МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ *X*-ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП СИЛОВСКИХ И ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП С ВЫДЕЛЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

канд. физ-мат. наук А.В. ШНЫПАРКОВ
(Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель)

Исследуется влияние X-перестановочности максимальных подгрупп силовских и холловых подгрупп с заданными подгруппами на строение конечной группы. Получены новые условия сверхразрешимости и частичной сверхразрешимости конечной группы с μG-добавляемыми подгруппами. Впервые X-перестановочные подгруппы были рассмотрены в работах [1; 2], где авторами получен ряд интересных свойств. В частности, было замечено, что многие классы конечных групп могут быть описаны в терминах X-перестановочных подгрупп.

1. Предварительные сведения

Будем рассматривать только конечные группы. Все используемые обозначения стандартны, соответствуют [3] и [4]. Напомним, что подгруппа H группы G называется добавлением к подгруппе K в группе G, если $G = HK$.

Ясно, что в каждой группе любая подгруппа обладает добавлением. Однако при дополнительных ограничениях на добавления или на добавляемые подгруппы можно выделять разнообразные классы групп. Так, например, Кегель показал [5], что группа G разрешима, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет циклическое добавление. В работах Кегеля и Виландта [6] установлена разрешимость группы с нильпотентным добавлением к некоторой нильпотентной подгруппе. В работе [7] В.С. Монахов перечислил неразрешимые группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам.

Определение. Пусть G – группа, X – некоторое непустое подмножество группы G. Неединичная подгруппа H группы G называется μX-добавляемой подгруппой в G, если существует такая подгруппа B в группе G, что $G = HB$ и для любой максимальной подгруппы H_1 из H найдется некоторый элемент $x \in X$, такой, что H_1B^x – собственная подгруппа группы G.

Подгруппу B в этом случае назовем μX-добавлением к H. Единичную подгруппу считаем μX-добавляемой, а всю группу G – μX-добавлением к ней.

В работе [6] установлена p-сверхразрешимость произвольной группы с μX-добавляемыми силовскими p-подгруппами для наименьшего и предминимального простого делителя порядка группы. В настоящей заметке устанавливается частичная сверхразрешимость группы с μX-добавляемыми максимальными подгруппами силовских и холловых подгрупп.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1.1 [3]. *Пусть A, B – собственные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех x из G.*

Лемма 1.2. *Пусть G – группа, H – ее подгруппа, X – непустое подмножество группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если подгруппа H μX-добавляема в G, а множество Y таково, что оно содержит в себе множество X и является подмножеством в G, то H μY-добавляема в G*;

2) *пусть N – нормальная подгруппа группы G и N – подгруппа в H. Если подгруппа H μX-добавляема в G, то фактор-группа H/N $\mu XN/N$-добавляема в G/N*;

3) *пусть π – некоторое множество простых чисел, H – π-подгруппа группы G, N – нормальная π'-подгруппа группы G и X – непустое подмножество группы G. Если подгруппа H μX-добавляема в G, то HN/N $\mu XN/N$ добавляема в G/N.*

Доказательство

1. Очевидно.

2. Пусть H – μX-добавляемая подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа группы G и N – подгруппа в H. Тогда существует μX-добавление B к H в G.

Очевидно, что $(H/N)(BN/N) = G/N$. Пусть H_1/N – максимальная подгруппа фактор-группы H/N. Тогда подгруппа H_1 максимальна в H. По определению μX-добавляемой подгруппы и с учетом леммы 1.1 $H_1B \neq G$ и $H_1B^x = B^xH_1$ для некоторого $x \in X$. Понятно, что $(H_1/N)(BN/N) = H_1B/N \neq G/N$ и

$$(H_1/N)(BN/N)^{xN}=(H_1/N)(B^x)=H_1B^x/N=B^xH_1/N=(BN/N)^{xN}(H_1/N).$$

Таким образом, подгруппа BN/N будет $\mu XN/N$-добавлением к подгруппе H/N в фактор-группе G/N.

3. Пусть H – μX -добавляемая π-подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа группы G и N – π'-подгруппа.

Тогда существует подгруппа B в группе G такая, что $G = HB$, $H_1B \neq G$ и $H_1B^x = B^xH_1$ для каждой максимальной подгруппы H_1 из H и для некоторого $x \in X$. Понятно, что

$$(HN/N)(BN/N) = G/N.$$

Пусть K/N – максимальная подгруппа фактор-группы HN/N. По тождеству Дедекинда $K = N(M \cap H)$. Покажем, что $K \cap H$ – максимальная в H подгруппа. Заметим, что $K \cap H \neq H$. Действительно, если $K \cap H = H$, то H содержится в K, а значит, HN/N содержится в K/N, что противоречит выбору подгруппы K/N.

Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $K \cap H < T < H$. Тогда $K = N(K \cap H) \leq TN \leq HN$. Но K – максимальная в HN подгруппа и поэтому либо $K = TN$, либо $TN = NH$. Если $K = TN$, то $T \leq K \cap H < T$, что невозможно. Итак, $TN = NH$ и поэтому $H = H \cap TN = T(H \cap N) = T$.

Полученное противоречие показывает, что $H_1=K \cap H$ – максимальная в H подгруппа и $K=(K \cap H)N=H_1N$. Это означает, что $H_1B^x=B^xH_1$ для некоторого $x \in X$. Предположим, что $(H_1N/N)(BN/N) = G/N$. Тогда $G = H_1BN$ и

$$|G:H_1B| = |H_1BN:H_1B| = |N:N\cap H_1B| – \pi' – \text{число}.$$

С другой стороны,

$$|G:H_1B| = |HB:H_1B| = \frac{|H||B||H_1 \cap B|}{|H_1||B||H \cap B|} = \frac{|H|:|H \cap B|}{|H_1|:|H_1 \cap B|}$$

является π-числом, противоречие. Поэтому предположение неверно и

$$(H_1N/N)(BN/N) = (K/N)(BN/N) \neq G/N.$$

Кроме того,

$$(H_1N/N)(BN/N)^{xN} = (H_1N/N)(B^xN/N) = H_1B^xN/N = B^xH_1N/N = (B^xN/N)(H_1N/N) = (BN/N)^{xN}(H_1N/N).$$

Это означает, что подгруппа HN/N $\mu XN/N$ – добавляема в G/N. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть X – некоторое непустое подмножество группы G, H – μX-добавляемая подгруппа группы G, B – μX-добавление к H. Если H_1 – максимальная подгруппа в H, то $|G:H_1B^x|=|H:H_1|$, где $x \in X$, такой, что $H_1B^x=B^xH_1$.*

Доказательство. Пусть B – μX-добавление к H. Тогда $H_1B^x = B^xH_1 < G$ для максимальной подгруппы H_1 из H и некоторого $x \in X$.

Понятно, что $H_1 \leq H \cap H_1B^x \leq H$. Так как H_1 – максимальная в H подгруппа, то либо $H \cap H_1B^x = H_1$, либо $H \cap H_1B^x = H$. Если $H \cap H_1B^x = H$, то $H \leq H_1B^x$ и $G = HB = HB^x \leq H_1B^x < G$, противоречие. Значит, $H_1 = H \cap H_1B^x = H_1(H \cap B^x)$. Поэтому $H \cap B^x < H_1$ и $H \cap B^x = H_1 \cap H \cap B^x = H_1 \cap B^x$. Теперь $G = HB = HB^x$ и

$$|G:H_1B^x|=|HB^x:H_1B^x|= \frac{|H||B^x||H_1 \cap B|}{|H \cap B^x||H_1||B^x|} = |H : H_1|.$$

Лемма доказана.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Говорят, что группа G обладает свойством D_π, если в ней существует π-холлова подгруппа, любые ее две π-холловых подгруппы сопряжены в группе и каждая ее π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе группы G.

Лемма 1.4 [8, теорема VI.4.6]. *Пусть группа $G = G_1G_2$ и G обладает свойством D_π. Тогда существуют такие π-холловы подгруппы H, H_1 и H_2 из G, G_1 и G_2 соответственно, что $H= H_1H_2$.*

По теореме Силова любая группа обладает свойством D_p для любого простого делителя p порядка группы. Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 1.5 [8, теорема VI.4.7]. *Если A и B – подгруппы группы G и $G = AB$, то для любого простого числа p существуют силовские p-подгруппы A_p, B_p, G_p из A, B и G соответственно такие, что $G_p= A_pB_p$.*

Лемма 1.6. *Если G – p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции фактор-группа G/N p-сверхразрешима. Если N – p'-подгруппа, то группа G будет p-сверхразрешимой. Если N – p-подгруппа, то $N \leq P$, где P – силовская подгруппа группы G. Поэтому N – циклическая подгруппа. Пусть K – подгруппа группы N порядка p. Тогда K – характеристическая подгруппа в N, поэтому K нормальна в G. А так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N = K$ и $|N| = p$. Теперь группа G p-сверхразрешима. Лемма доказана.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть G – p*-разрешимая группа. *Если каждая максимальная подгруппа P_1 силовской подгруппы P группы G μG-добавляема в G, то группа G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G p-разрешима, то либо N – элементарная абелева p-подгруппа, либо N – p'-группа.

Предположим прежде, что N – p'-группа. Пусть G_p/N – силовская p-подгруппа из G/N. Тогда $G_p = PN$, где P – силовская p-подгруппа в G. Пусть P_1/N – произвольная максимальная подгруппа в PN/N. Тогда $P_1 = P_1 \cap PN = N(P_1 \cap P)$ и, как показано в доказательстве леммы 1.2, $P_1 \cap P$ – максимальная подгруппа в P. По условию $P_1 \cap P$ μG-добавляема в G. По лемме 1.2 $P_1/N = (P_1 \cap P)N/N$ $\mu G/N$-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N p-сверхразрешима. В силу того, что N – p'-группа, последнее означает, что группа G p-сверхразрешима, противоречие.

Предположим теперь, что N – элементарная абелева p-подгруппа. Пусть P/N – силовская p-подгруппа из G/N. Тогда P – силовская p-подгруппа группы G. Пусть P_1/N – произвольная максимальная подгруппа в P/N. Понятно, что P_1 – максимальная подгруппа в P. По условию P_1 μG-добавляема в G.

По лемме 1.2 P_1/N $\mu G/N$-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N p-сверхразрешима. Так класс всех p-сверхразрешимых групп – насыщенная формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$.

Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$ и $N \cap M = 1$. По лемме 1.5 $P = NM_p$, где M_p – силовская p-подгруппа в M. Пусть M_1 – максимальная подгруппа в P, содержащая M_p. По условию существует подгруппа B группы G, такая, что $G = M_1B$ и $M_2B^x < G$ для любой максимальной в M_1 подгруппы M_2 и некоторого $x \in G$. Выберем M_2 так, чтобы $M_p \leq M_2$. Если этого сделать нельзя, то $|N| = p$, и группа G π-сверхразрешима, противоречие.

По лемме 1.3 $|G:M_2B^x| = |M_1:M_2| = p$. Подгруппа $N \cap M_2B^x$ нормальна в M_2B^x, а так как N не содержится в M_2, то $NM_2B^x \geq NM_pB^x = PB^x = G$, и подгруппа $N \cap M_2B^x$ нормальна в G. В силу того, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G, заключаем, что либо $N \leq M_2B^x$, либо $N \cap M_2B^x = 1$.

Если $N \cap M_2B^x = 1$, то $|N| = p$, и группа G p-сверхразрешима, противоречие.

Предположим, что $N \leq M_2B^x$. Тогда

$$M_2B^x = N\,M_2B^x \geq NM_pB^x = PB^x \geq P_1B^x = G.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 2.1.1. *Пусть G – разрешимая группа. Если каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы G μG-добавляема в G, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Если G – разрешимая группа, то G p-разрешима для каждого $p \in \pi(G)$. Пусть p – произвольный простой делитель порядка группы G. Если силовская p-подгруппа P группы G циклическая, то в силу леммы 1.6 группа G p-сверхразрешима. Если же P нециклическая подгруппа, то по условию каждая максимальная подгруппа группы P μG-добавляема в G. По теореме 2.1 группа G p-сверхразрешима. В силу произвольности выбора числа p, группа G p-сверхразрешима для всех $p \in \pi(G)$, поэтому G сверхразрешима. Следствие доказано.

Следствие 2.1.2. *Если в группе G для любого $p \in \pi(G)$ каждая вторая максимальная подгруппа нециклической силовской p-подгруппы G-перестановочна с минимальным добавлением к силовской p-подгруппе, то G сверхразрешима.*

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть G – π-разрешимая группа со сверхразрешимой π-холловой подгруппой H. Тогда группа G π-сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

1) H μG-добавляемая в G подгруппа;

2) каждая максимальная подгруппа из H μG-добавляема в G.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка.

1. Пусть H – π-холлова сверхразрешимая μG-добавляемая подгруппа группы G, а N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G – π-разрешимая группа, то либо N – элементарная абелева p-подгруппа, для некоторого $p \in \pi$, либо N – π'-группа.

Предположим, что N – π'-группа. Тогда HN/N – π-холлова, и так как $HN/N \cong H/N \cap H$, сверхразрешимая подгруппа фактор-группы G/N. По лемме 1.2 HN/N $\mu GN/N$-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N π-сверхразрешима. Теперь G π-сверхразрешима, противоречие.

Пусть теперь N – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi$. Понятно, что H/N – π-холлова сверхразрешимая подгруппа в G/N. По лемме 1.2 H/N $\mu GN/N$-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N π-сверхразрешима.

Так как класс всех π-сверхразрешимых групп – насыщенная формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$ и $N \cap M = 1$. По лемме 1.3 $H = NM_\pi$, где M_π – π-холлова подгруппа M. По условию существует подгруппа B, такая, что $G = HB$ и для любой максимальной подгруппы H_1 из H существует $x \in G$, такой, что $H_1B^x < G$. Выберем H_1 так, чтобы $M_\pi \leq H_1$. Ясно, что N не содержится в H_1.

По лемме 1.3 $|G:H_1B^x| = |H:H_1| = p$. Поэтому либо $N \le H_1B^x$, либо $N \cap K_1B^x = 1$. Если $N \cap K_1B^x = 1$, то $|N| = p$ и группа G π-сверхразрешима, противоречие. Предположим, что $N \le H_1B^x$. Тогда $G = HB^x = NM_\pi B^x \le NH_1B^x = H_1B^x < G$. Данное противоречие завершает доказательство первой части теоремы.

2. Пусть H – π-холлова сверхразрешимая подгруппа группы G, N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G – π-разрешимая группа, то либо N – элементарная абелева p-подгруппа, для некоторого $p \in \pi$, либо N – π'-группа.

Предположим прежде, что N – π'-группа. Тогда HN/N – π-холлова и сверхразрешимая подгруппа фактор-группы G/N. Пусть M/N – произвольная максимальная подгруппа в HN/N. Тогда $M = M \cap HN = N(M \cap H)$, и как показано в доказательстве леммы 1.2, $M \cap H$ – максимальная подгруппа в H. По условию $M \cap H$ μG-добавляема в G. По лемме 1.2 $M/N = (M \cap H)N/N$ μG/N-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N π-сверхразрешима. Теперь G π-сверхразрешима, противоречие.

Предположим теперь N – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi$. Понятно, что H/N – π-холлова сверхразрешимая подгруппа фактор-группы G/N. Пусть R/N – произвольная максимальная подгруппа фактор-группы H/N. Тогда R – максимальная подгруппа в H. По условию R μG-добавляема в G. По лемме 1.2 R/N μG/N-добавляема в G/N. Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа G/N π-сверхразрешима.

Так как класс всех π-сверхразрешимых групп – насыщенная формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$, а так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$ и $N \cap M = 1$. По лемме 1.4 $H = NM_\pi$, где M_π – π-холлова подгруппа M. Пусть M_1 – максимальная подгруппа в H, содержащая M_π. По условию существует подгруппа B группы G, такая, что $G = M_1B$ и для любой максимальной в M_1 подгруппы M_2 найдется $x \in G$, такой, что $M_2B^x < G$. Выберем M_2 так, чтобы $M_\pi \le M_2$. Если этого сделать нельзя, то $|N| = p$, и группа G π-сверхразрешима, противоречие. В силу леммы 1.3 $|G:M_2B^x| = |M_1:M_2| = p$. Поэтому либо $N \le M_2B^x$, либо $N \cap M_2B^x = 1$. Если $N \cap M_2B^x =1$, то $|N| = p$, и группа G π-сверхразрешима, противоречие. Предположим, что $N \le M_2B^x$. Тогда $M_2B^x = NM_2B^x \ge NM_\pi B^x = HB^x \ge M_1B^x = G$, противоречие. Теорема доказана.

Пример 2.3. *В группе $G = A4 \times Z5$ подгруппа $A4$ является {2 ,3}-холловой и μG-добавляемой подгруппой, но группа G не {2, 3}-сверхразрешима. Этот пример показывает, что условие сверхразрешимости μG-добавляемой подгруппы в теореме 2.2 является существенным.*

Заключение. Рассмотрены конечные группы с условием X-перестановочности выделенных подгрупп. Получены условия сверхразрешимости конечной группы с X-перестановочными максимальными подгруппами силовских и холловых подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guo, W. Conditionally permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba. – Gomel, 2002. (Preprint/GGU im. F. Skoriny. – № 10).
2. Го, В. X-перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. матем. журнал, 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742 – 759.
3. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Выш. шк., 2006. – 207 с.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Kegel, O.H. On Hupperts characterization of finite supersoluble groups / O.H. Kegel // Proc. Internat. Conf. Theory Groups, Canberra, 1965. – P. 209 – 215.
6. Kegel, O.H. Producte nilpotenter gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math., 1961. – V. 12. – P. 90 – 93.
7. Монахов, В.С. Неразрешимые конечные группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам / В.С. Монахов // Изв. акад. наук Беларуси. – 1993. – № 3. – С. 27 – 29.
8. Шныпарков, А.В. Сверхразрешимость конечной группы с μX-добавляемыми подгруппами / А.В. Шныпарков // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 84 – 88.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen, I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила 19.05.2011

ON *X*-PERMUTABLE THE MAXIMAL SUBGROUPS OF SYLOW'S AND HALL'S SUBGROUPS WITH THE ALLOCATED SUBGROUPS

A. SHNYPARKOV

Influence X-permutable of the maximal subgroups of Sylow's and Hall's subgroups with the allocated subgroups on a structure of finite group is investigated. New conditions of supersolvability and partial supersolvability of a finite group with μG-supplemented subgroups are received. For the first time H-permutable subgroups have been considered in works [1; 2] where authors receive a number of interesting properties. In particular, it has been noticed that many classes of finite groups can be described in terms of X permutable subgroups.