

УДК 624.072

DOI 10.52928/2070-1683-2023-34-2-63-67

О ДЕФОРМАЦИОННОМ РАСЧЕТЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ УЧЕТЕ СИЛОВОГО И ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЙ

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ

(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматривается гибкий сжато-изогнутый стержень при совместном действии нагрузки и температуры. Получено дифференциальное уравнение оси сжато-изогнутого стержня с произвольной схемой опирания. Изучается влияние теплового воздействия на параметры напряженно-деформированного состояния стержня. На частном примере показано, что изгибающий момент с учетом теплового воздействия может существенно увеличиваться.

Ключевые слова: деформационный расчет, сжато-изогнутый стержень, силовое воздействие, тепловое воздействие, напряженно-деформированное состояние, принцип суперпозиции, геометрическая нелинейность.

Введение. Принято расчет конструкций на действие нагрузки и температуры производить раздельно, а затем найденные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС), согласно принципу суперпозиции, складывать. Но такой подход справедлив только для линейно деформируемых систем. В случае же гибких конструкций необходимы учет геометрической нелинейности и выполнение деформационного расчета конструкции. Наиболее глубоко и детально изучены вопросы деформационного расчета гибких сжато-изогнутых стержней на действие нагрузки. Здесь можно отметить работы [1–3]. Однако приводимые в этих работах дифференциальные уравнения, лежащие в основе деформационного расчета сжато-изогнутых стержней, не учитывают влияние теплового воздействия на изменение параметров НДС вследствие учета геометрической нелинейности.

Основная часть. Рассматривается деформационный расчет прямолинейного упругого стержня симметричного постоянного поперечного сечения с произвольными закреплениями концов, ограничивающими полностью или частично все перемещения концевых сечений. Стержень подвергается действию продольной силы N , произвольной поперечной нагрузки и тепловому воздействию (рисунок 1). Поперечная нагрузка и тепловое воздействие на рисунке 1 показаны условными буквенными обозначениями P и t .

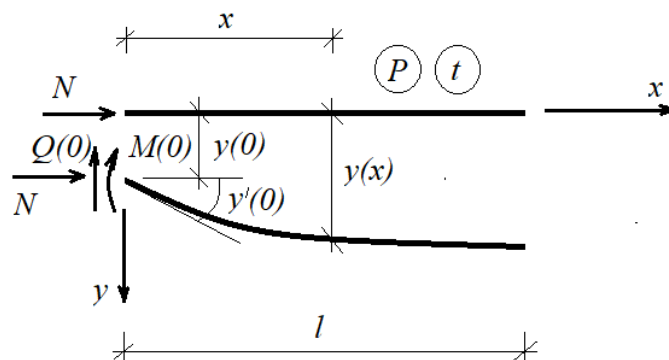


Рисунок 1. – Прямолинейный упругий стержень с произвольными закреплениями концов

Тепловое воздействие характеризуется двумя независимыми величинами – приращением внутренней температуры Δt_g и приращением наружной температуры Δt_n . Внутренней считается более высокая температура. Скорость изменения приращения температуры по высоте поперечного сечения h определяется по формуле

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_g - \Delta t_n}{h}$$

НДС стержня в произвольном сечении характеризуется прогибом $y(x)$, углом поворота сечения $y'(x)$, изгибающим моментом $M(x)$, поперечной силой $Q(x)$ и постоянной продольной силой N . НДС стержня в начале координат характеризуется начальными параметрами y_0, y'_0, M_0, Q_0 и зависит от условий закрепления сечения в этом месте.

В соответствии с гипотезой плоских сечений кривизна искривления стержня, вызванного тепловым воздействием, описывается выражением

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_T = -\alpha \Delta t', \quad (1)$$

где α – коэффициент линейного расширения конструкционного материала, из которого выполнен стержень.
Кривизна изгиба, порождаемого действием нагрузки, описывается известным из сопротивления материалов выражением

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_P = \pm \frac{M}{EI}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости конструкционного материала стержня;
 I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба;
 M – изгибающий момент, возникающий в произвольном сечении.

Тогда кривизна стержня при совместном действии температуры и нагрузки получится сложением (1) и (2) и с учетом правил знаков в координатной системе, показанной на рисунке 1, будет иметь вид

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} - \alpha\Delta t'. \quad (3)$$

Величина момента, с учетом продольной силы, описывается выражением

$$M(x) = M(0) + Q(0)x + N[y - y(0)] + M_P, \quad (4)$$

где M_P – изгибающий момент, возникающий в произвольном сечении от действия поперечной нагрузки.

Подставляя в левую часть (3) приближенное выражение для кривизны линии, получим дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня при совместном приложении нагрузки и теплового воздействия:

$$y'' + k^2 y = -\frac{M(0) + Q(0)x - Ny(0) + M_P - EI\alpha\Delta t'}{EI}, \quad (5)$$

где $k^2 = \frac{N}{EI}$.

Полученное уравнение (5) является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, и его решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2,$$

где $y_1 = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения, получаемого из (5);

$$y_2 = -\frac{M(0) + Q(0)x - Ny(0) + M_P + EI\alpha\Delta t'}{k^2 EI} \text{ – частное решение уравнения (5).}$$

Выражая произвольные постоянные через начальные параметры, получим следующее решение уравнения (5):

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{k} \sin kx - \frac{M(0) + M_P + EI\alpha\Delta t'}{k^2 EI} (1 - \cos kx) - \frac{Q(0)}{k^3 EI} (kx - \sin kx). \quad (6)$$

Полученное решение описывает прогибы, возникающие в стержне при совместном действии нагрузки и температуры. Продифференцировав (6) один раз по x , получим выражение для углов поворота сечений:

$$y' = y'(0) \cos kx - \frac{M(0) + M_P + EI\alpha\Delta t'}{kEI} \sin kx - \frac{Q(0)}{k^2 EI} (1 - \cos kx). \quad (7)$$

Покажем применение полученных формул (6), (7) для деформационного расчета сжато-изогнутого стержня с конкретной схемой опирания и определения параметров НДС. Рассмотрим шарнирно опертый стержень при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P , приложенной в середине пролета, показанный на рисунке 2.

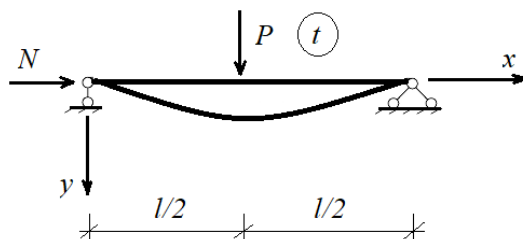


Рисунок 2. – Шарнирно опертый стержень при совместном действии температуры, продольной и поперечных сил

В соответствии с условиями закрепления стержня в начале координат начальные параметры характеризуются следующими значениями:

$$y_0 = 0, y'_0 \neq 0, M_0 = 0, Q_0 = \frac{P}{2}. \quad (8)$$

С учетом (8) выражение для прогибов (6) примет вид

$$y = \frac{y'(0)}{k} \sin kx - \frac{\alpha \Delta t'}{k^2} (1 - \cos kx) - \frac{P}{2k^3 EI} (kx - \sin kx). \quad (9)$$

Из условий закрепления стержня на правом конце ($x=l$) следует, что прогиб на этом конце равен нулю $y(l) = 0$. Следовательно,

$$y'(0) = \frac{P}{2EI} \frac{kl - \sin kl}{k^2 \sin kl} + \alpha \Delta t' \frac{(1 - \cos kl)}{k \sin kl}. \quad (10)$$

С учетом (10) прогибы стержня будут описываться выражением

$$y(v) = \frac{Pl^3}{2EI} \frac{1}{v^3} \left[\frac{v - \sin v}{\sin v} \sin v \xi - (v \xi - \sin v \xi) \right] + \alpha \Delta t' l^2 \frac{1}{v^2} \left[\frac{1 - \cos v}{\sin v} \sin v \xi - (1 - \cos v \xi) \right], \quad (11)$$

а выражение для изгибающих моментов имеет вид

$$M(v) = \frac{Pl}{2} \left\{ \xi + \frac{1}{v} \left[\frac{v - \sin v}{\sin v} \sin v \xi - (v \xi - \sin v \xi) \right] + \frac{2EI \alpha \Delta t'}{Pl} \left[\frac{1 - \cos v}{\sin v} \sin v \xi - (1 - \cos v \xi) \right] \right\}. \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) записаны с использованием безразмерного параметра продольной силы $v = kl$ и безразмерной абсциссы сечения $\xi = \frac{x}{l}$.

Полагая в (11) $x = 0,5l$, найдем для стержня максимальный прогиб при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P :

$$y_{\max}(v) = y_{\max}^P \left[24F_1(v) + \frac{48}{\pi^2} \alpha \beta \frac{\Delta t}{\rho} F_2(v) \right], \quad (13)$$

где $y_{\max}^P = \frac{Pl^3}{48EI}$ – максимальный прогиб от действия поперечной силы P ;

$\beta = \frac{l}{h}$ – параметр, учитывающий отношение пролета к высоте поперечного сечения стержня;

$\Delta t = \Delta t_{\theta} - \Delta t_n$ – параметр теплового воздействия;

$\rho = \frac{P}{N_{кр}}$ – параметр уровня нагружения стержня поперечной нагрузкой в долях от критической нагрузки

стержня $N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Входящие в (13) функции $F_1(v)$ и $F_2(v)$ учитывают влияние продольной силы и имеют вид

$$F_1(v) = \frac{1}{v^3} \left(\frac{v - \sin v}{2 \cos \frac{v}{2}} - \left(\frac{v}{2} - \sin \frac{v}{2} \right) \right);$$

$$F_2(v) = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1 - \cos v}{2 \cos \frac{v}{2}} - \left(1 - \cos \frac{v}{2} \right) \right).$$

Полагая в (12) $x = 0,5l$, найдем для стержня максимальный момент при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P :

$$M_{\max}(\nu) = M_{\max}^P(\nu) \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{\alpha\beta}{\rho} \cdot \Delta t' \cdot k(\nu) \right),$$

где $M_{\max}^P(\nu) = \frac{Pl \operatorname{tg} \nu/2}{4 \nu/2}$ – максимальный момент сжато-изогнутого стержня без учета влияния теплового воздействия;

$$k(\nu) = \frac{\nu(1 - \cos \nu/2)}{2 \operatorname{tg} \nu/2} \text{ – коэффициент влияния продольной силы с учетом теплового воздействия.}$$

График изменения коэффициента $k(\nu)$ приведен на рисунке 3.

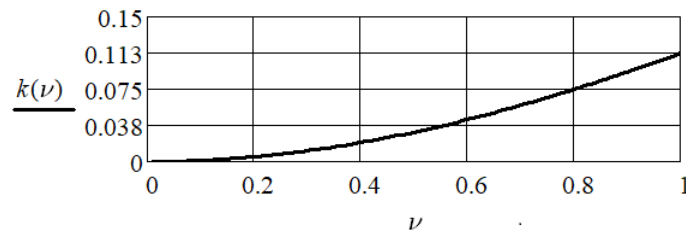


Рисунок 3. – График коэффициента $k(\nu)$

Для оценки влияния теплового воздействия на величину максимального изгибающего момента сжато-изогнутого стержня введем следующие обозначения:

– $\mu' = \frac{M_{\max}(\nu)}{Pl}$ – безразмерный максимальный изгибающий момент с учетом влияния теплового воздействия;

– $\mu = \frac{M_{\max}^P(\nu)}{Pl}$ – безразмерный максимальный изгибающий момент без учета влияния теплового воздействия.

При построении графиков, описывающих зависимость безразмерных величин максимальных изгибающих моментов от величины безразмерного параметра продольной силы ν , используем следующие значения параметров стержня:

- коэффициент линейного расширения конструкционного материала – $\alpha = 10^{-5}$;
- параметр, учитывающий влияние отношения пролета к высоте поперечного сечения стержня – $\beta = 500$;
- параметр уровня нагружения стержня поперечной нагрузкой в долях от критической нагрузки стержня – $\rho = 0,01$;
- числовая характеристика теплового воздействия – $\Delta t' = 10$.

Графики изменения безразмерных величин максимальных изгибающих моментов сжато-изогнутого шарнирно опертого стержня с учетом и без учета теплового воздействия приведены на рисунке 4.

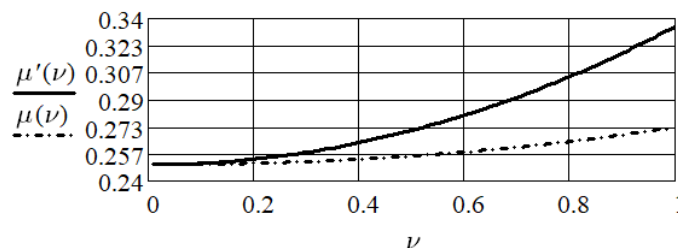


Рисунок 4. – Графики максимальных изгибающих моментов сжато-изогнутого шарнирно опертого стержня

Из приведенного графика следует, что при значениях $\nu > 0,5$ увеличение изгибающего момента, вследствие учета влияния теплового воздействия, превышает 5%.

Заключение. Таким образом, приведенный пример показывает, что величины изгибающих моментов сжато-изогнутых стержней с учетом теплового воздействия при определенных сочетаниях параметров могут существенно увеличиваться и, следовательно, влиять на снижение их несущей способности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. Упругие рамы, фермы и комбинированные системы. – М.: Стройиздат, 1949. – 375 с.
2. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. – М.: Госстройиздат, 1954. – 307 с.
3. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. – М.: Физматгиз, 1961. – 394 с.

REFERENCES

1. Kornoukhov, N.V. (1949). *Prochnost' i ustoichivost' sterzhnevyykh sistem. Uprugie ramy, fermy i kombinirovannye sistemy*. Moscow: Stroiizdat. (In Russ.).
2. Leites, S.D. (1954). *Ustoichivost' szhatykh stal'nykh sterzhnei*. Moscow: Gosstroizdat. (In Russ.).
3. Pikovskii, A.A. (1961). *Statika sterzhnevyykh sistem so szhatyimi elementami*. Moscow: Fizmatgiz. (In Russ.).

Поступила 25.09.2023

**ABOUT DEFORMATION CALCULATION OF A COMPRESSED-BENT ROD
WITH JOINT ACCOUNT OF FORCE AND THERMAL INFLUENCES**

L. TURISHCHEV

(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

A flexible compressed-bent rod under the combined action of load and temperature is considered. A differential equation for the axis of a compressed-bent rod with an arbitrary support scheme is obtained. The influence of thermal influence on the parameters of the stress-strain state of the rod is studied. A particular example shows that the bending moment, taking into account the thermal effect, can increase significantly.

Keywords: *deformation calculation, compressed-bent rod, force influence, thermal influence, stress-strain state, superposition principle, geometric nonlinearity.*