

УДК 621.396; 534.41

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ  
СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ**

И.Б. БУРАЧЕНОК, В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, С.В. ЛАВРОВ

*Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»,  
Новополоцк, 211446, Республика Беларусь*

А.Г. ФИЛИППОВИЧ, М.М. БАРАНОВСКИЙ

*Оперативно-аналитический центр при Президенте Республики Беларусь,  
г. Минск, 220030, Республика Беларусь*

**Введение.** Информационные речевые сигналы (РС), формируемые первичными преобразователями из передаваемого сообщения, представлены множеством параметров и различными формами [1]. Такие сигналы подвергаются помеховым возмущениям в каналах утечки информации (КУИ) и не могут воспроизводиться идеально. Точность вычислений при этом зависит от того, насколько точно будут восстановлены РС при аналогово-цифровом (АЦП) и цифро-аналоговом (ЦАП) преобразованиях, а погрешность восстановления исходного РС зависит от: вида исходной функции; процесса квантования, связанного с округлением значений непрерывного сигнала; интервала квантования и алгоритма восстановления. Дискретизация сигналов приводит к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами за счет возникновения дополнительных спектральных составляющих, поэтому возникает необходимость в дополнительном исследовании тонкой структуры сигнала, представленного периодической последовательностью импульсов дискретизации.

**Цель работы:** анализ тонкой структуры спектральных составляющих, обусловленных дискретным преобразованием аналоговых речевых сигналов в каналах утечки информации.

Основной задачей является исследование аналогово-цифрового преобразования разложением произвольной функции на элементарные  $\delta$ -импульсы и анализ информации о совокупном значении численных величин параметров шума квантования при дискретно-квантованном представлении РС в КУИ.

Итак, дискретный сигнал по своим значениям в процессе анализа может быть разложен только по системам дискретных базисных функций, у которых отсчеты времени совпадают с отсчетами сигнала, т. е. по сути он является непрерывной функцией, но определенной только по дискретным значениям аргумента [2]. По множеству своих значений он является конечным и описывается дискретной последовательностью отсчетов  $y(n\Delta t)$ , где  $y_1 \leq y \leq y_2$ ,  $\Delta t$  – интервал между отсчетами, т. е. дискретный сигнал представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного сигнала по координатам  $n\Delta t$ . Частота дискретизации при этом  $f = 1/\Delta t$ ,  $\Delta t$  – является величиной, обратной шагу дискретизации.

Если же рассматривать цифровой сигнал, то он квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Такой сигнал описывается квантованной решетчатой функцией [3]  $y_n = Q_k[(n\Delta t)](n\Delta t)$ , где  $Q_k$  – функция квантования с числом уровней квантования  $k$ , при этом интервалы квантования могут быть как с равномерным распределением, так и с неравномерным. Ранее в работе [4] приводится обоснование выбранного равномерного шага квантования.

По существу, цифровой сигнал по своим отсчетам является формализованной разновидностью дискретного сигнала. Процесс преобразования бесконечных по значениям аналоговых отсчетов в конечное число цифровых значений называется квантованием по уровню. Возникающие при квантовании ошибки округления до определенного количества цифр отсчетов и есть шумы или ошибки квантования, которые зависят в том числе и от частоты дискретизации, порождающей дополнительные спектральные составляющие.

В системах цифровой обработки данных и в ЭВМ сигнал всегда представлен с точностью до определенного количества разрядов, а, следовательно, всегда является цифровым [2]. С учетом этих факторов при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов. Причем при дискретизации сетка отсчетов по аргументу может быть произвольной или задаваться по определенному закону.

Сегодня широко применяются методы равномерной дискретизации, так как при их использовании алгоритмы дискретизации и восстановления сигналов и соответствующая аппаратура просты в реализации, поэтому далее рассмотрим равномерную дискретизацию по времени (с постоянным шагом по аргументу), при  $s(t) \Rightarrow s(n\Delta t)$ , где значения  $s(n\Delta t)$  представляют собой отсчеты функции  $s(t)$  в моменты времени  $t = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Примером дискретного сигнала с квантованием по времени является модулированная по амплитуде последовательность идеальных импульсов равной длительности  $\Delta$ , представленная в виде ступенчатой функции  $x_\Delta(t)$ , имеющей в каждом интервале постоянное значение, равное значению функции  $x(t)$  в середине этого интервала, как показано на рисунке 1.

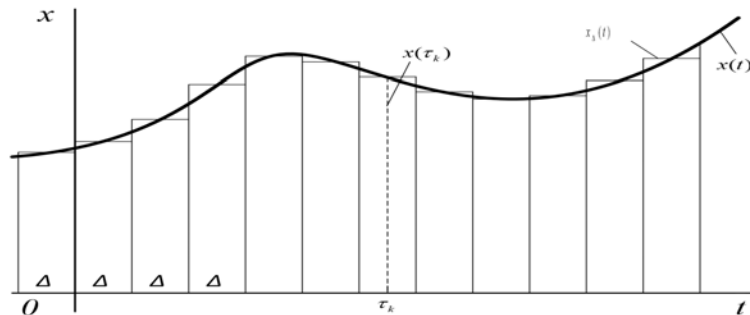


Рис. 1. Ступенчатая функция

Обозначим середину  $k$ -того интервала через  $\tau_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Значение функции  $x(t)$  в точке  $\tau_k$ , равно  $x(\tau_k)$ . Построим прямоугольный импульс длительности  $\Delta$ , имеющий высоту  $x(\tau_k)$  (рис. 2).

Если единичный импульс конечной длительности  $\Delta$  (высота этого импульса равна  $1/\Delta$ ) представить выражением [5]

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{при } |t| < \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{\Delta}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

то отдельный прямоугольный импульс, действующий в промежутке времени  $\left(\tau_k - \frac{\Delta}{2}, \tau_k + \frac{\Delta}{2}\right)$ , можно представить в виде функции  $\delta_\Delta(t - \tau_k)$ .

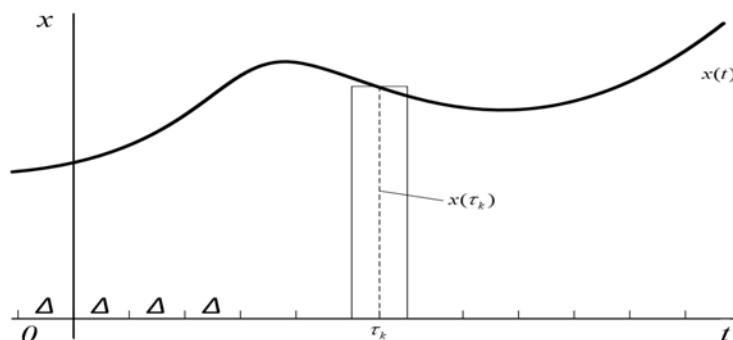


Рис. 2. Прямоугольный импульс длительностью  $\Delta$ , построенный на  $k$ -том интервале ступенчатой функции

Чтобы получить импульс высотой  $x(\tau_k)$ , необходимо функцию  $\delta_\Delta(t - \tau_k)$  умножить на  $x(\tau_k)$  и разделить на  $\frac{1}{\Delta}$ , в результате получим  $\delta_\Delta(t - \tau_k)x(\tau_k)\Delta$ . Сумма таких импульсов по всем интервалам, на которые разбили ось  $t$ , представляет ступенчатую функцию, имеющую в каждом интервале постоянное значение, равное значению функции  $x(t)$  в середине этого интервала

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t - \tau_k)x(\tau_k)\Delta. \quad (2)$$

Из полученного выражения (2) однозначно следует, что на точность передачи аналогового сигнала значительно влияет длительность импульса дискретизации.

Подробнее остановимся на рассмотрении идеального единичного  $\delta$ -импульса, представленного сигналом в виде так называемой  $\delta$ -функции [6]. Импульсная  $\delta$ -функция впервые введена в науку знаменитым английским физиком Дираком. Импульсной  $\delta$ -функцией называется функция, равная нулю всюду, кроме начала координат, принимающая бесконечное значение в начале координат  $\delta(t) = 0$  при  $t \neq 0$ ,  $\delta(0) = \infty$ , и при том так, что интеграл от нее по любому интервалу, содержащему начало координат, равен единице  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$  при любом  $\varepsilon > 0$ .

Данная функция обладает следующими свойствами: это функция времени, которая имеет бесконечно большое значение в течение определенного бесконечно малого промежутка и равна нулю вне этого промежутка времени. Интеграл от такой функции конечен и равен мгновенному изменению скорости тела. Функцию, обладающую такими свойствами, можно получить, например, как предел положительного прямоугольного импульса, имеющего единичную площадь, когда длительность этого импульса стремится к нулю. График такой функции можно представить, как показано на рисунке 3.

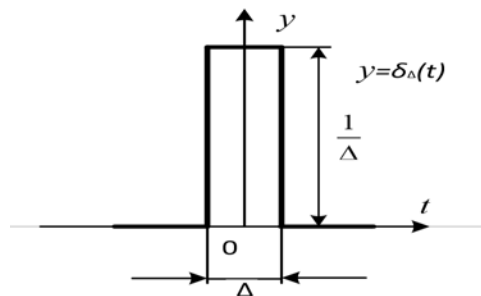


Рис. 3. Положительный прямоугольный импульс единичной площади

Чем уже полоска между левой и правой частью, тем выше она должна быть для того, чтобы ее площадь (т. е. интеграл) сохраняла свое заданное значение, равное 1. При сужении полоски приближаемся к выполнению условия  $\delta(t) = 0$  при  $t \neq 0$ .

Еще удобнее определить  $\delta$ -функцию как предел при  $h \rightarrow \infty$  функции

$$\delta_h(t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}. \quad (3)$$

Очевидно, что при любом  $t \neq 0$  функция  $\delta_h(t)$  стремится к нулю при  $h \rightarrow \infty$ . При  $t = 0$  эта функция неограниченно возрастает при  $h \rightarrow \infty$ . Наконец, при любом  $\varepsilon > 0$  имеем выражение

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_h(t)dt = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\varepsilon}^{h\varepsilon} e^{-u^2} du. \quad (4)$$

При  $h \rightarrow \infty$  — это выражение стремится к единице. Важно также, чтобы  $\delta$ -функция была четной.

Преобразование Фурье единичного импульса имеет вид  $F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt$  и равно единице:  $F[\delta(t)] = 1$  [5], как показано на рисунке 4.



Рис. 4. Преобразование Фурье, включающее единичный импульс

Это означает, что единичный импульс имеет равномерную спектральную плотность во всей бесконечной области частот, т. е. единичный импульс содержит составляющие всех возможных частот  $\omega$  с одинаковыми относительными амплитудами. Преобразование Фурье  $\delta$ -функции показало, что ее площадь не убывает с ростом частоты и остается неизменной, т. е. равной единице.

Следующим этапом рассмотрим периодическую последовательность единичных импульсов. Если задать время повторения импульсов  $T_{\text{сек}}$ , то такую последовательность можно представить следующим выражением [7]

$$\begin{aligned} \delta_T(t) = & \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \dots + \delta(t - nT) + \dots \\ & + \delta(t + T) + \delta(t + 2T) + \dots + \delta(t + nT) + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (5)$$

Осуществим преобразование Фурье от периодической последовательности единичных импульсов и получим  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t}$ , где  $F_n = \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-in\omega_0 t} dt$ .

На интервале  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  функция  $\delta_T(t)$  есть единичный импульс  $\delta(t)$ . Следовательно,

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (6)$$

В силу фильтрующего свойства единичного импульса [5] полученное соотношение оказывается равным  $F_n = \frac{1}{T}$ , т. е. постоянной величине, это означает, что периодическая последовательность единичных импульсов с периодом  $T$  содержит составляющие с частотами  $\omega = 0, \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \dots, \pm n\omega_0, \dots$  и т. д.  $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$  одинаковой амплитудой  $\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}$ .

Чтобы найти преобразование Фурье от  $\delta_T(t)$ , воспользуемся функцией спектральной плотности или преобразованием Фурье периодической функции из единичных импульсов, расположенных на частотах гармоник сигнала, с интенсивностями в  $2\pi$  раз больше соответствующих коэффициентов экспоненциального ряда Фурье  $F[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$ . Так

как в нашем случае  $F_n = \frac{1}{T}$ , то имеем

$$F[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega). \quad (7)$$

Полученное соотношение (7) устанавливает, что преобразование Фурье периодической последовательности единичных импульсов с периодом  $T$  есть последовательность единичных импульсов с одинаковыми амплитудами, разделенными интервалами  $\omega_0$ , рад  $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$ .

Полученные периодические последовательности единичных импульсов с периодами и их соответствующие преобразования Фурье показаны на рисунке 5.

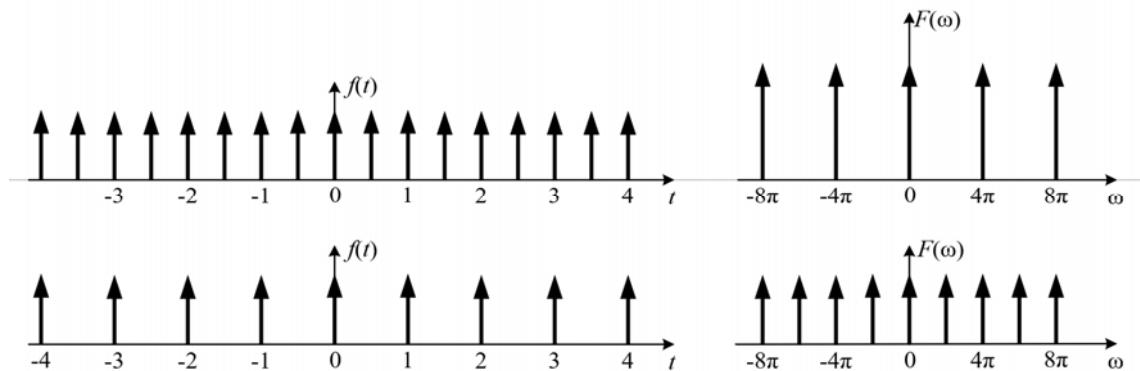


Рис. 5. Периодические последовательности единичных функций и их преобразование Фурье

Очевидно, что при увеличении периода частотный спектр становится плотнее, увеличивается частота дискретизации и снижаются ошибки квантования.

Таким образом, анализ тонкой структуры спектральных составляющих, обусловленных дискретным преобразованием аналоговых речевых сигналов показывает возникновение дополнительных КУИ и пути повышения точности.

Погрешность дискретизации можно оценить следующим образом

$$\varepsilon(t) = x(t) - V(t), \quad (8)$$

где  $x(t)$  – истинное значение сигнала,  $V(t)$  – полученное после восстановления.

Чаще других отклонений воспроизводимой функции  $V(t)$  от сигнала  $x(t)$  на интервале дискретизации оценивается следующими критериями [8].

1. Критерий наибольшего отклонения

$$\varepsilon_m = \max_{t \in \Delta T_i} |\varepsilon(t)| = \max_{t \in \Delta T_i} |x(t) - V(t)|, \quad (9)$$

где  $\varepsilon(t)$  – текущая погрешность, определяемая выражением (8).

2. Среднеквадратический критерий, определяемый следующим выражением:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sqrt{\frac{1}{\Delta T_i} \int_{\Delta T_i} \varepsilon^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{\Delta T_i} \int_{\Delta T_i} |x(t) - V(t)|^2 dt}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon(t)$  – текущая погрешность, определяемая выражением (8).

3. Интегральный критерий как мера отклонения  $x(t)$  от  $V(t)$ , определяемый выражением

$$\bar{\varepsilon} = \int_{\Delta T_i} \varepsilon(t) dt. \quad (11)$$

4. *Вероятностный критерий*, определяемый соотношением

$$p = \{ \varepsilon(t) < \varepsilon_0 \} = p_0, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_0$  – допустимое значение погрешности;  $p_0$  – допустимая вероятность того, что погрешность не превысит значения  $\varepsilon_0$ .

В приведенных определениях критериев отклонений не приводится весовая функция. Введение весовой функции позволяет заменить истинную погрешность взвешенной. Для множества реализаций критерий наибольшего отклонения может быть записан в следующем виде:  $E_m = \sup \{ \varepsilon_m \}$ , где верхняя грань отыскивается по всем реализациям  $x(t)$  и  $V(t)$ .

**Заключение.** В работе показано, что при преобразовании аналогового сигнала в цифровой и обратно операции АЦП и ЦАП не являются взаимно обратными с абсолютной точностью. Ошибки, обусловленные дискретным преобразованием аналоговых РС, имеют собственное спектральное распределение, которое зависит от параметров АЦП, частоты и формы исходного сигнала. Исследования тонкой структуры спектральных составляющих, обусловленных дискретным преобразованием аналоговых РС, позволяет обнаруживать гармоники шума квантования в КУИ и судить о характеристиках передаваемого РС. Также показано, что ограничение ошибок квантования требует повышения частоты дискретизации. При выборе равномерной частоты дискретизации большую роль играет выбор частоты отсчетов (шаг дискретизации). В нашем случае при оценке КУИ в диапазоне РС от 100 до 10кГц для снижения погрешности квантования принято решение использовать частоту дискретизации 192 кГц (интервал дискретизации 5,2 мкс), что значительно повышает точность оценки параметров сложных сигналов.

#### Список литературы

1. Бураченко, И. Б. Обнаружение первичных признаков речевого сигнала / И. Б. Бураченко, В. К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 12. – С. 2–12.
2. Давыдов А. В. Сигналы и линейные системы : тематические лекции. – Екатеринбург : УГГУ ; ИГиГ ; Фонд электр. документов, 2005.
3. Бессонов, Л. А. Линейные электрические цепи : учеб. пособие для электротехнич. и радиотехнич. специальностей вузов / Л. А. Бессонов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1974. – 320 с.
4. Железняк, В. К. Некоторые проблемы оценки защищенности шума квантования / В. К. Железняк [и др.] // ВГАС «Проблемы инфокоммуникаций» – 2020. – № 2 (12). – С. 60–65.
5. Основы автоматического управления / под ред. В. С. Пугачева. – М. : Наука, 1974. – 720 с.
6. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля / А. В. Солодов. – М. : Наука, 1967. – 432 с.
7. Лахтин, Б. П. Системы передачи информации. / Б. П. Лахтин / пер. С англ. ; под общ. ред. Б. И. Кувшинова. – М. : Связь, 1971. – 324 с.
8. Темников, Ф. Е. Теоретические основы информационной техники : учеб. пособие для вузов / Ф. Е. Темников, В. А. Афомин, В. И. Дмитриев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергия, 1979. – 512 с.