i $(i = \overline{1,n})$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается так

$$\iint_D f(x, y) dS \quad \text{или} \quad \iint_D f(x, y) dxdy,$$

то есть по определению имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

Область D называют областью интегрирования.

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в следующем: если $f(x,y) > 0$, то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D равен объему тела T, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D (рис. 2).

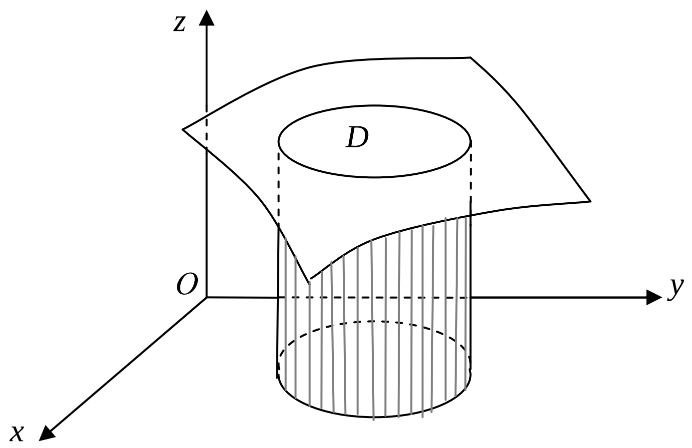

Рис. 2

Механический (физический) смысл двойного интеграла состоит в следующем: двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D есть масса пластины, ограниченной областью D с плотностью $f(x,y)$ в каждой точке D (рис. 3).

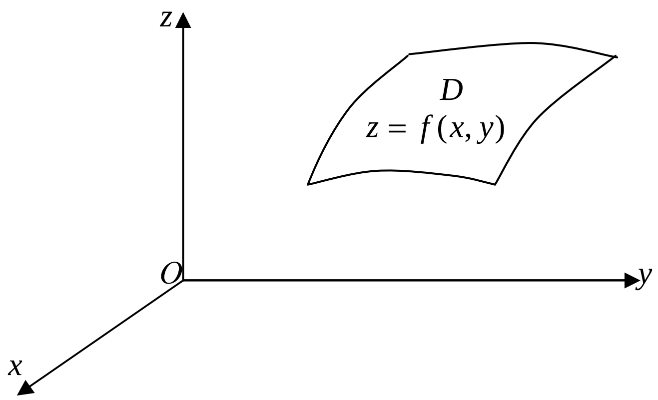

Рис. 3

Для двойного интеграла справедливы следующие свойства.

Теорема 1. Двойной интеграл от суммы двух функций $\varphi(x,y)+\psi(x,y)$ по области D равен сумме двух двойных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности

$$\iint\limits_D (\varphi(x,y)+\psi(x,y))dxdy = \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy + \iint\limits_D \psi(x,y)dxdy.$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла: если a – const, то

$$\iint\limits_D af(x,y)dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Теорема 3. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, а $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Доказательство. Интегральную сумму по области D можно представить в виде

$$\sum_D f(x,y)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(x,y)\cdot\Delta S_i + \sum_{D_2} f(x,y)\Delta S_1 \qquad (2)$$

при этом первая сумма содержит слагаемые, соответствующие области D_1, вторая – D_2.

Так как по определению двойного интеграла величина его не зависит от способа разбиения, то, разбивая область D таким образом, что общая граница областей D_1 и D_2 является границей площадок ΔS_i (рис. 4), переходя к пределу в (2) при $\Delta S_i \to 0$, получим равенство (1).

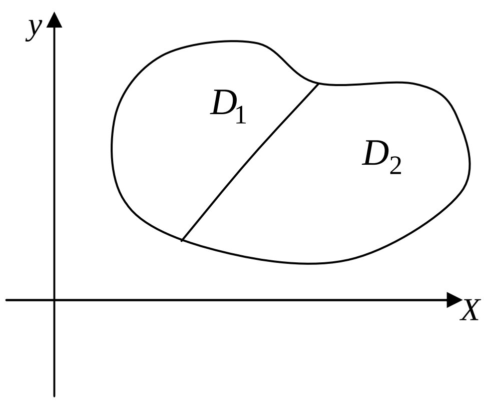

Рис. 4

Отметим, что доказанная теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

§ 2. Повторный интеграл. Свойства повторного интеграла

Пусть область D лежит в плоскости Oxy и является областью интегрирования для двойного интеграла. Различают два основных вида областей интегрирования – правильная в направлении оси Oy и правильная в направлении оси Ox.

Правильная область в направлении оси Oy – это область D на плоскости XOY, ограниченная снизу линией $y=\varphi_1(x)$, сверху – линией $y=\varphi_2(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывны), слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 5).

Отметим, что в частных случаях один или оба отрезка (AA_1 или BB_1) могут превратиться в точку (рис. 6).

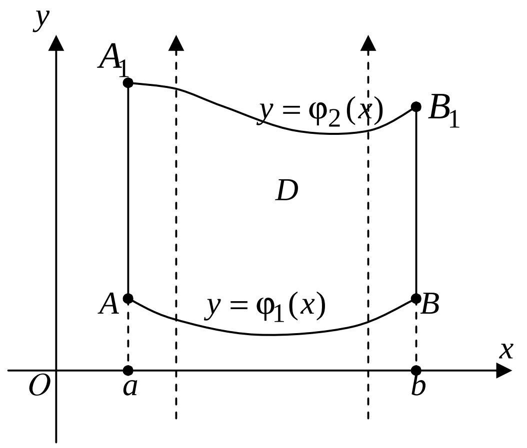

Рис. 5

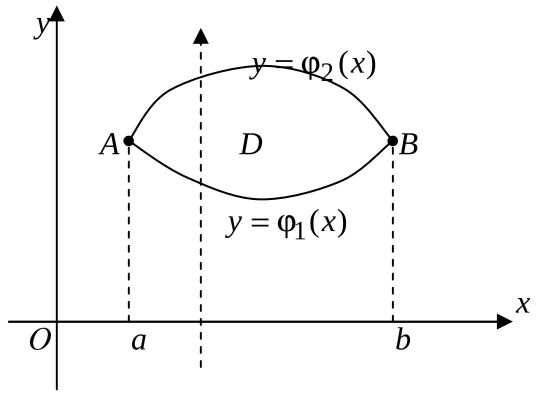

Рис. 6

Для правильной области в направлении оси Oy характерно следующее: область D проектируется в некоторый отрезок $[a,b]$ оси Ox, причем любая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через внутреннюю точку области D (или через внутреннюю точку отрезка $[a,b]$), пересекает границу этой области (линии $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$) в двух точках (рис. 5, 6). Отметим, что, если проводить лучи, параллельные оси Oy и одинаково с ней направленные, они будут входить в область D на линии (A_1B_1) $y=\varphi_1(x)$ *– линия входа в область D в направлении оси Oy*, а выходить из области D на линии (AB) $y=\varphi_2(x)$ *– линия выхода из области D в направлении оси Oy*.

Правильная область в направлении оси Ox – это область D на плоскости XOY, ограниченная слева линией $x=\psi_1(y)$, справа – $x=\psi_2(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны), снизу и сверху – отрезками прямых $y = c$ и $y = d$.

В частных случаях один или оба отрезка (C_1C_2) и (D_1D_2) могут превратиться в точку (рис. 8). Для правильной области в направлении оси *Ox* характерно следующее: область D проектируется в некоторый отрезок $[c,d]$ оси *Oy*, пересекает границы области D (линии $x=\psi_1(t)$ и $x=\psi_2(t)$), не более чем в двух точках (рис. 7, 8). Отметим, что если проводить лучи, параллельные оси *Ox* и одинаково направленные, они будут входить в область D на линии (C_1D_1), $x=\psi_1(y)$ – линия входа в область D в направлении оси *Ox*, а выходить из области D на линии (C_2D_2), $x=\psi_2(y)$ – линия выхода из области D в направлении оси *Ox*.

Область, правильную как в направлении оси *Ox*, так и в направлении оси *Oy* называют *правильной областью*.

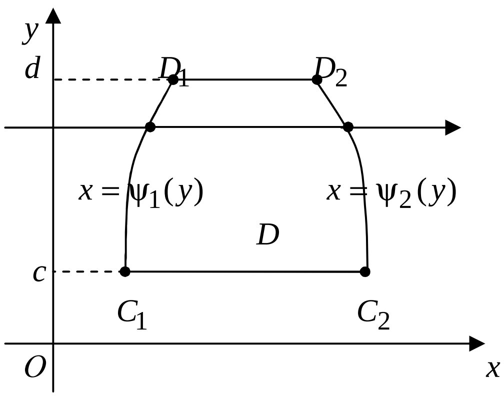

Рис. 7

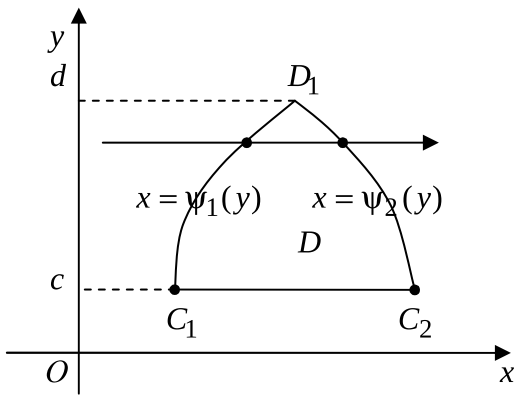

Рис. 8

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Выражение вида

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \qquad (1)$$

называют повторным (двукратным) интегралом от функции $f(x,y)$ по области D (рис. 5).

Вычисление повторного интеграла (1) начинаем с вычисления интеграла, стоящего в скобках (внутреннего), причем интегрирование ведется по переменной y, а x считается постоянной. В результате получим непрерывную функцию от x, т.е.

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,.$$

Интегрируя по x полученную функцию в пределах от a до b, получим величину повторного интеграла – некоторое постоянное число

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+y)dy \right) dx.$

Решение. Построим область интегрирования D (рис. 9). Границы области D определяются уравнениями $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; $y = x^2$

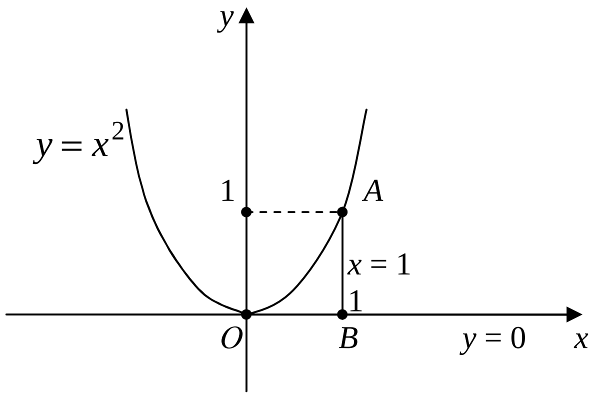

Рис. 9

Искомая область D – это «криволинейный» треугольник ΔOAB. Заметим, что область D правильная как по направлению оси Ox, так и по направлению оси Oy.

Вычисление данного интеграла начинаем с нахождения внутреннего интеграла

$$\Phi = \int_0^{x^2} (x+y)dy \int_0^{x^2} xdy + \int_0^{x^2} ydy = x \cdot y \Big|_0^{x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} = x^3 + \frac{x^4}{2}.$$

Тогда

$$I_D = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}.$$

Свойства повторного интеграла

Свойство 1. Если в направлении оси Oy правильную область D разбить на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Oy или оси Ox, то повторный интеграл I_D по области D будет равен сумме таких же интегралов по областям D_1 и D_2, т.е.

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Доказательство. Пусть прямая $x = c$ $(a < c < b)$ разбивает область D на две правильные в направлении оси Oy области D_1 и D_2. Тогда

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy = \left| \Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx \right| = \int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$= \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx = \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Таким образом, имеем $I_D = I_{D_1 + I_{D_2}}$.

Следствие. Если область D можно разбить прямыми, параллельными осям координат, на любое число правильных областей $D_1, D_2, ..., D_n$, тогда

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + ... + I_{D_n}.$$

Свойство 2. Если M и m наибольшее и наименьшее значения непрерывной в области D функции $f(x,y)$, тогда (S – площадь области D)

$$m \cdot S \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \le M \cdot S \qquad (2)$$

Доказательство. Так как M наибольшее, m – наименьшее значения $f(x,y)$ в области D, то имеем

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \le \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M \cdot dy = M \cdot (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) = M \cdot S \qquad (3)$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \ge \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} mdy = m(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) = m \cdot S \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что

$$m \cdot S \le I_D \le M \cdot S.$$

Свойство 3. (теорема о среднем). Повторный интеграл I_D от непрерывной функции $f(x,y)$ по области D с площадью S равен произведению площади S на значение функции в некоторой точке P области D, т.е.

$$I_D = f(P) \cdot S \tag{5}$$

Доказательство. Так как $f(x,y)$ непрерывна в области D, то она принимает наибольшее (M) и наименьшее (m) значения в D, а, следовательно, имеет место неравенство $m \le f(x,y) \le M$.

В силу свойства 2 имеем

$$m \cdot S \le I_D \le M \cdot S$$

Так как $S > 0$, то из последнего неравенства имеем

$$m \le \frac{I_D}{S} \le M .$$

Число $\frac{I_D}{S}$ заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x,y)$, а в силу непрерывности функции $f(x,y)$ в области D она принимает в некоторой точке $P \in D$ значение, равное числу $\frac{1}{S} \cdot I_D$, т.е. имеет место равенство

$$\frac{1}{S} \cdot I_D = f(P) .$$

Откуда $I_D = f(P) \cdot S$.

Что и требовалось доказать.

§ 3. Вычисление двойного интеграла

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен повторному интегралу от данной функции по области D, т.е.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{1}$$

Доказательство. Область D прямыми, параллельными осям координат, разбиваем на n правильных областей (прямоугольников), площади которых равны соответственно $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$.

Для каждой из этих областей справедлива теорема о среднем (свойство 3 § 2)

$$I_{D_1} = f(P_1) \cdot \Delta S_1, \; \mathrm{I}_{\mathrm{D}_2} - f(P_2) \cdot \Delta S_2 \ldots I_{D_n} = f(P_n) \cdot \Delta S_n .$$

В силу свойства 1 для повторного интеграла имеем

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + \ldots + I_{D_n} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i \,. \tag{2}$$

В правой части равенства (2) стоит интегральная сумма для функции $f(x,y)$ по области D, предел этой суммы при $n \to \infty$ $(\max \Delta S_i \to 0)$ существует и равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по области D. Величина повторного интеграла I_D, стоящего в левой части равенства (2), не зависит от n. Поэтому, переходя к пределу в равенстве (2), получим

$$I_D = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dxdy$$

или

$$I_D = \iint_D f(x,y)dxdy \,.$$

Таким образом, имеем

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \,.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Для случая, когда $f(x,y) \geq 0$ формула (1) имеет следующее геометрическое истолкование.

Пусть существует тело, ограниченное поверхностью $z = f(x,y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D (рис. 10).

Объем данного тела равняется двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по области D:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{3}$$

Вычислим объем данного тела по площадям поперечных сечений. Проведем плоскость $x = \text{const}$ $(a < x < b)$, рассекающую данное тело. Данные плоскости параллельны координатной плоскости ZOY. Находим площадь плоской фигуры $S(x)$, получающейся в сечении $x = \text{const}$.

Эта фигура – криволинейная трапеция, ограниченная линиями $z = f(x,y)$ $(x - \text{const})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, площадь которой выразим с помощью интеграла

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \,. \tag{4}$$

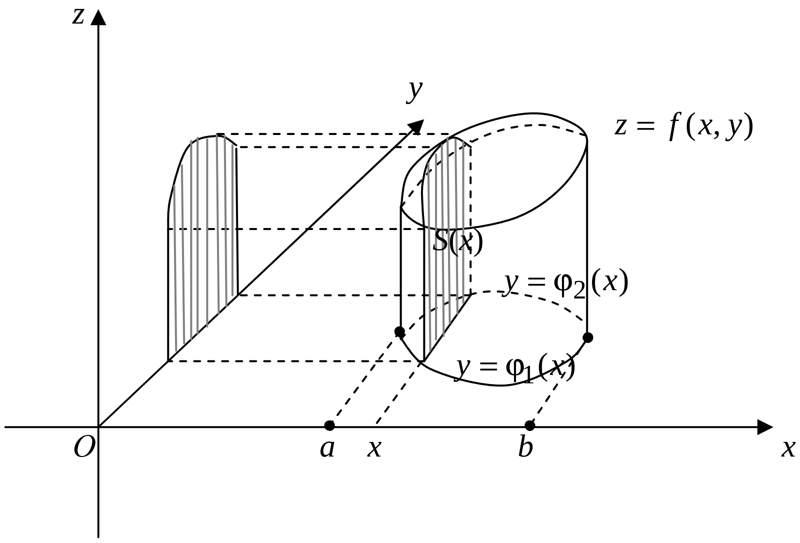

Рис. 10

Тогда объем искомого тела

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx . \qquad (5)$$

Вычислим объем этого же тела по площадям поперечных сечений, проводя плоскости $y = \text{const}$ $(c < y < d)$. Эти плоскости параллельны координатной плоскости ZOX (рис. 11). Находим площадь плоской фигуры $S(y)$, получающаяся в сечении $y = \text{const}$. Эта фигура – криволинейная трапеция, ограниченная линиями $z = f(x,y)$ $(y - \text{const})$, $z = 0$, $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, площадь которой выразим с помощью интеграла

$$S(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx . \qquad (6)$$

Тогда объем данного тела

$$V = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy . \qquad (7)$$

В формулах (3), (5) и (7) левые части равны, следовательно, равны правые, т.е.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy . \qquad (8)$$

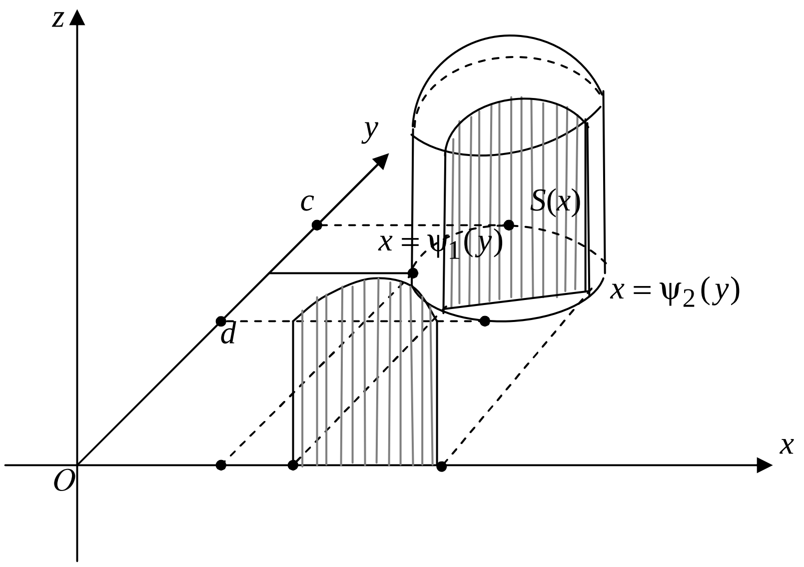

Рис. 11

Таким образом, вычисление двойного интеграла по области D сводится к вычислению повторного интеграла по формулам

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx, \tag{9}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \tag{10}$$

Обратите внимание (формула (9)):

1. Пределы внешнего интеграла по x в формуле (9) – это наименьшее и наибольшее значения x во всей области D, то есть крайние точки проекции области D на ось Ox;
2. Пределы внутреннего интеграла по y – это правые части уравнений линий входа и выхода, разрешенных относительно y;
3. Сначала вычисляется внутренний интеграл по y

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

в котором x считается постоянным.

Обратите внимание (формула (10)):

1. Пределы внешнего интеграла по y в формуле (10) – это наименьшее и наибольшее значения y во всей области D, то есть крайние точки проекции области D на ось Oy;
2. Пределы внутреннего интеграла по x – это правые части уравнений линий входа и выхода, разрешенных относительно x;

3. Сначала вычисляется внутренний интеграл по x

$$\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

в котором y считается постоянным.

Обратите внимание (формула (8)):

1. При переходе от двойного интеграла к повторным у внешнего интеграла пределы интегрирования всегда постоянные числа;
2. Если внешний интеграл вычисляем по x, то у внутреннего интеграла пределы интегрирования зависят только от x (могут быть и постоянными числами);
3. Если внешний интеграл вычисляем по y, то у внешнего интеграла пределы интегрирования зависят только от y (могут быть и постоянными числами).

Замечание. Если область D не является правильной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy, то для вычисления двойного интеграла по такой области требуется, прежде всего, разбить ее на правильные области и интеграл по области D заменить суммой интегралов по соответствующим областям.

Изменение порядка интегрирования

1. Пусть требуется изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I_D = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Для решения данной задачи сначала восстановим область интегрирования D по известным пределам данного повторного интеграла.

Имеем D: $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$.

Построим графики этих функций (линий) и определим область D. Спроектируем область D на ось Oy, найдем уравнения прямых $y = c$ и $y = d$, ограничивающих снизу и сверху полосу, в которой расположена область D. Затем проводим лучи, параллельные оси Ox и одинаково с ней направленные, и находим левую границу области D: $x = \psi_1(y)$ и правую – $x = \psi_2(y)$. Если какая-либо из этих границ области D состоит из двух или большего числа линий, заданных различными уравнениями, то область D разбиваем на части, а интеграл – на сумму интегралов по этим частям. Затем применяем формулу

$$I_D = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

2. Пусть требуется изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I_D = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Записав уравнения границ области *D: y = c, y = d,* $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, строим эту область. Спроектировав эту область *D* на ось *Ox,* находим уравнения прямых *x = a* и *x = b,* ограничивающих слева и справа полосу, в которой расположена область *D*. Проводим лучи, параллельные оси *Oy* и одинаково с ней направленные, тем самым устанавливаем линии входа и выхода для области *D*: $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Затем применяем формулу

$$I_D = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Пример 1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ расставить пределы интегрирования (двумя способами) по области *D: y* = 0, *y* = *x*, *y* + *x* = 2.
Решение. Запишем уравнения границ области *D* и построим данную область на плоскости (рис. 12)

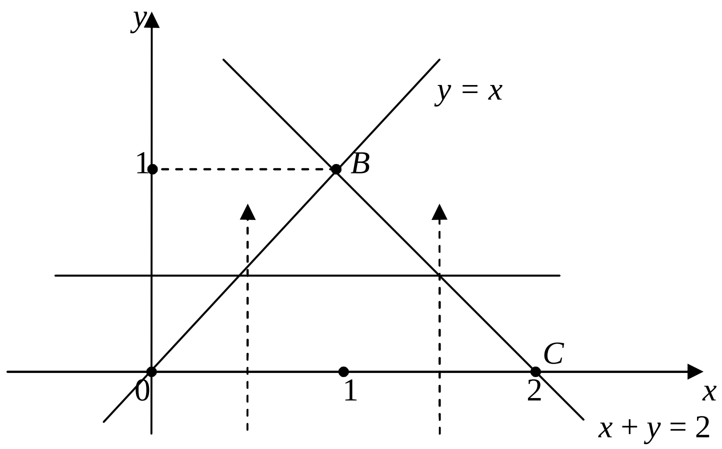

Рис. 12

Тогда имеем

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y)dx$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y)dy.$$

Пример 2. В двойном интеграле $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$ расставить пределы интегрирования (двумя способами) по области D: $y = x$, $xy = 1$, $x = 2$ и вычислить данный интеграл.

Решение. Строим область D на плоскости (рис. 13)

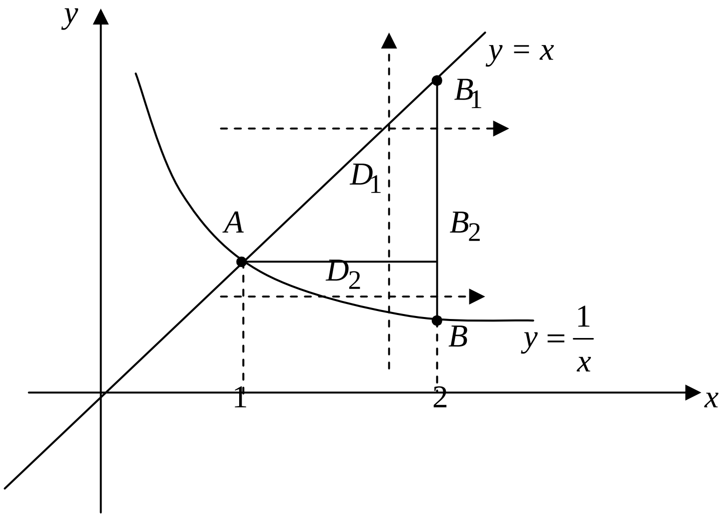

Рис. 13

Тогда имеем координаты точек пересечения:

$$A(1;1),\ B_2(1;2),\ B_1(2;2),\ B(2;\frac{1}{2}).$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному, выбирая внешний интеграл по x (т.е. x меняется в постоянных пределах), а внутренний – по y, т.е. переходим к интегралу вида

$$\int dx \int \frac{x^2}{y^2}dy.$$

Для определения пределов интегрирования (внешний интеграл) по x (постоянные пределы интегрирования) спроектируем область D на ось Ox. В результате получим, что $x \in [1;2]$, то есть $x = 1$ и $x = 2$.

Для определения пределов интегрирования по y проведем лучи, параллельные оси Oy и одинаково с ней направленные. Эти лучи будут входить в область D на дуге AB (уравнение $y = \frac{1}{x}$) и выходить на отрезке AB_1 (уравнение $y = x$), то есть нижний предел $y = \frac{1}{x}$, верхний предел – $y = x$ при интегрировании по y.

Тогда получим

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy \right) dx .$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному в другом порядке, взяв внешний интеграл по y, а внутренний – по x. Для определения пределов интегрирования по x, проведем лучи, параллельные оси Ox и одинаково с ней направленные. Линией выхода таких лучей является отрезок BB_1 на прямой $x = 2$, а линией входа является кривая BAB_1, которая состоит из линий BA (уравнение $x = \frac{1}{y}$) и AB_1 (уравнение $x = y$), имеющих разные уравнения. Поэтому область D разбиваем на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку A (где меняется уравнение кривой BAB_1), а исходный интеграл – на сумму двух интегралов:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{x^2}{y^2}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{x^2}{y^2}dxdy .$$

Для первого интеграла линией входа в направлении оси Ox является дуга AB гиперболы (уравнение $x = \frac{1}{y}$), а линией выхода является отрезок BB_2 прямой $x = 2$. Верхним пределом интегрирования по x будет $x = 2$, а нижний – $x = \frac{1}{y}$. Чтобы найти пределы интегрирования для внешнего интеграла по y, спроектируем область D_1 на ось Oy и получим отрезок $\left[\frac{1}{2};1\right]$, т.е. нижний предел по y будет $\frac{1}{2}$, верхний 1.

Следовательно, имеем

$$\iint\limits_{D_1} \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}dx \right) dy .$$

Поступая аналогично, для второго интеграла по области D_2 получим

$$\iint\limits_{D_2} \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}dx .$$

Тогда исходный интеграл имеет вид

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}dx .$$

Для вычисления интеграла выбираем порядок интегрирования, при котором нет надобности разбивать область интегрирования на части, т.е. воспользуемся формулой

$$I_D = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy .$$

Вычисление интеграла I_D начинаем с нахождения внутреннего интеграла, где интегрирование ведется по y, а x считаем постоянной.

$$I_D = \int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int\limits_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int\limits_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx = \int\limits_1^2 (x^3 - x)dx = \frac{9}{4}.$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I_D = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx .$$

Решение. Запишем уравнения границ области интегрирования: $y = 0$, $y = 4$, $x = \frac{5}{4}y$, $x = \sqrt{9 + y^2}$ и построим эти линии. Уравнение $x = \sqrt{9 + y^2}$ определяет гиперболу, т.к. при возведении в квадрат обоих частей уравнения получим $x^2 = 9 + y^2$ или $x^2 - y^2 = 9$ – это уравнение гиперболы. Но так как $x = +\sqrt{9 + y^2}$, то выбираем только правую ветвь этой гиперболы.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ x = \sqrt{9 + y^2} \end{cases}$ найдем координаты точки $A(5;4)$.

Таким образом, наименьшее значение x для рассматриваемой области равно 0, наибольшее – $x = 5$.

Установим нижнюю и верхнюю границы области D. Для этого проведем лучи, параллельные оси Oy и одинаково с ней направленные. Линия выхода таких лучей состоит из отрезка *OA* прямой (уравнение $y = \frac{4}{5}x$), а линия входа состоит из отрезка *OB* оси *Ox* (уравнение $y = 0$) и дуги *BA* гиперболы (уравнение $y = \sqrt{x^2 - 9}$ (рис. 14).

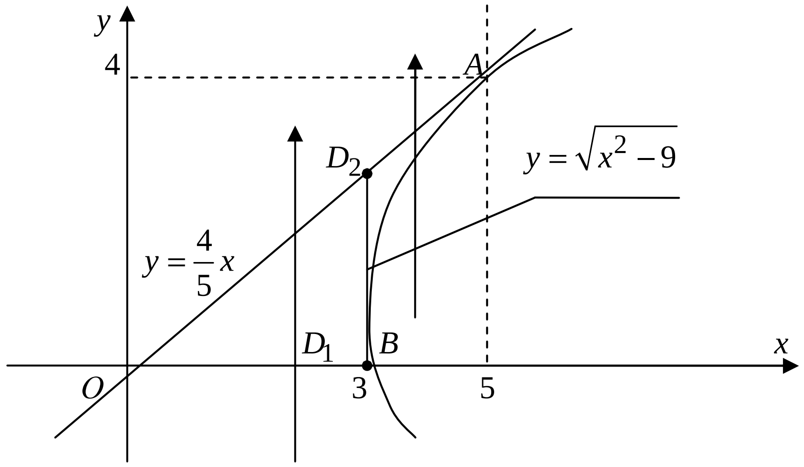

Рис. 14

Поэтому область D разобьем прямой, параллельной оси *Oy* и проходящей через точку *B*, на две области и расставим пределы интегрирования по каждой из областей. Для этого определим уравнения линий входа и выхода, запишем выражение y через x: $y = \frac{4}{5}x$; $y = +\sqrt{x^2 - 9}$ (взят знак «+», потому что рассматривается верхняя ветвь гиперболы $y \geq 0$). Тогда имеем

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx = \int_0^3 dx \int_0^{\frac{4}{5}x} f(x,y)dy + \int_3^5 dx \int_{\sqrt{x^2-9}}^{\frac{4}{5}x} f(x,y)dy.$$

Пример 4. В двойном интеграле расставить пределы интегрирования в том и другом порядке по области D и вычислить данный интеграл:

1) $\iint\limits_D e^x dxdy \qquad D: y = 1, y = 2, \ y = e^x, \ y = x;$

2) $\iint\limits_D x^3 dxdy \qquad D: x = 0, \ y = x, \ y = 2 - x^2 \ \ (x \geq 0);$

3) $\iint\limits_D (x^2 + 2xy)dxdy \qquad D: y = 0, \ y = 1, \ y = x, \ y = x - 1.$

Решение.

1) Построим область интегрирования и расставим пределы интегрирования (рис. 15).

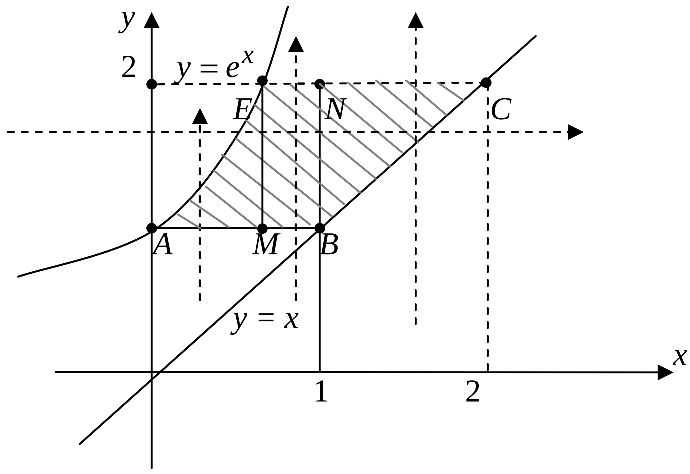

Рис. 15

Тогда имеем

$$\iint\limits_D e^x dxdy = \int\limits_0^{\ln 2} dx \int\limits_1^{e^x} e^x dy + \int\limits_{\ln 2}^{1} dx \int\limits_1^{2} e^x dy + \int\limits_1^{2} dx \int\limits_x^{2} e^x dy = \int\limits_1^{2} dy \int\limits_{\ln y}^{y} e^x dx = e^2 - e - \frac{3}{2}.$$

2) $$\iint\limits_D x^3 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y x^3 dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} x^3 dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} x^3 dy = \frac{2}{15};$$

3) $$\iint\limits_D (x^2 + 2xy) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x^2 + 2xy) dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-1}^{1} (x^2 + 2xy) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{y+1} (x^2 + 2xy) dx = \frac{7}{3}.$$

Пример 5. В повторном интеграле $I_D = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} dx \int\limits_{2x}^{2-x} f(x, y) dy$ поменять порядок интегрирования.

Решение. Для решения данной задачи требуется:

а) восстановить область интегрирования D, исходя из границ повторного интеграла I_D (рис. 16);

б) записать I_D с постоянными пределами по y и переменными по x.

Границы области D: $x=0$, $x=\frac{2}{3}$, $y=2x$, $y=2-x$.

Строим область интегрирования

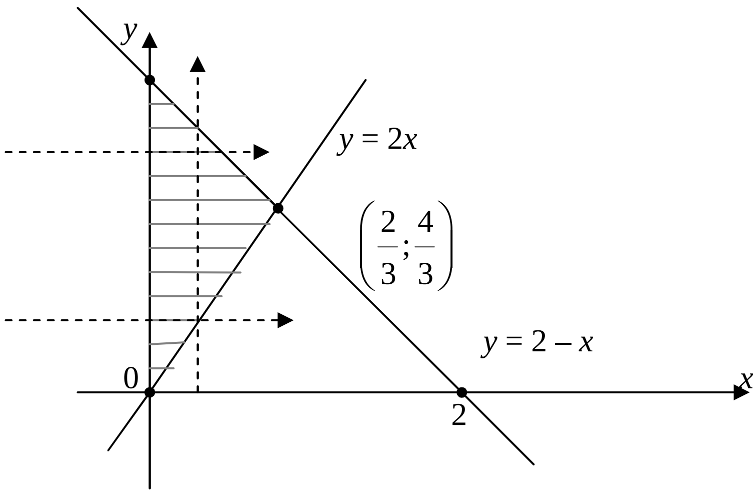

Рис. 16

Тогда имеем

$$I_D=\int_0^{\frac{2}{3}}dx\int_{2x}^{2-x}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{4}{3}}dy\int_0^{\frac{y}{2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{4}{3}}^{2}dy\int_0^{2-y}f(x,y)dx.$$

Пример 6. Поменять порядок интегрирования.

1) $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^{\frac{9}{16}}dy\int\limits_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{9}{16}}^{\frac{3}{4}}dy\int\limits_y^{\frac{3}{4}}f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

Решение. 1) $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)dx+\int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{3}{4}}dx\int\limits_{x^2}^{x}f(x,y)dy$; .3) $\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x}f(x,y)dy$.

Пример 7. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ для указанных областей D.

1) D – прямоугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$;

2) D – прямоугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$;

3) D – трапеция с вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$;

4) D – параллелограмм с вершинами $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$, $D(1;5)$.

Решение.

1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$;

2) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{3x-2}^{2x+3} f(x,y)dy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_1^{\frac{y+2}{3}} f(x,y)dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_1^2 f(x,y)dx+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)dx$.

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости Ox задана область D, ограниченная линией L. Пусть координаты x и y являются функциями новых переменных u и v

$$x=\varphi(u,v) \qquad y=\psi(u,v) \tag{1}$$

при этом считаем, что функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области D_1. Тогда формула (1) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками $(x,y)\in D$ и $(u,v)\in D_1$. Это означает, что каждой точке $P(x,y)$ на плоскости Oxy однозначно соответствует точка $P(u,v)$ на плоскости Ouv с координатами u и v, которые определяются по формуле (1).

Если в плоскости Oxy точка опишет замкнутую линию L, ограничивающую область D, тогда в плоскости Ouv соответствующая точка опишет замкнутую линию L', ограничивающую область D', при этом каждой точке $P\in D$ будет соответствовать точка $P'\in D'$. Таким образом, формулы замены переменных (1) взаимнооднозначно отображают область

D на область D'.Так как, в общем случае, прямым линиям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на плоскости Ouv будут соответствовать кривые на плоскости Oxy, поэтому координаты u и v точки P называют *криволинейными*.

Область D' прямыми $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ разбиваем на прямоугольные площадки со сторонами Δu и Δv (рис. 17), площадь элементарной фигуры $P_1' P_2' P_3' P_4'$ $\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta v$.

Площадь соответствующей ей элементарной фигуры $P_1P_2P_3P_4$ на плоскости Oxy (рис. 18) обозначим через ΔS (при этом $\Delta S' \neq \Delta S$, вообще говоря). Находим величину ΔS как площадь криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$, координаты вершин которого

$$\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1) & x_1 = x(u,v) & y_1 = y(u,v) \\ P_2(x_2, y_2) & x_2 = x(u+\Delta u, v) & y_2 = y(u+\Delta u, v) \\ P_3(x_3, y_3) & x_3 = x(u+\Delta u, v+\Delta v) & y_3 = y(u+\Delta u, v+\Delta v) \\ P_4(x_4, y_4) & x_4 = x(u, v+\Delta v) & y_4 = y(u, v+\Delta v) \end{array} \qquad (2)$$

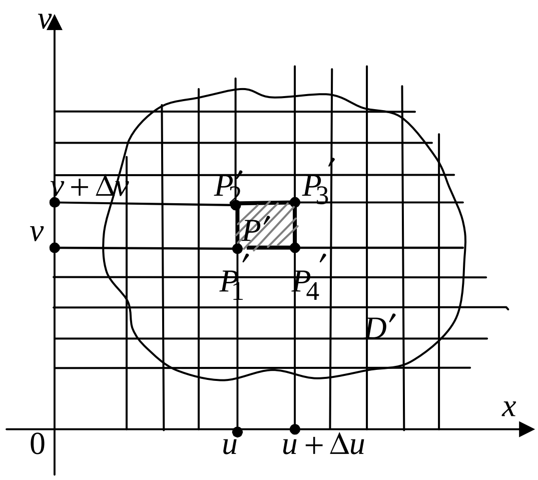

Рис. 17

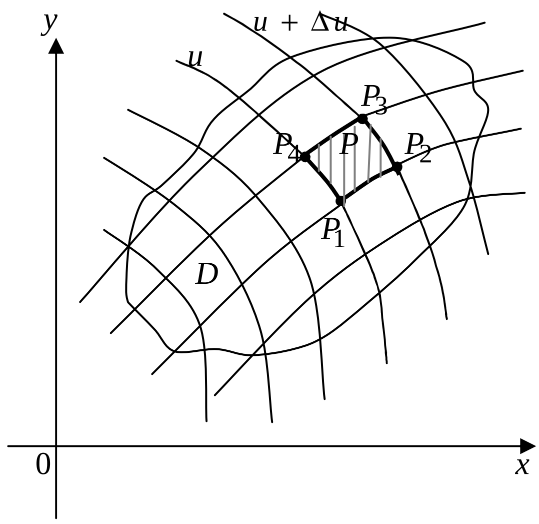

Рис. 18

При вычислении площади криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ будем считать, что линии P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 – попарно параллельные прямые, а приращение функции будем заменять соответствующими дифференциалами (или применять формулу Тейлора), тем самым будем пренебрегать бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с бесконечно малыми Δu и Δv. Тогда формулы (2) будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \varphi(u,v) && y_1 = \psi(u,v) \\
&x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot \Delta u && y_2 = \psi(u,v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot \Delta u \\
&x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot \Delta v && y_3 = \psi(u,v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot \Delta v \\
&x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot \Delta v && y_4 = \psi(u,v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot \Delta v
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При сделанных допущениях криволинейный четырехугольник рассматриваем как параллелограмм, площадь которого равна удвоенной площади треугольника $\Delta P_1P_2P_3$ и находится (по формуле из аналитической геометрии)

$$\Delta S = \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\right)\cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta u\cdot\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\cdot\Delta v\right| = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}\right|\cdot\Delta u\cdot\Delta v =$$

$$= \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\cdot\Delta u\cdot\Delta v = |I|\cdot\Delta u\cdot\Delta v = |I|\cdot\Delta S',$$

то есть имеем

$$\Delta S \approx |I|\cdot\Delta S', \tag{4}$$

где определитель I называют *функциональным определителем* для функций $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ или *якобианом*.

Заметим, что равенство (4) является приближенным, так как при вычислении площади ΔS мы пренебрегали бесконечно малыми высшего порядка. Но чем меньше будут размеры площадок ΔS и $\Delta S'$, тем равенство (4) будет точнее, а в пределе при $\Delta S \to 0$ ($\Delta S' \to 0$) это равенство станет совершенно точным, т.е.

$$I = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ (\Delta S' \to 0)}} \frac{\Delta S}{\Delta S'}.$$

Применим полученное равенство к вычислению двойного интеграла.

Имеем

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta S\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot \Delta S_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta S'\to 0}} \sum f(P_i')\cdot |I|\cdot \Delta S' = \iint_{D'} F(u,v)|I|dudv$$

или

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(u,v)\cdot |I|dudv. \qquad (5)$$

Формула (5) – формула замены переменных в двойном интеграле. Она впервые была получена русским математиком М. В. Остроградским.

Суть формулы (5) замены переменных в двойном интеграле состоит в следующем: интеграл, стоящий в правой части равенства «проще» как по виду функции, так и по области интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $I_D = \iint_D (2x-y)dxdy$,

$$D: \ x+y=1, \ \ x+y=2, \ \ 2x-y=1, \ \ 2x-y=3.$$

Решение. Построим область D (рис. 19)

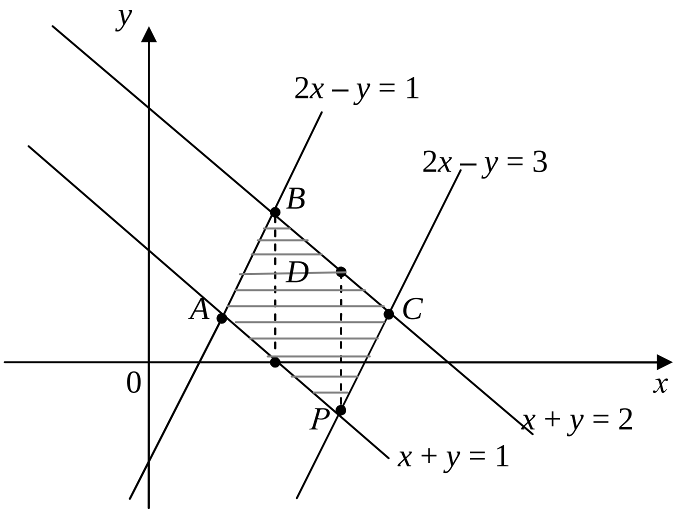

Рис. 19

Вычисление данного интеграла I_D по области D сведется к вычислению трех двойных интегралов. Для упрощения работы, связанной с вычислением данного интеграла, перейдем к новым переменным следующим образом

$$\begin{cases} x+y=u \\ 2x-y=v. \end{cases}$$

Тогда прямые $x + y = 1$ и $x + y = 2$ в системе координат Oxy преобразуются в прямые $u = 1$ и $u = 2$ в системе координат Ouv, а прямые – $2x - y = 1$ и $2x - y = 3$ в прямые – $v = 1$ и $v = 3$. Параллелограмм D преобразуется в прямоугольник D_1 со сторонами, параллельными координатным осям v и u (рис. 20).

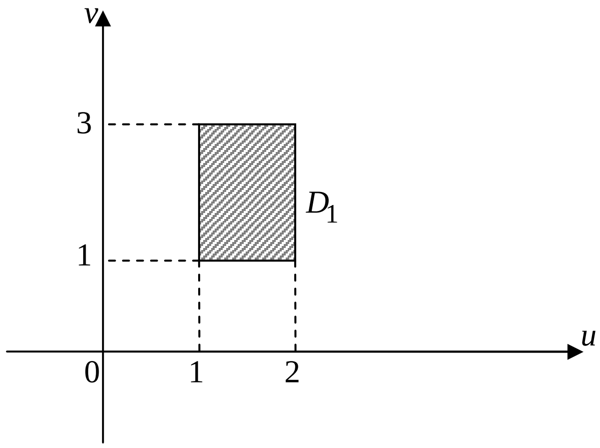

Рис. 20

Решая систему уравнений $\begin{cases} x + y = u \\ 2x - y = v \end{cases}$ относительно u и v, получим

$$x = \frac{u+v}{3} \qquad y = \frac{2u - v}{3}.$$

Вычислим якобиан данного преобразования

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Так как $I(u,v) \neq 0$, то выбранное преобразование области D в область D_1 взаимнооднозначно, а функция $f(x,y) = 2x - y$, как функция от u и v $F(u,v) = 2 \cdot \frac{u+v}{3} - \frac{2u-v}{3} = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}u + \frac{2}{3} = v$ непрерывна вместе со своими частными производными в области D_1.

Следовательно, имеем:

$$\iint\limits_{D} (2x - y)dxdy = \iint\limits_{D_1} v \cdot |I| dudv = \iint\limits_{D_1} \frac{1}{3} vdvdu = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 vdv = \frac{4}{3}.$$

Итак $I_D = \frac{4}{3}$.

§ 5. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$I_D = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

с помощью перехода к полярной системе координат. Для этого сделаем замену переменных по формулам перехода от прямоугольной системы координат к полярной $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

В этом случае подынтегральная функция будет зависеть от r и φ:

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f(r,\varphi).$$

Если область D такова, что любой луч, выходящий из начала координат и проходящий через внутреннюю точку области, пересекает границу D не более, чем в двух точках, то такую область ($r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$) называют *правильной применительно к полярной системе координат*. Если D область правильная применительно к полярной системе координат, то вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла по переменным r и φ. Для расстановки пределов интегрирования из полюса проводят ограничивающие лучи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, определяют уравнения входа в область (AMB) – $r = r_1(\varphi)$ и выхода из нее (AKB) – $r = r_2(\varphi)$. Тогда $\alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$ (рис. 21).

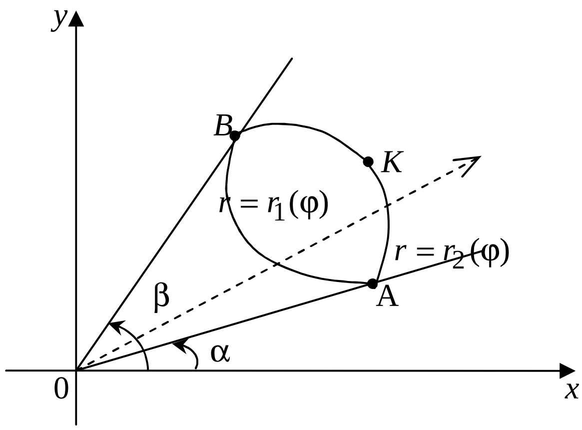

Рис. 21

Обычно внешний интеграл вычисляется по переменной φ, а внутренний – по r.

В силу изложенного выше имеет место следующая формула вычисления двойного интеграла в полярных координатах

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr, \qquad (2)$$

так как

$$|I| = \left\| \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \right\| = \left\| \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{matrix} \right\| = \left| r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \right| = |r| = r$$

Отметим, что если кривая $r = r_1(\varphi)$ превращается в точку (полюс) (рис. 22), тогда $r_1(\varphi) = 0$ и формула (2) запишется в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} du \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\,. \qquad (3)$$

Если область D охватывает начало координат и любой полярный радиус пересекает ее границу в одной точке (рис. 23), тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\,, \qquad (4)$$

где $r = r(\varphi)$ – полярное уравнение кривой, ограничивающей область D.

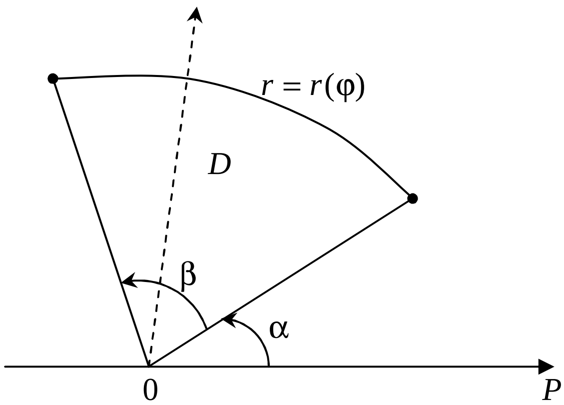

Рис. 22

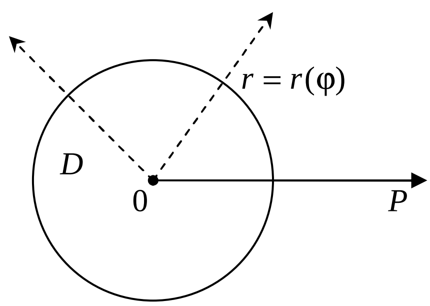

Рис. 23

Переход в двойном интеграле к полярным координатам удобно использовать в тех случаях, когда подынтегральная функция содержит сумму $x^2 + y^2$, а граница области D содержит дуги окружностей и лучи, выходящие из начала координат.

Пример 1. В двойном интеграле $I_D = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам, если область D ограничена линиями: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 25$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $x \ge 0$.

Решение. Уравнение $x^2+y^2=1$ – окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса 1. Уравнение $x^2+y^2=25$ также определяет окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса 5. Уравнения $y=0$ и $y=\sqrt{3}x$ являются уравнениями прямых. Учитывая условие $x\geq 0$, получим область D (рис. 24).

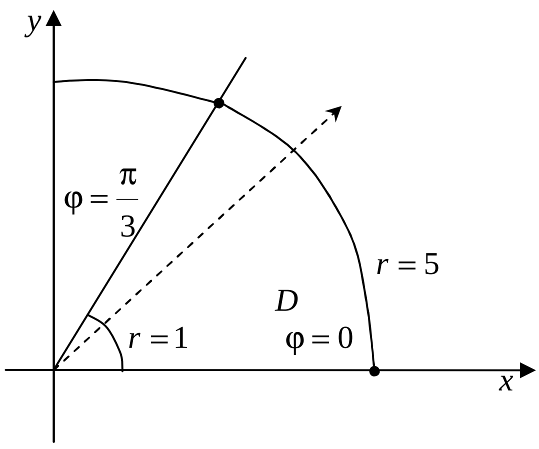

Рис. 24

Уравнение окружностей в полярных координатах имеют вид

$$r=1 \quad (x^2+y^2=1)$$

$$\text{и} \quad r=5 \quad (x^2+y^2=25).$$

Тангенс угла наклона прямой $y=\sqrt{3}x$ к оси Ox равен $\sqrt{3}$, то есть $\mathrm{tg}\varphi=\sqrt{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$; прямой $y=0$ соответствует угол $\varphi=0$. Тогда имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_1^5 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Пример 2. В двойном интеграле $I_D=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования, если:

1. D ограничена линиями: $x^2+y^2\leq 4x, \quad y\geq x$;
2. D ограничена линиями: $x^2+y^2\leq R^2,\ x^2+y^2-2Ry\leq 0,\ x\geq 0$.

Решение. 1. Уравнение $x^2+y^2=4x$ или $(x-2)^2+y^2=4$ в полярных координатах имеет вид $r=4\cos\varphi$, прямая $y=x$ дает $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Тогда область D имеет вид (рис. 25).

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

2. Строим область интегрирования и записываем соответствующий интеграл.

Имея уравнения границ области

$$x^2+y^2=R^2,\ \ x^2+(y-R)^2=R^2,\ \ x=0,\ \ x\geq 0,$$

получим область D, изображенную на рис. 26. Для этой области D φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Чтобы установить границы изменения радиуса, будем проводить лучи из начала координат и получим, что луч входит в область D при $r = 0$, а точка выхода луча лежит или на окружности $x^2+y^2-2Ry=0$, или на окружности $x^2+y^2=R^2$ (в зависимости от угла наклона луча к оси Ox). Поэтому область D разбиваем отрезком OA на две области D_1 и D_2. Запишем уравнение окружности в полярной системе координат $x^2+y^2=2Ry$ $r=2R\sin\varphi$ и $x^2+y^2=R^2$, получим $r = R$. Тогда полярные координаты точки A (точки пересечения окружностей) – это решение системы

$$\begin{cases} r=2R\sin\varphi \\ r=R \end{cases} \qquad A=\left(\frac{\pi}{6},R\right)$$

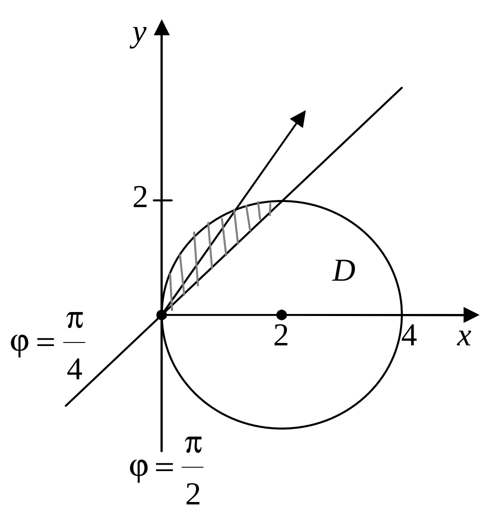

Рис. 25

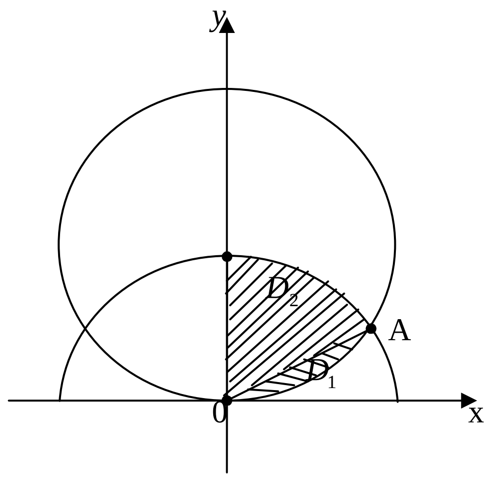

Рис. 26

Для области D_1 угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{6}$, а для области D_2 – от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$. Проводя луч, пересекающий область D_1, получим, что он входит в область при $r=0$, а выходит – при $r=2R\sin\varphi$. Для области D_2 луч, проведенный из полюса, входит в эту область при $r = 0$ и выходит – при $r = R$.

Следовательно

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{2R\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr .$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $I_D = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$,

где D – верхний полукруг $x^2+y^2 \le 1$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Тогда $x^2+y^2=r^2$, а $\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}};\ \ I = r$.

Тогда искомый интеграл будет иметь вид (рис. 27)

$$I_D = \iint\limits_D \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rddrd\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr = \pi(\pi-2) .$$

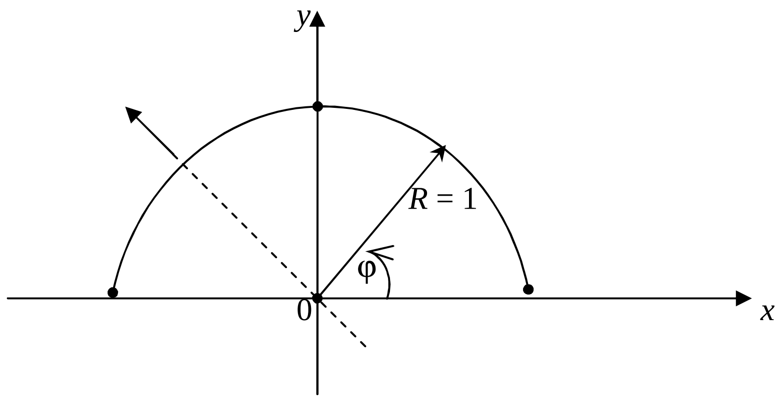

Рис. 27

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $I_D = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$,

где область D ограничена окружностями $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$ и прямыми $y = x$ и $y = 2x$.

Решение. Область D имеет вид (рис. 28). Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Тогда подынтегральная функция будет равна

$f(x, y) = r^{-4}$. Криволинейные участки границы области задаются уравнениями:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi \quad \text{или} \quad r = 4\cos\varphi$$

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 8r\cos\varphi \quad \text{или} \quad r = 8\cos\varphi,$$

а прямолинейные участки – уравнениями:

$$r\sin\varphi = r\cos\varphi \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\varphi = 1, \text{откуда} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$r\sin\varphi = 2r\cos\varphi \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\varphi = 2, \text{откуда} \quad \varphi = \mathrm{arctg}2.$$

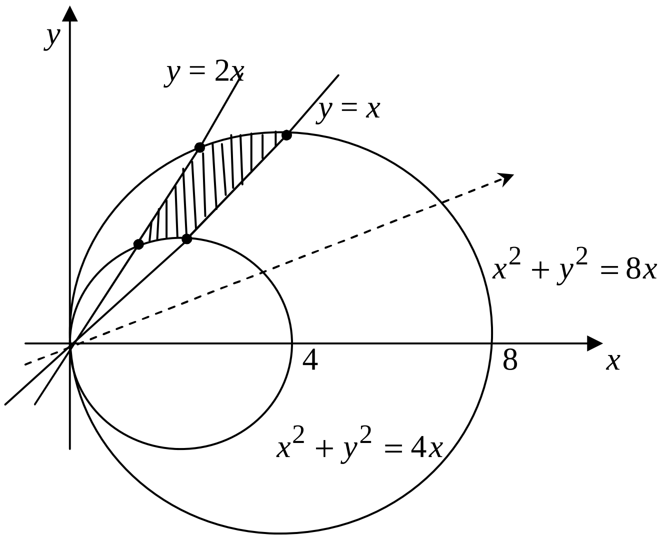

Рис. 28

Таким образом, угол φ изменяется в постоянных пределах от $\frac{\pi}{4}$ до $\mathrm{arctg}2$. Для определения пределов изменения r пересекаем область D лучом, исходящим из полюса. При входе в область $r = 4\cos\varphi$, а выход из области $r = 8\cos\varphi$. Значит $r = 4\cos\varphi$ – нижний предел интегрирования, а $r = 8\cos\varphi$ – верхний предел интегрирования, якобиан $I = r$. Тогда

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r^{-4} r dr = \frac{3}{128}.$$

Пример 5. При какой замене переменных область D, ограниченная линиями $xy = 1,\ xy = 2,\ x - y + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0\ (x > 0, y > 0)$, перейдет в прямоугольник P, стороны которого параллельны координатным осям.

Решение. Построим область D (рис. 29). Пусть новые переменные будут u и v. В системе координат uOv по условию задачи получим прямоугольник (P), который должен быть ограничен прямыми, параллельными координатным осям: $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$ и $v = v_2$. Из уравнений линий, задающих границы области D, имеем:

$$xy = 1,\ \ xy = 2,\ \ x - y = -1,\ \ x - y = 1.$$

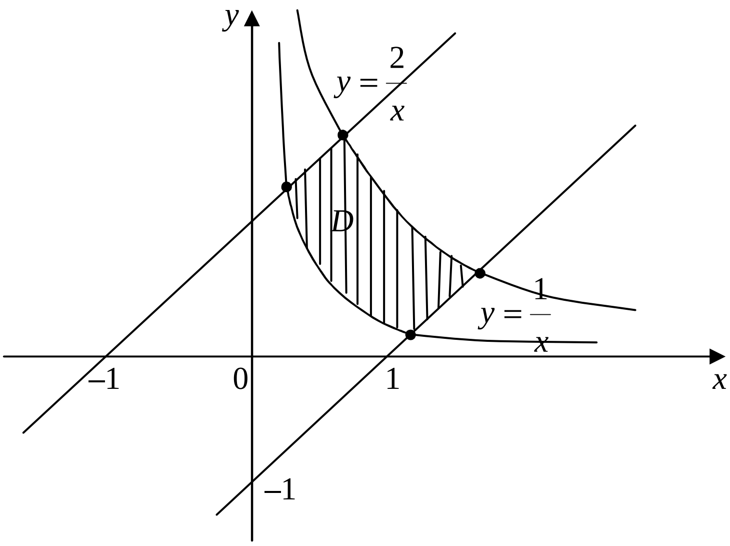

Рис. 29

Полагая $u = xy$, $v = x - y$, получим искомое преобразование, а прямоугольник (P) будет ограничен прямыми $u = 1$, $u = 2$, $v = -1$, $v = 1$ (рис. 30).

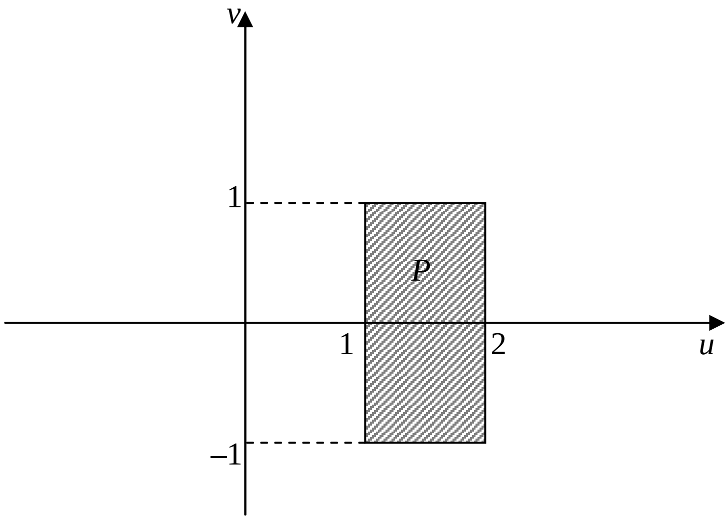

Рис. 30

§ 6. Приложения двойного интеграла

6.1. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь S плоской области D, расположенной на плоскости XOY вычисляется в декартовых координатах по формуле

$$S = \iint_D f(x, y)dxdy,$$

а в полярных координатах – по формуле

$$S = \iint_D rdrd\varphi.$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$ (рис. 31).

Решение. Для построения области D преобразуем уравнения границ, записав их в виде $x = \dfrac{y^2}{10} - 2{,}5$ и $x = -\dfrac{y^2}{6} + \dfrac{3}{2}$.

Каждое из этих уравнений определяет параболу с осью симметрии Ox.

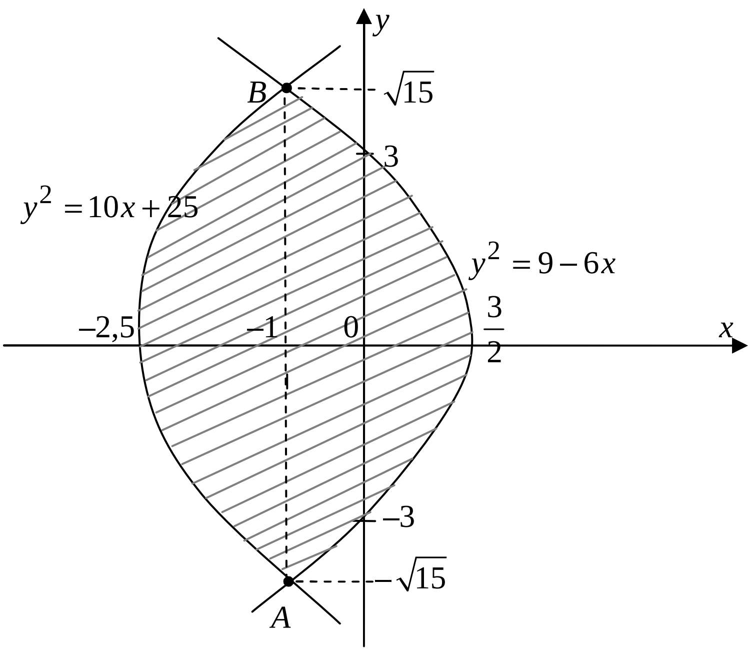

Рис. 31

Решая систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = -6x + 9 \end{cases}$, определяем координаты точек $A(-1;-\sqrt{15})$ и $B(-1;\sqrt{15})$.

Отметим, что внешние пределы интегрирования удобнее взять по y, так как в противном случае область интегрирования нужно разбивать на две части и соответственно вычислять два интеграла. Учитывая симметрию области D относительно оси Ox, получим

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2}{10}-2,5}^{-\frac{y^2}{6}+\frac{3}{2}} dx = \frac{16}{3}\sqrt{15}.$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, заданной неравенствами: $x^2 + y^2 \geq 4y$, $x^2 + y^2 \leq 8y$, $y \geq -x$.

Решение. Данная фигура имеет границы, заданные уравнениями окружностей и лучом, выходящим из начала координат, но для вычисления площади целесообразно перейти к полярным координатам (рис. 32)

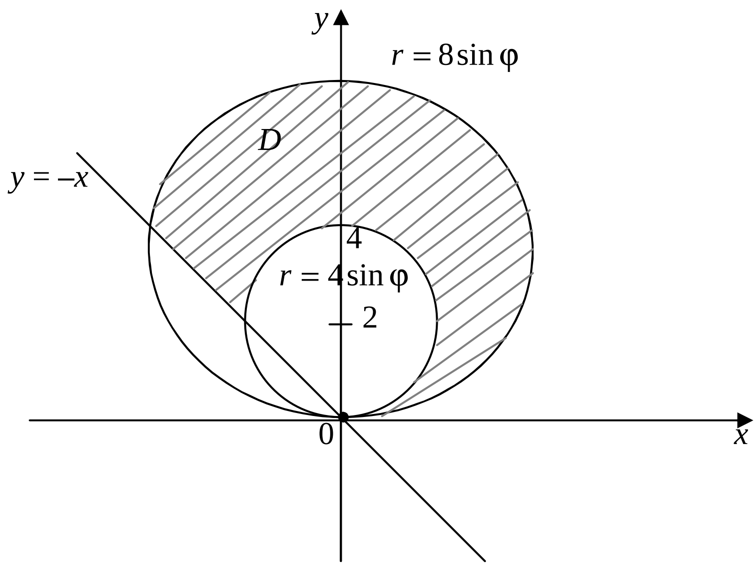

Рис. 32

Тогда

$$S = \iint_D rdrd\varphi = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} rdr.$$

6.2. Вычисление объемов тел

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D плоскости XOY, а сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz (рис. 33, 34), находится по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy\,.$$

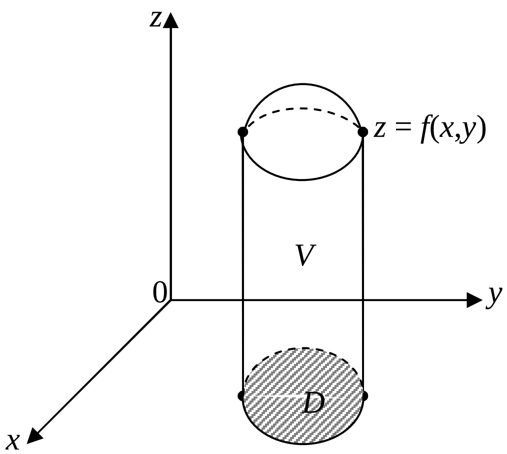

Рис. 33

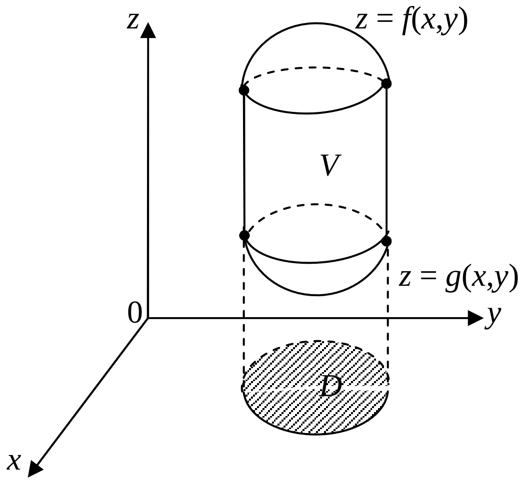

Рис. 34

Пример 3. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x + 3y + z - 6 = 0$, $x + 3y = 3$, $x = 0$, $z = 0$.
Решение. Уравнение

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

определяет плоскость, которая на координатных осях OX, OY, OZ отсекает соответственно отрезки 3, 2 и 6. Уравнение

$$x + 3y = 3$$

на плоскости XOY определяет прямую, а в пространстве – плоскость, параллельную оси Z. Данное тело ограничено сверху плоскостью $2x + 3y + z - 6 = 0$, а снизу – плоскостью $z = 0$ (рис. 35).

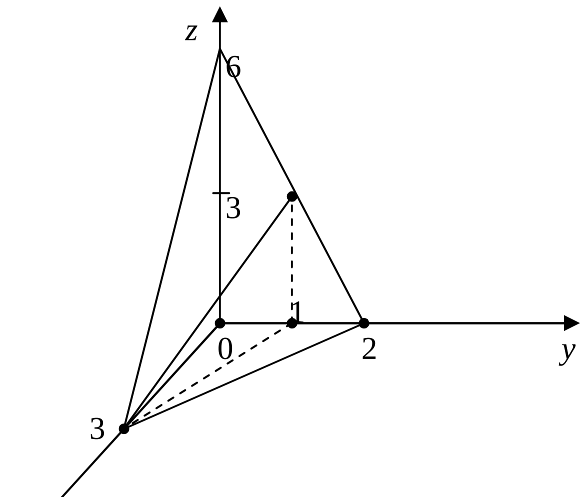

Рис. 35

Проекция данного тела на плоскость XOY имеет следующий вид (рис. 36).

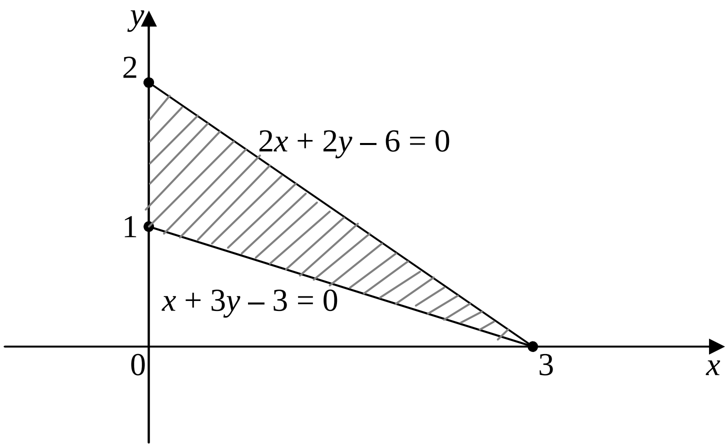

Рис. 36

Тогда объем искомого тела

$$V = \iint_D (6 - 2x - 3y)dxdy = \int_0^3 dx \int_{\frac{3-x}{3}}^{2-\frac{2}{3}x} (6 - 2x - 3y)dy = \frac{3}{2}.$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного снизу плоскостью XOY, сверху – плоскостью $2 - x - y - 2z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью $y = x^2$ и плоскостью $y = x$.

Решение. Построим данное тело (рис. 37)

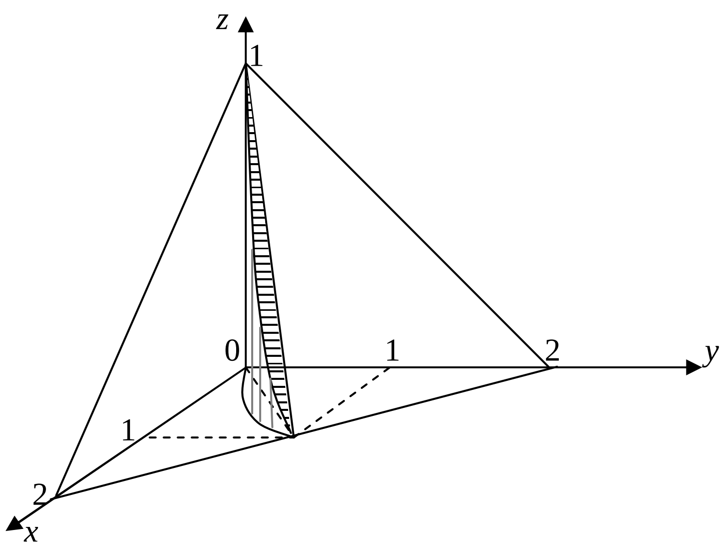

Рис. 37

Проекция данного тела на плоскость XOY имеет вид (рис. 38)

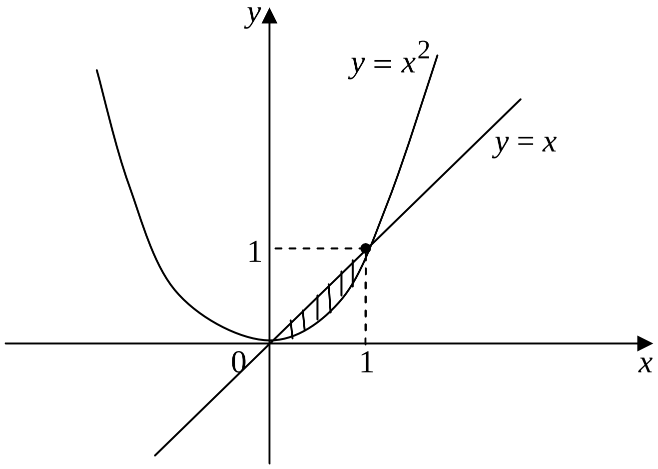

Рис. 38

Подынтегральная функция $f(x,y) = \frac{1}{2}(2 - x - y)$.

Тогда объем искомого тела

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{1}{2}(2 - x - y)dy = \frac{11}{120}.$$

Пример 5. Оси двух круговых цилиндров с одинаковыми поперечными сечениями пересекаются под прямым углом. Вычислить объем общей части этих цилиндров.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат в пространстве таким образом, чтобы оси цилиндров совпадали с осями OY и OZ, а радиус поперечного сечения каждого из цилиндров равен r. Тогда уравнения цилиндрических поверхностей будут иметь вид:

- $x^2 + z^2 = r^2$ – цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oy;
- $x^2 + y^2 = r^2$ – цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oz.

Построим данное тело (рис. 39).

На рис. 39 отмечена одна восьмая часть тела, полученного пересечением двух цилиндров. Подынтегральная функция – это уравнение, разрешенное относительно y (уравнение поверхности цилиндра с осью симметрии Оy), то есть

$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

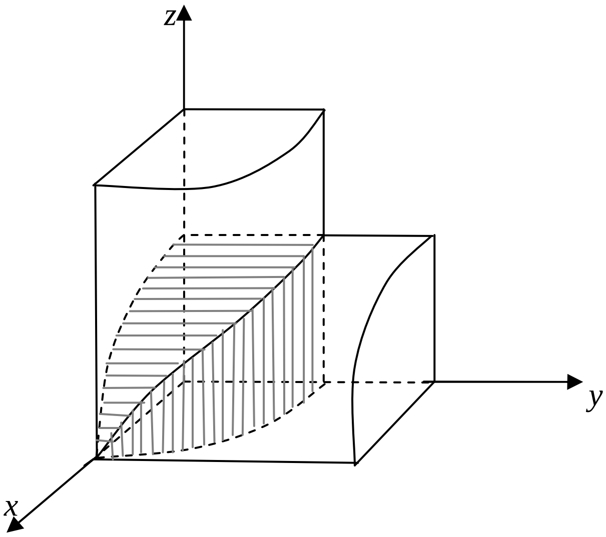

Рис. 39

Проектируя ее часть, отрезанную второй поверхностью и содержащуюся в первом октанте, получим область интегрирования – это часть круга $x^2 + y^2 \le r^2$, расположенная в первой четверти плоскости XOY. Поэтому имеем

$$\frac{1}{8}V = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\,dy = \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=r} = \frac{2}{3} r^3.$$

Следовательно $V = \dfrac{16}{3} r^3$.

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$x^2 + y^2 = 4x, z = x, z = 2x$.

Решение. Поверхность $x^2 + y^2 = 4x$ есть круговой цилиндр $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$, а $z = x$ и $z = 2x$ – плоскости, проходящие через ось OY под разными углами наклона к плоскости XOY. Данные плоскости пересекают цилиндр, вырезая клинообразный слой (рис. 40), объем которого требуется найти.

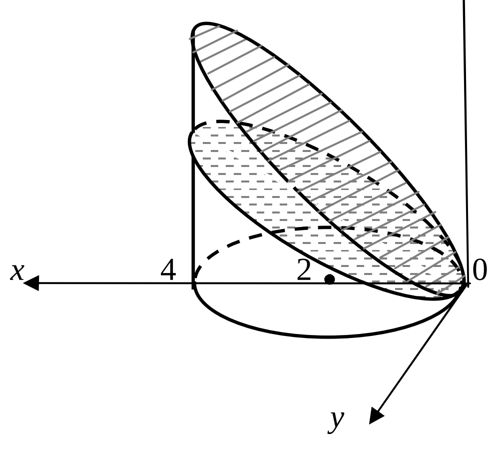

Рис. 40

Искомый объем найдем как разность объемов двух цилиндрических тел, срезанных сверху плоскостями $z = 2x$ ($f(x,y) = 2x$) и $z = x$ ($f(x,y) = x$). Тогда

$$\frac{1}{2}V = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} 2xdy - \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} xdy = 4\pi.$$

Значит $V = 8\pi$.

6.3. Вычисление площадей поверхностей

Пример 7. Вычислить площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте.

Решение. Построим поверхность, площадь которой требуется найти (рис. 41).

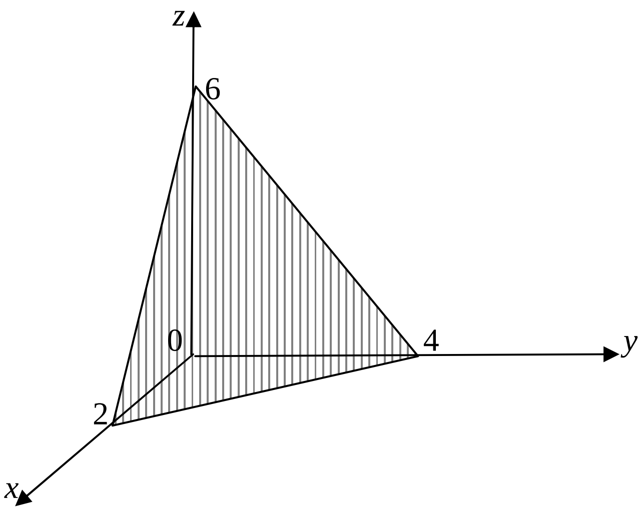

Рис. 41

Тогда $S = \iint\limits_P \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}} dy = 14$.

Таким образом, $S = 14$.

МОДУЛЬ 5. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое тело V, плотность которого в каждой точке $M(x, y, z)$ равна $\rho(x, y, z)$. Определить массу m данного тела. Для решения данной задачи поступим следующим образом:

- разбиваем область V на n частей V_i, объемы которых ΔV_i;
- в каждой из V_i $(i=\overline{1,n})$ выбираем по точке M_i $(i=\overline{1,n})$;
- считаем, что в пределах каждой из частей ΔV_i плотность приближенно постоянна и равна плотности $\rho(M_i)$ в выбранной точке;
- тогда масса m_i этой части ΔV_i $(i=\overline{1,n})$ будет приближенно равна

$$m_i = \Delta V_i \cdot \rho(M_i);$$

- массу всего тела V определим по формуле

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta V_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i) \cdot \Delta V_i$$

и, следовательно, задача решена.

Этот физический пример приводит к общему определению тройного интеграла, который является обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных.

§ 2. Определение тройного интеграла и условия его существования

Пусть в некоторой пространственной области V задана функция $f(x,y,z)$. Разобьем эту область на конечное число частей V_i $(i=\overline{1,n})$, имеющих соответственно объемы ΔV_i $(i=\overline{1,n})$. В пределах i-того элемента V_i выбираем точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, значение функции в этой точке $f(M_i)$ умножим на ΔV_i, получим интегральную сумму

$$I_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i .$$

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении n (т.е. $\max \Delta V_i \to 0$), то его называют *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначают

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \quad (\text{или } \iiint_V f(x,y,z)dv).$$

Таким образом, по определению имеем

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max \Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,y,z)dv. \qquad (1)$$

Тройной интеграл (1) существует, если:

– функция $f(x,y,z)$ ограниченная;
– функция $f(x,y,z)$ непрерывная;
– ограниченная функция $f(x,y,z)$, все разрывы которой лежат на конечном числе поверхностей с объемом 0.

§ 3. Свойства интегрируемых функций и тройных интегралов

Сформируем эти свойства (доказательство их аналогично доказательству свойств двойного интеграла).

1. Существование и величина тройного интеграла не зависит от значений, принимаемых функцией вдоль конечного числа поверхностей с объемом 0.

2. Если $V = V_1 + V_2$, то

$$\iiint_V f(M)dV = \iiint_{V_1} f(M)dV + \iiint_{V_2} f(M)dV,$$

причем из существования интеграла слева следует существование – справа, и обратно.

3. Если $C - \text{const}$, то

$$\iiint_V C \cdot f(M)dV = C\iiint_V f(M)dV.$$

4. Если в области V интегрируемы две функции $f(M)$ и $g(M)$, то интегрируема функция $f \pm g$, причем

$$\iiint_V (f \pm g)dV = \iiint_V f(M)dV \pm \iiint_V g(M)dV.$$

5. Если интегрируема в области V функция f удовлетворяет неравенству $m \le f \le M$, то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_V f dV \le M \cdot V .$$

6. Теорема о среднем. Если $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V^*,$$

$$(x_0,y_0,z_0) \in (V), \quad V^* \text{ – объем тела } V.$$

§ 4. Вычисление тройного интеграла

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области

$$V = \{(x,y,z);(x,y) \in D, \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\},$$

где $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ – непрерывные функции в квадрируемой области D (рис. 1).

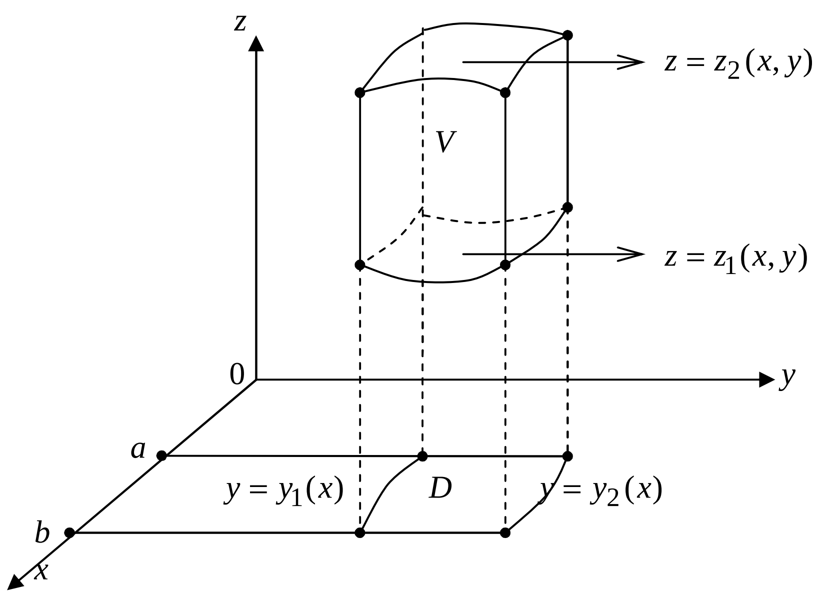

Рис. 1

Теорема. Пусть

1. Существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

2. Для любых $(x,y)\in D$ существует определенный интеграл

$$I(x,y)=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_D I(x,y)dxdy=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

(он называется *повторным*) и справедливо равенство

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \tag{1}$$

то есть тройной интеграл равен повторному.

Если область $D:\{(x,y): a\le x\le b,\, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, тогда двойной интеграл $\iint\limits_D I(x,y)dxdy$ сводится к повторному

$$\iint\limits_D I(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x)}^{z_2(x)} f(x,y,z)dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x)}^{z_2(x)} f(x,y,z)dz.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_V xy\sqrt{z}dxdydz$,

где V – область, ограниченная поверхностями $z=0$, $z=y$, $y=x^2$, $y=1$.

Решение. Построим данную область V (рис. 2).

Область V является правильной в направлении оси Oz (вход $z=0$ и выход $z=y$). Ее проекция на плоскость Oxy также правильная в направлении оси Oy и оси Ox.

Сведем данный тройной интеграл к повторному

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{y}xy\sqrt{z}dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\frac{2}{3}xy^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}\int\limits_{-1}^{1}x(1-|x|^{7})dx=$$

$$=\frac{4}{21}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{0}x^8dx-\int\limits_{0}^{1}x^8dx\right)=0.$$

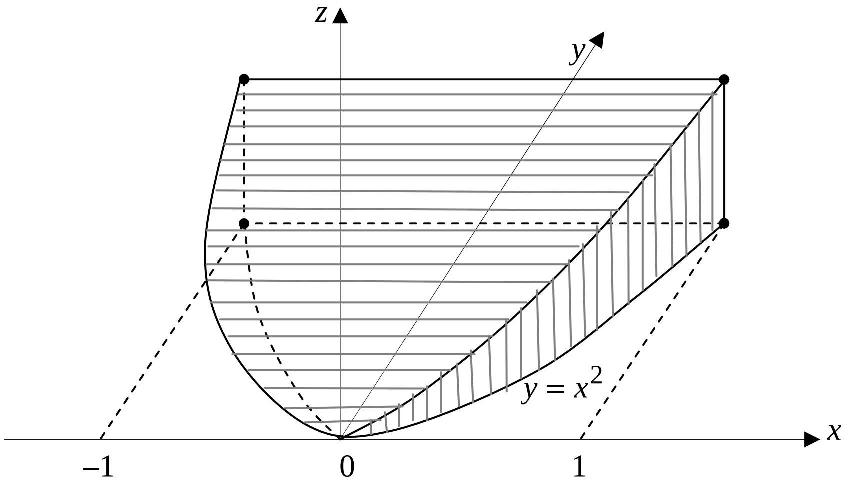

Рис. 2

§ 5. Замена переменных в тройном интеграле

Аналогично случаю двойного интеграла производится замена переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Замена представляет собой переход от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w по формулам

$$x=\varphi(u,v,w),\ \ y=\psi(u,v,w),\ \ z=\theta(u,v,w)\,. \qquad (1)$$

При этом каждая точка (x,y,z) области V соответствует некоторой точке (u,v,w) области V_1, а каждая точка (u,v,w) области V_1 переходит в некоторую точку (x,y,z) области V.

Пусть

1) отображение (1) взаимнооднозначно;

2) функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\theta(u,v,w)$ имеют в области V_1 непрерывные частные производные первого порядка;

3) якобиан преобразования

$$I = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right\|.$$

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в тройном интеграле)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(u,v,w)\cdot|I|dudvdw. \qquad (2)$$

Суть замены переменных в тройном интеграле (формула (2) состоит в следующем: интеграл, стоящий в правой части равенства (2) «проще» как по виду функции $f(u,v,w)$, так и по области V_1, чем интеграл и область V в левой части (2).

Формулы (1) можно рассматривать как формулы перехода к новым, криволинейным координатам (u,v,w) в области V. Поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ представляют собой координатные поверхности (вообще говоря, криволинейные) в пространстве (x,y,z). Кривые, на которых две криволинейные координаты имеют постоянные значения, и изменяется только одна из координат, представляют собой координатные линии.

Цилиндрические координаты. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка в пространстве R^3. M' – проекция точки M на плоскость xOy (рис. 3).

Точка M однозначно задается тройкой чисел (r,φ, z), где (r,φ) – полярные координаты точки M' на плоскости xOy; z – аппликата точки M. Тройка чисел (r,φ, z) называется цилиндрическими координатами точки M. Переход от прямоугольных координат (x,y,z) к цилиндрическим (r,φ, z) задается формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$$
$$(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty) \qquad (3)$$

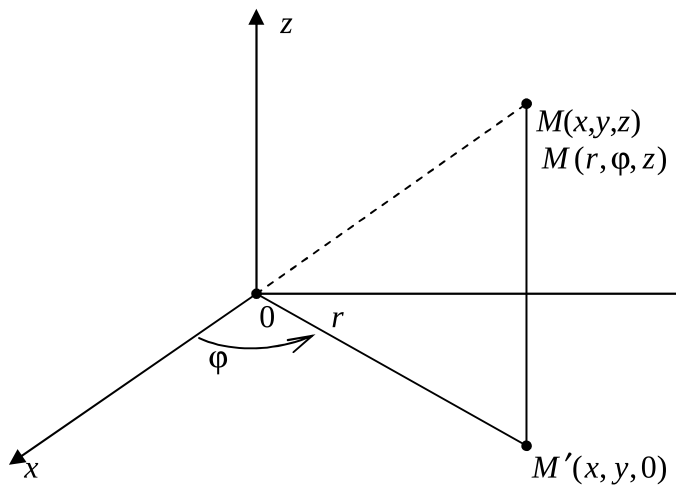

Рис. 3

Якобиан преобразования

$$I = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0 .$$

Тогда тройной интеграл в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r dr d\varphi dz \qquad (4)$$

Отметим, что координатные поверхности в рассматриваемом случае будут:

а) r = const – цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z; направляющими для них служат окружности на плоскости xOy с центром в начале координат;

б) φ = const – полуплоскости, проходящие через ось z;

в) z = const – плоскости, параллельные плоскости xOy.

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к интегрированию на r, по φ и z аналогично тому, как это делается в декартовых координатах.

Сферические координаты. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка в пространстве R^3. M' – проекция точки M на плоскость xOy (рис. 4). Точка M однозначно задается тройкой чисел (r,φ,θ), где r – расстояние точки M от точки 0 (начала координат), φ – угол, образованный проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox, θ – угол между лучами OM и Oz.

Тройка чисел (r, φ, θ) называется сферическими координатами точки M (или полярными координатами в пространстве).

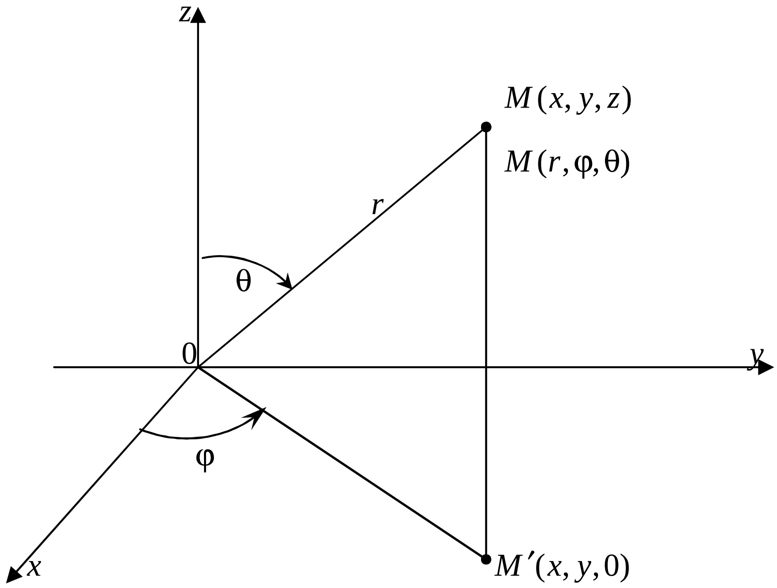

Рис. 4

Переход от прямоугольных координат (x,y,z) к сферическим (r, φ, θ) задается формулами

$$x = r\cos\varphi \cdot \sin\theta,\ y = r\sin\varphi \cdot \sin\theta,\ z = r\cos\theta$$
$$(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi) \tag{5}$$

Якобиан преобразования

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin\theta .$$

Тогда тройной интеграл в сферической системе координат имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint f(r\cos\varphi \cdot \sin\theta, r\sin\varphi \cdot \sin\theta, r\cos\theta)r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta .$$

Отметим, что координатные поверхности составляют три семейства:

а) r = const – концентрические сферы с центром в начале координат;

б) $\varphi = \text{const}$ – круговые конусы, осью которых служит ось z;

в) $\theta = \text{const}$ – полуплоскости, проходящие через ось z.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \left[(x+y)^2 - z \right] dxdydz$,

где V – область, ограниченная поверхностями $z = 0$ и $(z-1)^2 = x^2 + y^2$.

Решение. Область V – конус (рис. 5). Уравнение конической поверхности, ограничивающей область V, запишем в виде $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, а саму область V: $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$. Тогда данный тройной интеграл I можно свести к последовательному вычислению трех определенных интегралов в прямоугольных координатах.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} \left[(x+y)^2 - z \right] dz.$$

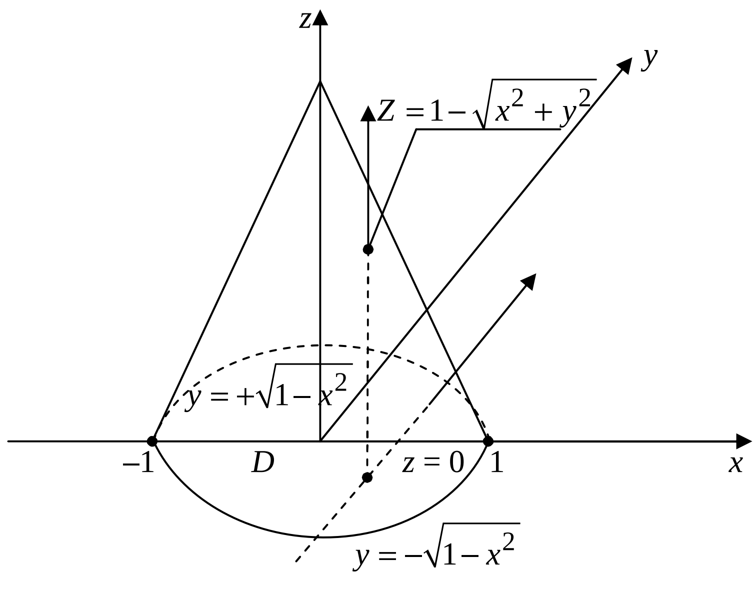

Рис. 5

При вычислении данного интеграла удобнее перейти к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Тогда прообраз круга D есть прямоугольник $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, прообраз конической поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ – плоская поверхность $z = 1 - r$, а прообраз области V – область V_1, изображенная на рис. 6.

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен r, подынтегральная функция в цилиндрических координатах равна $r^2(1 + \sin 2\varphi) - z$.

Сводя тройной интеграл по области V_1 к последовательному вычислению трех определенных интегралов, получим

$$I = \iiint\limits_{V_1} (r^2(1+\sin 2\varphi) - z) r dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{1-r} (r^2(1+\sin 2\varphi) - z) r dz = \frac{\pi}{60}.$$

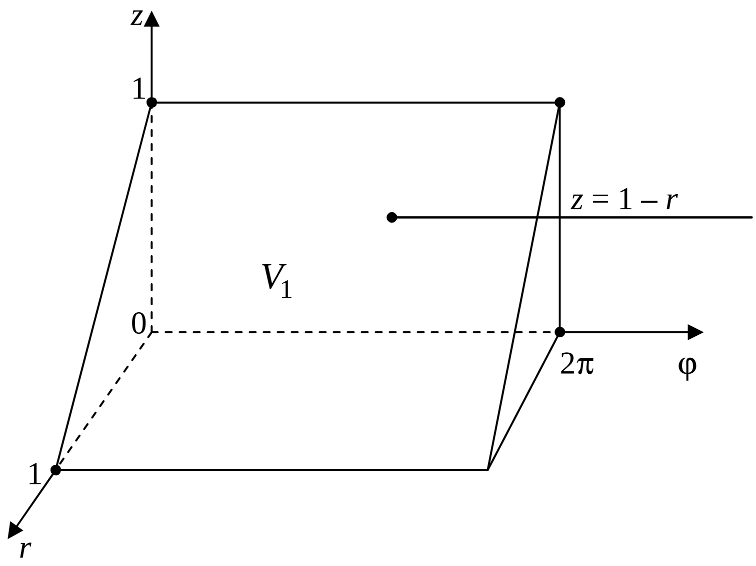

Рис. 6

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$,

где V – область, ограниченная поверхностью $z = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Область V представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой имеет вид (рис. 7).

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Данный тройной интеграл можно вычислить с помощью повторного интегрирования в прямоугольных координатах

$$I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$$

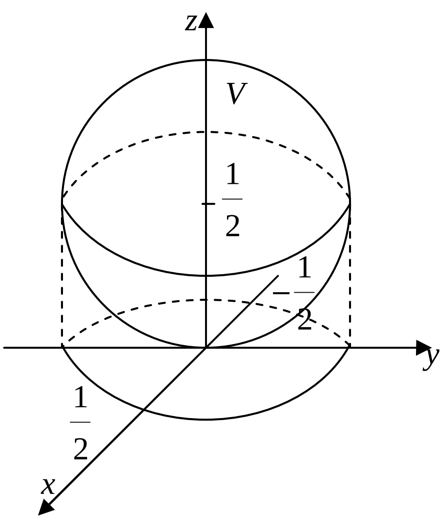

Рис. 7

В данном случае удобно перейти к сферическим координатам $(r,\ \varphi,\ \theta)$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta, \tag{6}$$

причем переменная φ изменяется от 0 до 2π, а при каждом значении φ переменная θ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Уравнение сферы в сферических координатах имеет вид $r^2 = r\cos\varphi$, откуда $r = 0$ или $r = \cos\theta$. Эти две поверхности в пространстве $(r,\ \varphi,\ \theta)$ при $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ограничивают снизу и сверху область V_1 (рис. 8), являющуюся прообразом области V при преобразовании (6). Якобиан этого преобразования равен $r^2\sin\theta$, а подынтегральная функция в сферических координатах равна r.

Вычисляя тройной интеграл по области V_1 с помощью повторного интегрирования, получим

$$I = \iiint\limits_{V_1} r^3 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr = \frac{\pi}{10}.$$

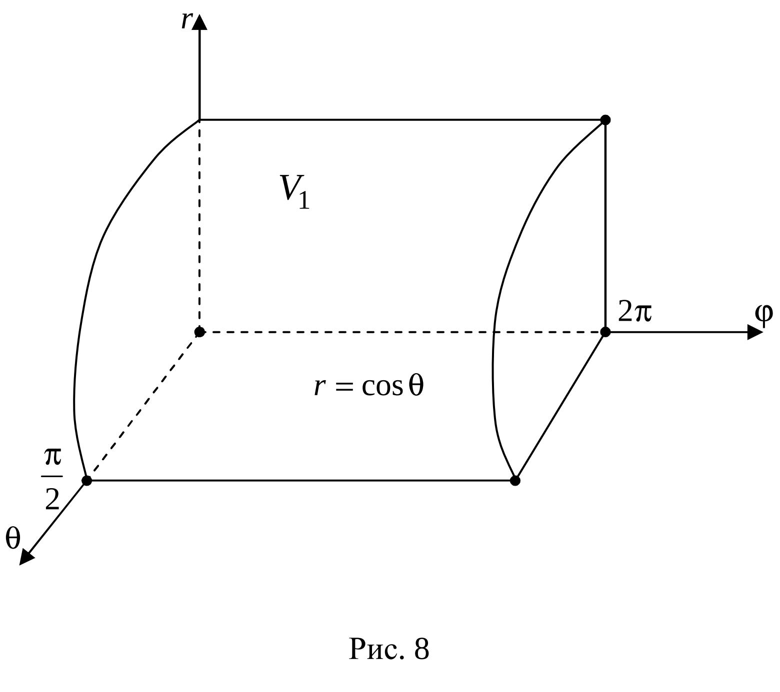

Рис. 8

Пример 3. Поменять порядок интегрирования (различными способами)

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{1-2x} dy \int\limits_0^{2x+y} f(x,y,z)dz$;

б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x^2+3y^2} f(x,y,z)dz$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f(x,y,z)dz$.

Ответы:

а)

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\frac{(1-y)}{2}} dx \int\limits_0^{2x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dy \int\limits_{\frac{z-y}{2}}^{\frac{1-y}{2}} f(x,y,z)dx + \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dy \int\limits_0^{\frac{1-y}{2}} f(x,y,z)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \left(\int\limits_0^{\frac{x}{2}} dz \int\limits_0^{1-2x} f(x,y,z)dy + \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 dz \int\limits_{z-2x}^{1-2x} f(x,y,z)dy \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \left(\int\limits_{2z}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{1-2x} f(x,y,z)dy + \int\limits_0^{2z} dx \int\limits_{z-2x}^{1-2x} f(x,y,z)dy \right);$$

б)

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2x^2 3y^2} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dy \left(\int\limits_0^{3y^2} dz \int\limits_0^1 f(x,y,z)dx + \int\limits_{3y^2}^{2+3y^2} dz \int\limits_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)dx \right) =$$

$$= \int\limits_0^3 dz \int\limits_{\sqrt{\frac{z}{3}}}^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y,z)dx + \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} dy \int\limits_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)dx +$$

$$+ \int\limits_2^3 dz \int\limits_{\sqrt{\frac{z-2}{3}}}^{\sqrt{\frac{z}{3}}} dy \int\limits_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)dx + \int\limits_3^5 dz \int\limits_{\sqrt{\frac{z-2}{3}}}^{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}} dy \int\limits_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)dx;$$

в) например,

$$\int_0^1\left(\int_0^{y^2}dz\int_y^1 f(x,y,z)+\int_{y^2}^{y}dz\int_{\frac{z}{y}}^1 f(x,y,z)dx\right).$$

Пример 4. Расставить пределы интегрирования для $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если интегрирование проводить в последовательности:

а) x, y, z; б) y, x, z

где V ограничена поверхностями $x^2+y^2=1,\ z=1\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

Ответ:

$$\text{а)}\ \int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^1 f(x,y,z)dz=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_0^1 f(x,y,z)dz.$$

§ 6. Приложения тройных интегралов

1. **Вычисление объемов с помощью тройного интеграла**.

Объем пространственного тела V с помощью тройного интеграла находится по формуле $V=\iiint\limits_V dxdydz$ – в декартовых координатах и по формуле $V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz$ – в цилиндрических координатах.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2=4x,\ \ z=x,\ z=2x.$$

Решение. На плоскости XOY уравнение $x^2+y^2=4x$ определяет окружность $(x-2)^2+y^2=4$, радиуса 2 с центром в точке (2;0). В пространстве уравнение $x^2+y^2=4x$ определяет круговой цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Уравнения $z=x$ и $z=2x$ определяют плоскости, проходящие через ось Oy под разными углами наклона к плоскости xOy. Построим данные поверхности, получим тело, изображенное на рис. 9.

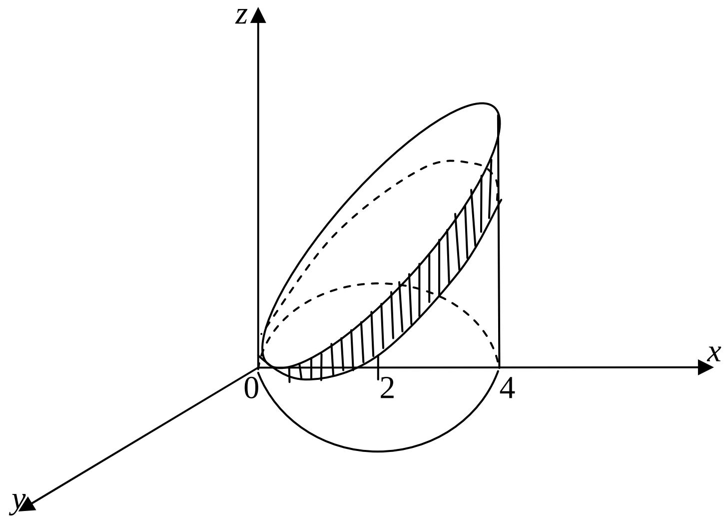

Рис. 9

Сверху тело ограничено плоскостью $z = 2x$, снизу плоскостью $z = x$. Проекция на плоскость *XOY* есть круг, с центром в точке (2;0) радиуса 2 (рис. 10).

Тогда $V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_x^{2x} dz = \iint\limits_D (2x - x)dxdy = \iint\limits_D xdxdy$.

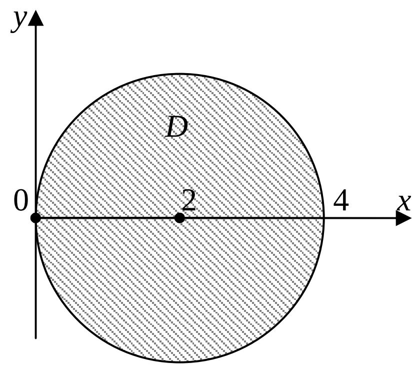

Рис. 10

Так как проекцией является круг (область *D*), то для вычисления полученного двойного интеграла целесообразно перейти к полярным координатам. Для области *D* φ меняется на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4x$ в полярных координатах имеет вид $r = 4\cos\varphi$, а так как область интегрирования содержит точку *O*(0;0), то r меняется от 0 до $4\cos\varphi$. Таким образом, получим

$$V = \iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_D r\cos\varphi \cdot rdrd\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r^2 \cos\varphi dr = 8\pi.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z.$$

Решение. Так как x и y входят в уравнение только в квадратах, то тело расположено симметрично относительно плоскостей yz и zx. А так как левая часть уравнения всегда положительна, то и $z \geq 0$, т.е. все тело лежит вверх от плоскости xy. Это означает, что, вычислив объем четверти нашего тела, лежащего в первом октанте, будет определен объем всего тела. Наличие в уравнении выражения $x^2 + y^2 + z^2$ подсказывает нам переход к сферической системе координат. Подставляя в уравнение поверхности выражения

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$

приходим к уравнению поверхности в сферических координатах $r = a\sqrt[3]{\cos\theta}$. Так как первый октант характеризуется неравенствами $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, и, учитывая, что якобиан $I = r^2\sin\theta$, будем иметь

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta dr = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

2. **Физические приложения тройных интегралов**.

Пусть V материальное тело (кубируемая область в пространстве R^3) с плотностью $\rho(x, y, z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

2.1. $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$ – масса тела;

2.2. $M_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \rho(x, y, z)dxdydz,\ M_{zx} = \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz$,

$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz$ – статистические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy;

2.3. $x_0 = \dfrac{M_{yz}}{m};\ y_0 = \dfrac{M_{zx}}{m};\ z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести тела;

2.4. $I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x, y, z)dxdydz,\ I_{zx} = \iiint y^2\rho(x, y, z)dxdydz,$

$I_{xy} = \iiint z^2\rho(x, y, z)dxdydz$ – моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy;

2.5. $I_x = I_{zx} + I_{xy}$, $I_y = I_{xy} + I_{yz}$, $I_z = I_{yz} + I_{zx}$ – моменты инерции тела относительно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*;

2.6. $I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$ – моменты инерции тела относительно начала координат;

2.7. $V(x_0, y_0, z_0) = \gamma\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\frac{1}{r}dxdydz$ – ньютоновский потенциал поля тяготения тела V в точке (x_0, y_0, z_0); где γ – гравитационная постоянная, r – расстояние между точками $M(x,y,z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

2.8. $\overline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ телом V массы m_0, где $F_x = \gamma m_0 \frac{dV}{dx_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\frac{x - x_0}{r^3}dxdydz$;

$$F_y = \gamma \cdot m_0 \frac{dV}{dy_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\frac{y - y_0}{r^3}dxdydz;$$

$$F_z = \gamma \cdot m_0 \frac{dV}{dz_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\frac{z - z_0}{r^3}dxdydz.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Найти неопределенные интегралы в заданиях 1.1 и 1.2, результаты проверить дифференцированием

1.1) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$; 1.2) $\int \mathrm{arctg}\,2x dx$; 1.3) $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx$;

1.4) $\int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; 1.5) $\int x\sqrt{x-6}dx$; 1.6) $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Решение.

1.1) $I=\int \frac{3x^3dx}{1-x^4}=\left|d(1-x^4)=-4x^3dx\right|=-\frac{3}{4}\int \frac{d(1-x^4)}{1-x^4}=$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t}=-\frac{3}{4}\ln|t|+C=-\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right|+C.$$

Проверка: $F(x)=-\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right|+C$; $F'(x)=-\frac{3}{4}\frac{(-4)x^3}{1-x^4}=\frac{3x^3}{1-x^4}$.

Ответ: $I=-\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right|+C$.

1.2) $I=\int \mathrm{arctg}\,2x dx=\begin{vmatrix} u=\mathrm{arctg}\,2x; & du=\dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ dv=dx; & v=x \end{vmatrix}=x\,\mathrm{arctg}\,2x-\int \frac{2xdx}{1+4x^2}dx=$

$$=x\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2}=x\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C.$$

Проверка: $F(x)=x\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C$.

$$F'(x)=(x\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C)'=\mathrm{arctg}\,2x+\frac{x\cdot 2}{1+4x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{8x}{1+4x^2}=\mathrm{arctg}\,2x.$$

Ответ: $I=x\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right|+C$.

1.3)

$$I=\int\left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2dx=\int\left(1-4\sin\frac{x}{5}+4\sin^2\frac{x}{5}\right)dx=\int dx-4\int\sin\frac{x}{5}+4\int\sin^2\frac{x}{5}dx=$$

$$=\int dx-4\cdot 5\int \sin\frac{x}{5}d\frac{x}{5}+2\int\left(1-\cos\frac{2x}{5}\right)dx=x+20\cos\frac{x}{5}+2x-2\cdot\frac{5}{2}\sin\frac{2x}{5}+C.$$

Ответ: $I=3x+20\cos\frac{x}{5}-5\sin\frac{2x}{5}+C$.

1.4) $I=\int\frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$.

Данный интеграл находим разложением на простейшие дроби подынтегральной функции

$$\frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2-4x+13}=\frac{A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-4x+13)}=$$

$$=\frac{(A=B)x+(B+C-4A)x+13A+C}{(x+1)(x^2-4x+13)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в тождестве

$$0\cdot x^2+12-6x=(A+B)x^2+(B+C-4A)x+13A+C,$$

получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A+B+C=-6\\13A+C=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-A\\C=12-13A\\-4A-A+12-13A=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1.\end{cases}$$

Тогда

$$I=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{(x+1)dx}{x^2 4x+13}=\ln|x+1|-\int\frac{(x-2)+3}{(x-2)^2+3^2}dx=$$

$$=\ln|x+1|-\int\frac{(x-2)}{(x-2)^2+3^2}dx-3\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+3^3}=$$

$$\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x-2)^2+9}{(x-2)^2+9}-3\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+3^2}=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^2+9\right|-\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$$

Ответ: $I=\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+13}}-\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

1.5) $I=\int x\sqrt{x-6}dx=\begin{vmatrix}\sqrt{x-6}=t; \;\; x=t^2+6 \\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int 2(t^2+6)t^2dt=2\int t^4dt+12\int t^2dt=$

$$=2\frac{t^5}{5}+4t^3+C=\frac{2}{5}(x-6)^{\frac{5}{2}}-4(x-6)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Ответ: $I=\frac{2}{5}(x-6)^{\frac{5}{2}}-4(x-6)^{\frac{3}{2}}+C$.

1.6) $I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\begin{vmatrix}1+e^x=t; \;\; e^x=t-1 \\ x=\ln(t-1); \;\; dx=\dfrac{dt}{t-1}\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\left|\frac{1}{t(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right|=$

$$=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|+C=\ln\frac{e^x+1}{e^x}+C.$$

Ответ: $I=\ln\frac{e^x+1}{e^x}+C$.

Отметим, что данный интеграл можно было вычислить следующим образом

$$I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(1+e^x)}=-\int\frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^x)+C=$$

$$=-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)+C=-\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C.$$

2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

2.1) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$; 2.2) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; 2.3) $\int\limits_{0}^{+\infty}2xe^{-x^2}dx$.

Решение.

2.1) В данном случае имеем несобственный интеграл второго рода, то есть интеграл от неограниченной функции. Точка $x=-\frac{1}{3}$ – точка разрыва второго рода, тогда

$$I=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}(1+3x)^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{1}{3}+\varepsilon}^{0}(1+3x)^{-\frac{1}{3}}d(1+3x)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3(1+3x)^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{3}+\varepsilon}^{0}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\left(1+3\left(-\frac{1}{3}+\varepsilon\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-(3\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Значит, исходный интеграл сходится и его величина равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: исходный интеграл сходится и его величина равна $\frac{1}{2}$.

2.2) Подынтегральная функция в данном интеграле имеет бесконечный разрыв (точка разрыва второго рода) в точке $x=0$, поэтому

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{3}}e^3\cdot e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^3\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{3}}=$$

$$=-e^3\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{\frac{1}{3}}=-e^3\left(e^3-e^{\frac{1}{0+\varepsilon}}\right)=\infty.$$

Таким образом, данный интеграл расходится.

Ответ: данный интеграл расходится.

2.3) Подынтегральная функция в данном интеграле определена и непрерывна для всех x, а один из пределов интегрирования равен ∞, поэтому имеем несобственный интеграл первого рода, т.е.

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}2xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}2xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\Big|_{0}^{b}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b^2}+1\right)=1.$$

Таким образом, данный интеграл сходится и его величина равна 1.

Ответ: данный интеграл сходится и его величина равна 1.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

3.1) $y=\sqrt{x}$	3.2) $y=x+1$	3.3) $y=-x^2-2x+3$
$y=x^3$	$y=\cos x$	$x=0;\ x=2;\ y=0$
	$y=0$	

3.4) $\rho^2 = \cos 2\varphi$.

Решение.

3.1) Сделаем чертеж (рис. 1). Для этого сначала определим точки пересечения данных кривых: решим уравнение $\sqrt{x} = x^3$, $x = 0$ и $x = 1$ – решения данного уравнения. Следовательно, точки пересечения кривых имеют координаты $O(0,0)$ и $A(1,1)$.

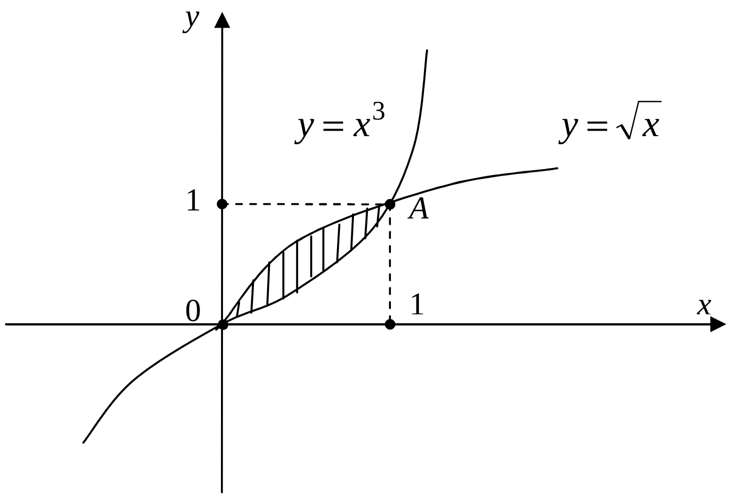

Рис. 1

$$\text{Тогда } S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

3.2) Построим чертеж фигуры, площадь которой требуется найти (рис. 2)

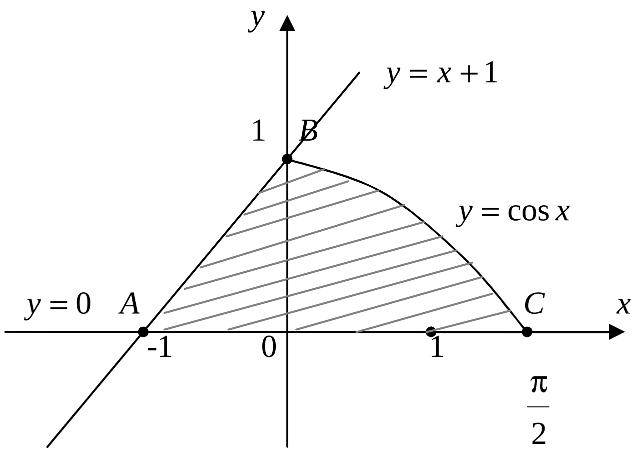

Рис. 2

Искомая площадь – это площадь фигуры $ABCOA$, т.е.

$$S = S_{ABO} + S_{BOC} = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \sin x \left.\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

3.3) Построим чертеж фигуры, площадь которой требуется найти: $y = x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ (рис. 3)

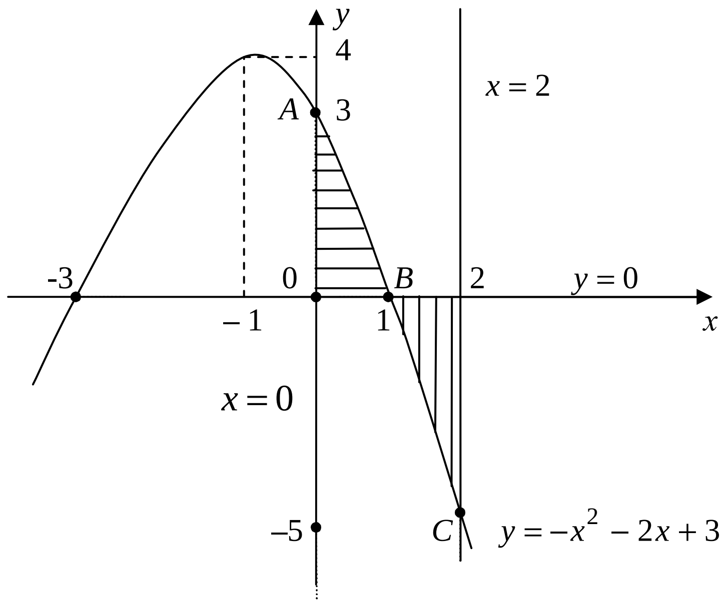

Рис. 3

На отрезке $[0, 2]$ функция $y = -x^2 - 2x + 3$ меняет знак, а именно $y \ge 0$, если $x \in [0,1]$ и $y \le 0$, если $x \in [1, 2]$, то площадь искомой фигуры определим по формуле

$$S = \int_0^2 |y(x)| dx = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3)dx =$$

$$= \left.\left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\right|_0^1 - \left.\left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\right|_1^2 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 4.$$

Ответ: $S = 4$.

3.4) В силу симметрии кривой определим одну четверть искомой плоскости (рис. 4)

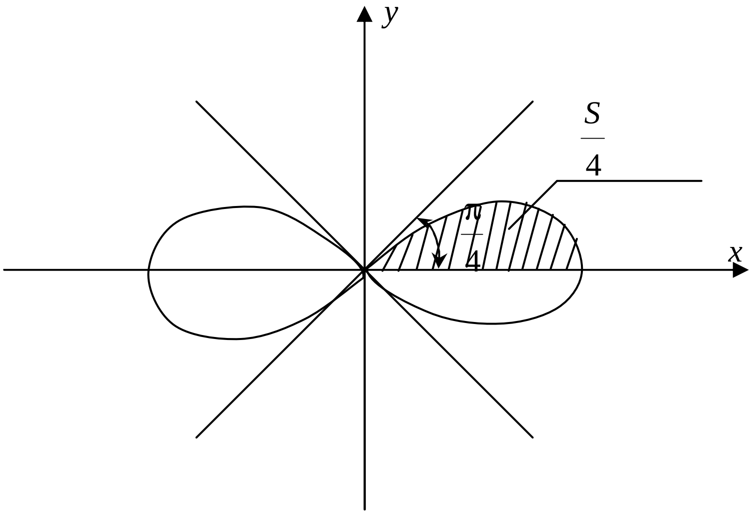

Рис. 4

Тогда $\dfrac{S}{4}=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\dfrac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Следовательно, искомая площадь $S=1$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси плоскостной фигуры, ограниченной кривыми

4.1) вокруг оси *Ox*, $y=x^2$ и $x=y^2$;

4.2) вокруг оси *Oy*, $y^2=2px$; $y=1$

Решение:

4.1) Объем тела вращения вокруг оси *Ox* вычисляем по формуле

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2dx$$

Решая совместно уравнения $y=x^2$ и $x^2=y$, получим $x=0$ и $x=1$.

Искомый объем находим как разность объемов, полученных в результате вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, одна из которых ограничена осью *Ox*, прямой $x=1$ и параболой $y=x^2$, а другая – осью *Ox*, прямой $x=1$ и параболой $y=\sqrt{x}$ (рис. 5). Поэтому

$$V=\pi\int\limits_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int\limits_0^1(x^2)^2dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{10}.$$

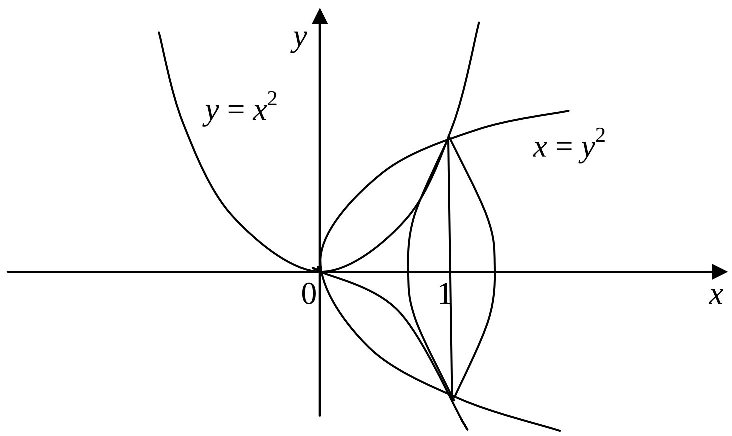

Рис. 5

4.2) Уравнение параболы $y^2 = 2px$ разрешимо относительно x, то есть $x = \dfrac{y^2}{2p}$ (рис. 6).

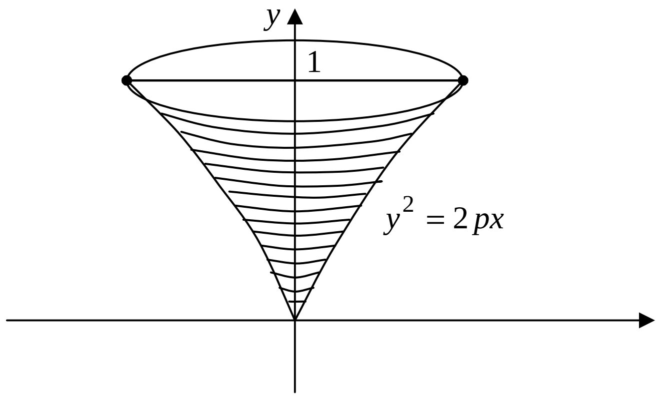

Рис. 6

Тогда $V = \pi\int\limits_0^1 x^2 dy = \pi\int\limits_0^1 \dfrac{y^4}{4p^2}dy = \dfrac{\pi y^5}{20p^2}\Bigg|_0^1 = \dfrac{\pi}{20p^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов и др. – М. : Высш. шк., 1988.
2. Виленкин, Н. Я. Сборник по курсу математического анализа. В 2 ч. Ч. 2 / Н. Я. Виленкин. – М. : Правоведение, 1971.
3. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Герасимович, Н.П. Кеда, М. Б. Сугак. – Мн. : Выш. шк., 1990.
4. Гурский, Е. К. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. К. Гурский. – Мн. : Выш. шк., 1989.
5. Ильин, В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М. : Наука, 1979.
6. Никольский, С. М. Курс математического анализа. В 2 т. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Высш. шк., 1973.
8. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1988.
9. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969.
10. Фролов, С. В. Курс высшей математики. В 2 т. / С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. – М. : Высш. шк., 1983.
11. Хавинсон, С. Я. Лекции по интегральному исчислению / С. Я. Хавинсон. – М. : Высш. шк., 1976.

Учебное издание

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Составитель
ЦЫВИС Николай Васильевич

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *И. С. Васильевой*

Подписано в печать 16.05.07. Формат 60 × 84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 15,31. Уч.-изд. л. 14,12. Тираж 275 экз. Заказ № 221.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29