УДК 517.926+517.977

ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ МАТРИЦЫ КОШИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА УГЛОВЫЕ МЕРЫ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

канд. физ.-мат. наук А.А. КОЗЛОВ, А.Д. БУРАК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается задача о влиянии матрицы Коши системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на множества векторов пространства $\mathbb{R}^n$, в том числе на выпуклые конусы. Даны оценки на угол между двумя любыми векторами, на длины векторов, а также доказательство отделённости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов, при действии матрицей Коши.

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами [1, с. 252].

Прежде чем формулировать задачу, рассматриваемую в работе, введём ряд необходимых в дальнейшем обозначений и определений. Обозначим через e_i, $i = \overline{1,n}$ векторы канонического ортонормированного базиса в евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, а через M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$.

Из свойства интегральной ограниченности матрицы A вытекает существование такого числа $a \geq 1$, что для всех $t \geq 0$ выполняется оценка

$$\int_t^{t+\sigma} \| A(\tau) \| d\tau \leq a < +\infty.$$

Зафиксируем это число a.

Пусть $X(t,\tau) \in M_n$, $t, \tau \geq 0$, – матрица Коши [2, с. 72] системы (1). Используя лемму Гронуолла – Беллмана [2, с. 108], нетрудно показать, что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t, \tau \geq 0$ таких, что $|t-\tau| \leq k\sigma$, для матрицы Коши $X(t,\tau)$ выполняется оценка

$$\| X(t,\tau) \| \leq \exp(ak). \tag{2}$$

Кроме того, отсюда в силу верного для произвольной невырожденной матрицы $D \in M_n$ неравенства

$$|\det D| \leq \| D \|^{n-1} / \| D^{-1} \| \tag{3}$$

(доказательство см., например, в замечании 1 работы [3]) при всех $k \in \mathbb{N}$ вытекают соотношения:

$$\det X(t_0, t_0 + k\sigma) \leq \| X(t_0, t_0 + k\sigma) \|^{n-1} / \| X(t_0 + k\sigma, t_0) \| \leq \exp(nak). \tag{4}$$

Под выпуклым конусом будем понимать множество векторов $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, для которых выполняются условия:

1) если $v_1, v_2 \in \Phi$, то $v_1 + v_2 \in \Phi$;
2) из $v \in \Phi$ при любом $\alpha \geq 0$ следует $\alpha v \in \Phi$.

Будем считать в дальнейшем, что вершина выпуклого конуса находится в нуле. Угловой мерой выпуклого конуса $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ назовем величину

$$\angle\Phi := \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Phi} \angle(\xi_1, \xi_2),$$

Заметим при этом, что выполняется включение $\angle\Phi \in [0, \pi]$.

Перейдём теперь к постановке задачи.

Выпуклый конус, очевидно, является множеством векторов в $\mathbb{R}^n$.

Действуя оператором Коши системы (1) на всевозможные векторы из конуса, получим новое множество векторов в $\mathbb{R}^n$.

Задача состоит в нахождении оценки сверху для угла между любыми двумя векторами из полученного множества, оценок на длины таких векторов, а также в доказательстве отделённости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов при действии матрицей Коши.

Найденные соотношения в дальнейшем будут использованы при оценке управления, необходимого для доказательства глобальной управляемости [3] показателей Ляпунова [4] и других асимптотических характеристик [5 – 7] n-мерных линейных равномерно вполне управляемых [8; 9] систем (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Обратимся к формулировке результатов, полученных в работе.

Следующая теорема устанавливает оценку на угловую меру выпуклого конуса, полученного под действием оператора Коши системы (1) на заданный выпуклый конус фиксированной угловой меры.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольных чисел* $k \in \mathbb{N}$, $t_0 \geq 0$, $0 < \varphi \leq \pi/2$ *и выпуклого конуса* $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ *угловой меры* φ *множество* $X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi$ *является выпуклым конусом, причем если выполняется оценка* $\exp((2n-2)ak)\varphi \leq 1$, *то угловая мера* ϕ *этого конуса не превосходит величины* $\arcsin(\varphi \exp((2n-2)ak))$.

Доказательство. Поскольку при всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_0 \geq 0$ оператор Коши $X(t_0, t_0 + k\sigma)$ невырожден и линеен, а образ выпуклого конуса при невырожденном линейном отображении есть выпуклый конус, множество $X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi$ является выпуклым конусом для любых $k \in \mathbb{N}$ и $t_0 \geq 0$. При этом найдутся такие векторы $\nu_i \in \Phi$, $i = 1, 2$, для которых справедливы равенства $w_i = X(t_0, t_0 + k\sigma)\nu_i$, где $w_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, -$ такие единичные векторы, что выполняются соотношения:

$$\angle(w_1, w_2) = \angle(X(t_0, t_0 + k\sigma)\Phi) =: \phi.$$

Всюду далее для любых векторов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}^n$ через $L(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать подпространство, натянутое на эти векторы (линейную оболочку этих векторов [10, с. 373]). Возьмём такие векторы $\|w_i\| = 1$, $i = \overline{3, n}$, что выполняются соотношения

$$w_i \perp L(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}). \tag{5}$$

В силу невырожденности оператора Коши $X(t_0, t_0 + k\sigma)$ найдутся такие векторы $\nu_i \in \mathbb{R}^n$, при которых для всех $i = \overline{1, n}$ справедливы равенства:

$$\nu_i = X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1} w_i.$$

Отсюда из определения векторов w_i, нормы векторного произведения векторов, а также оценки $\angle(\nu_1, \nu_2) \leq \varphi \leq \pi/2$, верной ввиду равенства $\angle\Phi = \varphi$ и включений $\nu_i \in \Phi$, $i = \overline{1, 2}$, с учетом соотношения (2) следуют неравенства:

$$|\det[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n]| = \|\nu_1\| \|\nu_2\| \|\nu_3\| \ldots \|\nu_n\| |\sin\angle(\nu_1, \nu_2)| \times$$

$$\times |\sin\angle(\nu_3, L(\nu_1, \nu_2))| \cdot \ldots \cdot |\sin\angle(\nu_n, L(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}))| \leq$$

$$\leq \|\nu_1\| \|\nu_2\| \ldots \|\nu_n\| \sin\varphi \leq \|X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1}\| \|w_1\| \times$$

$$\times \|X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1}\| \|w_2\| \cdot \ldots \cdot \|X(t_0, t_0 + k\sigma)^{-1}\| \|w_n\| \sin\varphi \leq$$

$$\leq \|X(t_0 + k\sigma, t_0)\| \exp((n-1)ak) \sin\varphi \leq \|X(t_0 + k\sigma, t_0)\| \exp((n-1)ak)\varphi.$$

Поэтому

$$|\det[\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n]| \leq \|X(t_0 + k\sigma, t_0)\| \exp((n-1)ak)\varphi. \tag{6}$$

Используя эту оценку, равенства $\|w_i\|=1$, $i=\overline{1,n}$, $\angle(w_1,w_2)=\phi$, ортогональность (5), а также неравенства (3) и (6), получим соотношения:

$$\sin\phi = \|w_1\|\|w_2\|\ldots\|w_n\| |\sin\angle(w_1,w_2)| =$$

$$= \|w_1\|\|w_2\|\ldots\|w_n\| |\sin\angle(w_1,w_2)| |\sin\angle(w_3,L(w_1,w_2))| \cdot\ldots\times$$

$$\times |\sin\angle(w_n,L(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}))| = |\det[w_1,w_2,\ldots,w_n]| =$$

$$= |\det X(t_0,t_0+k\sigma)| |\det[\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n]| \le$$

$$\le \|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^{n-1}\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|^{-1} |\det[\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n]| \le$$

$$\le \|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^{n-1}\exp((n-1)ak)\varphi \le \exp((2n-2)ak)\varphi.$$

Отсюда, если справедливо неравенство $\exp((2n-2)ak)\varphi \le 1$, найдем оценку $\phi \le \arcsin(\exp((2n-2)ak)\varphi)$. Теорема 1 доказана.

Решение задачи об отделённости от нуля углов между одним из векторов системы и подпространством, натянутым на другие векторы системы, полученной из линейно независимой совокупности векторов при действии матрицей Коши системы (1) устанавливает

ТЕОРЕМА 2. *При любых числах* $k\in\mathbb{N}$, $t_0 \ge 0$ *и* $0<\varphi \le \pi/2$ *и единичных векторах*

$$\nu_i(0):=\nu_i\in\mathbb{R}^n, \quad i=\overline{1,n},$$

таких, что имеют место неравенства

$$\sin\angle(\nu_{i_1},\nu_{i_2}) \ge \sin\varphi,$$

$$|\sin\angle(\nu_{i_1},L(\nu_{i_2},\nu_{i_3},\ldots,\nu_{i_k}))| \ge \sin\varphi, \quad i_1,i_2,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\}, \quad k=\overline{2,n},$$

$$i_q\ne i_r \quad где \quad q\ne r, \quad q,r\in\{1,\ldots,n\},$$

для векторов $\nu_i(k):=X(t_0,t_0+k\sigma)\nu_i$, $i=\overline{1,n}$, *имеют место соотношения:*

$$\exp(-ak) \le \|\nu_i(k)\| \le \exp(ak), \tag{7}$$

$$\angle(\nu_i(k),\nu_j(k)) \ge \sin\varphi\exp((2-2n)ak), \tag{8}$$

$$|\sin\angle(\nu_n(k),L(\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots,\nu_{n-1}(k)))| \ge (\sin\varphi)^{n-1}\exp(-2nak). \tag{9}$$

Кроме того, для векторов $\nu_i(k)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, *справедлива оценка*

$$|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)| \ge \sin^{n-1}\varphi\exp((3-2n)ak)/(n-1)!. \tag{10}$$

(Здесь и всюду далее для любого $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ через η_{ri}, $i=\overline{1,n}$, обозначаются компоненты вектора $\eta_r\in\mathbb{R}^n$, т.е. $\eta_r:=(\eta_{r1},\eta_{r2},\ldots,\eta_{rn})^T$, значок ^{T} означает операцию транспонирования).

Доказательство. Справедливость соотношения (7) устанавливается из оценки

$$\exp(-ak) \le \|X(t_0+k\sigma,t_0)\| \le \exp(ak),$$

вытекающей из неравенства (2).

Оценка (8) следует из теоремы 1, в которой вместо ϕ и $X(t_0,t_0+k\sigma)$ следует положить φ и $X(t_0+k\sigma,t_0)$ соответственно.

Формула (10) получается из верных для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в силу определения векторов $\nu_i(k)$, $i=\overline{1,n}$, и неравенства (2) соотношений:

$$|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots\nu_n(k)]| = \Big|\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(-1)^\tau \nu_{1\alpha_1}(k)\cdots\nu_{n\alpha_n}(k)\Big| \le$$

$$\le (n-1)!\big(\max_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{2,n}}|\nu_{ij}(k)|\big)^{n-1}(|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)|) \le$$

$$\le (n-1)!\big(\max_{i=\overline{1,n}}\|\nu_i(k)\|\big)^{n-1}(|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)|) \le$$

$$\le (n-1)!\big(\max_{i=\overline{1,n}}\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_i\|\big)^{n-1}(|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)|) \le$$

$$\le (n-1)!\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^{n-1}(|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)|) \le$$

$$\le (n-1)!\exp((n-2)ak)\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|(|\nu_{11}(k)|+|\nu_{21}(k)|+\ldots+|\nu_{n1}(k)|),$$

где τ – знак перестановки $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$,
и

$$|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots,\nu_n(k)]| = |\det X(t_0,t_0+k\sigma)||\det[\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n]| =$$

$$= |\det X(t_0+k\sigma,t_0)|^{-1}|\det[\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n]| \ge$$

$$\ge \|X(t_0+k\sigma,t_0)\|^{-(n-1)}\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_1\|\|\nu_2\|\cdot\ldots\cdot\|\nu_n\|\times$$

$$\times|\sin\angle(\nu_1,\nu_2)||\sin\angle(\nu_3,L(\nu_1,\nu_2))|\cdot\ldots\cdot|\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n))| \ge$$

$$\ge \|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\exp(-(n-1)ak)\sin^{n-1}\varphi.$$

Используя последнюю оценку для определителя $|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots,\nu_n(k)]|$, докажем неравенство (9). В силу формулы (2) и равенств $\|\nu_i\|=1$, $i=\overline{1,n}$ имеем соотношения:

$$|\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}))|\exp(nak) \ge$$

$$\ge \|X(t_0,t_0+k\sigma)\|^n|\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}))| =$$

$$= \|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_1\|\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_2\|\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_3\|\times$$

$$\times\ldots\cdot\|X(t_0,t_0+k\sigma)\|\|\nu_n\||\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}))| \ge$$

$$\ge \|\nu_1(k)\|\|\nu_2(k)\|\|\nu_3(k)\|\ldots\|\nu_n(k)\||\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}))| \ge$$

$$\ge \|\nu_1(k)\|\|\nu_2(k)\|\|\nu_3(k)\|\ldots\|\nu_n(k)\||\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1})))|\times$$

$$\times\ldots\cdot|\sin\angle(\nu_3,L(\nu_1,\nu_2))||\sin\angle(\nu_1(k),\nu_2(k))| = |\det[\nu_1(k),\nu_2(k)\ldots,\nu_n(k)]|.$$

Отсюда и из оценки снизу на модуль определителя $|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots,,\nu_n(k)]|$, установленной при доказательстве неравенства (10) теоремы 2, получим соотношения:

$$\exp(nak)|\sin\angle(\nu_n,L(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}))| \ge$$

$$\ge |\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\ldots,\nu_n(k)]| \ge$$

$$\ldots \sin^{n-1}\varphi \exp(-(n-1)ak) \mathrm{P} X(t_0, t_0 + k\sigma) \mathrm{P} \ldots$$

$$\ldots \exp(-nak) \sin^{n-1}\varphi,$$

из которых и следует оценка (9), а с ней и доказательство теоремы 2.

Работа выполнена в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф10М-032).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1998. – 472 с.
3. Макаров, Е.К. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97 –106.
4. Изобов, Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71 – 146.
5. Попова, С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627 – 1636.
6. Попова, С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 41 – 46.
7. Попова, С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1048 – 1054.
8. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102 – 119.
9. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управлямости и стабилизации линейной рекуррентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804 – 1813.
10. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.

Поступила 28.02.2012

ABOUT THE ASSESSMENT OF THE IMPACT OF THE CAUCHY MATRIX OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS ON ANGULAR MEASURES OF CONVEX CONES

A. KOZLOV, A. BURAK

The task of the applying the operator Cauchy of the system of ordinary differential equations for vectors of the convex cones is considered in this research. An assessment for the angle between any two vectors from the cone received at such action, the assessments of the lengths of these vectors, as well as proof the separation from the zero of the angles between a vector of the system and the subspace spanned to the other vectors of the system, obtained from a linearly independent set of vectors under the action of the Cauchy matrix have been found in proofs of the theorems of this research.