МАТЕМАТИКА

УДК 517.948

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА АБЕЛЯ

канд. физ.-мат. наук О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены многомерные интегральные уравнения первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по ограниченным пирамидальным областям многомерного евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов. Даны решения в замкнутой форме рассматриваемых интегральных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных гипергеометрических уравнений.

1. Введение

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, § 35.1, 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2].

В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана – Лиувилля со степенными весами и использовании известных свойств таких дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах.

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48; 5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, § 25.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в [7; 8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области.

Настоящая работа продолжает эти исследования. Мы даем решение в замкнутой форме ещё одного класса интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследуем картину их разрешимости в пространстве интегрируемых функций:

- в разделе 2 приводятся вспомогательные сведения;
- раздел 3 посвящен решению рассматриваемых уравнений в квадратурах;
- в разделе 4 устанавливаются необходимые и достаточные условия их разрешимости.

2. Предварительные сведения

Введем некоторые обозначения [1, § 28.4].

Пусть $\mathbb{N} = 1,2,\ldots$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup 0$;

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство.

Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_kt_k$ их скалярное произведение, в частности $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,...,1)$.

Пусть $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,...,x_n>t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $\mathbb{R}_+^n=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}>0\}$, $\mathbf{k}=(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}_0^n=\mathbb{N}_0\times...\times\mathbb{N}_0$, где $k_i\in\mathbb{N}_0$, $i=1,2,...,n$ – мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+...+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n$ и $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}_+^n$ положим $\mathbf{x}^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\mathbf{D}^{\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}...(\partial x_n)^{\alpha_n}}$ и $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)$.

Пусть $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathbb{R}^1)$ – матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=(a_{j_1},...,a_{j_n})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|A|=1$.

Пусть $A\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})$, $(A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}$.

Для $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}=(c_1,...,c_n)\in\mathbb{R}^n$ и $r\in\mathbb{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n:\ A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\}\tag{1}$$

n-мерную ограниченную в $\mathbb{R}^n$ пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$ с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,...,n)$. В частности, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{t}\leq\mathbf{b},\ \mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\geq 0\}.\tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды A необходимо и достаточно выполнение условия: $A^{-1}\cdot\mathbf{c}>0$.

Для $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathbb{C}^n$ и $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ введем функцию

$$F[\alpha,\beta;\gamma;\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}F[\alpha_j,\beta_j;\gamma_j;x_j],\tag{3}$$

представляющую собой произведение гипергеометрических функций Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$, определяемых при комплексных $a,b,c\in\mathbb{C}$ и $|z|<1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt\tag{4}$$

для $z\in\mathbb{C}$, $0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c$, $(|\arg(1-z)|<\pi,\ z\neq 1)$ (см. [9, 2.1(2) и 2.1.(10)]). Здесь $(z)_n$ – символ Похгаммера: $(z)_0\equiv 1$, $(z)_n=z(z+1)...(z+n-1)$ $(z\in\mathbb{C};n\in\mathbb{N})$.

Рассматриваемое нами интегральное уравнение типа Абеля имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)^{\gamma-1} F\left[\alpha,\beta;\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{x})}{A\cdot\mathbf{t}}\right]\varphi(\mathbf{t})d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{5}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{R}^1$) – пирамида (1); $\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$, $0<\gamma<1$, и $F\left(\alpha,\beta;\gamma;A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{x})/A\cdot(\mathbf{t})\right)$ – функция вида (3).

Уравнение (5) обобщает многомерное уравнение типа Абеля [1, § 28.4], получающееся из (5) при $r=0$ в случаях $\alpha=0$ или $\beta=0$. Нам понадобится следующее обобщение интеграла (4) [9, 2.4 (3)]:

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(s)\Gamma(c-s)}\int\limits_0^1\frac{x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}}{(1-xz)^{a'}}F(a-a',b;s;xz)F\left(a',b-s;c-s;\frac{(1-x)z}{1-xz}\right)dx, \tag{6}$$

формула [9, 2.1 (22)]:

$${}_2F_1\,(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right), \tag{7}$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1 [1, § 28]. *Если функция* $f(x,t)$*, определенная на* $A_c(b)\times A_c(b)$*, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int\limits_{A_c(b)} dt\int\limits_{A_c(t)} f(t,\tau)d\tau = \int\limits_{A_c(b)} d\tau\int\limits_{\sigma(b,\tau)} f(t,\tau)dt, \tag{8}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\tau)=\left\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n : A\cdot\tau\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\right\}, \tag{9}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (8) *сходится абсолютно.*

3. Решение в замкнутой форме

Сначала дадим формальное решение уравнения (5) в предположении, что оно разрешимо. Используя представление (7) для $F\left(\alpha,\beta;\gamma;A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{x})/A\cdot(\mathbf{t})\right)$ в (5), получаем следующее представление (5):

$$\frac{(A\cdot\mathbf{x})^{-\alpha}}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)^{\gamma-1}\left(A\cdot\mathbf{t}\right)^{\alpha} F\left[\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right]\varphi(\mathbf{t})d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}),\ \mathrm{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathrm{b}). \tag{10}$$

Заменяя x на t и t на u, умножая обе части полученного равенства на

$$(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t}))^{-\gamma}F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right],$$

интегрируя по пирамиде $A_{c,r}(\mathbf{x})$ и изменяя порядок интегрирования согласно формуле (8), имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathrm{x})}\left(A\cdot\mathbf{u}\right)^{\alpha}\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)^{-\gamma}\left(A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{u})\right)^{\gamma-1}\times\\ &\times F\left[\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{u})}{A\cdot\mathbf{t}}\right]F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right](A\cdot\mathbf{t})^{-\alpha}\,d\mathbf{t}=\\ &=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)^{-\gamma}F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n : A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в (11) введем новые переменные

$$s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t})}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{u})}, \ \mathbf{a}_j = \ a_{j1},\dots,a_{jn} \ \ (j=1,\dots,n).$$

Используя соотношения $1-s_j = \dfrac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t})}$ $(j=1,\dots,n)$ и формулу (6), для внутреннего интеграла в (11) получаем

$$\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} \ A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t}) \ ^{-\gamma} \ \ A\cdot(\mathbf{t}\ -\mathbf{u}) \ ^{\gamma-1} F\left[\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{u})}{A\cdot\mathbf{t}}\right]\times$$

$$\times F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right](A\cdot\mathbf{t})^{-\alpha}\ d\mathbf{t} = \ (A\cdot \mathrm{x})^{-\alpha}\ \prod_{j=1}^{n}\left\{\int_0^1 s_j^{-\gamma_j}(1-s_j)^{\gamma_j-1}\left[1-s_j\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x})}\right]^{-\alpha_j}\times\right.$$

$$\left.\times\ F\left\{\alpha_j,\ \gamma_j-\beta_j;\gamma_j;\left[(1-s_j)\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x})}\right]/\left[1-s_j\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x})}\right]\right\}\times\ F\left\{-\alpha_j,\ 1-\beta_j;1-\gamma_j;s_j\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x})}\right\}ds_j\right\}=$$

$$=\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\ \ (A\cdot\mathbf{x})^{-\alpha}\ F\left\{0,1-\beta;1;\frac{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})}{\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{x})}\right\}=\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\ \ (A\cdot\mathbf{x})^{-\alpha}.$$

На основании этого равенство (11) принимает вид:

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathrm{x})} \ A\cdot\mathbf{u}\ ^{\alpha}\ \varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f^{\gamma,\alpha,\beta}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

$$f^{\gamma,\alpha,\beta}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}) = \frac{(A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \ A\cdot(\mathbf{x}\ -\mathbf{t})\ ^{-\gamma}\ F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right]\ f\ (\mathbf{t})d\mathbf{t}. \tag{13}$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x}+\frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}},\ \mathbf{t}+\frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\left(\frac{\tau}{\mathbf{d}}\right), \tag{14}$$

где $\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\dfrac{y_1}{d_1},\dots,\dfrac{y_n}{d_n}\right)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1}\cdot\mathbf{c}$, переписываем (12) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\tau)d\tau = g(\mathbf{y}), \tag{15}$$

где $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\tau) = \left(A\cdot\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\tau}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\right)^{\alpha}\varphi\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\tau}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right),\ g(\mathbf{y}) = f^{\gamma,\alpha,\beta}_{A_{\mathbf{c},r}}\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\ \prod_{j=1}^{n} d_j\ .$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int\limits_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int\limits_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1} \psi(\tau) d\tau_1 = g(\mathbf{y}) . \quad (16)$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} g(\mathbf{y}) .$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k = 1, ..., n) , \quad (17)$$

где a_{jk} $(j, k = 1, ..., n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1},

приходим к следующей формуле решения уравнения (5):

$$\varphi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}^{-\alpha} \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha}}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})^{-\gamma} F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})}{A \cdot \mathbf{x}} \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\} . \quad (18)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (5) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (5) в пространстве $L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{x})^{\alpha}$:

$$L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{x})^{\alpha} = f(\mathbf{x}) : (A \cdot \mathbf{x})^{\alpha} f(\mathbf{x}) \in L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) , \quad (19)$$

где пространство $L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ определяется следующим образом:

$$L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{ f(\mathbf{x}) : \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \} . \quad (20)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}\ L_1 = \left\{ g : g(\mathbf{x}) = \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \ge A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1\ A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) \right\} . \quad (21)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}\ L_1$ играет ту же роль для уравнения (5), что и пространство $AC\ [a,b]$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2].

Отметим, что если $g \in I_{A_{\mathbf{c},r}}\ L_1$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) .$$

В частности, если $A=E$ – единичная матрица, $\mathbf{c}=\mathbf{1}=(1,...,1)$ и $r=0$, (19) – (21) соответственно принимают вид:

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b});\mathbf{x}^{\alpha}\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}^{\alpha}f(\mathbf{x})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},\quad L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)=\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right)=\left\{g:\ g(\mathbf{x})=\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},$$

где $h(\mathbf{x})=\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}g(\mathbf{x})\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_n}g(\mathbf{x})$.

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

На основании формулы (15) доказывается следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля* (5) *с* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$ $(0<\gamma<1)$ *в пространстве* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})=\frac{(A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)^{-\gamma}F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{A\cdot\mathbf{x}}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)\tag{22}$$

и

$$[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\left[\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=...=\left[\prod_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=0.\tag{23}$$

При выполнении этих условий уравнение (5) *разрешимо в* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}\right)$ *и его единственное решение дается формулой* (18).

Доказательство. В модельном случае $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

Следствие 4.1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)^{\gamma-1}F\left[\alpha,\beta;\gamma;\frac{(\mathbf{t}-\mathbf{x})}{\mathbf{t}}\right]\varphi(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E_1(\mathbf{b}),\tag{24}$$

с $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$ $(0<\gamma<1)$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b});\mathbf{x}^{\alpha}\right)$ *тогда и только тогда, если*

$$f_{E_1}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)^{-\gamma}F\left[-\alpha,1-\beta;1-\gamma;\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})}{\mathrm{x}}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{E_1}\left(L_1\right)$$

и

$$[f_{E_1}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=...=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=0.$$

При выполнении этих условий уравнение (24) *разрешимо в* $L_1(E_1(\mathbf{b});\mathbf{x}^{\alpha})$ *и его единственное решение дается формулой:*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} f_{E_1}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left\{\frac{\mathbf{x}^{\alpha}}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{-\gamma} F\left[-\alpha, 1-\beta;\ 1-\gamma;\ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{t})}{\mathbf{x}}\right] f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}.$$

Замечание 4.1. При $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) = 0$ теорема 4.1 и следствие 4.1 сводятся к результатам, полученным в [3, теорема 1 и следствие] (см. также случай $r = 0$ в [1, теорема 26.7 и следствие]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992.
3. Kilbas, A.A. On integrable solution of a multidimensional Abel – type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – V. 25, № 1. – P. 1 – 9.
4. Михлин, С.Г. Лекции по интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах / Н.Г. Преображенский // Инверсия Абеля и ее обобщения. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6 – 24.
6. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978.
7. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А.А. Килбас [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23 – 26.
8. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K.L. Raina [and al.] // ANZIAM J. – 2001. – V. 43, № 2. – P. 291 – 320.
9. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра.

Поступила 31.01.2011

SOLUTION OF A MULTIDIMENSIONAL HYPERGEOMETRIC ABEL-TYPE INTEGRAL EQUATIONS

O. SKOROMNIK

Multidimensional integral equations of the first kind with the Gauss hypergeometric function in the kernels over special bounded pyramidal domains in Euclidean space are considered. The interest in such equations is caused by their applications to problems on reflection of waves on a rectilinear boundary and on a supersonic flow around spatial corners. Solutions of these equations in closed form are established, and necessary and sufficient conditions for their solvability in the space of summable functions are given. The results generalize those for multidimensional Abel type integral equation and for the corresponding one-dimensional hypergeometric equations.