ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.236 **DOI 10.52928/2070-1683-2023-35-3-75-80**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

А.С. ИВАШНЁВА,
канд. техн. наук К.И. МАРКОВИЧ,
П.Ф. ПАРАДНЯ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Для трансформирования систем координат на плоскости в зависимости от состава элементов трансформирования выделяют ортогональную, подобную и аффинную модели. В статье проведен анализ существующих подходов идентификации моделей трансформирования. Предложен подход для идентификации модели трансформирования систем координат на плоскости, основанный на геометрических свойствах, не меняющихся при определенном виде преобразований. На основе предложенного подхода составлена процедура в программном продукте Matlab, ускоряющая процесс вычисления всех необходимых соотношений для анализа и последующего определения вида модели трансформирования систем координат на плоскости.

Ключевые слова: *идентификация моделей трансформирования, аффинная модель, ортогональная модель, подобная модель, элементы трансформирования*.

Введение. В зависимости от того, какими элементами представлено трансформирование систем координат на плоскости, выделяют следующие модели: ортогональная модель (или трёхпараметрическая), подобная модель (или четырёхпараметрическая), аффинная модель (или шестипараметрическая) [1; 2].

Если в процессе трансформирования систем координат существует необходимость на основе полученных коэффициентов вычислить элементы трансформирования, например, угол вращения, коэффициенты масштабирования и др., то для этого нужно иметь представление о виде модели трансформирования (например, при анализе деформаций геодезической сети).

Основная часть. Задачу идентификации модели возможно решить несколькими способами. Отметим, что обычно такого рода задача решается весьма тяжеловесно, на основе расчета и сравнения для всех возможных моделей трансформирования их целевой функции (формула 1) или стандартного отклонения модели (формула 2).

$$\Phi = v^T P v; \tag{1}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{2n-k}}, \tag{2}$$

где v – поправки в координаты в новой системе координат;
n – количество общих точек;
k – число оцениваемых коэффициентов.

У какой модели величина целевой функции или стандартного отклонения окажутся меньше, та модель наилучшим образом отражает выполненное трансформирование.

Существуют и некоторые другие методы, например, на основе вычисления информационной характеристики *Akaike* (AIC) (формула 3)[1]

$$AIC = n \cdot log(WSSR) + 2k, \tag{3}$$

где n – количество наблюдений;
WSSR – взвешенная сумма квадратов невязок;
k – количество параметров.

Первый член в правой части уравнения (3) является мерой несоответствия модели, тогда как второй член ($2k$) можно интерпретировать как «штраф» за увеличение количества параметров в модели. Таким образом, хорошей математической моделью является та, которая имеет наименьшую величину информационной характеристики *Akaike*. Но стоит отметить, что данный алгоритм также предполагает расчет по всем моделям и выявлению оптимальной модели путем сравнения вычисленных характеристик.

---

[1] Felus Y.A., Felus M. On Choosing the Right Coordinate Transformation Method // Surveyors Key Role in Accelerated Development: FIG-Working Week 2009 / Eilat, Israel (3–8 May 2009). – P. 1–10.

Другой подход для идентификации модели трансформирования основан на наиболее общем из линейных, аффинном трансформировании, с использованием элементов статистического тестирования [3].

Предполагая наличие общих точек для трансформирования без ошибок и используя аффинную модель трансформирования для случая, когда она является подобной, будут получены такие же результаты, как если бы использовалась подобная модель: равные друг другу не единичные масштабные коэффициенты и нарушение ортогональности равное нулю. Если наоборот, имеется аффинная модель трансформирования, а используются формулы подобного трансформирования, то величина неортогональности и различные масштабы распределяются в угол поворота и масштаб, а это может привести к достаточно большим погрешностям. Так как задача трансформирования систем координат решается в условиях переопределенности и ошибок координат, то значения параметров трансформирования получают искажения, в результате чего их значения будут отличными от нуля и единицы.

Для идентификации модели трансформирования возможно использовать элементы статистического тестирования. Используя степень отклонения по вероятности исследуемого параметра от нуля или единицы (или от другого какого-либо значения), можно делать вывод о том, что некоторые элементы трансформирования статистически не отличаются от нуля или единицы (или статистически неразличимы между собой). По полученным результатам возможно идентифицировать вид модели трансформирования, наиболее близкой к реальной [3].

Для решения задачи идентификации модели трансформирования можно использовать подход, основанный на геометрических свойствах, не меняющихся при определенном виде преобразований (ортогональное, подобное, аффинное) [1].

Рассматривая каждую модель, можно выделить ряд геометрических свойств, не меняющихся при ортогональных, подобных и аффинных преобразованиях, другими словами, с помощью условий ортогональности, подобия, аффинности фигур можно определить модель преобразования аналитическим способом.

Известно, что в случае ортогональной модели, мы имеем дело с группой ортогональных преобразований [1; 4]. При ортогональных преобразованиях сохраняются размер и форма фигуры, а также длины отрезков и углы между ними (линейный масштаб равен 1).

Если отказаться от требований сохранения размеров фигуры и рассматривать лишь такие преобразования, при которых остается неизменной ее форма, то мы имеем группу подобных преобразований (четырехпараметрическую модель). Эти преобразования, не изменяя формы фигуры, увеличивают или уменьшают все размеры в одно и то же число раз (линейный масштаб постоянный). При преобразованиях подобия длины отрезков изменяются, но углы между ними сохраняются.

Аффинные преобразования – группа более общих преобразований, которые, сохраняя прямые линии и параллельность, меняют длины отрезков, величины углов и площадей фигур. Сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых), и отношение площадей фигур [1].

Знание свойств, не меняющихся при преобразованиях той или иной группы, позволяет определить модель преобразования. Для численного определения модели линейного преобразования можно рекомендовать следующий порядок вычисления.

Для примера представим схему из четырех общих точек, координаты которых имеются в двух системах координат (рисунок 1).

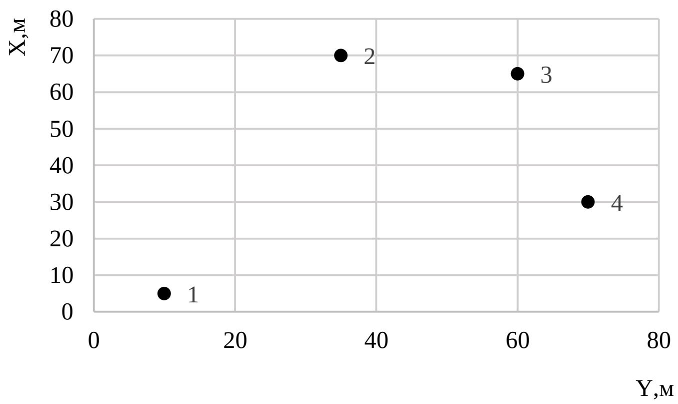

Рисунок 1. – Схема расположения общих точек

Линейный масштаб по всем линиям, исходящим из точки 1, вычисляется по формуле

$$m = \frac{S'_{1i}}{S_{1i}}. \tag{4}$$

При значении линейного масштаба *m=1* преобразование может быть ортогональным. Если линейный масштаб будет постоянным, то преобразование может быть подобным. Дело в том, что это условие является необходимым, но не является достаточным, так как выбранные линии могут располагаться вдоль осей координат, а в частных случаях аффинных преобразований масштабы вдоль осей координат равны между собой (на плоскости квадрат преобразуется в ромб). Для окончательного заключения о том, что модель преобразования подобная, необходимо выполнить сравнение углов, стороны которых исходят из вершины 1, вычисляя их косинусы по формуле (приложение скалярного произведения векторов) [5]

$$cos\beta_{i1k} = \frac{(x_i - x_1)(x_k - x_1) + (y_i - y_1)(y_k - y_1)}{\sqrt{\Delta x_{1i}^2 + \Delta y_{1i}^2}\sqrt{\Delta x_{1k}^2 + \Delta y_{1k}^2}}. \quad (5)$$

Если углы равны $\beta_{i1k} = \beta'_{i1k}$, масштаб постоянен и равен единице m = 1, то преобразование ортогональное (модель ортогональная).

Если углы равны $\beta_{i1k} = \beta'_{i1k}$, масштаб постоянен $m = const$, то преобразование подобное (модель подобная).

Если углы не равны $\beta_{i1k} \neq \beta'_{i1k}$, и $m \neq const$, то возможна шестипараметрическая модель.

На плоскости условию аффинности соответствует требование постоянства масштаба площадей. Необходимо выполнить проверку путем вычисления отношения площадей фигур

$$m_s' = \frac{S_{123}'}{S_{123}}; \quad (6)$$

$$m_s'' = \frac{S_{134}'}{S_{134}}. \quad (7)$$

Площадь треугольников можно найти по формуле (половина модуля векторного произведения векторов, на которых построен треугольник) [5]

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|, \quad (8)$$

где $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ – вектора, $|\overline{AB} \times \overline{AC}|$ – модуль векторного произведения векторов.

Если $m_s' = m_s''$, то делается заключение, что преобразование аффинное (модель аффинная).

Если $m_s' \neq m_s''$, то преобразование проективное или более сложное, например, нелинейное.

На рисунке 2 представлена блок-схема для численного определения модели преобразования координат на плоскости. Началом схемы является блок «Вычисление линейных масштабов».

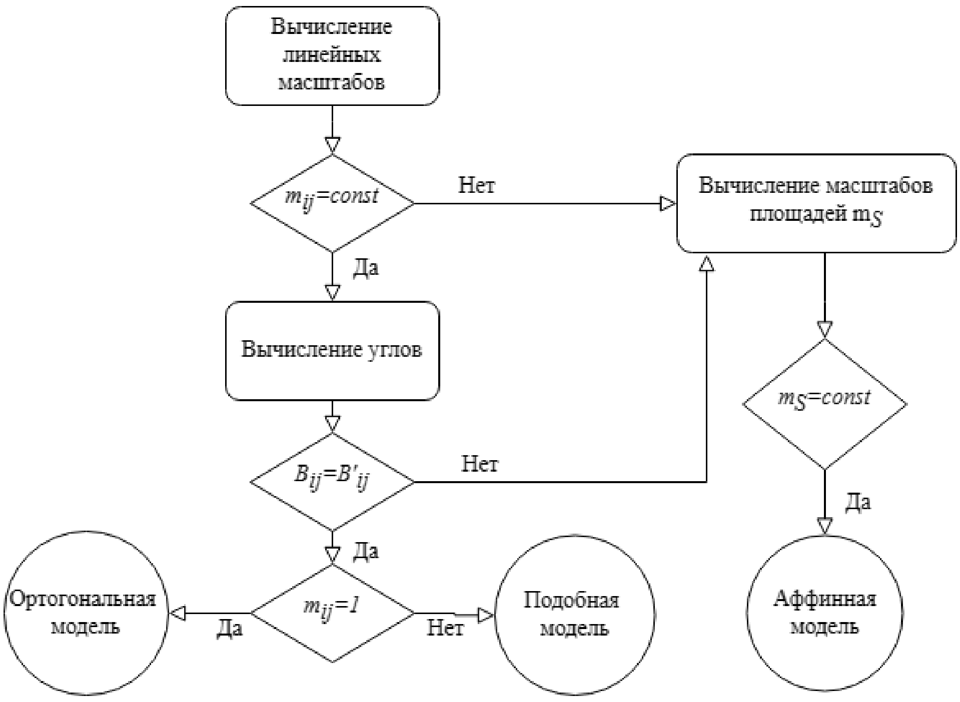

Рисунок 2. – Блок-схема для численного определения модели преобразования на плоскости

По данной блок-схеме составлена процедура *model.m.* в программном продукте *Matlab*, ускоряющая процесс вычисления всех необходимых соотношений для анализа и последующего определения вида модели (рисунок 3).

Входными данными для процедуры являются:

ks – координаты общих точек в новой системе координат;

kn – координаты общих точек в старой системе координат;

n – количество общих точек.

Выходными данными для процедуры являются:

m – отношение длин линий между точками в новой и старой системах координат;

mb – отношение углов в новой и старой системах координат;

ms – отношение площадей треугольников, образуемых между первой и другими точками, в новой и старой системах координат. Каждая точка должна быть включена в треугольник хотя бы раз.

```
function [m,mb,ms] = model(ks,kn)
%Input:
%   ks          : coordinate (old system)
%   kn          : coordinate (new system)
%   N           : number of points
% Output:
%   m           : ratio of lengths
%   mb          : ratio of angles
%   ms          : ratio of areas
N=input('number of points -4; number of points -5; number
if N ==4
%distances
S12=sqrt((ks(2,1)-ks(1,1))^2+(ks(2,2)-ks(1,2))^2);
S13=sqrt((ks(3,1)-ks(1,1))^2+(ks(3,2)-ks(1,2))^2);
S14=sqrt((ks(4,1)-ks(1,1))^2+(ks(4,2)-ks(1,2))^2);
S12n=sqrt((kn(2,1)-kn(1,1))^2+(kn(2,2)-kn(1,2))^2);
```

Рисунок 3. – Фрагмент процедуры model.m. в программном продукте Matlab

Если предполагать, что координаты общих точек не содержат ошибки, то будут получены следующие выходные данные для моделей. Для ортогональной модели – таблица 1, для подобной модели – таблица 2, для аффинной модели – таблица 3.

Таблица 1. – Выходные данные для ортогональной модели

m	1	1	1	1
mb	1	1	1	1
ms	1	1	1	1

Таблица 2. – Выходные данные для подобной модели

m	2	2	2	2
mb	1	1	1	1
ms	4	4	4	4

Таблица 3. – Выходные данные для аффинной модели

m	1,207332	1,234929	1,215577	1,243732
mb	1,005895	1,001875	1,003131	1,001011
ms	1,559762	1,559762	1,559762	1,559762

По полученным результатам легко определить модель, руководствуясь блок-схемой, представленной на рисунке 2. Проанализируем данные таблицы 1: отношение длин линий между точками в новой и старой системах координат постоянно и равно единице; отношение углов равно единице, что говорит об попарном равенстве углов. Это позволяет сделать вывод, что преобразование является ортогональным (модель ортогональная). Проанализируем данные таблицы 2: отношение длин линий между точками в новой и старой системах координат постоянно и не равно единице; отношение углов равно единице, что говорит об попарном равенстве углов. Это позволяет сделать вывод, что преобразование является подобным (модель подобная). Проанализируем данные таблицы 3: отношение длин линий между точками в новой и старой системах координат не постоянно; условие равенства углов не выполняется; отношение площадей треугольников постоянно, значит требование постоянства масштаба площадей выполняется. Это позволяет сделать вывод, что преобразование является аффинным (модель аффинная).

Процедура может быть усовершенствована, если добавить оператор «if», и на основе выполнения или невыполнения вышеперечисленных условий выходными данными могут быть названия моделей (например, «ортогональная модель»).

В силу того, что координаты точек в двух системах в реальных условиях имеют ошибки, то идеальных равенств получить невозможно. Приведен фрагмент вычислительного эксперимента (таблица 4). В ортогональную модель заложены угол поворота 3°, сдвиги 100 м и 200 м по оси X и оси Y соответственно, в координаты общих точек внесены ошибки.

Таблица 4. – Выходные данные для ортогональной модели

m	1,000039	1,000061	0,999975	1,000017
mb	1,000012	0,999980	0,999993	1,000002
ms	1,000199	0,999615	1,001026	0,999827

Ошибки в координатах привели к тому, что в таблице 4 нет идеальных равенств. Были проведены дополнительные исследования, чтобы понимать в каком знаке после запятой после округления считать изменения в цифрах результатом несоблюдения равенств, а не влиянием ошибок.

Вычислительный эксперимент проводился на основе различных моделей трансформирования, в координаты общих точек закладывались ошибки в диапазоне 2–20 мм. Эксперимент был проведен многократно. По его результатам можно заключить, что ошибки порядка 2–20 мм могут изменять знак для отношения длин вплоть до четвертого после запятой, для отношения углов – четвертый после запятой, для соотношения площадей – второй после запятой. То есть изменение знаков на данных местах может говорить не о несоблюдении равенств, а о влиянии ошибок данного порядка. Если изменяются знаки до выделенных знаков, то можно говорить о неравенстве соотношений.

Также для дополнения данного способа идентификации модели трансформирования возможно использовать элементы статистического тестирования, а именно, степень отклонения по вероятности P исследуемого отношения от единицы или от другого значения b, и далее возможность заключать, что некоторые соотношения статистически неразличимы между собой или статистически не отличаются от единицы. Для сохранения простоты и скорости предложенного способа идентификации модели трансформирования статистическое тестирование не использовалось.

Заключение. Для идентификации модели трансформирования систем координат на плоскости возможно использовать несколько способов, а именно: на основе расчета и сравнения для всех возможных моделей трансформирования их целевой функции или стандартного отклонения модели; на основе вычисления информационной характеристики *Akaike (AIC)*; на основе наиболее общего из линейных, аффинного трансформирования, с использованием элементов статистического тестирования. В статье предлагается подход к определению вида модели трансформирования на плоскости, основанный на геометрических свойствах, не меняющихся при определенном виде преобразований. Проведены дополнительные экспериментальные исследования, связанные с тем фактом, что координаты общих точек содержат ошибки, что не позволяет получать идеальные равенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моденов П.С. Геометрические преобразования. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 234 с.
2. Ghilani Ch.D., Wolf P.R. Adjustment computations: spatial data analysis, Fourth Edition. – Hoboken: JOHN WILEY & SONS, INC., 2006. – 632 с.
3. Дегтярев А.М., Ялтыхов В.В. Идентификация модели трансформации в геодезии на основе аффинного преобразования // Автоматизир. технологии изысканий и проектирования. – 2013. – № 2(49). – С. 71–74.
4. Буткевич А.В. Определение вида линейного трансформирования пространственных прямоугольных координат // Геодезия и картография. – 1978. – № 4. – С. 35–37.
5. Гусак А.А. Высшая математика: в 2 т. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – Т. 1. – 544 с.

REFERENCES

1. Modenov, P.S. (1961). *Geometricheskie preobrazovaniya*. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta. (In Russ.).
2. Ghilani, Ch.D. & Wolf, P.R. (2006). *Adjustment computations: spatial data analysis, Fourth Edition*. Hoboken: JOHN WILEY & SONS, INC.
3. Degtyarev, A.M. & Yaltykhov, V.V. (2013). Identifikatsiya modeli transformatsii v geodezii na osnove affinnogo preobrazovaniya [Identification of the transformation model in geodesy based on affine transformation]. *Avtomatizirovannye tekhnologii izyskanii i proektirovaniya [Automated survey and design technologies]*, *2*(49), 71–74. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Butkevich, A.V. (1978). Opredelenie vida lineinogo transformirovaniya prostranstvennykh pryamougol'nykh koordinat [Determining the type of linear transformation of spatial rectangular coordinates]. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and cartography]*, (4), 35–37. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Gusak, A.A. (2007). *Vysshaya matematika*: v 2 t. T. 1. Minsk: TetraSistems. (In Russ.).

Поступила 21.11.2023

**IDENTIFICATION OF TRANSFORMATION MODELS
OF COORDINATE SYSTEMS ON THE PLANE**

A. IVASHNIOVA, K. MARKOVICH, P. PARADNIA
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

To transform coordinate systems on a plane, depending on the composition of the transformation elements, orthogonal, similar and affine models are distinguished. The article analyzes existing approaches to identifying transformation models. An approach is proposed for identifying a model for transforming coordinate systems on a plane, based on geometric properties that do not change under a certain type of transformation. Based on the proposed approach, a procedure has been compiled in the software product Matlab, accelerating the process of calculating all the necessary relationships for analysis and subsequent determination of the type of model for transforming coordinate systems on a plane.

Keywords: *identification of transformation models, affine model, orthogonal model, similar model, transformation elements.*