

## Моделирование свободного вращения твёрдого тела

Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Полоцкий государственный университет  
ekhilevskiy@mail.ru, dmitrij.pastuhov@mail.ru

*Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. «Моделирование свободного вращения твёрдого тела». С использованием методов численного моделирования рассмотрена задача свободного вращения твердого тела относительно центра масс. Найдено, что при равенстве начальных кинетических энергий на осях с максимальным и минимальным моментами инерции происходит разрыв на  $90^\circ$  ориентации оси симметрии конуса полодии при непрерывном изменении компонент начальной угловой скорости. Аналитически показано невозможность сохранения знака компоненты угловой скорости, соответствующей промежуточному значению момента инерции. Приведены условия, при которых нелинейная задача сводится к квазилинейной задаче. Теорема об ориентации конуса полодии доказана аналитическими методами. Логарифмическое затягивание периода прецессии компонент угловой скорости как функции критического параметра в окрестности нуля может быть использовано при активации разряженных газовых сред.*

**Ключевые слова:** критическое явление, ориентация оси конуса полодии, критический параметр, логарифмическая особенность периода колебаний.

### Введение

В 1765 году Леонард Эйлер, академик Российской академии наук, написал работу «Теория движения твёрдых тел», в которой впервые привёл систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент угловой скорости на главные оси инерции тела. Данная система описывает как вращение спутника в околоземном пространстве, так и динамику движения многоатомных молекул. Нелинейные явления давно привлекают математиков, механиков и физиков, как это видно, например, из классической монографии [1]. Можно также привести многочисленные примеры в теоретической и прикладной механике [2, 3].

Качественный анализ вращения твёрдого тела относительно центра масс Сивухин Д.В. сводит к классификации алгебраического уравнения второго порядка относительно компонент угловой скорости  $W_1, W_2, W_3$  [4].

Классификация уравнений Эйлера второго порядка геометрическими методами представляет уравнение с коэффициентами, зависящими от моментов инерции  $I_1, I_2, I_3$ .

Условие ориентации конуса полодии имеет вид двойных неравенств на моменты инерции. В данной работе нами доказана теорема об ориентации конуса полодии аналитическими методами, условие изменения ориентации оси конуса представляет единственное условие на языке кинетических энергий и получено численными методами (вместо четырёх условий в терминах моментов инерции). А именно, ось конуса прецессии окружает либо ось с

минимальным, либо с максимальным значением инерции, соответствующей максимальной кинетической энергии вращательного движения. Нами впервые показано, что изменение ориентации оси конуса полодии представляет собой критическое явление, т.е. параметры системы изменяются скачком при непрерывном малом изменении начальных условий компонент угловой скорости. Впервые обнаружено затягивание периода прецессии компонент угловой скорости в окрестности критической точки. Это открывает новые возможности при активации физико-химических реакций в многоатомных разряженных газах. Увеличение времени взаимодействия (уменьшение частоты) и уменьшение энергии взаимодействия может привести к новым резонансным явлениям в физико-химических реакциях с малой энергией активации. Всё сказанное актуально также при создании активных сред в газовых лазерах [5, 6].

### Постановка задачи

Рассмотрим вращение твердого тела относительно неподвижной точки – центра масс. Оси прямоугольной системы координат направим вдоль главных осей симметрии эллипсоида инерции, а начало координат совместим с центром масс. Таким образом, система координат неподвижна относительно центра масс тела. Проекция угловой скорости  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  тела на координатные оси  $X, Y, Z$  описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка Эйлера [1]:

$$\begin{cases} I_1 \frac{dW_1}{dt} + (I_3 - I_2)W_2W_3 = M_1 \\ I_2 \frac{dW_2}{dt} + (I_1 - I_3)W_1W_3 = M_2, \\ I_3 \frac{dW_3}{dt} + (I_2 - I_1)W_2W_1 = M_3 \end{cases} \quad (1)$$

где  $0 < I_1 \leq I_2 \leq I_3$  – моменты инерции тела относительно главных осей симметрии  $X, Y, Z$ ;  $M_1, M_2, M_3$  – компоненты момента внешних сил вдоль осей  $X, Y, Z$ , проходящих через центр масс. Если  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ , то вращение тела называется свободным.

Цель данной работы заключается в качественном анализе системы уравнений Эйлера и выделении особенностей частных решений.

### Теоремы и доказательства

Докажем, что для свободного вращения тела относительно центра масс справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если все моменты инерции тела различны ( $0 < I_1 < I_2 < I_3$ ), то нетривиальное решение (нестационарное во времени) для компоненты  $W_2(t)$ , соответствующее промежуточному моменту инерции  $I_2$ , не может быть знакоопределённым.

**Доказательство.** Из первого и третьего уравнений системы (1) выразим производные

$$\dot{W}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} W_2 W_3, \quad \dot{W}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} W_2 W_1.$$

Второе уравнение проинтегрируем по времени и подставим найденные производные

$$\begin{aligned} \ddot{W}_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} \left( \dot{W}_1 W_3 + W_1 \dot{W}_3 \right) &= 0; \\ \ddot{W}_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} W_2 \left( \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} W_3^2 + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} W_1^2 \right) &= 0; \\ \ddot{W}_2 + \left( \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} W_3^2 + \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2} W_1^2 \right) W_2 &= 0; \\ \ddot{W} + F(W_1, W_3) W_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функция:

$$\begin{aligned} F(W_1, W_3) &= \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} W_3^2 + \\ &+ \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2} W_1^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно,  $F(W_1, W_3) \equiv 0 \Leftrightarrow W_1(t) = W_3(t) \equiv 0$

Обозначим:  $\min_{W_1, W_3} F(W_1, W_3) = m^2$ ,  $\max_{W_1, W_3} F(W_1, W_3) = M^2$ .

Будем искать периодические решения системы уравнений (1). Пусть  $T$  – основной период

колебаний функций  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ ,  $\omega = 2\pi/T$  – минимальная частота,  $m \leq \omega \leq M$ . Следовательно,  $F(t+T) = F(W_1(t+T), W_3(t+T)) = F(W_1(t), W_3(t)) = F(t)$  – функция периодическая с периодом  $T$ , зависящая только от компонент  $W_1(t), W_3(t)$ .

Решение  $W_2(t)$  ищем в виде ряда Фурье:

$$W_2(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}. \quad (3)$$

$c_0, a_n, b_n$  – коэффициенты ряда Фурье  $W_2(t)$ ;

$$c_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T W_2(t) dt, \quad a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T W_2(t) \cos(n\omega t) dt;$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T W_2(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажем, что функция  $W_2(t)$  не может быть знакоопределённой.

Заметим, что среднее значение за период  $T$  каждой из гармоник (3)  $\overline{\cos(\omega t)} = \overline{\sin(\omega t)} = 0$ . Следовательно, среднее значение

$$\overline{W_2(t)} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \overline{\cos(n\omega t)} + b_n \overline{\sin(n\omega t)}\} = c_0.$$

Кроме того:

$$\overline{W_2^{\bullet\bullet}(t)} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{a_n \overline{\cos(n\omega t)} + b_n \overline{\sin(n\omega t)}\} = 0.$$

Запишем  $W_2(t)$  в виде ряда (3), подставим в уравнение (2) и усредним уравнение (2) за период  $T$ :

$$\overline{W_2^{\bullet\bullet} + F(W_1, W_3) W_2} = \overline{F(W_1, W_3) W_2} = 0.$$

Это справедливо в силу линейности оператора среднего, что эквивалентно свойству линейности интеграла.

Воспользуемся первой теоремой об интегральном среднем [7, с. 410].

**Теорема 2.** Пусть заданы интегрируемые по Риману функции  $f, g \in R[a, b]$ . Если функция  $g(x) \geq 0$  неотрицательна на отрезке  $[a, b]$   $f \in C[a, b]$ , то найдётся точка  $\xi \in [a, b]$ , такая

$$\text{что: } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Поэтому в этом случае применимы все условия теоремы 2 для функций  $F(t) = g(t)$ ,  $W_2(t) = f(t)$ ,  $a = 0$ ,  $b = T$ .

$$0 = \overline{F(W_1, W_3) W_2} = W_2(\xi) \overline{F(W_1, W_3)} = 0,$$

если тождественно

$$W_1(t) = W_3(t) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{F(W_1, W_3)} > 0 \Rightarrow W_2(\xi) = 0.$$

Здесь обозначено:

$$\overline{F(W_1(t)W_3(t))W_2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T F(W_1(t)W_3(t))W_2(t) dt$$

$\overline{F(W_1(t)W_3(t))} = \frac{1}{T} \int_0^T F(W_1(t)W_3(t)dt)$ , т.е. функция

$W_2(t)$  имеет периодически расположенные корни в точках  $t = \xi, \xi + T, \xi + 2T, \dots$

Покажем, что в окрестности точки  $t = \xi$  функция  $W_2(t)$  принимает разные знаки, т.е. не является знакоопределённой для условия  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ . Из первого и третьего уравнений системы (1) при условии

$$W_2(\xi) = 0 \Rightarrow \dot{W}_1(\xi) = \dot{W}_3(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$W_1(\xi) \in \text{extr}, W_3(\xi) \in \text{extr}$ . Т.е.  $\xi$  – точка экстремума для функций  $W_1(t), W_3(t)$ . Причём  $W_1(\xi) \neq 0, W_3(\xi) \neq 0$ . Иначе, начиная с точки  $t \geq \xi$ , как следует из системы (1),  $W_1(t) = \text{const}, W_2(t) = \text{const}, W_3(t) = \text{const}$ , т.е. является стационарным решением, которое исключается условием теоремы. Тогда из второго уравнения

$$\dot{W}_2(\xi) = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} W_1(\xi)W_3(\xi) \neq 0, I_3 > I_2 > I_1,$$

поскольку  $W_2(\xi) = 0, \dot{W}_2(\xi) \neq 0 \Rightarrow \exists \tau_0 > 0$

$$W_2(\xi - \tau)W_2(\xi + \tau) < 0, \forall \tau < \tau_0.$$

Итак,  $W_2(t)$  принимает разные знаки в достаточно малой окрестности точки  $\xi$ , что доказывает сформулированную теорему 1.

Умножая первое, второе, третье уравнения системы (1) на компоненты  $W_1, W_2, W_3$  соответственно, складывая все три полученных уравнения, получим:

$$d \left( \frac{I_1}{2} W_1^2 + \frac{I_2}{2} W_2^2 + \frac{I_3}{2} W_3^2 \right) = M_1 W_1 + M_2 W_2 + M_3 W_3$$

Последнее уравнение показывает, что кинетическая энергия вращательного движения

$I = \frac{I_1}{2} W_1^2 + \frac{I_2}{2} W_2^2 + \frac{I_3}{2} W_3^2$  изменяется только за счёт момента внешних сил  $M_1, M_2, M_3$ .

Рассмотрим простой случай  $M_1 = M_2 = M_3 = 0, I_2 = 2I_1, I_3 = 3I_1$  (тогда полная кинетическая энергия  $I$  постоянна во времени), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{dt} + W_2 W_3 = 0 \\ \frac{dW_2}{dt} - W_1 W_3 = 0 \\ \frac{dW_3}{dt} + W_2 W_1 / 3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы уравнений (4) для функций  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  единственным образом определяется значением начальной угловой скорости  $W_1(0), W_2(0), W_3(0)$ , если компоненты

угловой скорости  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени.

Если любые 2 начальные компоненты угловой скорости равны нулю, то из (4) следует, что угловая скорость совпадает с одной из главных осей симметрии эллипсоида инерции и постоянна:

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{dW_2}{dt} = \frac{dW_3}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$W_1(t) = W_1(0), W_2(t) = W_2(0), W_3(t) = W_3(0).$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\frac{dW_3}{dt}$  мало,

$$W_3 \approx \text{const}.$$

Первое уравнение (4)

продифференцируем по времени и подставим

$\frac{dW_2}{dt}$  из второго уравнения, тогда

$$\frac{d^2 W_1}{dt^2} + W_3 \frac{dW_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 W_1}{dt^2} + W_3^2 W_1 = 0,$$

$$W_3^2 \approx \text{const} \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой квазигармоническое уравнение колебаний.

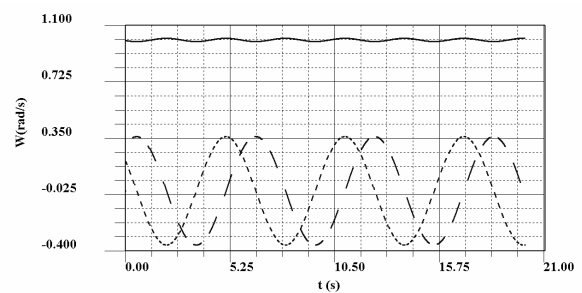


Рисунок 1. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  с начальными условиями  $W_1(0) = 0,2; W_2(0) = 0,3; W_3(0) = 1,0$  (частый, редкий пунктир и сплошной график)

Общее решение однородного с постоянными коэффициентами уравнения (5) есть:

$$W_1(t) = A \cos(W_3 t) + B \sin(W_3 t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(W_3 t + \varphi_0), A, B, \varphi_0 = \text{const}.$$

Прецессия  $W_1(t)$  определяется средним значением  $W_3(t)$  с максимальным значением момента инерции (это утверждение также справедливо и для прецессии компоненты  $W_2(t)$ ). Т.е. среднее, почти постоянное значение,  $W_3(t)$  частотно модулирует частоту прецессии проекций  $W_1(t), W_2(t)$ . Этот вывод подтверждают рисунки 1 и 2, в которых начальные условия  $W_3(0) = 1,0$  и  $W_3(0) = 2,0$  различаются в 2 раза. Соответственно, второй рисунок содержит 6 периодов прецессии, а первый ровно 3 периода

прецессии  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$  (за равное время), т.е. различие частот прецессии составляет 2 раза.

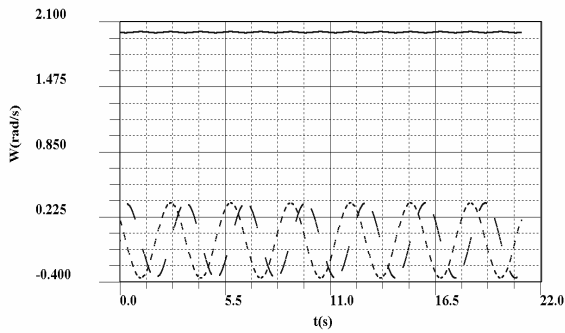


Рисунок 2. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$ ,  $W_3(t)$  (частый, редкий пунктир, сплошной график) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,2$ ;  $W_2(0) = 0,3$ ;  $W_3(0) = 2,0$

Оценим границу области применимости. Из третьего уравнения системы (1) следует, что

$$\frac{1}{W_3} \frac{dW_3}{dt} + \frac{(I_2 - I_1) W_2 W_1}{I_3 W_3} = 0.$$

Из рисунка 3 видно, что частота прецессии  $W_3(t)$  в 2 раза больше частоты прецессии. В общем случае частота прецессии

$$W_1(t), W_2(t) \omega_{prW_1} \approx W_3(0) \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}$$

$$\omega_{prW_3} \approx 2W_3(0) \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}$$

$$T_{pr} = 2\pi / \omega_{prW_3} = \frac{\pi}{W_3(0)} \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}}$$

$$\frac{\Delta W_3}{W_3} \ll 1, \Delta W_3 \approx \frac{T_{pr}}{2} \frac{dW_3}{dt}$$

$$\left| \frac{\Delta W_3}{W_3} \right| \approx \left| \frac{T_{pr}}{2W_3} \frac{dW_3}{dt} \right| = \frac{\pi}{2W_3(0)} \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} \frac{(I_2 - I_1) W_2 W_1}{I_3 W_3} =$$

$$\frac{\pi (I_2 - I_1) (W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1)}{2 I_3 W_3(0)^2} \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} \ll 1$$

$$\frac{\pi (W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1)}{2 W_3(0)^2} \sqrt{\frac{I_1 I_2 (I_2 - I_1)^2}{I_3^2 (I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} \ll 1.$$

Оценка  $W_1 W_2 \leq W_{\max}^2 = W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1$  следует из закона сохранения энергии. Из рисунков 1, 2 видно, что амплитуды  $W_1$ ,  $W_2$  одинаковы, т.е. первые две степени свободы вращения обмениваются энергией, а третья степень имеет постоянную энергию (заморожена). Из закона сохранения энергии

$$\text{получим } \frac{I_1}{2} W_1^2(0) + \frac{I_2}{2} W_2^2(0) = \frac{I_2}{2} W_{\max}^2.$$

## Описание моделирующей программы

Программа написана на языке Fortran (Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0). Подпрограмма Daspg для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка использует формулы дифференцирования назад. Для решений системы уравнений (4) мы используем библиотеку DFIMSL (usedfims!-вызов библиотеки), call *daspg*(n,t,t+delt,ido,y,ypr,gcn) вызов подпрограммы, *t* – время, *delt* – шаг интегрирования [8]. Массив точек вектора решений  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$ ,  $W_3(t)$  автоматически масштабируется и загружается в графический визуализатор Compaq Atray Viewer 1.5. Библиотека IMSL автоматически встроена в любой компилятор FORTRAN в отличие от языка C++, в котором любые дополнительные новые функции программы требуют подключения к C++ внешних библиотек.

Все комментарии в программе начинаются в строке с восклицательного знака:

### program daspg1

```
use dfims! !Используем библиотеку dfims!
integer(8),parameter::n=3,np=20000
!Программа вычисляет неизвестную в системе
!ОДУ для np=20000 моментов времени
integer(8)::istep,nstep,m
real(8)::delt,t,tend,y(n),ypr(n)
real(8)::u_upr(2*n,np),vdata(4,n*np),c(50)
!все целочисленные и действительные
!переменные имеют точность INTEGER(8),
!REAL(8) соответственно
external gcn
!Внешняя по отношению к основной программе
program daspg1 программа gcn предназначена
!для описания n=3 дифференциальных
!уравнений первого порядка
! y(n),ypr(n),gval(n) – вектор решений (угловой
!скорости), вектор производной угловой
!скорости (вектор углового ускорения) и вектор
!невязки каждого из 3 дифференциального
!уравнения.
ido=1
!ido=1 Целочисленный параметр,
!соответствующий входу в программу daspg
t=0.0;tend=110.0 !Начальный и конечный
!моменты времени счёта
delt=0.025 !Временной шаг интегрирования
nstep=tend/delt !Число шагов интегрирования
y(1)=0.519616;y(2)=0.0;y(3)=0.3
ypr(1)=-y(2)*y(3);
ypr(2)=y(1)*y(3);
ypr(3)=-((1.0/3.0)*y(1)*y(2))! Задание начальных
!условий и последующий вывод на экран
write(*,"(11x,'t',11x,'y(1)',11x,'y(2)',10x,'ypr(1)',10
x,'ypr(2)')")
istep=0 !Интегрирование
do while(istep<=nstep)
istep=istep+1
```

```

call ddaspg(n,t,t+delt,ido,y,ypr,gcn) ! Для
!улучшения сходимости программа вызывается
!с двойной точностью Ddaspg, соответственно
!все аргументы программы должны (за редким
!исключением целочисленных переменных)
!иметь двойную точность. Опишем аргументы
!программы ddaspg(n,t,t+delt,ido,y,ypr,gcn). n–
!число неизвестных функций – вектор y, ypr –
!вектор производной t – исходный момент
!времени, t+delt – следующий момент, ido –
!флаг текущего состояния программы – начало,
!конец и т.д., gcn – внешняя программа
!соответствующая решаемой системе ОДУ
!первого порядка. Таким образом, y является
!одновременно выходной и входной
!переменной.
! Сохраняем результат для графического ввода
do j=1,2*n
!По отдельности заполняем массив данных
!vdata(4,n*np) для 3 проекций угловой скорости
if(j==2.and. mod(int(istep/10),2)==0)then
u_upr(j,istep)=y(j/2)
!В массив для  $W_1(t)$  записываем 10 точек,
!чередуем, следующих 10 точек – не записываем
vdata(1,(j-1)*nstep+istep)=istep*delt
!Текущий момент времени
vdata(2,(j-1)*nstep+istep)=y(j/2)
!Значение угловой скорости  $W_1(t)$ 
vdata(3,(j-1)*nstep+istep)=float(j)
!Каждый график разделяем в пространстве
vdata(4,(j-1)*nstep+istep)=0.0
!4 координата точки – цвет от 0.0 (синего цвета)
!до 1.0 (красного цвета)
elseif(j==4.and.(.not.
mod(int(istep/100),2)==0))then
u_upr(j,istep)=y(j/2)
!В массив для  $W_2(t)$  записываем 100 точек,
!чередуем, следующие 100 точек не записываем
vdata(1,(j-1)*nstep+istep)=istep*delt
vdata(2,(j-1)*nstep+istep)=y(j/2)
vdata(3,(j-1)*nstep+istep)=float(j)
vdata(4,(j-1)*nstep+istep)=0.0
elseif(j==6)then
u_upr(j,istep)=y(j/2)
!В массив для  $W_3(t)$  записываем все точки
!по ряд
vdata(1,(j-1)*nstep+istep)=istep*delt
vdata(2,(j-1)*nstep+istep)=y(j/2)
vdata(3,(j-1)*nstep+istep)=float(j)
vdata(4,(j-1)*nstep+istep)=0.0
else
u_upr(j,istep)=istep
end if
enddo
if(istep==nstep) ido=3
end do
!Последний вызов программы приводящий к
!освобождению рабочей области
write(*,'(5f15.5)')tend,y,ypr
!Выводим на экран конечное время, вектор
!угловой скорости и вектор её производной

```

```

call vGraph(vdata,2*n*nstep)
!Загружаем графический массив в
!подпрограмму vGraph(vdata,2*n*nstep), которая
!работает только при установке визуализатора
!Compaq Array Viewer 1.6 и внутри данной
!программы(Compaq Array Viewer 1.6 –
!прилагается к компилятору Compaq Visual
!Fortran Professional Edition 6.6.0).
end program daspg1
!Конец основной программы
subroutine gcn(n,t,y,ypr,gval)
integer(8)::n
real(8)::t,y(n),ypr(n),gval(n)
real(8)::eps
eps=0.2
gval(1)=y(2)*y(3)+ypr(1)
gval(2)=ypr(2)-y(1)*y(3)
gval(3)=ypr(3)+(1./3.)*y(1)*y(2)
end subroutine gcn
subroutine vGraph(fun,nvalues)
use avdef
use avviewer
use dflib
integer(8)::nvalues
real(8)::fun(4,nvalues)
integer(4)::hv,status,nError
character(1)::key
character(av_max_label_len)::xlabel='t'
call faglStartWatch(fun,status)
print*,"Starting Array Viewer"
call favStartViewer(hv,status)
if (status/=0)then
call favGetErrorNo(hv,nError,status)
if(nError/=0)then
print*,"Array Viewer reports error",nError
stop
end if
end if
call favSetArray(hv,fun,status)
call favSetArrayName(hv,"Van der Pol
Cycle",status)
call favSetGraphType(hv,VectorGraph,status)
call favSetUseAxisLabel(hv,x_axis,1,status)
call favSetAxisLabel(hv,x_axis,xLabel,status)
call favShowWindow(hv,av_true,status)
print*,"Press any key to close down the viewer"
key=getcharqq()
call favEndViewer(hv,status)
call faglEndWatch(fun,status)
end subroutine vGraph

```

После запуска визуализатора Compaq Array Viewer 1.6 необходимо с помощью левой кнопки мыши открыть в строке меню Settings → Graph → установить (X-Component Index = 1, Y-Component Index = 2, Z-Component Index = 0, W-Component Index = 4). В этом случае графические решения 3 компонент угловой скорости спроектируются в координатах  $t$ ,  $W(t)$  на одну плоскость.

### Анализ решений

Рассмотрим общее решение системы уравнений (4). В дальнейшем будем считать равной нулю  $W_2(0) = 0$  только одну проекцию  $W_1(0), W_2(0), W_3(0)$ , так как случай трех ненулевых проекций качественно нового решения не дает.

Из приведенных графиков и доказанной теоремы 1 видно, что график  $W_2(t)$  всегда имеет корни, периодически проходит через ноль, а в силу периодичности решений случай 3 ненулевых компонент сводится к переносу начала отсчёта. Общий случай сводится к 2 ненулевым компонентам и одной нулевой  $W_2(0) = 0$ . В дальнейшем всегда  $W_2(0) = 0$ . Зафиксируем две компоненты угловой скорости  $W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$  и будем варьировать только компоненту  $W_1(0)$  как единственный параметр задачи. Обозначим важное для задачи (4) число  $W_1(0)^* = 0,3\sqrt{3} = W_3(0)\sqrt{I_3/I_1} \approx 0,51961524$ . Графики решений с начальными условиями  $W_1(0) = 0,5; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$  приведены на рисунке 3. Поскольку  $W_3(t) > 0$  во все моменты времени, то вектор угловой скорости окружает ось  $Z$ , находится над плоскостью  $X-Y$ , его проекция на эту плоскость вращается (прецессирует). Кроме того частота колебаний функции  $W_3(t)$  в 2 раза больше, чем у функций  $W_1(t), W_2(t)$ . Проверено численно, что для времён  $t < 10000$  с.  $W_3(t) > 0$  и периодичность решений  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  сохраняется.

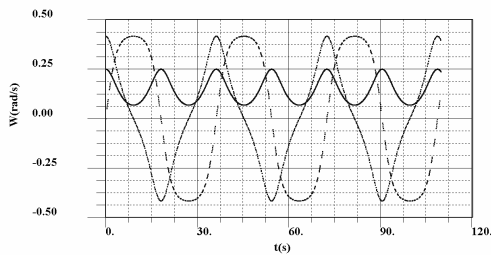


Рисунок 3. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  (частый, редкий пунктир, сплошной график) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,5; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$

Начальные условия на рисунке 4 таковы  $W_1(0) = 0,6; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$ .

В данном случае вектор угловой скорости находится над плоскостью  $Y-Z$  и окружает ось  $X$  при своем вращении вокруг нее. Кроме того, качественно рисунок 3 переходит в рисунок 4, если оси  $X, Z$ , а также проекции  $W_1(t), W_3(t)$  переставить одновременно, то есть на рисунке 3  $W_3(t) > 0$  положительна и окружала ось  $Z$ , а на рисунке 4  $W_1(t) > 0$  и окружает ось  $X$ .

Численно проверено, что для начальных условий  $W_1(0) = 0,6; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$  справедливо  $W_1(t) > 0$  для любого момента времени  $t < 10000$  с.

Графики решений, представленные на рисунках 1–6, подтверждают теорему механики о том, что конус полодии окружает либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции тела. Но он никогда не окружает ось промежуточного момента инерции [4] (в нашем случае ось  $Y$ ).

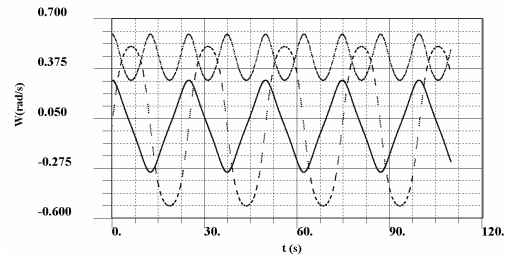


Рисунок 4. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  (частый, редкий пунктир, сплошной график) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,6; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$

Рисунок 5 соответствует решению системы уравнений (2) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,519615; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$ , где  $W_1(0)$  близко к критическому значению  $W_1(0)^* = 0,3\sqrt{3} \approx 0,519615242$ .

В окрестности точки  $W_1(0)^*$  период колебаний графиков решений заметно возрастает (от 37 сек. на рисунке 3 до 110 сек. на рисунке 5).

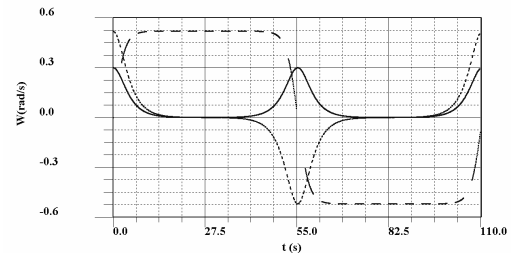


Рисунок 5. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  (частый, редкий пунктир, сплошной график) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,519615; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$

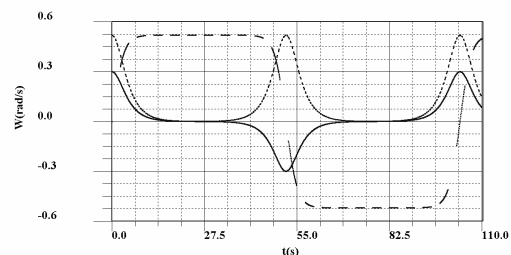


Рисунок 6. – Графики решения системы уравнений (4)  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$  (частый, редкий пунктир, сплошной график) с начальными условиями  $W_1(0) = 0,519616; W_2(0) = 0,0; W_3(0) = 0,3$

Максимальное значение периода  $T=156,35$  с. Форма решений рисунков 5, 6 напоминает периодические прямоугольные импульсы в пределе  $W_1(0) \rightarrow W_1(0)^*$ . Фазовые соотношения между функциями  $W_1(t), W_3(t)$  по-прежнему сохраняются (соотношение знаков) для  $W_1(0) < W_1(0)^*$  ( $W_3(t) > 0$ ) (рис. 3, рис. 5)) и для  $W_1(0) > W_1(0)^*$  численно проверено ( $W_1(t) > 0$ ) (рис. 4, рис. 6)) на больших промежутках времени  $t < 10000$  с.

Подчеркнем, что сохранение вышеуказанных свойств в окрестности точки

$$W_1(0)^* \text{ даже если } \left| \frac{W_1(0) - W_1(0)^*}{W_1(0)^*} \right| = 4 \cdot 10^{-9}$$

возможно именно благодаря двойной точности подпрограммы Ddaspг. Если  $W_1(0)$  близко к критическому значению  $W_1(0)^*$ , как видно из рисунков 5 и 6, фазы компонент  $W_1(t), W_3(t)$  совпадают, либо противоположны по знаку в любой момент времени. Следовательно,

$$\text{отношение компонент } \left| \frac{W_3(t)}{W_1(t)} \right| = \left| \frac{W_3(0)}{W_1(0)} \right| = \sqrt{I_3 / I_1}$$

справедливо в любой момент времени. Кроме того,  $E_1(t) = \frac{I_1}{2} W_1^2(t) = \frac{I_3}{2} W_3^2(t) = E_3(t)$  в малой окрестности критической точки  $W_1(0) = W_1(0)^*$ .

$$\text{Тогда } E_1(0) = \frac{I_1}{2} W_1^2(0) = \frac{I_3}{2} W_3^2(0) = E_3(0).$$

Или, более подробно:

$$W_1(0)^* = W_3^*(0) \sqrt{I_3 / I_1} = 0,3\sqrt{3} \quad (4)$$

Но ведь управляющий параметр  $W_1(0)$  изменился с 0,519615 до 0,519616, т.е. всего на 0,000001! А ориентация оси конуса полодии изменилась с оси  $z$  на ось  $x$  – т.е. на  $90^\circ$  при малом изменении  $W_1(0)$  на 0,000001!

Мы имеем дело с критическим явлением, в котором ориентация оси конуса полодии имеет разрыв (скачок) при непрерывном изменении параметра  $W_1(0)$  в окрестности

$$\text{точки } W_1(0)^*. \text{ Обозначим } \tau = \left| \frac{W_1(0) - W_1(0)^*}{W_1(0)^*} \right|,$$

где  $\tau$  – безразмерный критический параметр.

Если критический безразмерный параметр  $\tau$  стремится к 0, то некоторые физические величины, например, удельная теплоёмкость как функция  $\tau$  имеет особенность логарифмического или степенного вида в фазовых переходах второго рода [9]. При фазовых переходах первого рода теплоёмкость вещества равна бесконечности. Фазовые переходы второго рода имеют конечную теплоёмкость с логарифмической либо степенной особенностью и характеризуются

изменением порядка термодинамической системы, например, изменением группы симметрии кристаллической решётки твёрдого тела. В теории фазовых переходов постулируется минимум некоторого термодинамического потенциала как термодинамическое устойчивое состояние системы. При фазовых переходах второго рода два состояния системы могут иметь равные минимальные значения термодинамического потенциала с разрывом параметров симметрии, а система при переходе из одного состояния в другое изменяет параметры симметрии с разрывом при неизменном потенциале. Такие явления в физике называются критическими. Другими словами, аналогия механической задачи свободного вращения твёрдого тела с фазовыми переходами второго рода чисто математическая. Если в твёрдой фазе фазовые переходы второго рода сопровождаются изменением порядка трансляции пространственной симметрии (межатомных расстояний в кристаллической решётке), то в данной задаче мы имеем временную трансляционную симметрию (периодическое повторение состояний системы через время  $T$ ). Обе задачи объединяются только равенством энергий 2 состояний разделённых скачком параметров симметрии (в нашем случае ориентации оси конуса полодии). И обе задачи описываются как критические явления с характерной логарифмической особенностью.

Особенно эффектно критическое изменение ориентации оси конуса полодии можно видеть на фазовой диаграмме в координатной системе  $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ . На рисунке 7 ось конуса полодии расположена вертикально вдоль оси  $z$ ,  $W_1(0) = 0,519615$ ;  $W_2(0) = 0,0$ ;  $W_3(0) = 0,3$ . А на рисунке 8 ось конуса полодии совпадает с осью  $x$ ,  $W_1(0) = 0,519616$ ;  $W_2(0) = 0,0$ ;  $W_3(0) = 0,3$ .

Изменение параметра  $W_1(0)$  составляет всего  $\Delta W_1(0) = 10^{-6}$ , а ориентация конуса претерпела скачок на  $90$  градусов, что характерно для критического явления!

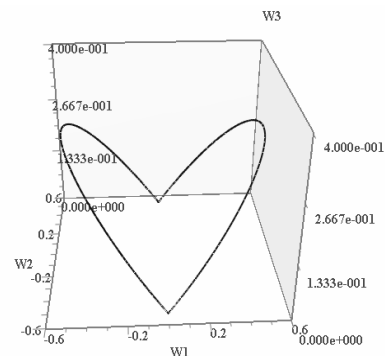


Рисунок 7. – Фазовый портрет модели с начальными условиями  $W_1(0) = 0,519615$ ;  $W_2(0) = 0,0$ ;  $W_3(0) = 0,3$

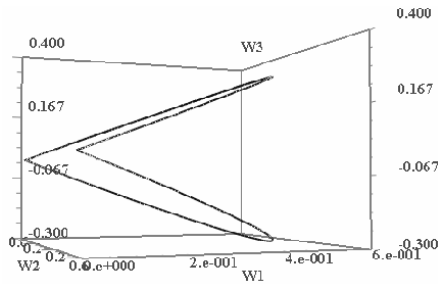


Рисунок 8. – Фазовый портрет модели с начальными условиями  $W_1(0) = 0,519616$ ;  $W_2(0) = 0,0$ ;  $W_3(0) = 0,3$

Обозначим  $T(\tau)$  – период колебаний прецессии как функцию безразмерного параметра  $\tau$ . Заполним таблицу расчетных данных (табл. 1):

Таблица 1. – Зависимость времени прецессии от безразмерного параметра  $\tau$

|                         |                       |                       |                      |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| $W_1(0), \frac{rad}{s}$ | 0,519                 | 0,5196                | 0,519615             |
| $T(\tau), s$            | 58,8                  | 83,4                  | 111,05               |
| $\tau$                  | $1,18 \cdot 10^{-3}$  | $2,933 \cdot 10^{-5}$ | $4,66 \cdot 10^{-7}$ |
| $\ln(\tau)$             | -6,7388               | -10,437               | -14,579              |
| $W_1(0), \frac{rad}{s}$ | 0,5196152             | 0,51961524            | 0,519615242          |
| $T(\tau), s$            | 122,65                | 142,15                | 156,35               |
| $\tau$                  | $8,135 \cdot 10^{-8}$ | $4,369 \cdot 10^{-9}$ | $5,2 \cdot 10^{-10}$ |
| $\ln(\tau)$             | -16,325               | -19,2485              | -21,375              |

Из приведенной таблицы получаем эмпирическую формулу:  $T = b + a \ln(\tau)$ ,  $b = 13,863$ ,  $a = -6,66516$ , которая даёт относительную погрешность не более чем 0,04%.

### Выводы

1) Доказана и численно подтверждена теорема об ориентации конуса полодии.

2) Если

$$\frac{\pi (W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1)}{2 W_3(0)^2} \sqrt{\frac{I_1 I_2 (I_2 - I_1)^2}{I_3^2 (I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} \ll 1,$$

то нелинейная система уравнений Л. Эйлера может рассматриваться как квазилинейная, а прецессия решений  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$  описывается квазипериодическим процессом, с частотой прецессии прямо пропорциональной  $W_3(t) \approx const$ .

3) Разрыв ориентации оси конуса полодии на 90 градусов происходит в случае равенства начальных энергий с максимальным и минимальным моментом инерции при бесконечно малом изменении параметра в критической точке  $W_1(0)^* = W_3(0) \sqrt{I_3 / I_1} \Leftrightarrow \tau = 0$ .

4) В критической области (где  $\tau$  стремится к 0) период колебаний угловой скорости имеет логарифмическую особенность как функция  $\tau$ :  $T(\tau) = b + a \ln(\tau)$ ,  $a = -6,66516$ ,  $b = 13,863$ ,

$$\tau = \left| \frac{W_1(0) - W_1(0)^*}{W_1(0)^*} \right|, \text{ где } a, b - \text{некоторые постоянные.}$$

4) Ось конуса полодии совпадает либо с осью максимального, либо минимального момента инерции, а именно, – с осью, соответствующей максимальной кинетической энергии, определяемой начальными условиями:

$$\max \left\{ \frac{I_1}{2} W_1(0)^2, \frac{I_3}{2} W_3(0)^2 \right\}.$$

Хочется отметить, что численное моделирование даёт хорошие результаты совместно как с обработкой экспериментальных данных [11, 12], так и при создании теоретических моделей природных явлений.

### Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматлит, 1959. – 915 с.
2. Койтер В.Т. Теоретическая и прикладная механика. Труды 14 междунар. конгресса ИУТАМ. – М.: Мир, 1979. – 765 с.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
5. Алешкевич В.А. Оптика. – М.: Физматлит, 2010. – 319 с.
6. Звелто О. Физика лазеров. – М.: Мир, 1990. – 549 с.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – М.: МЦНМО, 2007. – 657 с.
8. Бартенев О.В. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – 368 с.
9. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика (теория равновесных систем). – М.: МГУ, 1991. – 793 с.
10. Павлов С.В. Методы теории катастроф в исследовании фазовых переходов. – М.: Изд-во Московского университета, 1993. – 104 с.
11. Zviagintseva A.V., Averin G.V. The use of natural science methods for phenomenological models development in the social and human sciences // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. 2015, №1(8)–2(9). – С. 73–80.
12. Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Математическая обработка двумерных изображений и подавление шума геометрическими фильтрами типа медианной фильтрации // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. 2015, №1(8)–2(9). – С. 93–98.



### References (transliteration)

1. Andronov A.A., Vitt A.A., Haykin S.E. Teoriya kolebanij [Theory of fluctuations]. Moscow, Fizmatlit, 1959, 915 p. (in Russian).
2. Koyter V.T. Teoreticheskaja i prikladnaja mehanika [Theoretical and applied mechanics]. Trudy 14 mezhdunar. kongressa IUTAM. Moscow, Mir, 1979, 765 p. (in Russian).
3. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. Kachestvennaja teoriya dinamičeskikh sistem vtorogo porjadka [Qualitative theory of the dynamic systems second of the order]. Moscow, Nauka, 1966, 568 p. (in Russian).
4. Sivuhin D.V. Obshhij kurs fiziki. Mehanika [General course physicists]. Mechanics. Moscow, Nauka, 1989, 576 p. (in Russian).
5. Aleshkevich V.A. Optika [Optics]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 319 p. (in Russian).
6. Zvelto O. Fizika lazerov [Physics of lasers]. Moscow, Mir, 1990, 549 p. (in Russian).
7. Zorich V.A. Matematicheskij analiz [Mathematical analysis]. Part 1. Moscow, MCNMO, 2007, 657 p.
8. Barteniev O.V. The Mathematical library IMSL. Part 3. Moscow, Dialog-MIFI, 2001, 368 p. (in Russian).
9. Kvasnikov I.A. Termodinamika i statističeskaja fizika (teoriya ravnovesnyh sistem [Thermodynamics and statistical physics (the theory static system)]. Moscow, MGU, 1991, 793 p. (in Russian).
10. Pavlov S.V. Metody teorii katastrof v issledovanii fazovyh perehodov [The Methods to theories of the catastrophes in study phase of transition]. Moscow, Publishers of the Moscow university, 1993, 104 p. (in Russian).
11. Zviagintseva A.V., Averin G.V. The use of natural science methods for phenomenological models development in the social and human sciences // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve. 2015, no 1(8)–2(9): 73–80.
12. Ehilevskiy S.G., Golubeva O.V., Pastuhov D.F., Pastuhov Y.F. Matematicheskaja obrabotka dvumernyh izobrazhenij i podavlenie shuma geometricheskimi fil'trami tipa mediannoj fil'tracii [Mathematical processing the two-dimensional scenes and suppression of the noise geometric filter type median to filtering] // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve. 2015, no 1(8)–2(9): 93–98.

**Ехілевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.** «*Моделирование вільного обертання твердого тіла*». З використанням методів чисельного моделювання розглянута задача вільного обертання твердого тіла щодо центру мас. Знайдено, що при рівності початкових кінетичних енергій на осях з максимальним і мінімальним моментами інерції відбувається розрив на  $90^\circ$  орієнтації осі симетрії конуса полодії при безперервній зміні компонент початкової кутової швидкості. Аналітично показана неможливість збереження знака компоненти кутової швидкості, яка відповідає проміжному значенню моменту інерції. Наведено умови, при яких нелінійна задача зводиться до квазілінійної задачі. Теорема про орієнтацію конуса полодії доведена аналітичними методами. Логарифмічне затягування періоду прецесії компонент кутової швидкості як функції критичного параметра в околиці нуля може бути використано при активації розряджених газових середовищ.

**Ключові слова:** критичне явище, орієнтація осі конуса полодії, критичний параметр, логарифмічна особливість періоду коливань.

**Ekhilevsky S.G., Golubeva O.V., Pastukhov D.F., Pastukhov Y.F.** “*Simulation of free rotation of a solid body*”. Numerical simulation deals with the problem of free rotation of a rigid body relative to the center of mass. It is found that when the initial kinetic energies on the axes with the maximum and minimum moments of inertia are equal, a discontinuity of  $90^\circ$  orientations of the axis of symmetry of the cone of the band occurs with a continuous change in the components of the initial angular velocity. The impossibility of preserving the sign of the angular velocity component corresponding to the intermediate value of the moment of inertia is analytically shown. Conditions are given under which the nonlinear problem reduces to a quasi linear problem. The theorem on the orientation of the cone of a band is proved by purely analytic methods. The logarithmic tightening of the precession period of the components of the angular velocity as a function of the critical parameter in a neighborhood of zero can be used for the activation of discharged gaseous media. We have shown for the first time that a change in the orientation of the axis of the cone of the band is a critical phenomenon, i.e. The parameters of the system change abruptly with a continuous small change in the initial conditions of the components of the angular velocity. For the first time, the precession of the angular velocity components in the vicinity of the critical point has been delayed.

**Keywords:** critical phenomena, orientation to axis of the cone of polodi, critical parameter, logarithmic particularity of the period of the fluctuations.