УДК 512.542

СТРОЕНИЕ ГРУПП ШМИДТА С ОБОБЩЕННО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПЕРВЫМИ, ВТОРЫМИ И ЧЕТВЕРТЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

канд. физ.-мат. наук Н.В. ГУЦКО
(Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина);
канд. физ.-мат. наук Ю.В. ЛУЦЕНКО
(ГОУВПО БГУ им. акад. И.Г. Петровского, Брянск, Россия)

Пусть G – конечная группа. Подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G (обобщенно перестановочной), где X – непустое подмножество группы G, если для любой подгруппы T из G найдется такой элемент x из X, что $HT^x = T^xH$. Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы, силовские подгруппы самой группы или силовские подгруппы некоторых выделенных подгрупп этой группы. В частности, в работе приводится описание структуры групп Шмидта, в которых либо каждая максимальная подгруппа (обобщенно) перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой, либо каждая 2-максимальная подгруппа (обобщенно) перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

Все группы в представляемой статье являются конечными. Напомним ряд понятий, используемых в данной работе. Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. *Группа Шмидта* – это конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется *X-перестановочной* в G или *обобщенно перестановочной* [1], где X – непустое подмножество группы G, если для любой подгруппы T из G найдется такой элемент x из X, что $HT^x = T^xH$.

Значение понятия X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочности для подгрупп. Например, используя это понятие, можно дать следующую интерпретацию классической теоремы Холла о разрешимых группах (см. [2, глава II, теорема 2.4]): *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две холловы подгруппы G-перестановочны*. Здесь следует отметить также следующий критерий разрешимости, основанный на результате, полученном в работе [3]: *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы G-перестановочны* [4].

Характеризации сверхразрешимых групп с определенными условиями X-перестановочности для 2-максимальных подгрупп получены в работах [5; 7]. В работе В. Хупперта [8] было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской системы группы G. Этот результат дал толчок большому числу исследований, в которых изучалось влияние максимальных подгрупп силовских подгрупп на строение основной группы (более подробный обзор см. в [9]). В работе [10] доказана теорема, которая дает точное описание сверхразрешимых групп G как групп, в которых максимальные подгруппы силовских подгрупп X-перестановочны с максимальными подгруппами из G.

Отметим, что в работе [11] было дано описание групп, в которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп нормальны. В связи с этим результатом в работе [11] было исследовано строение групп, в которых максимальные подгруппы силовских подгрупп X-перестановочны со всеми силовскими подгруппами. В работе [12] Д.Л. Джонсон рассматривал группы G, в которых все неразложимые в пересечение подгруппы группы G имеют своим индексом степень простого числа. Он доказал, что такие группы сверхразрешимы [12]. Позже было получено описание групп [13], в которых все подгруппы являются группами с условием Д.Л. Джонсона. В одной из последних публикаций в этом направлении [14] была доказана теорема, дающая точное описание групп с условием Д.Л. Джонсона в терминах X-перестановочности в общем случае.

В данной работе приводится описание структуры групп Шмидта, в которых либо каждая максимальная подгруппа (обобщенно) перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой, либо каждая 2-максимальная подгруппа (обобщенно) перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

Для доказательства основных результатов работы нам потребуются следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1 [15, VI, теоремы 26.1 и 26.2]. *Если G – группа Шмидта, то*

(1) *$G = [P]\langle a\rangle$, где P и $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно*;

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$*;

(3) $G' = P$;

(4) $\Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q \rangle$;

(5) $P/\Phi(P)$ *– главный фактор группы* G, *причем, если* $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, *то* p^α *сравнимо с единицей по модулю* q;

(6) *наибольшая нормальная подгруппа группы* G, *строго содержащаяся в* P, *совпадает с* $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;

(7) *Если* P *абелева, то она элементарна*;

(8) *Если* P *неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту* p.

Лемма 2 [16, VI, lemma 4.7]. *Пусть* $G = G_1G_2$. *Тогда для любого простого числа* p *существуют такие силовские* p*-подгруппы* P, P_1, P_2 *соответственно в* G, G_1, G_2, *что* $P = P_1P_2$.

Следующая теорема описывает строение групп Шмидта, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $G = [P]Q$ *– группа Шмидта, где* P *и* Q *– силовские* p*-подгруппа и* q*-подгруппа группы* G *соответственно. В том и только в том случае в группе* G *каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми* 4*-максимальными подгруппами из* G, *когда либо* $|G| = p^\alpha q^\beta$ *для* $\alpha + \beta \leq 4$, *либо* G *является группой одного из следующих типов*:

(1) G *– сверхразрешимая группа Шмидта*;

(2) $G = [P]Q$, *где* $|Q| = q^2$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ *и* $\Phi(P)$ *– единственная* 2*-максимальная подгруппа в* P;

(3) $G = [P]Q$, *где* $|Q| = q$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ *и* $P_3 \subseteq \Phi(P)$ *для каждой 3-максимальной подгруппы* P_3 *из* P.

Доказательство

Необходимость. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой каждая максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой (P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно).

Пусть силовская p-подгруппа P группы G является абелевой.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|Q| = q$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (7)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P и Q, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_3, где P_3 – произвольная 3-максимальная подгруппа группы P. По условию P_3Q – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы Q в G влечет $|P| = p^3$. Таким образом, $|G| = p^\alpha q^\beta$, где $\alpha + \beta = 4$;

б) $|Q| = q^2$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (7)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы PQ_1 (Q_1 – максимальная подгруппа в Q) и Q, а представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы P_3Q_1 и P_2, где P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа группы P и P_3 – произвольная 3-максимальная подгруппа группы P. По условию, P_2Q – подгруппа группы G, что в силу максимальности Q в G влечет $|P| = p^2$. Таким образом, $|G| = p^\alpha q^\beta$, где $\alpha + \beta = 4$;

в) $|Q| \geq q^3$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (7)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы PQ_1 (Q_1 – максимальная подгруппа в Q) и Q, а представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы P_3Q_1, PQ_4, P_2Q_2, P_1Q_3 и Q_3, где P_1, P_2, P_3 – произвольные максимальная, 2-максимальная и 3-максимальная подгруппы в P соответственно, Q_2, Q_3, Q_4 – 2-максимальная, 3-максимальная и 4-максимальная подгруппы в Q соответственно.

По условию $(P_1Q_3)Q = P_1Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы Q в G влечет $|P| = p$. Таким образом, G является сверхразрешимой группой Шмидта, т.е. группой типа (1).

Пусть теперь силовская p-подгруппа P группы G является неабелевой.

Предположим, что $|\Phi(P)| \geq p^3$. В этом случае в группе G существует 4-максимальная подгруппа E, такая, что $Q \leq E$. Так как подгруппа $\Phi(P)Q$ максимальна в G, то по условию $\Phi(P)QE^x \leq G$ для всех $x \in G$. По лемме 2 это означает, что существует элемент $y \in G$ такой, что $Q^y = QQ^x$. Тогда $Q = Q^x$ для всех $x \in G$ и поэтому Q нормальна в G, что невозможно в силу строения группы Шмидта. Таким образом, наше допущение неверно и $|\Phi(P)| < p^3$.

Допустим, что $|Q| \geq q^3$. Тогда существует 4-максимальная подгруппа P_1Q_3 в группе G, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_3 – 3-максимальная подгруппа в Q ($|Q_3| \geq 1$). По условию $(P_1Q_3)(\Phi(P)Q) = P_1\Phi(P)Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $P_1 \subseteq \Phi(P)$. Очевидно, что в этом случае $P_1 = \Phi(P)$. Это означает цикличность подгруппы P, что невозможно в силу неабелевости P. Таким образом, наше допущение неверно и $|Q| < q^3$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|Q| = q^2$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы PQ_1 и $\Phi(P)Q$, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_2, где Q_1 – максимальная подгруппа в Q и P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа группы P. По условию $P_2\Phi(P)Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $P_2 \leq \Phi(P)$. Если предположить, что $P_2 < \Phi(P)$, то $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P

и поэтому P – циклическая подгруппа, что невозможно в силу неабелевости P. Следовательно, $P_2 = \Phi(P)$ и поэтому в силу произвольности выбора подгруппы P_2 в группе P $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P. Таким образом, G – группа типа (2);

б) $|Q| = q$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P и $\Phi(P)Q$, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_3, где P_3 – произвольная 3-максимальная подгруппа группы P. По условию $P_3\Phi(P)Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $P_3 \subseteq \Phi(P)$. Таким образом, G является группой типа (3).

Достаточность. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта и $|G| = p^\alpha q^\beta$ *для* $\alpha + \beta \le 4$. Очевидно, что в этом случае каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой ее 4-максимальной подгруппой.

Предположим теперь, что $G = [P]Q$ – группа Шмидта и $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta > 4$.

Пусть G – группа типа (1). Согласно лемме 1 в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы PQ_1 и Q, а представителями 4-максимальных подгрупп в G – подгруппы PQ_4 и Q_3, где $|P| = p$ и Q_1, Q_3, Q_4 – максимальная, 3-максимальная и 4-максимальная подгруппы в Q соответственно. В силу леммы 1 (пункт (4)) подгруппы Q_1, Q_3, Q_4 нормальны в группе G, что означает перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G с ее максимальными подгруппами.

Пусть G – группа типа (2). Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы PQ_1 и $\Phi(P)Q$, а представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы $\Phi(P)$, $\Phi_1(P)Q_1$, Q_1 и $\Phi_1(P)$ (для $|\Phi(P)| = p^2$) или представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы $\Phi(P)$ и Q_1 (для $|\Phi(P)| = p$), где Q_1 – максимальная подгруппа в Q, $\Phi_1(P)$ – некоторая максимальная подгруппа в $\Phi(P)$. В силу леммы 1 (пункты (4), (6)) имеем перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G со всеми ее максимальными подгруппами.

Пусть G – группа типа (3). Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P и $\Phi(P)Q$, а представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы Q_1 и P_3 (для $|\Phi(P)| = p^2$) или подгруппа P_3 (для $|\Phi(P)| = p$), где Q_1 – максимальная подгруппа в Q, P_3 – некоторая 3-максимальная подгруппа в P. В силу условия $P_3 \subseteq \Phi(P)$ и леммы 1 (пункты (4), (6)) имеем перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G со всеми ее максимальными подгруппами. Теорема доказана.

Следующая теорема описывает строение групп Шмидта G, в которых каждая максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна со всеми* 4-*максимальными подгруппами из G, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta \le 4$, либо G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – сверхразрешимая группа Шмидта*;

(2) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q^2$, $|\Phi(P)| \le p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная* 2-*максимальная подгруппа в P*;

(3) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q$, $|\Phi(P)| \le p^2$ и $P_3 \subseteq \Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P.*

Доказательство

Необходимость. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой каждая максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

Пусть силовская p-подгруппа P группы G является абелевой.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|Q| = q$. Согласно лемме 1 (пункты (2)(7)) в этом случае представителями максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P и Q, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_3, где P_3 – произвольная 3-максимальная подгруппа группы P. По условию P_3Q^f – подгруппа группы G для некоторого $f \in F(G)$, что в силу максимальности подгруппы Q^f в G влечет $|P| = p^3$. Таким образом, $|G| = p^\alpha q^\beta$, где $\alpha + \beta = 4$;

б) $|Q| = q^2$. Аналогично, как и выше, можно показать, что в этом случае $|G| = p^\alpha q^\beta$, где $\alpha + \beta = 4$;

в) $|Q| \ge q^3$. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в этом случае G является сверхразрешимой группой Шмидта, т.е. группой типа (1).

Пусть теперь силовская p-подгруппа P группы G является неабелевой.

Предположим, что $|\Phi(P)| \ge p^3$. В этом случае в группе G существует 4-максимальная подгруппа E такая, что $Q \le E$. Так как подгруппа $\Phi(P)Q$ максимальна в G, то по условию $\Phi(P)Q^fE^x \le G$ для некоторого $f \in F(G)$ и всех $x \in G$. По лемме 2 это означает, что существует элемент $y \in G$ такой, что $Q^y = Q^fQ^x$. Тогда $Q = Q^x$ для всех $x \in G$ и поэтому Q нормальна в G, что невозможно в силу строения группы Шмидта. Таким образом, наше допущение неверно и $|\Phi(P)| < p^3$.

Допустим, что $|Q| \geq q^3$. Тогда существует 4-максимальная подгруппа P_1Q_3 в группе G, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_3 – 3-максимальная подгруппа в Q ($|Q_3| \geq 1$). По условию $(P_1Q_3)(\Phi(P)Q)^f = P_1\Phi(P)Q^f$ – подгруппа группы G для некоторого $f \in F(G)$, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q^f$ в G влечет $P_1 \subseteq \Phi(P)$. Очевидно, что в этом случае $P_1 = \Phi(P)$, что означает цикличность подгруппы P, что невозможно в силу неабелевости P. Таким образом, наше допущение неверно и $|Q| < q^3$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|Q| = q^2$. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в этом случае $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P. Таким образом, G – группа типа (2).

б) $|Q| = q$. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в этом случае $P_3 \subseteq \Phi(P)$. Таким образом, G – группа типа (3).

Достаточность. Пусть G – группа Шмидта одного из типов, описанных в теореме 2. Тогда, по теореме 1 имеем перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G со всеми ее максимальными подгруппами. Так как существует $1 \in F(G)$, то по определению в группе G каждая 4-максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна со всеми максимальными подгруппами. Теорема доказана.

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является следующий результат.

Следствие 1. *Пусть G – группа Шмидта и $X = F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми ее 4-максимальными подгруппами*;

(2) *каждая максимальная подгруппа группы G X-перестановочна со всеми ее 4-максимальными подгруппами*.

Следующая теорема описывает строение групп Шмидта, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из G, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta \leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(2) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q^2$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P*;

(3) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $P_3 \subseteq \Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P.*

Доказательство

Необходимость. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой (P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно).

Пусть силовская p-подгруппа P группы G является абелевой. В этом случае G – группа типа (1).

Пусть теперь силовская p-подгруппа P группы G является неабелевой.

Предположим, что $|\Phi(P)| \geq p^3$. В этом случае в группе G существует 4-максимальная подгруппа E такая, что $Q \leq E$. Так как подгруппа $\Phi(P)Q$ максимальна в G, то подгруппа $\Phi_1(P)Q$ является 2-максимальной в G, где $\Phi_1(P)$ – произвольная максимальная подгруппа в $\Phi(P)$. По условию $\Phi_1(P)QE^x \leq G$ для всех $x \in G$. По лемме 2 это означает, что существует элемент $y \in G$ такой, что $Q^y = QQ^x$. Тогда $Q = Q^x$ для всех $x \in G$ и поэтому Q нормальна в G, что невозможно в силу строения группы Шмидта. Таким образом, наше допущение неверно и $|\Phi(P)| < p^3$.

Допустим, что $|Q| \geq q^3$. Тогда существует 4-максимальная подгруппа P_1Q_3 в группе G, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_3 – 3-максимальная подгруппа в Q ($|Q_3| \geq 1$). По условию $(P_1Q_3)(\Phi_1(P)Q) = P_1\Phi_1(P)Q = P_1Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $P_1 \subseteq \Phi(P)$. Очевидно, что в этом случае $P_1 = \Phi(P)$, что означает цикличность подгруппы P, что невозможно в силу неабелевости P. Таким образом, наше допущение неверно и $|Q| < q^3$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

а) $|Q| = q^2$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителем 2-максимальных подгрупп в G является подгруппа $\Phi_1(P)Q$ для некоторой максимальной подгруппы $\Phi_1(P)$ ($|\Phi_1(P)| \leq p$) из $\Phi(P)$, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_2, где P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P. По условию $P_2\Phi_1(P)Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $\Phi_1(P)P_2 \leq \Phi(P)$. Если предположить, что $\Phi_1(P)P_2 < \Phi(P)$, то $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P и поэтому P – циклическая подгруппа, что невозможно в силу неабелевости P. Следовательно, $\Phi_1(P)P_2 = \Phi(P)$ и поэтому $P_2 = \Phi(P)$, что в силу произвольности выбора подгруппы P_2 в группе P влечет $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P. Таким образом, G – группа типа (2);

б) $|Q| = q$. Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителем 2-максимальных подгрупп в G является подгруппа $\Phi_1(P)Q$ для некоторой максимальной подгруппы $\Phi_1(P)$ ($|\Phi_1(P)| \leq p$) из

$\Phi(P)$, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_3, где P_3 – произвольная 3-максимальная подгруппа группы P. По условию теоремы $P_3\Phi_1(P)Q$ – подгруппа группы G, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G влечет $P_3 \subseteq \Phi(P)$. Таким образом, G является группой типа (3).

Достаточность. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта и $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta \leq 4$. Очевидно, что в этом случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой ее 4-максимальной подгруппой.

Предположим теперь, что $G = [P]Q$ – группа Шмидта и $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta > 4$.

Пусть G – группа типа (1). Используя лемму 1, легко показать, что в этом случае перестановочность 2-максимальных и 4-максимальных подгрупп группы G сводится к перестановочности максимальных, 2-максимальных и 3-максимальных подгрупп группы P. Поскольку P – абелева группа, то любые ее две подгруппы перестановочны и, следовательно, каждая 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой ее 4-максимальной подгруппой.

Пусть G – группа типа (2). Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями 2-максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P, P_1Q_1, $\Phi(P)Q_1$ и $\Phi_1(P)Q$, а представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы $\Phi_1(P)$, P_3Q_1, Q_1 и $\Phi(P)$ (для $|\Phi(P)| = p^2$) или представителями 4-максимальных подгрупп в G являются подгруппы $\Phi(P)$ и P_3Q_1 (для $|\Phi(P)| = p$), где Q_1 – максимальная подгруппа в Q, $\Phi_1(P)$ – некоторая максимальная подгруппа в $\Phi(P)$, P_1 и P_3 – максимальная и 3-максимальная подгруппы в P соответственно. В силу условия и леммы 1 (пункты (4),(6)) имеем перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G со всеми ее 2-максимальными подгруппами.

Пусть G – группа типа (3). Согласно лемме 1 (пункты (2), (8)) в этом случае представителями 2-максимальных подгрупп в группе G являются подгруппы P_1, $\Phi(P)$ и $\Phi_1(P)Q$, а представителем 4-максимальных подгрупп в G является подгруппа P_3, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P, P_3 – некоторая 3-максимальная подгруппа в P и $\Phi_1(P)$ – произвольная (возможно, единичная) подгруппа в $\Phi(P)$. В силу условия $P_3 \subseteq \Phi(P)$ и леммы 1 (пункты (4), (6)) имеем перестановочность каждой 4-максимальной подгруппы группы G со всеми ее 2-максимальными подгруппами. Теорема доказана.

Следующая теорема описывает строение групп Шмидта G, в которых каждая 2-максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая* 2-*максимальная подгруппа $F(G)$-перестановочна со всеми* 4-*максимальными подгруппами из G, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta$ для $\alpha + \beta \leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(2) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q^2$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная* 2-*максимальная подгруппа в P*;

(3) *$G = [P]Q$, где $|Q| = q$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $P_3 \subseteq \Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P.*

Доказательство

Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, легко показать справедливость теоремы 4. Теорема доказана.

Непосредственным следствием теорем 3 и 4 является следующий результат.

Следствие 2. *Пусть G – группа Шмидта и $X = F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *каждая* 2-*максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми ее* 4-*максимальными подгруппами*;

(2) *каждая* 2-*максимальная подгруппа группы G X-перестановочна со всеми ее* 4-*максимальными подгруппами*.

Обзор литературы по теории n-максимальных подгрупп показывает, что строение конечной группы тесно связано со свойствами ее n-максимальных подгрупп (при фиксированном n) и изучение группы по свойствам ее n-максимальных подгрупп является эффективным инструментом к анализу общей проблемы классификации групп по заданным свойствам ее подгрупп. Кроме того, в настоящее время теория обобщенно максимальных подгрупп является весьма развитым учением, обогащенным большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Вместе с тем имеется и ряд открытых задач в данном направлении. Решение части из них приведено в данной работе. В частности, изучены новые свойства групп Шмидта при условии перестановочности и обобщенной перестановочности их n-максимальных подгрупп для $n = 1, 2, 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37 – 39.

2. Hall, P. On the Sylow systems of a soluble groups / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1937. – № 43(2). – P. 507 – 528.
3. Arad, Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M.B. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234 – 246.
4. Го, В. X-перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742 – 759.
5. Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31 – 41.
6. Legchekova, H.V. Finite groups with *X*-permutable 2-maximal and 3-maximal subgroups / H.V. Legchekova // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 25 – 29.
7. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50(1). – P. 827 – 841.
8. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161 – 169.
9. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(36). – С. 12 – 32.
10. Guo, W. *X*-permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Ukrain. Math. J. – 2006. – Vol. 58, № 10. – P. 1471 – 1480.
11. Wall, G. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G. Wall // Israel J. Math. – 1982. – Vol. 43. – P. 166 – 168.
12. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson // Canadian J. Math. – 1971. – Vol. 23. – P. 562 – 564.
13. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982. – 382 p.
14. Guo, W. On primitive subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Indian J. Pure appl. Math. – Vol. 37(6). – P. 369 – 376.
15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
16. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила 05.09.2011

THE STRUCTURE OF A SCHMIDT GROUPS IN WHICH WITH FIRST, SECOND AND FOURTH MAXIMAL SUBGROUPS ARE GENERALIZED PERMUTABLE

N. HUTSKO, Yu. LUCENKO

Let G be a finite group. A subgroup H of group G is said to be X-permutable in G (generalized permutation) where X is a non-empty subset of G if for any subgroup T of G there exists an element x of X such that $HT^x = T^xH$. The structure of a finite group is closely linked to conditions imposed on the maximal subgroups, Sylow subgroups of the group or the Sylow subgroups of some selected subgroups of the group. In particular, we describe the structure of a Schmidt groups in which every maximal subgroup (generalized) permutes with every 4-maximal subgroup, or every 2-maximal subgroup (generalized) permutes with every 4-maximal subgroup.