УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАДАННУЮ СИСТЕМУ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

канд. физ.-мат. наук Т.В. ТИХОНЕНКО
(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

В данной статье рассматриваются только конечные группы. Строение конечных групп в значительной степени зависит от наличия в них холловых подгрупп. Исследование холловых подгрупп в конечных группах дает возможность глубже понять их структуру. Этот вопрос привлекал внимание многих алгебраистов, таких как: Ф. Холл, Ф. Гросс, Э.М. Пальчик, С.А. Чунихин, В.П. Вдовин, Д.О. Ревин, В.Н. Тютянов, и других, которые получили ряд глубоких и интересных результатов при исследовании холловых подгрупп в конечных группах. Нами найдены композиционные факторы конечной группы, обладающей холловыми подгруппами, порядок которых делится на 2, 3 и t, где t – любой простой делитель порядка всей группы, отличный от чисел 2 и 3.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной статье группы конечны, обозначения стандартны и соответствуют [1; 2]. Через $\pi(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей порядка группы G; будем говорить, что конечная группа G обладает свойством E_π, если она обладает холловой π-подгруппой, $\pi \subseteq \pi(G)$.

Система холловых подгрупп в конечной группе с заданными свойствами оказывает значительное влияние на ее строение. В настоящее время связь между холловыми подгруппами и строением основной группы достаточно хорошо изучена. Еще в 1956 году Ф. Холл [3] высказал гипотезу, что конечная группа, имеющая бипримарные холловы $\{p, q\}$-подгруппы для всех простых делителей p и q ее порядка, является разрешимой. С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп справедливость этой гипотезы была доказана в 1982 году З. Арадом и М. Уордом [4]. В 2002 году данный результат был значительно усилен В.Н. Тютяновым [5], где было показано, что конечная группа G, обладающая свойством $E_{\{2,p\}}$ для всех $p \in \pi(G)\backslash\{2\}$, является разрешимой. Систематическое изучение существования холловых подгрупп в простых группах было проведено в работах В.П. Вдовина и Д.О. Ревина [6; 7].

В данном направлении получен следующий результат:

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа, обладающая свойством $E_{\{2,\,3,\,t\}}$ для всех $t \in \pi(G)\backslash\{2, 3\}$. Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит списку: A_5, A_6, $PSL_2(7)$, $PSL_2(8)$, $PSL_2(17)$, $PSL_3(3)$, $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$.

1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Порядки групп из списка, приведенного в заключении теоремы, делятся в точности на три простых числа и имеют вид $2^a3^bt^c$, t = 5, 7, 13 или 17. Для краткости назовем эти восемь групп K_3*-группами*.

1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Среди K_3-групп только группы A_5, $PSL_2(7)$ и $PSL_3(3)$ обладают холловой $\{2, 3\}$-подгруппой.

Из теоремы и замечания 1.2 легко получается следующее:

1.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – конечная группа, обладающая собственной холловой $\{2,3,t\}$-подгруппой для всех $t \in \pi(G)\backslash\{2, 3\}$. Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит следующему списку: A_5, $PSL_2(7)$, $PSL_3(3)$.

2. Предварительные результаты. Для доказательства основного результата нам необходимы следующие вспомогательные леммы:

2.1. ЛЕММА [6, следствие 2.2.4]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппа M знакопеременной группы A_n является холловой π-подгруппой тогда и только тогда, когда $M = M_0 \cap A_n$ для некоторой холловой π-подгруппы M_0 симметрической группы S_n.

2.2. ЛЕММА [7, теорема A4]. Пусть S_n – симметрическая группа степени n и $r < s \leq n$, где r и s – простые числа. Тогда S_n обладает свойством $E_{\{r,s\}}$ в том и только в том случае, если $r = 2$, $s = 3$, а n = 3, 4, 5, 7, 8.

2.3. ЛЕММА [6, таблица 5]. Пусть G – спорадическая группа или группа Титса. Если H собственная холлова π-подгруппа в группе G, где $|\pi| \geq 2$ и $2 \in \pi$, то группа G одна из следующих групп:

1. $G \cong M_{11}$
   (a) $H \cong 3^2 : Q_8.2$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong A_6.2$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
2. $G \cong M_{22}$
   (a) $H \cong 2^4 : A_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
3. $G \cong M_{23}$
   (a) $H \cong 2^4 : (3 \times A_4) : 2$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong 2^4 : A_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
   (c) $H \cong 2^4 : (3 \times A_5) : 2$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$; (d) $H \cong PSL_3(4) : 2_2$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$;
   (e) $H \cong 2^4 : A_7$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7\}$; (f) $H \cong M_{22}$ и $\pi = \{2, 3, 5, 7, 11\}$;

4. $G \cong M_{24}$
 (a) $H \cong 2_6 : 3.S_6$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$;
5. $G \cong J_1$
 (a) $H \cong 2^3 : 3$ и $\pi = \{2, 3\}$; (b) $H \cong 2^3 : 7$ и $\pi = \{2, 7\}$;
 (c) $H \cong 2 \times A_5$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$; (d) $H \cong 2^3 : 3 : 7$ и $\pi = \{2, 3, 7\}$;
6. $G \cong J_4$
 (a) $G \cong 2^{11} : (2^6 : 3.S_4)$ и $\pi = \{2, 3, 5\}$.

2.4. ЛЕММА [6, лемме 1.4.3]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть G – группа лиева типа над полем $GF(q)$ характеристики $p \in \pi$ и группа G обладает свойством E_π. Тогда, если H – холлова π-подгруппа в группе G, верно одно из следующих утверждений:

(1) $H = G$;

(2) $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q - 1) \cup \{p\}$, H содержится в некоторой подгруппе Бореля группы G, и любое простое число из $\pi \backslash \{p\}$ не делит порядок группы Вейля группы G;

(3) $p = 2$, $G = D_l(q)$, где число l является простым числом Ферма, $(l, q - 1) = 1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J = \{r_2, r_3, \ldots, r_l\}$;

(4) $p = 2$, $G = {}^2D_l(q)$, где число $l - 1$ является простым числом Мерсенна, $(l - 1, q - 1) = 1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J = \{ r_2^1, r_3^1, \ldots, r_{l-1}^1 \}$;

(5) G изоморфна факторгруппе по некоторой центральной подгруппе группы $SL(V)$, где V – векторное пространство размерности n над полем $GF(q)$ характеристики p, H является образом в G относительно естественного гомоморфизма стабилизатора в $SL(V)$ ряда подпространств $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_s = V$ таких, что $dim V_i/V_{i-1} = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и выполнено одно из следующих условий:

($а$) n – нечетное простое число, $(n, q - 1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{1, n - 1\}$;

($б$) $n = 4$, $(2\cdot3, q - 1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 2$;

($в$) $n = 5$, $(2\cdot5, q - 1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{2, 3\}$;

($г$) $n = 5$, $(2\cdot3\cdot5, q - 1) = 1$, $s = 3$, $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2, 2\}$;

($д$) $n = 7$, $(5\cdot7, q - 1) = 1$, $(3, q + 1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{3, 4\}$;

($е$) $n = 8$, $(2\cdot5\cdot7, q - 1) = 1$, $(3, q + 1) = 1$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = 4$;

($ж$) $n = 11$, $(2\cdot3\cdot7\cdot11, q - 1) = 1$, $(5, q + 1) = 1$, $s = 2$, $n_1, n_2 \in \{5, 6\}$.

Напомним, что конечная группа, простые неабелевы композиционные факторы которой являются либо группами Шевалле, либо спорадическими группами, либо знакопеременными группами, называется *K-группой*.

2.5. ЛЕММА [4]. Пусть G – конечная K-группа. Если G обладает свойством $E_{\{2,\ p\}}$ для всех $p \in \pi(G) \backslash \{2\}$, то она разрешима.

2.6. ЛЕММА [8, теорема 3]. Пусть G – простая группа Шевалле и $G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$. Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

3. Доказательство основного результата. Сначала покажем, что группа G, удовлетворяющая условиям теоремы, не является простой неабелевой группой.

Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Тогда G – простая неабелева группа. Возможны следующие случаи.

1. $G \cong A_n$, $n \geq 7$.

Описание холловых подгрупп в симметрических группах S_n дают лемма 2.1 и лемма 2.2. Из этого описания следует, что группа A_n не удовлетворяет условиям теоремы.

2. G – спорадическая группа или группа Титса.

Из леммы 2.3 следует, что найдется такой простой делитель r порядка группы G, что группа G не обладает свойством $E_{\{2, 3, r\}}$.

3. G – группа лиевского типа над полем характеристики p.

Пусть H – собственная холлова $\{2, 3, t\}$-подгруппа в группе G. Если выполняется пункт (1) леммы 2.4, то $|\pi(G)| = 3$, что невозможно по условию теоремы. Следовательно, выполняется один из пунктов (2) – (5) леммы 2.4. Во всех случаях H содержится в максимальной параболической подгруппе группы G.

По лемме 2.6 получаем, что порядок всякой собственной параболической подгруппы группы G взаимно прост с некоторым числом $r \in \pi(G)$, кроме случаев, когда $G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$.

Рассмотрим эти исключения.

a) $G \cong A_5(2)$. Холлова $\{2, 3, r\}$-подгруппа H содержится в максимальной параболической подгруппе $A_4(2)$ и поэтому $(|G : A_4(2)|, 3) = 1$. Однако $(|G : P|, 3) = 3$ для всякой параболической подгруппы P группы G.

b) $G \in \{C_3(2), D_4(2)\}$. В этих случаях число 3 делит $|G : P|$ для любой параболической подгруппы P группы G. Противоречие получается так же, как и в пункте a).

c) $G \cong {}^2A_3(2)$. В данном случае $|\pi(G)| = 3$, что невозможно по условию теоремы.

Таким образом, группа G не является простой неабелевой группой.

Рассмотрим N – минимальную нормальную подгруппу в неразрешимой группе G.

Пусть $S(G) \neq 1$ и $N \cong Z_p \times \ldots \times Z_p$ – элементарная абелева p-группа. Рассмотрим фактор-группу G/N.

Если $p \notin \{2, 3\}$, то фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы. В силу минимальности контрпримера композиционные факторы в G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы, значит, и композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы, что невозможно.

Пусть $p = 2$. Если N – холлова подгруппа в группе G, то $|G/N|$ – нечетное число. Значит, группа G – разрешимая, что невозможно. Следовательно, подгруппа N не является холловой подгруппой в группе G. Тогда фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы, и композиционные факторы в G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы. Значит, и композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы. Противоречие.

Пусть $p = 3$. Если N – холлова подгруппа в группе G, то G/N является 3'-группой, а значит, в G/N существует холлова $\{2, t\}$-подгруппа для любого $t \in \pi(G)\backslash\{2\}$. Тогда по лемме 2.5 фактор-группа G/N – разрешимая подгруппа, что невозможно. Пусть N не является холловой подгруппой в группе G. В этом случае фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы, и неабелевы композиционные факторы G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы. Таким образом, композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы, что невозможно.

Тогда $S(G) = 1$. Рассмотрим $N \cong N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если $\{2, 3\} \in \pi(N)$ или $\{2, 3\} \in \pi(G/N)$, то подгруппы N и G/N удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку групп из заключения теоремы. Противоречие.

Если $2 \notin \pi(N)$, $3 \in \pi(N)$, то N – разрешимая подгруппа, что невозможно.

Если $3 \notin \pi(N)$, $2 \in \pi(N)$, то подгруппа N является 3'-группой. Поскольку подгруппа H – холлова в группе G, значит, $H \cap N$ – холлова подгруппа в подгруппе N, то есть в подгруппе N существует холлова $\{2, t\}$-подгруппа для любого $t \in \pi(G)\backslash\{2\}$, и по лемме 2.5 подгруппа N – разрешимая, что невозможно. Последнее противоречие.

Таким образом, любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен одной из K_3-групп. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin: Springer-Verlag, 1967.
2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985.
3. Hall, P. Theorems like Sylow’s / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – V. 6(3). – P. 286 – 304.
4. Arad, Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234 – 246.
5. Тютянов, В.Н. К гипотезе Холла / В.Н. Тютянов // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 1181 – 1191.
6. Вдовин, Е.П. Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 1. – С. 15 – 56.
7. Ревин, Д.О. Холловы подгруппы конечных групп: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Д.О. Ревин. – Новосибирск, 2008. – 232 л.
8. Тютянов, В.Н. Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 52 – 56.

Поступила 23.11.2011

FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEM OF HALL SUBGROUPS

T. TIHONENKO

All considered groups are finite in the paper. The structures of finite groups are depending on presence of Hall subgroups. Investigation of Hall subgroups of finite groups gives us an opportunity to understand their structure. These questions attracted attention many algebraists, such as Ph. Hall, F. Gross, E.M. Palchik, V.P. Vdovin, D.O. Revin, V.N. Tyutyanov and others. These mathematicians got many profound and interesting results about the Hall subgroups of finite groups. Let finite group has Hall subgroups, which orders are divide into 2, 3 and t – is the any prime divisor of order of the finite group and t is not equal 2 and 3. The compositions factors of such finite group are found out in paper.