Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(16) Вопросы алгебры (2000), 195–198
2000 Mathematics Subject Classification: 20D20, 20E07

К теореме С.А.Чунихина

О.В.Голубева

Посвящается профессору В.Гашюцу в связи с его 80-летием

В работе используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в источниках [1]-[5]. В частности, pd-группа — это группа, порядок которой делится на простое число p; p-замкнутая группа — это группа с нормальной силовской p-подгруппой; минимальная не p-замкнутая группа — не p-замкнутая группа, у которой все собственные подгруппы p-замкнуты.

Классическая теорема С.А. Чунихина касается роли подгрупп Шмидта (минимальных ненильпотентных групп) в теории конечных групп.

Теорема 1. ([6], теорема 4.3.1). *Если в конечной группе X нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то группа X имеет нормальное p-дополнение.*

В этой работе исследуется следующий вопрос: что можно сказать о группе X, если в ней нет p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта, $p > 2$? Мы докажем, что конечная K-группа с этим условием является p-замкнутой. Под K-группой мы понимаем конечную группу, у которой композиционные факторы являются известными простыми группами из множеств $\{Z_p\}$, $\{A_n, n \geq 5\}$, $\{Spor\}$, $\{Chev\}$.

Лемма 1. *Пусть X — конечная не p-разрешимая группа, у которой все собственные подгруппы являются p-замкнутыми. Если наибольшая нормальная разрешимая подгруппа $R(X)$ равна 1, то X — простая неабелева группа.*

Доказательство. Из $R(X) = 1$, в частности, следует, что $O_p(X) = 1$. Поэтому, как и в доказательстве заключения (1) леммы 3 в [7], показывается, что силовская p-подгруппа P из X является TI-подгруп- пой.

Пусть $M \subseteq Z(P)$, $M^x \not\subseteq P$. Тогда из условия леммы следует, что $< M, M^x >= X$. Теперь из леммы 3 в [8] следует, что $E(X) \cdot M = X$. $E(X)$ не может быть собственной p'-подгруппой в X, иначе X оказалась бы p-разрешимой группой. $E(X)$ не может быть и собственой pd-подгруппой, ибо в противном случае она оказалась бы p-замкнутой, что невозможно для $E(X)$. Поэтому $E(X) = X$. Если бы $E(X)$ состояла из нескольких компонент, то они были бы p-замкнутыми подгруппами в X по условию. Значит, $E(X)$ состоит из одной простой компоненты, так как $Z(X) \subseteq R(X) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть X — конечная p-разрешимая минимальная не p-замкнутая группа с $O_p(X) = 1$, $p > 2$. Пусть P есть S_p-подгруппа в X. Тогда*

(1) P есть TI-подгруппа в X;

(2) P является циклической группой;

(3) $X = O_{p'}(X)\lambda P$ и P действует неприводимо на $O_{p'}(X)$;

(4) $O_{p'}(X)$ является q-группой;

(5) X является p'-замкнутой группой Шмидта.

Доказательство. Заключение (1) доказывается дословно так же, как и заключение (1) в лемме 3 из [7] с использованием факта $O_p(X) = 1$ вместо простоты группы. Поэтому заключение (1) верно.

(2). Из заключения (1) и теоремы 2.2 в [9] теперь следует, что $m_p(P) = 1$. Из $p > 2$ следует, что P — циклическая группа.

(3), (4), (5). Пусть $M \subseteq Z(P)$, $M^x \nsubseteq P$. Тогда $< M, M^x >= X$, ибо в противном случае по условию M и M^x содержались бы в P. Теперь из леммы 2 в [8] следуют все утверждения (3)-(5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть X — конечная не p-разрешимая группа, у которой все собственные подгруппы являются p-замкнутыми. Если $O_p(X) = 1$, то X – квазипростая группа.*

Доказательство. Предположим, что $R(X) \neq 1$ (в противном случае утверждение следует из леммы 1). Среди подгрупп, порождающих вместе с $R(X)$ всю группу X, выберем наименьшую относительно включения L. Тогда по лемме 2 в [10] $R(X) \cap L \subseteq \Phi(L)$. Если $L \subset X$, то по условию L – p-замкнутая группа и тогда из $L \cdot R(X) = X$ следовала бы p-разрешимость группы X. Поэтому $L = X$ и $R(X) \subseteq \Phi(X)$. Так как $PR(X) \neq X$ для S_p-подгруппы P из X (ввиду p-разрешимости группы $PR(X)$), то $PR(X)$ — p-замкнутая группа. Пусть H есть холловская p'-подгруппа p-разрешимой группы $PR(X)$. Так как по условию p не делит порядок группы $R(X) \subseteq \Phi(X)$, то $PR(X) = P \times H$, $H = R(X)$. Из $H \triangleleft X$ следует, что и $C_X(H) = C \triangleleft X$. $P \subset C$. Если $C \subset X$, то по условию $P \triangleleft C \triangleleft X$ и $P \triangleleft X$, что противоречит условию. Поэтому $C = X$. Поэтому $H \subseteq Z(X) = R(X) = \Phi(X)$. По лемме 1 $X/R(X)$ — простая неабелева группа (так как у $X/R(X)$ все собственные подгруппы p-замкнуты). Кроме того, из условия следует, что $X' = [X, X]$ не может быть собственной подгруппой в X. Поэтому $X' = X$, $X/Z(X)$ — простая неабелева группа и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть X — конечная не p-разрешимая группа, у которой все собственные подгруппы являются p-замкнутыми, $p > 2$. Тогда X есть нерасщепляемое расширение p-группы P_0 с помощью квазипростой минимальной не p-замкнутой группы без нормальных p-подгрупп. Силовская p-подгруппа группы X/P_0 является циклической, а $P_0 \subseteq \Phi(X)$.*

Доказательство. Так как для группы $\overline{X} = X/O_p(X) = X/P_0$ имеет место $O_p(\overline{X}) = 1$, то $\overline{X}$ является квазипростой группой по лемме 3. Так как $Z(\overline{X})$ является p'-группой, то S_p-подгруппы групп $\overline{X}$ и $\overline{X}/Z(\overline{X})$ являются изоморфными. Теперь из леммы 3 в [7] следует, что S_p-подгруппа группы $\overline{X}/Z(\overline{X})$ является циклической. Поэтому и у группы $\overline{X}$ S_p-подгруппа является циклической.

Среди подгрупп, порождающих вместе с P_0 всю группу X, выберем минимальную по включению L. Тогда по лемме 2 в [10] $P_0 \cap L \subseteq \Phi(L)$. Если $L \subset X$, то по условию L — p-замкнутая группа. Но тогда $L_p \cdot P_0 \triangleleft LP_0 = X$ и X оказалась бы p-замкнутой группой, что противоречит не p-разрешимости X по условию. Поэтому $L = X$ и $P_0 \subseteq \Phi(X)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть X — конечная p-разрешимая минимальная не p-замкнутая группа. Тогда X есть p'-замкнутая pd-группа Шмидта. В частности, ее S_p-подгруппа P — циклическая.*

Доказательство. Пусть сначала $p > 2$. Предположим, что $O_p(X) \neq 1$. Тогда $X/O_p(X) = \overline{X}$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому $\overline{X}$ – p'-замкнутая группа Шмидта ввиду заключения (5) леммы 2. Как и в доказательстве леммы 4 (последний абзац) легко показать, что $O_p(X) = P_0 \subseteq \Phi(X)$. По теореме III.3.5 в [1] тогда и X является p'-замкнутой группой. Поэтому любая собственная подгруппа M из X является по условию нильпотентной. Значит, X — минимальная ненильпотентная группа.

Пусть теперь $p = 2$.

По условию леммы X не имеет собственных $2'$-замкнутых $2d$-под- групп Шмидта, так как все ее собственные подгруппы 2-замкнуты. Но тогда по [11] X должна быть

2-замкнутой группой, что противоречит условию. Поэтому X сама есть $2'$-замкнутая $2d$-подгруппа Шмидта.

Из свойств групп Шмидта ([12]-[14]) теперь следует, что P - циклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $S = P\lambda Q$ — группа Шмидта. Тогда и только тогда S p-сверхразрешима, когда $\mid P \mid = p > q$ и q делит $p-1$. В частности, не существует p-замкнутых p-сверхразрешимых подгрупп Шмидта для $p = 2$, а при $p > 2$ все они сверхразрешимы.*

Доказательство. В p-сверхразрешимой группе все главные факторы, порядки которых делятся на p, имеют порядки p. Поэтому из свойств групп Шмидта ([12]-[14]) следует, что $\mid P/\Phi(P) \mid = p$. Теперь из свойств групп Шмидта ([12]-[14]) следует, что $\Phi(P) = 1$, так как из $P/\Phi(P) \cong Z_p$ следует, что P — абелева группа ($\Phi(P) \subseteq Z(P)$). Поэтому $\mid P \mid = p$ и q делит $p-1$ ([4], лемма 10.2). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть X — конечная K-группа. Если X не имеет p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта, $p > 2$, то X является p-замкнутой группой.*

Доказательство. Пусть M — собственная подгруппа в X. По индуктивному заключению M — p-замкнутая группа. Предположим, что X не является p-замкнутой группой. Тогда X — минимальная не p-замкнутая группа. Если X является p-разрешимой группой, то по лемме 5 X есть p'-замкнутая pd-подгруппа Шмидта (с циклической S_p-подгруппой P). Но тогда X — p-сверхразрешимая группа Шмидта, что исключено по условию.

Пусть теперь X является не p-разрешимой группой. Тогда в X есть композиционный фактор $\overline{A} = A/B$, являющийся простой неабелевой pd-подгруппой. По теореме 2 в [7] $\overline{A}$ содержит p-сверхразрешимую подгруппу Шмидта $\overline{H}$. По лемме 5 в [7] тогда и X содержит p-сверхразрешимую pd-подгруппу Шмидта H_0. Но это исключено по условию. Значит, наше предположение неверно и X – p-замкнутая группа. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 имеет место и для $p = 2$. В самом деле, из леммы 6 следует, что все 2-сверхразрешимые группы Шмидта исчерпываются $2'$-замкнутыми группами. Теперь утверждение для $p = 2$ следует из [11].

Теорема 2 является развитием упомянутой теоремы 1.

Abstract. In this paper is proved the following result: if a finite K-group X has no p-supersoluble Schmidt pd-subgroups, then X is a p-closed group.

Литература

[1] B.Huppert, *Endliche Gruppen*, I. Berlin: Springer–Verlag, 1967, 793.

[2] B.Huppert, N.Blackburn, *Finite groups, III,* Berlin: Springer–Verlag, 1982, 454.

[3] D.Gorenstein, R.Lyons, R.Solomon, *The classification of the finite simple groups,* Math. surveys and monographs (AMS, Providence, R. I.), 40:1 (1994), 1–165.

[4] D.Gorenstein, R.Lyons, R.Solomon, *The classification of the finite simple groups,* Math. surveys and monographs. (AMS, Providence, R. I.), 40:2 (1994), 1–218.

[5] Д.Горенстейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию,* М.: Мир, 1985, 352.

[6] С.А.Чунихин, *Подгруппы конечных групп,* Мн.: Наука и техника, 1964, 154.

[7] Э.М.Пальчик, О.В.Голубева, *О подгруппах Шмидта простых неабелевых конечных K-групп,* Известия Гомельского госуниверситета им. Ф.Скорины, Вопросы алгебры 3(16) (2000), 138–144.

[8] В.И.Зенков, *О порождении конечных групп классом сопряженных абелевых подгрупп,* Алгебра и логика, 35:3 (1996), 288–293.

[9] D.Goldschmidt, *A conjugation family for finite groups,* J. Algebra, 16:1 (1970), 138–142.

[10] Я.Г.Беркович, Э.М.Пальчик, *О перестановочности подгрупп конечной группы,* Сибирский матем. журн., 8:4 (1967), 741–753.

[11] Я.Г.Беркович, *Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы,* В кн.: Конечные группы, Мн.: Наука и техника, 1966, 29–39.

[12] L.Redei, *Die endlichen einstüfig nichtnilpotenten Gruppen,* Publ. Math., 4 (1956), 303–324.

[13] О.Ю.Шмидт, *Группы, все подгруппы которых специальных,* Матем. сб., 31 (1924), 366–372.

[14] Ю.А.Гольфанд, *О группах, все подгруппы которых специальные,* ДАН СССР, 60:8 (1948), 1313–1315.

Поступило 8.06.2000

Полоцкий государственный университет
211440 Полоцк, Беларусь