

УДК 621:534

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ В РАБОЧЕМ КОЛЕСЕ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

*канд. техн. наук В.Е. ПИТОЛИН  
(Полоцкий государственный университет)*

*Рассматривается математическая модель процесса возбуждения динамических составляющих поперечных сил в рабочем колесе центробежного насоса. Центробежные нагнетатели (насосы, вентиляторы и компрессоры) нашли широкое применение в промышленности. Борьба с шумом и вибрацией этих механизмов направлена не только на обеспечение их надежности и экономичности, но и является важнейшей составляющей обеспечения санитарно-гигиенических норм условий жизни и работы людей. Известен ряд особенностей явления, которые должны быть реализованы в расчетной модели, например, наличие минимума вибрации на лопастной частоте при некоторых режимах работы нагнетателя и резкое изменение фазы колебания. Для объяснения этих явлений анализируются существующие и предлагается усовершенствованная математическая модель оценки динамических составляющих радиальных сил, действующих со стороны потока перекачиваемой среды на рабочее колесо нагнетателя, которые являются основной причиной возбуждения вибрации и звука на лопастной частоте и гармониках.*

Нестационарные силы, возникающие при взаимодействии лопастного аппарата рабочего колеса центробежного насоса (ЦН), а также компрессора или вентилятора с перекачиваемой средой, возбуждают шум и вибрацию. Механизм их возбуждения не так очевиден, как кажется на первый взгляд. Нестационарность этих сил не является следствием стохастического процесса, характерного, например, для кавитационных явлений в жидкости. Прежде всего это детерминированный процесс на лопастной частоте, обладающий определенной амплитудой и фазой вибрации корпуса насоса и звука в гидравлическом тракте, а следовательно и высокой степенью автокорреляции, хотя и содержит некоторую составляющую, объясняющуюся уровнем случайных помех и погрешностью измерений.

Общий уровень шума и вибрации ЦН обычно полностью определяется уровнем вибрации на лопастной частоте, который в свою очередь может существенно изменяться в зависимости от подачи. График изменения амплитуд и фаз вибрации представлен на рисунке 1 и имеет ряд особенностей [1; 2].

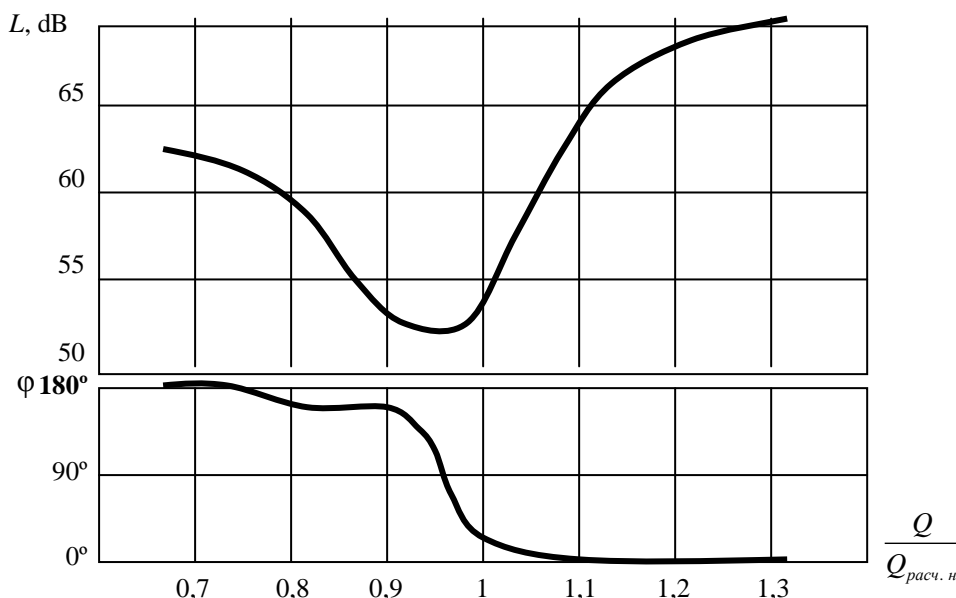


Рис. 1. Изменения амплитуд  $L$  и фаз  $\varphi$  вибрации корпуса одноступенчатого центробежного насоса консольного типа на лопастной частоте в зависимости от подачи  $Q$

В работе [3] была поставлена задача определения динамических составляющих поперечных сил  $F_R$ , действующих на рабочее колесо центробежного насоса (ЦН) на различных режимах его эксплуатации, для расчета вибрации его корпуса на лопастной частоте.

К настоящему времени разработано достаточно большое количество моделей вибровозбуждения и звукоизлучения центробежных нагнетателей на лопастной частоте. Но эти модели не позволяют производить расчет параметров динамических составляющих поперечных (радиальных) сил, действующих на рабочее колесо аналитическими методами, а тем более определять особенности вибровозбуждения на различных подачах. Более того, авторы некоторых публикаций, посвященных вопросам снижения шума и вибрации центробежных машин, утверждают, что значения этих сил аналитическим путем определить вообще невозможно [2].

Попробуем опровергнуть это утверждение.

**Основная часть.** Для описания процесса образования акустической энергии в центробежном колесе радиусом  $R$  на лопастной частоте  $n\omega$  и гармониках  $kn\omega$ , а в некоторых случаях (например, при наличии прецессии геометрического центра рабочего колеса) и на оборотной частоте его вращения  $\omega$  рабочее колесо центробежного насоса или вентилятора представляют собой совокупности радиальных каналов.

Как правило, рассматривают ситуацию, когда открыт только один радиальный канал, а все остальные закрыты для доступа в них перекачиваемой среды ( $n = 1$ ). Переход от такого одноканального колеса к многоканальному в процессе теоретического исследования осуществляют путем применения принципа суперпозиции с учетом соответствующих фазовых сдвигов.

В центре колеса находится источник массы. Площадь поперечного сечения канала на всем его протяжении от центра к периферии пусть будет неизменной. Сток массы находится на периферии рабочего колеса – в выходном сечении канала на радиусе  $R$ .

Движение жидкости в канале предполагается потенциальным, т.е. безвихревым и неразрывным.

Уравнение неразрывности при этом записывается в следующем виде [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = -Q_1(x, y, z) + Q_2[x(t), y(t), z(t)], \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $\vec{V}$  – скорость среды в канале, усредненная по сечению;  $Q_1$  и  $Q_2$  – объемный расход стока (1) и источника (2).

Затем, используя понятия и символику  $\delta$ -функций, это уравнение переписывают в полярных координатах  $r, \varphi, z$  соответственно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = -\frac{Q\delta(r)\delta(\varphi)\delta(z)}{r} + \frac{Q\delta(r-R)\delta(\varphi-\omega t)\delta(z)}{r}. \quad (2)$$

Полагая, что в начале координат  $r = 0$ , а функция  $\delta(\varphi - \omega t)$  является периодической, т.е. для частот, кратных  $\omega$ , ее можно записать в виде суммы гармонических составляющих:

$$\delta(\varphi - \omega t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \omega t)}. \quad (3)$$

Если дополнить уравнение (2) уравнением движения в линеаризованной форме Эйлера

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\text{grad} P \quad (4)$$

и уравнением состояния

$$P = \rho c^2, \quad (5)$$

где  $P$  – давление и  $c$  – скорость звука в перекачиваемой среде, то после соответствующих преобразований получают волновое уравнение вида:

$$\Delta \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{Q\delta(z)\delta(r-R)}{c^2 r 2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \omega t)}. \quad (6)$$

Решения такого уравнения для расчета общего уровня звукового давления в дальней зоне известны [5; 6] и имеют вид:

$$p = \frac{\omega Q k}{4\pi r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k \left( \frac{k\omega R}{c} \sin \theta \right) e^{ik \left( \omega t - \frac{\omega R}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (7)$$

где  $J_k$  – цилиндрическая функция Бесселя;  $\theta$  – угол отклонения оси вращения рабочего колеса от оси  $Z$ .

Представленная математическая модель позволяет рассчитать процесс излучения звуковых волн свободным центробежным колесом в окружающую среду. Однако эта модель не содержит в своем составе механизма вибровозбуждения корпуса нагнетателя и не может объяснить минимум вибрации и шума на лопастной частоте (см. рис. 1), так как из формулы (7) следует, что уровень излучаемого звука  $p$  прямо пропорционален расходу  $Q$ .

Введем в состав модели динамическую составляющую расхода  $q(t)$ .

Ввод этой переменной потребует обоснования непостоянства расхода среды через канал и поиска соответствующих расчетных формул для оценки ее величины.

Предположим, что излучение звука и вибрации суть две стороны одного и того же физического процесса, процесса образования звукового давления  $p(t)$  и динамической составляющей силы, вызывающей вибрацию  $f_R(t)$ .

Как показал Г. Лэмб в своих работах [4], динамическая составляющая сосредоточенной силы, действующей на среду, создает акустическое излучение, амплитуда звукового давления гармонической составляющей  $k$  которого в дальней зоне может быть оценена по формуле:

$$p_k = \frac{f_k \omega}{4\pi r c}. \quad (8)$$

Позднее, Дж. Лайтхиллом также было установлено [7], что если на малое по сравнению с длиной волны тело со стороны потока среды действует сила, то такая же сила, но противоположного направления, действует на поток со стороны тела.

Используя эти утверждения, попытаемся построить непротиворечивую аналитическую модель явления. Такая модель схематически показана на рисунке 2.

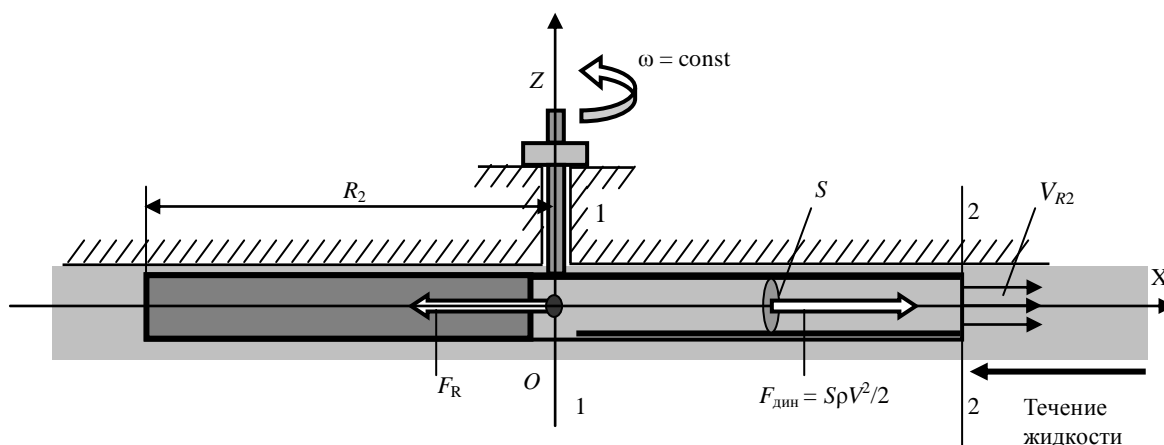


Рис. 2. Расчетная схема межлопастного канала рабочего колеса ЦН

Представленная модель аналогична рассмотренной выше – это канал постоянного сечения, выполненный во вращающемся диске. Канал начинается от центра диска и направлен по радиусу к периферии. Диск вращается вокруг оси  $OZ$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Через канал в направлении сечения 2–2 движется жидкость с расходом  $Q = SV_{R2}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения условного межлопастного канала,  $V_{R2}$  – относительная скорость течения жидкости в канале, усредненная по сечению канала.

Из рисунка можно видеть, что истечение струи из канала вызывает соответствующую реактивную составляющую  $F_R$ , приложенную к оси диска и вращающуюся вместе с ним. Расчет вибрации корпуса насоса под действием этой силы аналогичен расчету вибрации под действием сил дисбаланса ротора.

Согласно уравнению Эйлера для лопастных машин [4] полное давление жидкости на выходе из рабочего колеса (теоретический напор):

$$P_T = \rho(V_{u2}u_2 - V_{u1}u_1), \quad (9)$$

где  $u_1 = R_1\omega$ ,  $u_2 = R_2\omega$  – окружные скорости вращения рабочего колеса, а  $V_u$  – окружная составляющая относительной скорости потока в канале (рис. 3).

Из треугольника скоростей (см. рис. 3) окружная составляющая скорости потока:

$$V_{u2} = u_2 - \frac{V_{R2}}{\operatorname{tg}\beta_2}, \quad (10)$$

где  $\beta_2$  – угол установки лопасти на выходе из рабочего колеса (для нашей модели  $\beta_2 = 90^\circ$ ).

Обычно для центробежных нагнетателей рабочие колеса проектируются с учетом условия  $V_{u1} = 0$ , поэтому уравнение полного напора (9) для расчетной модели примет вид:

$$P_{\tau} = \rho R_2^2 \omega^2. \quad (11)$$

Воспользовавшись уравнением Бернулли для потока в канале в относительном движении, для сечения 2–2 запишем:

$$P_m = P_2 + \rho \frac{V_{R2}^2}{2} + \rho g(z_2 - z_1) + P_{mp}. \quad (12)$$

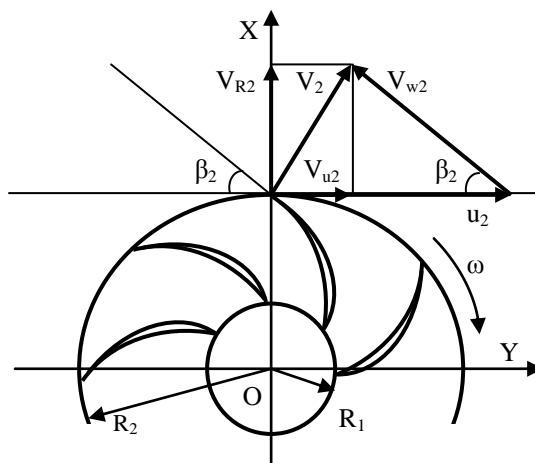


Рис. 3. Треугольники скоростей потока на выходе из рабочего колеса

Действие кориолисовых сил и сил тяжести не учитывается, так как они направлены перпендикулярно оси канала и компенсируются силами реакции со стороны стенки канала. Полагаем потери давления на трение  $P_{тр}$  незначительными, а ось вращения диска совпадающей с осью  $OZ$ .

После подстановки в уравнение (12) вместо обозначений сил их выражений можно получить формулу для радиальной составляющей относительной скорости течения жидкости, усредненной по сечению канала:

$$V_{R2} = \sqrt{2\omega^2 R_2^2 - \frac{2}{\rho} P_2}. \quad (13)$$

Однако статическое давление на выходе из канала  $P_2$  по периметру диска может быть не постоянно, а существенно изменяться по координате  $\varphi$ , например, при расположении диска в текущей жидкости, как это показано на рисунке 2.

Со стороны натекания жидкости на диск статическое давление будет существенно выше (на величину скоростного напора жидкости) за счет преобразования кинетической энергии жидкости в потенциальную при её остановке у кромки диска.

При неравномерном по периметру диска статическом давлении расход среды через канал согласно формуле (13) будет изменяться в зависимости от положения его относительно оси  $OX$  (или координаты  $\varphi$  при использовании полярных координат). Но изменение расхода в свою очередь должно привести к изменению количества движения жидкости в канале рабочего колеса, что вызовет появление динамической составляющей  $f_R(t)$  силы  $F_R$ , приложенной к оси диска.

Выражение для этой силы может быть получено из закона сохранения импульса:

$$f_R(t) = \frac{d(mV_{R2})}{dt}. \quad (14)$$

В рассматриваемой модели масса жидкости, участвующая в движении, ограничена стенками канала:  $m = \rho S R_2 = const$ , кроме того, при  $\omega = const$

$$\frac{dV_{R2}}{dt} = \omega \frac{dV_{R2}}{d\varphi}.$$

Выполнив подстановку в уравнение (13) соответствующих выражений для скорости  $V_{R2}$  и массы  $m$  и продифференцировав его, можно получить уравнение для мгновенных значений динамической составляющей силы  $F_R$ :

$$f_R(t) = \omega \rho S R_2 \sqrt{2\omega^2 R_2^2 - \frac{2}{\rho} P_2 \frac{dP_2}{d\varphi}}. \quad (15)$$

Эта динамическая составляющая силы  $F_R$ , приложенная к оси диска, уже не связана жестко с диском, а имеет направление, совпадающее с направлением течения окружающей среды.

Рассмотрим порядок применения предложенной аналитической модели для расчета динамических составляющих радиальных сил в реальном центробежном насосе.

Распределение статического давления по периметру рабочего колеса для реального центробежного насоса зависит от геометрии спирального отвода и величины подачи (расхода через насос).

Геометрические характеристики отвода рассчитаны на один режим, при котором истечение среды из рабочего колеса аналогично истечению в свободное пространство, то есть соблюдается условие по сечению спирального отвода насоса (улитки):

$$V_u r = const, \text{ тогда } P_2(\varphi) = const \text{ и } f_R(t) = 0. \quad (16)$$

На режимах с расходом меньше расчетного жидкость в спиральном отводе движется с замедлением, при этом наблюдается нарастание статического давления по периметру рабочего колеса в направлении от «языка» к «горлу» спирального отвода, а в области «языка» происходит резкое уменьшение давления. На режимах с расходом больше расчетного жидкость в спиральном отводе движется с ускорением, то есть наблюдается обратный процесс: статическое давление по периметру рабочего колеса в направлении от «языка» к «горлу» уменьшается, а в районе «языка», как и в предыдущем случае, наблюдается резкое изменение давления, но только с обратным знаком. Кроме этого в реальном насосе всегда имеется кольцевой зазор между рабочим колесом и улиткой, на который не распространяются условия свободного истечения (16).

Эпюра радиальных скоростей истечения рабочей среды из межлопастного канала колеса также не является равномерной, а имеет ядро со стороны передней стенки лопасти, а также след и застойные зоны с задней части.

Для расчета радиальных сил, действующих на ось рабочего колеса, воспользуемся уравнением (12), выделив на наружной поверхности колеса элементарную площадку  $dS = b_2 R_2 d\varphi$ .

На эту площадку со стороны спирального отвода действует статическое давление  $P_2(\varphi)$ . Сила давления, воспринимаемая осью рабочего колеса, рассчитывается по формуле:

$$dF_{R2cmam} = -P_2(\varphi) b_2 R_2 d\varphi, \quad (17)$$

а на внутреннюю поверхность элементарной площадки  $dS$  действует сила скоростного напора струи рабочей среды:

$$dF_{R2дин} = -\frac{1}{2} \rho V_{R2}^2(\varphi, t) b_2 R_2 d\varphi. \quad (18)$$

Полное значение элементарной радиальной силы можно получить суммированием сил, действующих на внутреннюю и внешнюю поверхность рабочего колеса:

$$dF_R(\varphi, t) = dF_{R2cmam}(\varphi) + dF_{R2дин}(\varphi, t) = [-P_2(\varphi) b_2 R_2 - \frac{1}{2} \rho V_{R2}^2(\varphi, t) b_2 R_2] d\varphi. \quad (19)$$

Для того чтобы определить равнодействующую элементарных радиальных сил, распределенных по окружности рабочего колеса, необходимо перейти от полярной системы координат к прямоугольной и рассматривать элементарные радиальные силы в виде проекций на оси  $OX$  и  $OY$ .

$$\left. \begin{aligned} F_{RX}(t) &= -b_2 R_2 \int_0^{2\pi} P_2(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \frac{\rho b_2 R_2}{2} \left[ \int_0^{2\pi} V_{R2}^2(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} V_{R2}(\varphi, t) V_{u2}(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right]; \\ F_{RY}(t) &= -b_2 R_2 \int_0^{2\pi} P_2(\varphi) \sin \varphi d\varphi - \frac{\rho b_2 R_2}{2} \left[ \int_0^{2\pi} V_{R2}^2(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} V_{R2}(\varphi, t) V_{u2}(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Равнодействующая этих сил определится следующим образом:

$$F_R(t) = \sqrt{F_{RX}^2(t) + F_{RY}^2(t)}, \quad (21)$$

а ее направление

$$\phi_F(t) = \arctg \left[ \frac{F_{RY}(t)}{F_{RX}(t)} \right]. \quad (22)$$

При изменении параметра  $t$  величина радиальной силы  $F_R(t)$  будет изменяться с периодом  $T = 2\pi/z\omega$ , а совокупность значений  $F_R(t)$  в интервале  $0 \leq t \leq T$  будет определять функцию (форму импульса) динамической составляющей радиальной силы  $f_R(t)$ , действующей на рабочее колесо центробежного насоса.

Для того чтобы вычислить динамические характеристики нестационарной составляющей радиальной силы на частоте  $\omega$  и гармониках, необходимо разложить функцию  $f_R(t)$  в ряд Фурье:

$$f_R(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{Rk} e^{ik(\omega t + \varphi)}, \quad (23)$$

определив амплитудные значения для гармонических составляющих  $k$  ряда по формуле:

$$F_{Rk} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f_R(t) e^{-ik(\omega t + \varphi)} dt. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) образуют пару преобразований Фурье для периодической функции  $F_R(n\omega)$  с периодом  $2\pi/n\omega$  для изучения процесса образования акустической энергии на лопастной частоте или  $2\pi/\omega$  – на оборотной частоте.

Для вычисления конкретных характеристик (амплитуд и фаз) процесса необходимо воспользоваться численным аналогом преобразования, например одним из методов Рунге.

Гармоническая сила  $f_R(\omega)$ , приложенная к рабочему колесу, и её реакция, приложенная к окружающей жидкости, а следовательно к корпусу насоса (жидкость в пределах гидравлической части насоса можно полагать несжимаемой, как и в исходной модели), определяет параметры колебаний корпуса и звуковое давление на частоте  $\omega/2\pi$ .

Согласно теореме о положении центра масс изолированной системы тел любое смещение рабочего колеса относительно корпуса насоса под действием радиальной силы, обусловленное конечной изгибной жесткостью консольной части вала электродвигателя, вызывает соответствующее смещение корпуса насоса в противоположном направлении обратно пропорциональное его массе. Более подробно эта теория изложена в работе [3].

Амплитуды звукового давления, излучаемого на лопастной частоте и гармониках, можно оценить, воспользовавшись выводами Дж. Лайтхилла [7]:

$$P_k = \frac{f_R(k\omega)}{S_{PK}}, \quad (25)$$

где  $S_{PK}$  – площадь поперечного сечения рабочего колеса насоса.

Динамическая составляющая силы  $F_R$ , в отличие от сил дисбаланса, воздействует на корпус насоса в определенном направлении, то есть ортотропно. Направление её действия обусловлено максимумом изменения расхода жидкости через межлопастной канал, являющегося следствием наиболее резкого изменения внешних условий по периметру рабочего колеса.

Сопоставляя результаты прямых измерений статических давлений в спиральном отводе ЦН по периметру рабочего колеса с результатами измерения вибрации его корпуса и звукового давления в трубопроводах на лопастной частоте на различных режимах эксплуатации (частоте вращения и подачах), можно обнаружить прямую пропорциональную зависимость уровней вибрации от величины амплитудного значения градиента статического давления.

**Заключение.** Математическая модель ЦН, разработанная для расчета динамических составляющих радиальной силы  $F_R$ , полностью объясняет эффект минимума и изменения фазы вибрации корпуса на лопастной частоте. Однако эта модель должна быть дополнена расчетными зависимостями для определения реальной структуры течения рабочей среды в спиральном отводе и выходном сечении межлопа-

стного канала на различных режимах эксплуатации ЦН. В настоящее время эти зависимости получены и исследованы, но их рассмотрение ограничено рамками настоящей статьи.

Предложен алгоритм расчета амплитуд и фаз динамических составляющих поперечных сил.

Разработанная и представленная модель возбуждения акустической энергии в центробежном нагнетателе (насосе, вентиляторе или компрессоре) позволяет оценить уровни вибрации корпуса и излучаемого звука на лопастной частоте и гармониках аналитическим путем по величине градиента статического давления по периметру рабочего колеса. Такая модель позволяет объяснить все известные особенности процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Яременко, О.В. Испытания насосов / О.В. Яременко. – М.: Машиностроение, 1976. – 225 с.
2. Селезский, А.И. Методы и средства снижения шума и вибрации судовых гидравлических систем: учеб. пособие / А.И. Селезский, Я.А. Ким. – Л.: Изд. ЛКИ, 1985. – 80 с.
3. Питолин, В.Е. Построение компьютерной модели центробежного насоса для расчета вибрации его корпуса под действием динамических составляющих поперечной силы / В.Е. Питолин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 12. – С. 95 – 101.
4. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – М., Л.: ОГИЗ, 1947. – 928 с.
5. Докучаев, В.П. Излучение звуковых волн гармоническим монопопом, движущимся по окружности / В.П. Докучаев // Акустический журнал. – 1969. – Т. XV, вып. 3. – С. 361 – 367.
6. Баженов, Д.В. Математическая модель лопастного колеса центробежного вентилятора как источника тонального звука / Д.В. Баженов // Тез. докл. на VII науч.-техн. конф. по аэроакустике. – Изд. отд. ЦАГИ, 1981. – С. 18 – 19.
7. Лайтхилл, Дж. Волны в жидкостях / Дж. Лайтхилл. – М.: Мир, 1981. – 598 с.

Поступила 21.02.2011

#### CONSTRUCTING MATHEMATICAL MODEL OF THE EXCITATION PROCESS OF DYNAMIC COMPONENTS OF RADIAL FORCES IN THE CENTRIFUGAL PUMP'S IMPELLER

V. PITOLIN

*Centrifugal superchargers (pumps, fans and compressors) have found wide industrial application (from spacecrafts up to usual apartment houses). Therefore struggle against noise and vibration of these mechanisms is directed not only at maintenance of their reliability and profitability, but also is the major component of ensuring normal living conditions. The mechanism of noise occurrence in the centrifugal pump is not so obvious, as it seems at first sight. There is a line of the phenomenon's features which should be realized in calculated model. For example, presence of a minimum of vibration on frequency that is multiple to number of blades at some operating modes of a supercharger and changing an oscillation phase. To explain these phenomena, existing models are analyzed and the improved mathematical model for evaluation of the dynamic components of the radial forces exerted by the flow of fluid in the impeller blower, which are the main cause of excitation of vibrations and sound at frequencies multiples of the number of blades at the impeller, is offered.*