С. И. Осипова // Вопросы современной науки и практики. Университет имени В. И. Вернадского. – 2009. - №12(26). – С. 1-5.

4. Попов Н. Фундаментализация подготовки специалистов-математиков в условиях университетского образования / Н. Попов // Высшее образование в России. - 2008. - №9. - С. 32-35.

5. Новосадов Б. К. Концепция современного естествознания в высшем образовании в XXI веке / Б. К. Новосадов // Знание. Понимание. Умение. 2005. - №3. – С. 190-191.

6. Барышникова Г. Б. Моделирование системы экологического образования студентов направления «Педагогика» (Бакалавриат) / Г. Б. Барышникова // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - 2010. - №9. – С. 302-306.

УДК 512.7

ГРУППЫ И ПОДГРУППЫ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ

С. Г. Ехилевский, Н. А. Гурьева, О. В. Голубева
ПГУ (г. Новополоцк, Беларусь)

В настоящее время теория групп является основой абстрактной алгебры. Абстрактной алгебра называется потому, что ее объектами являются уже не конкретные «представления» (матрицы или подстановки), а абстрактные символы, для которых заранее вводятся определенные аксиомами операции. Изложение этой теории в большинстве учебников тотально формализовано, а, значит, плохо усваиваемо. Авторы попытались встать на конструктивный путь рассмотрения групп и других математических структур. В статье это выполнено на примере введения понятий конечной группы, группы преобразований, подгруппы, нормального делителя группы, автоморфизма группы.

Теория групп изучает алгебраическую операцию в её чистом виде, так как элементы, составляющие группу, рассматриваются лишь с точки зрения операции, установленной в группе. Все остальные возможные свойства этих элементов оставляются в стороне.

Мы говорим, что множество G элементов называется *группой*, если в G установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, b из G некоторый элемент c из G, причём выполняются групповые аксиомы.

Множество элементов группы G может быть как конечным, так и бесконечным. Если множество G конечно, то и сама группа называется *конечной*, а число элементов множества G называется *порядком группы* G. В противном случае группа G называется *бесконечной.*

Отметим, что для коммутативных групп вместо произведения $a \cdot b$ пишется сумма $a+b$. В соответствии с этим групповая операция называется не умножением, а сложением. В этом случае единица e группы называется нулём, а элемент a^{-1}, обратный к элементу a, называется противоположным и обозначается через ($-a$).

Весьма важным примером группы является группа преобразований множества. Группы в математике и возникли как группы преобразований.

Взаимно однозначное отображение некоторого множества Γ на себя называется *преобразованием множества* Γ. Если x и y – два преобразования множества Γ, то их произведение $z = x \cdot y$ определяется соотношением $z(\xi) = x(y(\xi))$ при произвольном $\xi \in \Gamma$.

Роль единицы при этом умножении играет тождественное преобразование e множества Γ, определяемое соотношением $e(\xi) = \xi$ при произвольном $\xi \in \Gamma$. Ясно, что $ex = xe = x$.

Преобразование X^{-1}, обратное к преобразованию X, определяется тем, что переводит всякий элемент $x(\xi)$ множества Γ в элемент ξ. Таким образом, всякое непустое множество G преобразований множества Γ, содержащее наряду с каждым преобразованием – ему обратное, есть группа в силу установленного закона перемножения преобразований. Всякая такая группа называется *группой преобразований множества* Γ.

Группа преобразований множества Γ называется *транзитивной*, если для всяких двух элементов ξ, η множества Γ существует такое преобразование $x \in G$, что $x(\xi) = \eta$. В частности, группа всех преобразований множества Γ является транзитивной.

Пример 1. Пусть G_n – группа всех n преобразований конечного множества Γ_n, содержащего n элементов, например, чисел 1, 2, …, n. Каждое преобразование множества Γ_n называется также подстановкой, а группа G_n – группой всех подстановок множества Γ_n.

Каждая подстановка единственным образом распадается на циклические. Циклическая подстановка (i_1, i_2, …, i_k) переводит число i_1 в число i_2, i_2 – в i_3 и так далее, наконец, число i_k – в число i_1.

Группа G_n преобразований множества Γ_n содержит $n!$ элементов.

Выпишем для примера все элементы группы G_3:

$a = (1,2)(3)$;

$b = (1,3)(2)$;

$a \cdot b = (1, 2, 3)$;

$b \cdot a = (1, 2, 3)$;

$ab \cdot a = (1)(2,3)$;

$e = (1)(2)(3) = a^0$.

Таким образом, все элементы группы G_3 выражаются через два ее элемента a и b. При этом последние служат в этом смысле *образующими группы* G_3.

Элементы $a = (1,2)(3)$, $b = (1,3)(2)$, $ab \cdot a = (1)(2,3)$ имеют порядок два; элементы $a \cdot b = (1,2,3)$, $b \cdot a = (1,2,3)$ – порядок три.

Группа G_3 некоммутативна, так как $ab \neq ba$.

Пример 2. Пусть $r = (r_{ij})$ и $s = (s_{jk})$, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, b$, $k = 1, \ldots, c$, – две матрицы, составленные из комплексных чисел. Из обозначений видно, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. При этом условии можно определить произведение $r \cdot s$ матриц r и s как матрицу $t = (r_{ik})$, положив $t_{ik} = \sum_{j=1}^{b} r_{ij} s_{jk}$.

Если r и s квадратные матрицы порядка n, то есть $a = b = c = n$, то $r \cdot s$ есть квадратная матрица порядка n.

Покажем, что множество G всех квадратных матриц порядка n, определители которых отличны от нуля, есть группа относительно определенного ранее умножения. Отметим, что ассоциативность непосредственно вытекает из определения умножения матриц.

Единицей является единичная матрица $e = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для того, чтобы найти матрицу, обратную к $s = (s_{ij})$, достаточно разрешить систему уравнений $\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{b} r_{ij} s_{jk}$ относительно неизвестных r_{ij}.

Эта система разрешима, так как при фиксированном i она превращается в систему n уравнений с n неизвестными, определитель $|s_{ij}|$ которой отличен от нуля.

Легко видеть, что подмножество G' множества G, составленное из действительных матриц, также есть группа.

Множество H элементов некоторой группы G называется *подгруппой* группы G, если H есть группа в силу того же закона перемножения, который имеет место в G.

Подгруппа N группы G называется *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем группы* G, если при всяком $n \in N$ и всяком $a \in G$ имеем $a^{-1}na \in N$, или, что то же, $a^{-1}na \subset N$ при всяком $a \in G$.

Пример 3. Пусть G – группа матриц, рассмотренная в примере 2. Обозначим через H множество всех матриц из G, определитель которых равен единице. Так как при перемножении матриц определители перемножаются, то H есть нормальный делитель группы G.

Отображение f группы G на группу G' называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и сохраняет операцию умножения, то есть $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для всяких двух элементов x и y из G. Очевидно, что если f изоморфно, то обратное ему отображение также является изоморфным.

Две группы G и G' называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одной группы на другую.

Можно рассматривать изоморфные отображения группы G на себя. Такие изоморфные отображения называются *автоморфизмами группы* G.

Всякий автоморфизм группы G в виду его взаимной однозначности является *преобразованием* множества G.

Таким образом, два автоморфизма можно перемножать и получающееся в качестве их произведения преобразование группы G также является автоморфизмом этой группы.

Тождественное и обратное преобразования и обратное преобразование к некоторому автоморфизму также является автоморфизмом.

Мы можем теперь сказать, что множество всех автоморфизмов группы G есть группа.

Пример 4. Пусть Γ – эвклидова плоскость, рассматриваемая как множество точек.

Движением плоскости называется такое преобразование, при котором сохраняется расстояние между каждыми двумя ее точками и обход против часовой стрелки переходит в обход против часовой стрелки.

Производя последовательно два движения, то есть, перемножая их как преобразования, мы получаем снова движение.

Преобразование, обратное движению, является движением.

Итак, совокупность G всех движений плоскости является группой ее преобразований.

Зафиксируем некоторую точку α плоскости, тогда получим подгруппу H_α всех движений, оставляющих α на месте, то есть всех вращений плоскости вокруг точки α.

Пример 5. Преобразование f эвклидовой плоскости называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между каждыми двумя точками плоскости и сохраняет ее ориентацию.

Каждое движение f, как известно из аналитической геометрии, в декартовых координатах может быть записано как

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{cases}$$

где $(x, y) = \xi$ – произвольная точка плоскости, $(x', y') = \xi' = f(\xi)$ – точка, в которую переходит ξ в результате движения *f*.

Числа φ, a, b задают движение. Угол φ является углом поворота, а точка (a, b) – образом начала координат при движении *f*.

Множество G всех движений плоскости составляет группу преобразований плоскости.

Подмножество H всех движений *f*, оставляющих на месте начало координат, то есть удовлетворяющих условию $a = b = 0$, составляет подгруппу группы G.

Множество *N* всех параллельных переносов плоскости, то есть тех движений *f*, для которых $\varphi = 0$, также составляет подгруппу группы G. Обе подгруппы H и *N* группы G коммутативны; а *N* – нормальный делитель группы G.

Литература

1.Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов – 2-е изд., доп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.

УДК 517.2

К ПРАКТИКЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Косолапов Ю.Ф.

Донецкий национальный технический университет

Статтю присвячено питанням існування умовних екстремумів та порівняльному аналізу відповідних методів.

Мы говорили [1, 2] о методике изучения общей задачи на условный экстремум в терминах функции Лагранжа и, для установления достаточных условий, - матрицы Гессе. Скажем несколько слов о работе с матрицей Гессе в условиях простейшей задачи на условный екстремум

$$z = f(x, y); \quad \varphi(x, y) = 0 .$$

Если (λ_0, x_0, y_0) - стационарная точка функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad \varphi_x'^2(x_0, y_0) + \varphi_y'^2(x_0, y_0) \neq 0,$$

то для установления существования в этой точке условного экстремума используют две формы матрицы Гессе -

$$H(\lambda_0, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

в случае $\varphi_x'^2(x_0, y_0) \neq 0$ и