УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО ВТОРЫМИ СУБНОРМАЛЬНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Д.П. АНДРЕЕВА
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть G − конечная группа. Тогда максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, *где* E_i *является максимальной подгруппой в* E_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Подгруппа* H *группы* G *называется строго n-максимальной подгруппой в* G, *если H является* n*-максимальной подгруппой в* G, *но не является* n*-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы* G. *Строго максимальной цепью длины* n *группы* G *называется всякая цепь вида* $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, *где* E_i *является строго* n*-максимальной подгруппой в* G, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Основные результаты данной работы следующие* (*теорема 3.1, теорема 3.2*)*: (1) В каждой строго максимальной цепи длины два группы* G *имеется собственная субнормальная в G подгруппа тогда и только тогда, когда* G *либо нильпотентна, либо* $G = [P]M$, *где* $P = G^{\mathfrak{N}}$ *– минимальная нормальная в* G *подгруппа, и каждая максимальная подгруппа из M, кроме, может быть, одной подгруппы* T, *действует приводимо на P и T нормальна в* G*; (2) пусть* G *– ненильпотентная группа. Тогда в том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины два группы* G *имеется собственная субнормальная в G подгруппа, когда* G *– группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т.д. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Легко заметить, что в несверхразрешимых группах одна и та же подгруппа может быть n-максимальной и m-максимальной одновременно для $n \neq m$. В связи с этим будем называть подгруппу H группы G строго n-максимальной подгруппой в G, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой. Строго максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является строго n-максимальной подгруппой в G, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Связь между n-максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении был получен Хуппертом в работе [1], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более чем на два (необязательно различных) простых числа. Эта работа стимулировала многие другие исследования в данном направлении.

В частности, развивая результаты Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. Он доказал, что если каждая 4-максимальная подгруппа разрешимой группы G является нормальной в G и порядок G делится, по крайней мере, на 4 различных простых числа, то G – сверхразрешимая группа. Годом позже, в работе [3] Янко изучил группы, у которых, кроме единичной, других 5-максимальных подгрупп не существует. Еще одним естественным развитием упомянутых выше результатов Хупперта и Янко стала работа А. Манна [4], в которой автор анализировал строение групп, где n-максимальная подгруппа субнормальна. В более поздней работе [5] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта и Янко, рассматривая лишь строго n-максимальные подгруппы для $n = 2,\ 3,\ 4$.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. В недавней публикации [6] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [7 – 9] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамом были получены новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [10] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [11] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами.

В связи с результатами Хупперта и Манна, отмеченными выше, Л.А. Шеметковым в 2005 году на Гомельском городском алгебраическом семинаре была поставлена задача описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа.

Данная работа связана с анализом этой задачи.

Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к работам [12; 13].

2. Предварительные результаты

В дальнейшем p, q – простые делители порядка группы G ($p \neq q$); P, Q обозначают некоторые силовскую p-подгруппу, силовскую q-подгруппу группы G соответственно.

Лемма 2.1. *Пусть* $A \leq K \leq G$ *и* $B \leq G$. *Тогда*

(1) *если A является субнормальной подгруппой в* G, *то A является субнормальной подгруппой в K* [13, гл. А, следствие 14.2];

(2) *если A и B субнормальны в G, то* $\langle A, B\rangle$ − *субнормальная подгруппа группы G* [13, гл. А, теорема 14.4];

(3) *если* N – *нормальная подгруппы группы* G *и A субнормальна в G, то* AN/N – *субнормальная подгруппа в* G/N [13, гл. А лемма 14.1];

(4) *если* N – *минимальная нормальная подгруппа группы* G *и A субнормальна в G, то* $N \subseteq N_G(A)$ [13, гл. А, лемма 14.3].

Группа G называется примитивной, если в ней имеется максимальная подгруппа M с $M_G = 1$.

Лемма 2.2 (см. [13, гл. А, теорема 15.2]). *Пусть* G – *примитивная группа и M – ее максимальная подгруппа с* $M_G = 1$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *группа* G *содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем* $N = C_G(N)$ *и* $G = [N]M$;

(2) *группа* G *содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем* $C_G(N) = E$ *и* $G = NM$;

(3) *группа* G *содержит точно две минимальные нормальные подгруппы* N_1 *и* N_2, *причем* $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_i = C_G(N_{3-i})$, *i=1,2 и* $N_1 \cong N_2$.

Лемма 2.3. *Пусть* M – *максимальная подгруппа группы* G. *Если* L *субнормальна в* G *и* $L \subseteq M$, *то* $L \subseteq M_G$.

Доказательство. Предположив сначала, что $M_G \neq 1$, докажем утверждение леммы индукцией по $|G|$.

Так как L субнормальна в G, то по лемме 2.1 (3), LM_G/M_G субнормальна в G/M_G. Кроме того, $LM_G/M_G \leq M/M_G$ и M/M_G – максимальная подгруппа в G/M_G, т.е. для LM_G/M_G условие леммы выполнено. Тогда $LM_G/M_G \subseteq (M/M_G)_{G/M_G} = M_G/M_G = 1$. Откуда следует, что $L \subseteq M_G$.

Значит, можем считать, что $M_G = 1$. Тогда пусть L_0 – минимальная субнормальная подгруппа в G, содержащаяся в M, и пусть $N = L_0^G$ – нормальное замыкание подгруппы L_0 в G.

Предположим, что $N \not\subset M$. Тогда $G = NM$ и поэтому $L_0^G = L_0^{NM}$. Если L_0 – неабелева группа, то N – минимальная нормальная подгруппа в G, поэтому $N = L_0^{NM} = L_0^M \subseteq M$, что противоречит нашему допущению о N. Значит, N – s-группа для некоторого простого числа s.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N. Тогда, по лемме 2.2 $G = [R]M$, $C_G(R) = R$ и по лемме 2.1 (4) $R \subseteq N_G(L_0)$. Значит, $L_0 \not\subset R$. Откуда следует, что $RL_0 = R \times L_0$ и, значит, $L_0 \subseteq C_G(R) = R$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Лемма 2.4 (см. [14, гл. IV, теорема 7.4]). *Пусть* H – *максимальная нильпотентная подгруппа группы* G *и* 2*-силовская подгруппа группы* H *имеет класс нильпотентности, не превосходящий два. Тогда* G *разрешима.*

Лемма 2.5 (см. [12, гл. 2]). *Пусть* $H \subseteq G$. *Тогда* $H \subseteq F(G)$ *и только тогда, когда* H *нильпотентна и субнормальна в* G.

Лемма 2.6 (см. [15]). *Пусть максимальная подгруппа* M *группы* G *является непримарной* p*-разложимой подгруппой. Тогда* G *имеет неединичную нормальную подгруппу одного из видов:*

(1) центр p*-силовской подгруппы* M;

(2) силовское p*-дополнение в* M *или в* G.

Напомним некоторые свойства групп Шмидта, необходимые в наших доказательствах (см. [13, гл. VII, теорема 6.18]).

Лемма 2.7. *Если* G *– группа Шмидта, то*

(1) $G=[P]<a>$*, где* $<a>$ *– силовская* q*-подгруппа группы* G;

(2) G *имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы* $P<a^q>$ *и* $P'<a>$.

Лемма 2.8 (см. [13, гл. I, теорема 3.3]). *Пусть* G *– разрешимая группа и* π *– множество простых чисел. Тогда любые две* π*-холловы подгруппы группы* G *сопряжены между собой.*

3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 3.1. *В каждой строго максимальной цепи длины два группы* G *имеется собственная субнормальная в* G *подгруппа тогда и только тогда, когда* G *либо нильпотентна, либо* $G=[P]M$*, где* $P = G^{\mathfrak{N}}$ *– минимальная нормальная в* G *подгруппа, и каждая максимальная подгруппа из* M*, кроме, может быть, одной подгруппы* T*, действует приводимо на* P *и* T *нормальна в* G.

Необходимость. Предположим, что G не является нильпотентной группой. Тогда G имеет ненормальную максимальную подгруппу M. Понятно, что M не является субнормальной подгруппой в G. Пусть M_1 – максимальная подгруппа в M. Допустим, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует, по крайней мере, один максимальный ряд подгрупп G_i группы G ($0 \le i \le n$), такой, что $M_1=G_r$ для $r \ge 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Среди всех таких рядов группы G выберем ряд наибольшей длины, например:

$$M_1=G_r<\ldots<G_2<G_1<G_0=G.$$

В этом случае группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. Так как $M_1 \le M$ и $M_1 \le G_2$, то $M_1 \le G_2 \cap M$. Если $G_2 \cap M=1$, то $M_1=1$ и $|M|=p$. Поэтому G – разрешимая примитивная группа. Следовательно, $G=[N]M$, где N – минимальная нормальная подгруппа в G.

Пусть теперь $G_2 \cap M \ne 1$ и G_1 субнормальна в G. Тогда G_1 нормальна в G и, ввиду максимальности подгруппы M_1 в M, $M_1=G_1 \cap M$. Из последнего следует, что M_1 нормальна в M. Если же G_1 не является субнормальной в G, то, согласно условию, субнормальной в G является подгруппа G_2.

Предположим вначале, что $G_2 \subseteq M$. Тогда G_2 является максимальной подгруппой в M, так как G_2 – строго 2-максимальная подгруппа в G. Так как G_2 субнормальна в G, то, по лемме 2.1(1), G_2 субнормальна в M. Кроме того, $M_1 \le G_2 \cap M = G_2 \le M$ и, значит, $M_1=G_2$ и M_1 нормальна в M.

Пусть теперь $G_2 \not\subset M$. Тогда $M_1=G_2 \cap M$ субнормальна в M. Из последнего ввиду максимальности M_1 в M следует, что M_1 нормальна в M.

Таким образом, все максимальные подгруппы из M нормальны в M и поэтому M – нильпотентная группа. Следовательно, в группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа является нильпотентной.

Покажем, что группа G разрешима. Пусть M – ненормальная максимальная подгруппа в G. Тогда M нильпотентна, что влечет нильпотентность подгруппы M_G.

Применяя индукцию по $|G|$, получаем, что если $M_G \ne 1$, то M_G и G/M_G разрешимы, а значит, G разрешима. Поэтому мы можем считать, что $M_G=1$. Следовательно, G – примитивная группа и по лемме 2.2 либо $G=NM$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, либо $G=[N_1]M=[N_2]M$, где N_1, N_2 – две различные минимальные нормальные подгруппы в G и $N_1 \square N_2$.

Рассмотрим первый случай. Если N разрешима, то по индукции G разрешима. Пусть N не является разрешимой группой. Тогда $|N|$ делится по крайней мере на два различных простых числа, одно из которых нечетное. Пусть $p \neq 2$ делит $|N|$ и N_p – силовская p-подгруппа в N, которая содержится в P. Тогда $N_p = P \cap N$, что влечет $P \leq N_G(N_p)$. Поскольку N – неабелева группа, то в G существует максимальная подгруппа T, такая, что $N_G(N_p) \leq T$. Значит, $N_p \leq P \leq T$. Кроме того, $G = NN_G(N_p) = NT$, следовательно, $N \not\subset T$ и $T_G = 1$. Значит, как было показано выше, T – нильпотентная группа. Если T – примарная группа, т.е. $|T| = p^a$ для некоторого натурального числа a, то по лемме 2.4 G разрешима.

Пусть T – непримарная группа. Тогда по лемме 2.6 в G имеется неединичная нормальная подгруппа одного из следующих видов:

1) центр p-силовской подгруппы T;

2) силовское p-дополнение в T.

В каждом из этих случаев в группе G имеется неединичная абелева нормальная подгруппа, что, как и выше, влечет разрешимость группы G.

Пусть теперь N_1 и N_2 – две различные минимальные нормальные подгруппы в G. Тогда $G \simeq G/N_1 \cap N_2$ разрешима.

Значит, по теореме 24.2 из [12, гл. VI] относительно группы G выполнены следующие условия:

1) $G^{\mathfrak{N}}$ является s-группой для некоторого простого числа s;

2) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ – главный фактор группы G;

3) любые две ненормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.

Не теряя общности, мы можем считать, что $s = p$.

Покажем, что $G^{\mathfrak{N}}$ – силовская подгруппа в G. Воспользуемся индукцией по $|G|$. Если $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) \neq 1$, то $(G/\Phi(G^{\mathfrak{N}}))^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$. Значит, $G^{\mathfrak{N}}$ – силовская подгруппа в G. Поэтому мы можем считать, что $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$. Так как $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ – главный фактор и $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$, то $G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Так как G – ненильпотентная группа, то $G^{\mathfrak{N}} \not\subset \Phi(G^{\mathfrak{N}})$ и, следовательно, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = [G^{\mathfrak{N}}]M$. Из того, что $G/G^{\mathfrak{N}} \simeq M$, следует, что M нильпотентна и, значит, силовская p-подгруппа M_p группы M нормальна в M. Значит, $M \subseteq N_G(M_p)$. Но $M_p < N_G(M_p)$ и, следовательно, $N_G(M_p) = G$. Из последнего следует, что M_p нормальна в G. Так как $P = [G^{\mathfrak{N}}]M_p$, то P нормальна в G.

Пусть M – ненормальная максимальная подгруппа в G. Тогда M нильпотентна и имеет вид: $M = \Phi(G^{\mathfrak{N}})G_{p'}$, где $G_{p'}$ – некоторая холловская p'-подгруппа в G. Покажем, что $\Phi = \Phi(G_p) = 1$.

Допустим обратное. Тогда в Φ имеется максимальная подгруппа Φ_1, такая, что $T = \Phi_1 G_{p'}$ – максимальная подгруппа в M. Допустим, что T не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда в G имеется отличная от M максимальная подгруппа V такая, что T является собственной немаксимальной подгруппой в V. Так как $\Phi \leq V$, то $V = \Phi(G_{p'})^x = M^x$ для некоторого $x \in G$. Пусть $T < L < \cdot M^x$. Так как T – максимальная подгруппа в M и M нильпотентна, то $|M:T| = p$. Кроме того, $|M^x| = |M|$. Значит, $p = |M:T| = |M^x:T| = |M^x:L||L:T| > p$. Полученное противоречие показывает, что T является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда T субнормальна в G. Кроме того, нильпотентность группы M влечет нильпотентность группы T. Значит, по лемме 2.5 $T \subseteq F(G)$, что влечет $G = PT \subseteq F(G)$ и, следовательно, $G = F(G)$ – нильпотентная группа, что противоречит нашему исходному допущению о G. Таким образом, $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Достаточность. Если G нильпотентна, то каждая максимальная подгруппа в G нормальна и, следовательно, субнормальна в G.

Пусть теперь G не является нильпотентной группой. Тогда $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – минимальная нормальная подгруппа в G, и M – максимальная подгруппа в G.

Пусть L – произвольная максимальная подгруппа в G. Прежде предположим, что $|G:L| = p^a$ и $1 \neq P \cap L \neq P$. Так как $P \cap L$ нормальна в P и $P \cap L$ нормальна в L, то $P \cap L$ нормальна в G, что противоречит минимальности P. Значит, $P \cap L = 1$ и L является холловой p'-подгруппой в G. Откуда по лемме 2.8 вытекает, что $L = M^x$ для некоторого $x \in G$. В частности, L – нильпотентная группа.

Пусть теперь E – максимальная подгруппа в L. Предположим, что E является строго 2-максимальной подгруппой в G. Ввиду сопряженности подгрупп M и L, в M найдется такая максимальная подгруппа V, что $E = V^x$. Предположим, что V действует приводимо на P. Тогда P не является минимальной нормальной подгруппой в $[P]V$. А так как $[P]V^x = ([P]V)^x$, то P не является минимальной нормальной подгруппой в $[P]V^x$. Предположим теперь, что V действует неприводимо на P. Тогда $V = V^x$ – нормальная подгруппа в G.

Допустим теперь, что $|G:L| = q^b$ для некоторого простого $q \neq p$. Тогда $P \subseteq L$. Так как $P = G^{\mathfrak{N}}$, то G/P – нильпотентная группа. Кроме того, L/P является максимальной подгруппой в G/P и, следовательно, L/P нормальна в G/P, что влечет нормальность L в G. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА **3.2.** *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда в том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа, когда G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Необходимость. Предположим, что в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Тогда по теореме 3.1 $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – минимальная нормальная подгруппа в G, M – представитель единственного класса нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп в G, каждая максимальная подгруппа которой, кроме, может быть, одной подгруппы T, действует приводимо на P и T нормальна в G.

Допустим, что в G имеется максимальная ненильпотентная подгруппа L.

Прежде предположим, что $|G:L| = p^a$ и $1 \neq P \cap L \neq P$. Так как $P \cap L$ нормальна в P и $P \cap L$ нормальна в L, то $P \cap L$ нормальна в G, что противоречит минимальности P. Значит, $P \cap L = 1$ и L является холловой p'-подгруппой в G. Откуда по лемме 2.8 вытекает, что $L = M^x$ для некоторого $x \in G$ и L – нильпотентная группа.

Допустим теперь, что $|G:L| = q^b$. Тогда $P \subseteq L$, $|G:L| = q$ и $L = PM \cap L = P(M \cap L)$. Заметим, что

$$q = |G:L| = \frac{|G|}{|L|} = \frac{|P||M|}{|P(M \cap L)|} = \frac{|P||M|}{|P||M \cap L|} = \frac{|M|}{|M \cap L|} = |M : M \cap L|.$$

Значит, $M \cap L$ является максимальной подгруппой в M. Нильпотентность группы M влечет нильпотентность группы $M \cap L$. Кроме того, нильпотентной является группа P. Так как $M \cap L$ – максимальная подгруппа в M, то $M \cap L$ нормальна в G. Значит, L – нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Полученное противоречие показывает, что G – группа Шмидта.

Покажем теперь, что P является абелевой группой. По лемме 2.7 (2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P' < a >$ и $P < a^q >$. Так как M является максимальной ненормальной подгруппой в G, то $M = Q^x$ для некоторого $x \in G$ и $P' = 1$, что влечет абелевость группы P.

Достаточность. Предположим, что G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда по лемме 2.7 $G = [P]Q$, где $Q = < a >$ и G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a^q >$ и Q.

Пусть теперь $L < \cdot M < \cdot G$ – произвольная максимальная цепь длины два группы G. Если $M = P < a^q >$, то M нормальна в G. Пусть теперь $M = Q^x$ для некоторого $x \in G$. Тогда $< a^q >$ является максимальной в M и $< a^q >$ нормальна в G. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – V. 60. – P. 409 – 434.
2. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – V. 82. – P. 82 – 89.
3. Janko, Z. Finite simple groups with shot chains of subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1964. – V. 84. – P. 428 – 437.
4. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 132. – P. 395 – 409.
5. Asaad, M. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – V. 54, № 1 – 2. – P. 9 – 27.

6. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2003. – V. 181. – P. 297 – 308.
7. Guo, W. *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – V. 315. – P. 31 – 41.
8. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China Serias: Mathematics. – 2008. – V. 50, № 1. – P. 827 – 841.
9. Guo, W. Finite groups with given *s*-embedded and *n*-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – V. 321. – P. 2843 – 2860.
10. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2009. – V. 37. – P. 2446 – 2456.
11. Го, В. Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 3. – С. 350 – 359.
12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
13. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1967. – 793 p. – New York: Springer.
15. Романовский, А.В. Конечные группы с холловскими нормальными делителями / А.В. Романовский // Конечные группы: сб. ст. – Минск, 1966. – С. 96 – 115.

Поступила 20.01.2011

FINITE GROUPS WITH SECOND SUBNORMAL MAXIMAL SUBGROUPS

D. ANDREEVA

Let G be a finite group. A chain $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, *where* E_i *is maximal in* E_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, *is called a maximal chain of G of length n. A subgroup H of a group G is called a strictly n-maximal subgroup in G, if H is an n-maximal subgroup in G but is not an n-maximal subgroup in any proper subgroup of G. A chain* $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, *where* E_i *is a strictly n-maximal subgroup in G,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *is called a strictly maximal chain of G of length n. Our main results here are the following (Theorem 3.1 and Theorem 3.2): (1) Every strictly maximal chain of length 2 of G contains a proper subnormal in G subgroup if and only if either G is nilpotent or* $G = [P]M$, *where* $P = G^N$ *is a minimal normal subgroup of G and any maximal subgroup of M besides may by only one subgroup T acts reducible on P and T is normal in G. (2) Let G be a non-nilpotent group. Then every maximal chain of length 2 of G contains a proper subnormal in G subgroup if and only if G is a Schmidt group with abelian Sylow subgroups.*