УДК 519.542

О.В. Голубева

# Критерий p-скованности конечной группы

В работе используются только стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [1-5].

**Определение 1.** Пусть X – конечная группа. Тогда $X^p=\langle x^p \mid x\in X\rangle$. $\Omega_k(X) = \langle x \mid x\in X,\ x^{p^k} = 1\rangle$. $\Omega(P) = \Omega_1(P)$, если $p > 2$; $\Omega(P) = \Omega_2(P)$, если $p=2$.

**Теорема 1.** *Пусть P – конечная p-группа, A – характеристическая элементарная абелева подгруппа в P. Тогда в P существует характеристическая подгруппа B, обладающая следующими свойствами:*

(1) $A \subseteq \Omega_1(Z(B)) = \Omega_1(C_P(B)) \subseteq B$;

(2) $B/\Omega_1(Z(B)) \subseteq \Omega_1(Z(P/\Omega_1(Z(B))))$.

Доказательство. Пусть Г – множество характеристических подгрупп $B_k$, $k=1, \ldots, n$, таких, что $A\subseteq\Omega_1(Z(B_k))$ и $B_k/\Omega_1(Z(B_k))\subseteq \Omega_1(Z(P/\Omega_1(Z(B_k))))$. Так как $A\in\Gamma$, то $\Gamma\neq\varnothing$. Пусть B – максимальный по включению элемент множества Г. Если $\Omega_1(C_P(B))\subseteq B$, то B обладает свойствами (1) и (2), и все доказано. Поэтому предположим, что $\Omega_1(C_P(B))$ не принадлежит B. В частности, тогда $\Omega_1(Z(B))\subset\Omega_1(C_P(B))$. Пусть $K/\Omega_1(Z(B))=\Omega_1(Z(P/\Omega_1(Z(B)))\cap\Omega_1(C_P(B))/\Omega_1(Z(B)))$. Поэтому $K/\Omega_1(Z(B))$ – элементарная абелева группа. Тогда $K \subseteq \Omega_1(C_P(B))$, $K^p \subseteq \Omega_1(Z(B))$, $\Omega_1(Z(B)) \subset K$ ввиду теоремы 3.7.2 из [1]. Предположим, что $K \subseteq B$. Так как $K \subseteq \Omega_1(C_P(B))$, то $K \subseteq C_P(B)$ и $K \subseteq Z(B)$. Тогда из $K \subseteq \Omega_1(C_P(B))$ следует, что $K \subseteq \Omega_1(Z(B))$, что исключено выше. Поэтому K не принадлежит B. Так как B char P, то по теореме 2.1.1 из [6] $C_P(B)$ char P. Но тогда и $\Omega_1(C_P(B))$ char P. Из теоремы 2.1.2 в [6] следует, что K char P, так как $K/\Omega_1(Z(B))$ есть характеристическая подгруппа в $P/\Omega_1(Z(B))$ как $\Omega_1(Z(P/\Omega_1(Z(B)))\cap \Omega_1(C_P(B))/\Omega_1(Z(B)))$. Тогда и KB char P. Из $K \subseteq \Omega_1(C_P(B))$ и $A \subseteq B$ следует, что $[K,A] = 1$. Поэтому $A \subseteq Z(KB)$. Из условия теоремы следует теперь, что $A \subseteq \Omega_1(Z(KB))$ и $(KB)^p = K^pB^p \subseteq \Omega_1(Z(B)) \subseteq \Omega_1(Z(KB))$, так как $[K,B] = 1$. Поэтому $KB/\Omega_1(Z(KB)) \subseteq \Omega_1(Z(P/\Omega_1(Z(KB))))$ ввиду $[KB,P] = [K,P]\cdot[B,P] \subseteq \Omega_1(Z(B)) \subseteq \Omega_1(Z(KB))$. Поэтому $KB \in \Gamma$. Но ввиду $B \subset KB$ получили противоречие с тем, что B есть максимальный элемент в Г. Теорема доказана.

**Лемма 1.** *Пусть* P – *есть* p-*группа*, $B\triangleleft P$, $\Omega_1(C_P(B)) \subseteq B$. *Пусть* $B=B_0\triangleright B_1\triangleright\ldots\triangleright B_n=1$ *есть ряд нормальных в* P *подгрупп. Пусть* $p > 2$, *или* $p = 2$ *и* $C_P(B)' = 1$. *Пусть* X – *группа автоморфизмов* P, *оставляющая на месте* $B_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *а* Y – *подгруппа в* X, *централизующая каждый смежный класс по* $B_k$ *в* $B_{k-1}$, $k=1, \ldots, n$. *Тогда* Y *есть нормальная* p-*подгруппа в* X. *В частности, каждый неединичный* p′-*элемент из* X *индуцирует нетривиальный автоморфизм на* $B_{k-1}/B_k$ *хотя бы для одного* k.

Доказательство. Пусть $K = C_X(B)$. Тогда X/K и Y/K можно считать подгруппами из Aut(B). По лемме 9.7.3 из [7] Y/K есть нормальная p-подгруппа в X/K. K есть группа автоморфизмов P, централизующая B. Пусть k есть произвольный p′-элемент из K. Из K-инвариантности групп P и B следует $\langle k\rangle$ –инвариантность группы $C_{\langle k\rangle P}(B)\cap P = C_P(B)$. Другими словами, k индуцирует на $C_P(B)$ p′- автоморфизм. Если k есть тривиальный автоморфизм группы $C_P(B)$, то из леммы 9.1.2 в [6] следует, что $k = 1$. Поэтому пусть k – нетривиальный p′-автоморфизм группы $C_P(B)$. По условию $\Omega_1(C_P(B)) = C \subseteq B$. Поэтому k централизует C. По теореме Блекберна ([8], теорема 2.4) $k = 1$. Итак, в любом случае $k=1$. Но по выбору $k$ это означает, что $K$ есть p-группа. Значит, и $Y$ есть p-группа. Лемма доказана.

**Следствие 1.** Пусть $P$ есть конечная p-группа и $B$ – ее характеристическая подгруппа, обладающая свойствами (1) и (2) из заключения теоремы 1. Тогда каждый нетривиальный $p'$-автоморфизм группы $P$ действует нетривиально и на $B$.

Доказательство. Рассмотрим ряд нормальных в $P$ подгрупп $B = B_0 \supset B_1 = 1$. По лемме 1 каждый $p'$-автоморфизм группы $P$ является $p'$-автоморфизмом и для $B$. Следствие доказано.

**Лемма 2.** *Пусть $X$ есть конечная группа с $S_p$-подгруппой $P$. Пусть $A$ есть такая p-подгруппа из $P$, которая содержит все элементы порядка $p^k$ из $C_X(A) = C$, где $k = 1$ для $p > 2$ и $k \le 2$ для $p = 2$. Тогда $C$ имеет нормальное p-дополнение.*

Доказательство. Пусть $T$ есть $S_p$-подгруппа в $C$. По условию $\Omega(C_P(A)) = \Omega(C_T(A)) \subseteq A$. По условию $A$ содержит все элементы порядка $p^k$ из $C$, $k = 1$ для $p > 2$ и $k \le 2$ для $p = 2$. По теореме 4.5.5 из [1] $C$ имеет нормальное p-дополнение. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $X$ – есть конечная группа с $S_p$-подгруппой $P$ и $T=O_p(X)$. Предположим, что $\Omega(C_P(T)) \subseteq T$. Тогда существует $p'$-подгруппа $H$ в $X$, обладающая свойствами:*

(1) $H$ char $X$, $H=O_{p'}(C_X(T))=O_{p'}(X)$;

(2) для $\overline{X}=X/H$ $C_{\overline{X}}(O_p(\overline{X}))\subseteq O_p(\overline{X})$; *в частности*, $X$ *есть p-скованная группа*.

Доказательство. Пусть $C_X(T) = C \lhd X$. Тогда $C \cap P = P_0$ есть $S_p$-подгруппа в $C$. По условию теоремы $\Omega(C_P(T)) = \Omega(P_0) \subseteq T$, $P_0 \cap T \subseteq Z(C)$. Поэтому $P_0 \cap T \lhd C$ и содержит все элементы порядка $p^k$ из $C$, $k=1$ для $p>2$ и $k\le 2$ для $p = 2$. По лемме 2 $C$ имеет нормальное p-дополнение $H$. Тогда $H \lhd X$. Так как $O_{p'}(X) \subseteq C$, то $O_{p'}(X) = H$. Этим заключение (1) доказано.

Пусть $\overline{X} = X/H$, $M/H = O_p(\overline{X}) = \overline{M}$, $\overline{L} = C_{\overline{X}}(\overline{M})$. Ясно, что $O_{p'}(\overline{X}) = 1$. Группа $\overline{X}$ удовлетворяет условию теоремы для $\overline{P}, \overline{T}$ и $\Omega(C_{\overline{P}}(\overline{T}))$. По заключению (1) $O_{p'}(\overline{L})=1$. По лемме 1 $\overline{L}$ есть p-группа. Так как $\overline{L} \lhd \overline{X}$, то $\overline{L} \subseteq \overline{M}$. Этим заключение (2) доказано. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ – конечная группа с $S_p$-подгруппой $P$; $O_p(X)=T$, $A$ – подгруппа из $T$ такая, что $N_P(A)$ есть $S_p$-подгруппа в $N_X(A)$. Тогда*

(1) *если* $\Omega(C_P(A)) \subseteq A$, *то* $C_X(A) = C = O_{p'}(C)\lambda C_P(A)$, *и, если* $p > 2$, *то* $O_{p'}(C) = O_{p'}(X)$;

(2) *если* $C_P(A) \subseteq A$, *то* $C = Z(A) \times O_{p'}(C)$, *и, если* $p > 2$, *то* $O_{p'}(C) = O_{p'}(X)$.

Доказательство. Так как $C \lhd N_X(A)$, то $C \cap N_P(A)$ есть $S_p$-подгруппа в $C$. Поэтому $C \cap N_P(A) = C_P(A)$.

Если имеет место условие (1), то $\Omega(C_P(A)) \subseteq A \subseteq T$ и поэтому $T(\lhd X)$ содержит все элементы порядка $p^k$ из $C$, $k = 1$ для $p > 2$ и $k \le 2$ для $p = 2$. Так как $\Omega(C_T(A)) \subseteq \Omega(C_P(A)) \subseteq A$, то $A$ содержит все элементы порядка $p^k$ из $C$, $k = 1$ для $p > 2$ и $k \le 2$ для $p = 2$. Но тогда $C = C_X(A)$ централизует все элементы порядка $p^k$. По теореме 4.5.5 в [1] $C$ имеет нормальное p-дополнение $H = O_{p'}(C)$. Из $C_P(T) \subseteq C_P(A)$ следует, что $\Omega(C_P(T)) \subseteq \Omega(C_P(A)) \subseteq A \subseteq T$. Теперь из заключения (2) леммы 3 следует, что $X$ является p-скованной группой. Поэтому из A-инвариантности группы $H$ следует для $p > 2$ из теоремы 10.1.12 в [2], что $H \subseteq O_{p'}(X)$. Так как, очевидно, $O_{p'}(X) \subseteq O_{p'}(C) = H$, то $O_{p'}(X) = O_{p'}(C)$ и (1) доказано. (2) есть известный факт, который доказывается аналогично. Теорема доказана.

**Лемма 4.** *Пусть X – конечная группа. Тогда X порождается своими циклическими примарными подгруппами.*

Доказательство. Пусть M и N – две различные максимальные подгруппы из X. По индукции M и N порождаются своими примарными циклическими подгруппами. Очевидно, что из X = <M,N> следует утверждение и для X. Поэтому пусть X содержит только одну максимальную подгруппу M. Из $M \subset X$ и того факта, что некоторое простое число p делит $|X:M|$ следует, что в X–M существует элемент x порядка $p^{\alpha}$. Ясно, что $\langle x\rangle = X$, ибо в противном случае в X существовала бы отличная от M максимальная подгруппа. Поэтому X – циклическая примарная группа. Лемма доказана.

**Теорема 3.** *Пусть X – конечная группа с $S_p$-подгруппой P, p>2, B – характеристическая подгруппа из P со свойствами (1) и (2), указанными в теореме 1.*

Пусть H – любая подгруппа из X, содержащая B, причем $B \lhd\lhd H$. Если $TH^x = H^xT$ для всех $x \in X$ и всех циклических подгрупп T порядков p и $p^2$ из B, то X – p-скованная группа.

Доказательство. Из теоремы 7.2.3 в [9] получаем, что $T \lhd\lhd X$, где T пробегает все циклические подгруппы порядка p и $p^2$ из B. Так как $\exp(B) \leq p^2$, то B порождается своими циклическими подгруппами по лемме 4, которые субнормальны в X. Но тогда и $B \lhd\lhd X$ по утверждению (10) в §2 из [10]. Далее можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 3. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Пальчику Э.М. за постоянное внимание к работе.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer – Verlag, 1967. - 793 s.
2. ***Huppert B., Blackburn N.*** Finite groups, III. Berlin: Springer – Verlag, 1982. - 454 p.
3. ***Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.*** The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and Monographs (AMS, Providence, R.I.), 1994. Vol. 40, N 1. P. 1-165.
4. ***Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.*** The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and Monographs (AMS, Providence, R.I.), 1994. Vol. 40, N 2. P. 1-218.
5. ***Горенстейн Д.*** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М., 1985. - 352 с.
6. ***Gorenstein D.*** Finite groups. New York: Harper and Row., 1968. - 527 p.
7. ***Huppert B., Blackburn N.*** Finite groups, II. Berlin: Springer – Verlag, 1982. - 531 p.
8. ***Гаген Т.М.*** Некоторые вопросы теории конечных групп // К теории конечных групп. М., 1979. С. 13-97.
9. ***Lennox J.C., Stonehewer S.E.*** Subnormal subgroups of groups. Oxford, 1987. - 253 p.
10. ***Wielandt H.*** Eine Verallgemeinerung der Invarianten Untergruppen // Math. Z., 1939. Bd. 45, N 2. S. 209-244.

## *SUMMARY*

*This paper proves the existence in every finite p-group P of characteristic p-subgroup Po, which has fokwing properties: (1) exp(Po) $\leq p^2$, $\Omega(Cp(Po)) \leq$ Po; (2) every p'-airtomorphism of P is also p'-automorphism of Po.*

*Поступила в редакцию 12.03.2001*