5. ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ

5.1. Прямая линия, перпендикулярная плоскости

Прямая линия перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости (рис. 5.1).

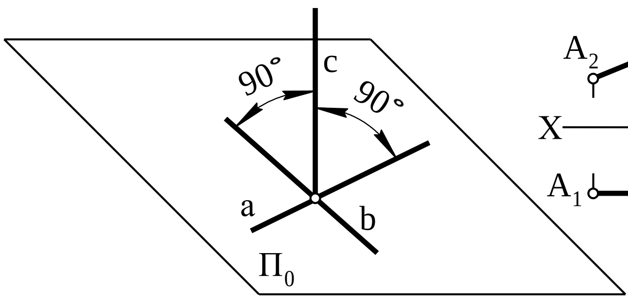

Рис. 5.1.

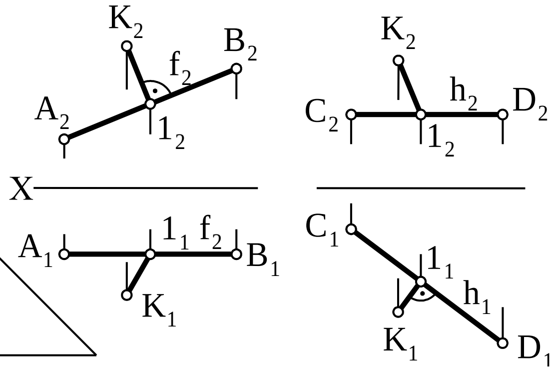

Рис. 5.2

На комплексном чертеже легко построить проекции прямого угла между прямой общего положения и линией уровня (фронталью, горизонталью). На основании свойств прямого угла, т.е. прямой угол проецируется в натуральную величину, например, на $П_2$, если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, т.е. является фронталью. Чтобы прямой угол проецировался на $П_1$ без искажения необходимо, чтобы одна из его сторон была параллельна $П_1$, т.е. должна быть горизонталью. На рис. 4.5 показано как проведен перпендикуляр из точки К к фронтали и горизонтали.

Если задать плоскость двумя пересекающимися прямыми, одна из которых будет фронталью, а вторая горизонталью и провести из точки A_2 перпендикуляр к A_2B_2, т.е. к фронтальной проекции фронтали, а из A_1 перпендикуляр к A_1D_1, т.е. к горизонтальной проекции горизонтали, то этот отрезок будет перпендикулярен к заданной плоскости $AB \cap AD$ (рис. 5.3).

Для того чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на чертеже ее горизонтальная проекция была

перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой – перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали.
В случае, если плоскость задана следами, то, учитывая, что горизонтальная проекция горизонтали (h_1) всегда параллельна горизонтальному следу $Г_1$, а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу $Г_2$, то чтобы из точки К ($К_1$, $К_2$) провести прямую перпендикулярно к плоскости Г (рис.5.4), необходимо его горизонтальную проекцию провести перпендикулярно к горизонтальному следу $Г_1$, а фронтальную проекцию – перпендикулярно к фронтальному следу $Г_2$.

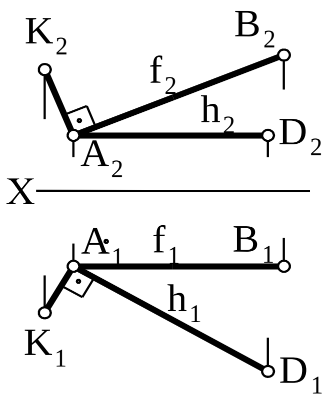

Рис. 5.3

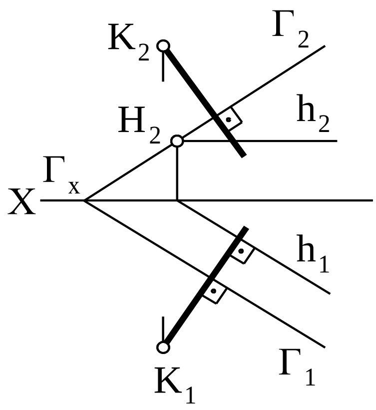

Рис. 5.4

5.2. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны:

- если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости (рис. 5.5);
- если одна из плоскостей проходит перпендикулярно к прямой, расположенной в другой плоскости (рис. 5.6).

Иными словами, две плоскости взаимно перпендикулярны, если имеется возможность провести прямую, принадлежащую одной плоскости и одновременно перпендикулярную к другой плоскости.

В первом случае (рис. 5.5) плоскость Р перпендикулярна к плоскости Г, так как проходит через отрезок АМ, перпендикулярный к плоскости Г. На рис. 5.6 также плоскость Р перпендикулярна к плоскости Г, так как проходит перпендикулярно отрезку АВ, принадлежащему плоскости Г.

Рассмотрим построение взаимно перпендикулярных плоскостей на чертеже. Пусть требуется провести плоскость через отрезок прямой DE (D_1E_1, D_2E_2) перпендикулярную плоскости, заданной треугольником ABC ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$). Задача будет решена, если из точки D отрезка DE провести прямую перпендикулярно к треугольнику ABC (рис. 5.7). Для этого в треугольнике ABC проводим фронталь и горизонталь. Затем из точки D_1 проводим перпендикуляр D_1K_1 к h_1 (горизонтальная проекция горизонтали), а из точки D_2 перпендикуляр D_2K_2 к f_2 (фронтальная проекция фронтали). Таким образом, плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми ($KD \cap DE$) перпендикулярна к треугольнику ABC, т.к. проходит к нему через перпендикуляр DK.

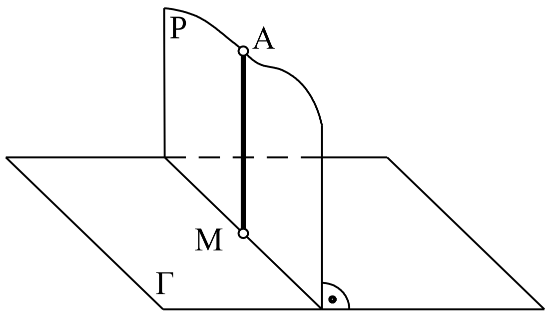

Рис. 5.5

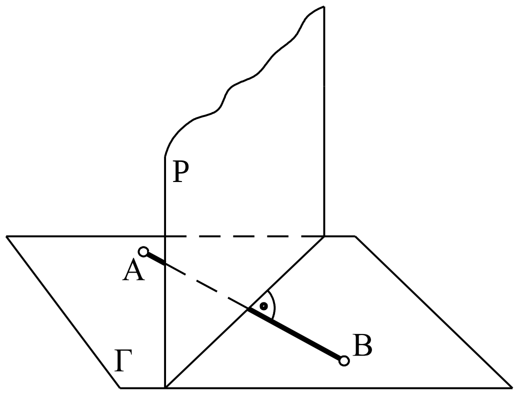

Рис. 5.6

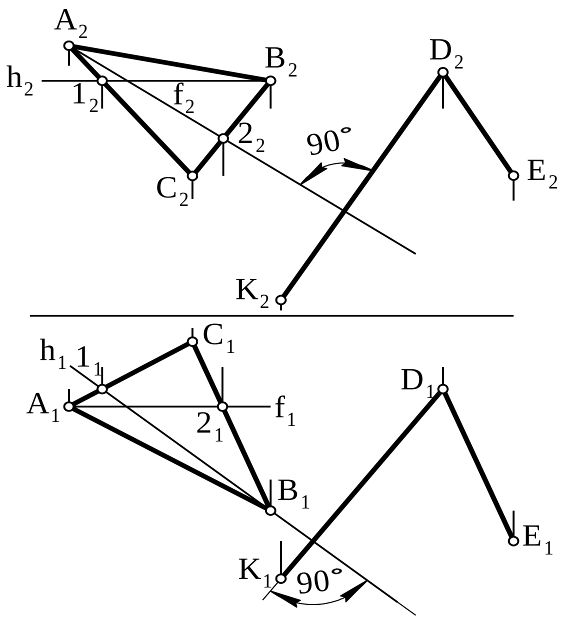

Рис. 5.7

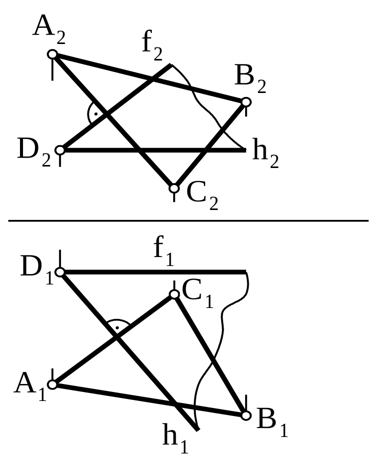

Рис. 5.8

Рассмотрим второй случай, пусть требуется из точки D провести плоскость, перпендикулярно к стороне AC треугольника ABC (рис. 5.8). Иными словами, чтобы сторона AC была перпендикулярна к новой плоскости, проходящей через точку D, т.е. A_1C_1 должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (h_1), а A_2C_2 – перпендикулярна фронтальной проекции фронтали f_2 новой плоскости ($h \cap f$). Поэтому из точки D_1 проводим h_1 перпендикулярно к A_1C_1 (h_2 пройдет параллельно оси X), а из точки D_2 проводим перпендикуляр к f_2 (f_1 пройдет параллельно оси X). Данные плоскости взаимно перпендикулярны, т.к. плоскость ($f \cap h$) проходит перпендикулярно к стороне AC треугольника ABC.

На приведенных примерах рис. 5.9 и рис. 5.10 изображены взаимно перпендикулярные плоскости, которые заданы треугольником ABC и следами плоскости.

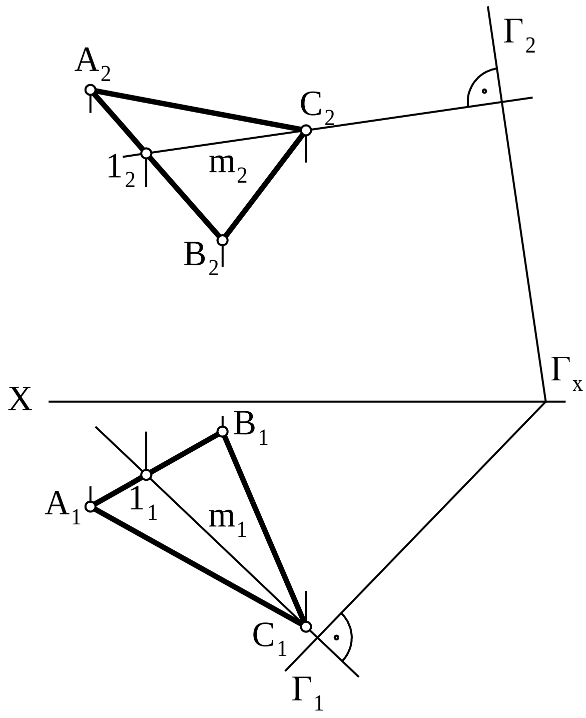

Рис. 5.9

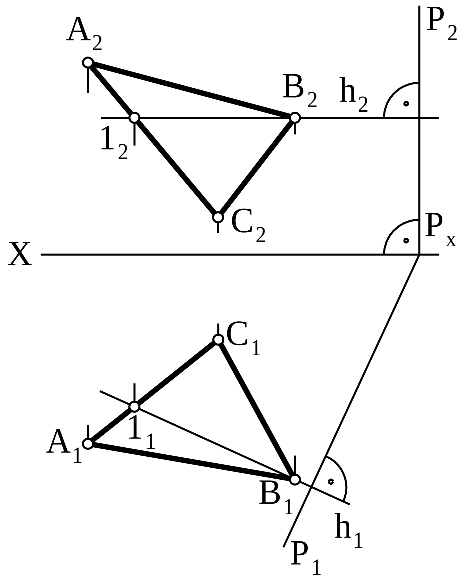

Рис. 5.10

Плоскость Г перпендикулярна к плоскости треугольника ABC (рис. 5.9). Она проходит перпендикулярно к прямой m, лежащей в этой плоскости ($Г_1 \perp m_1$ и $Г_2 \perp m_2$).

Плоскость P также перпендикулярна к плоскости треугольника ABC (рис. 5.10), так как она перпендикулярна горизонтали h (h_1, h_2), т.е. $P_1 \perp h_1$, а $P_2 \perp h_2$. Одновременно она еще перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, т.е. является горизонтально-проецирующей плоскостью.

Следует также отметить, что перпендикулярность горизонтальных следов плоскости общего положения Р и горизонтально-проецирующей Г (рис. 5.11) соответствует взаимной перпендикулярности этих плоскостей.

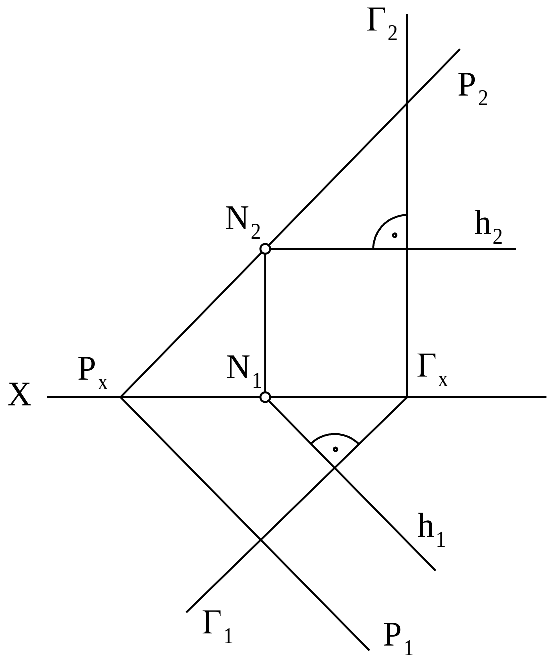

Рис. 5.11

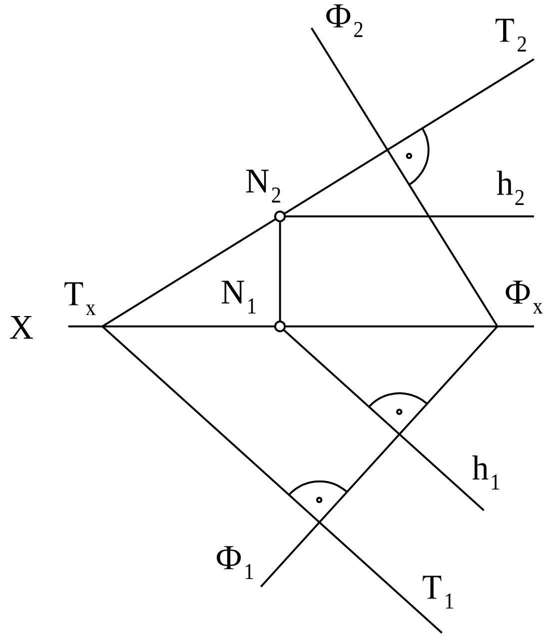

Рис. 5.12

Это легко доказать, если попытаться провести прямую, принадлежащую плоскости Р и перпендикулярно к плоскости Г. Такой прямой является горизонталь, которая проведена через точку N (N_1, N_2), взятую на следе плоскости P_2 ($h_1 \perp P_1$ и $h_2 \perp P_2$).

Перпендикулярность фронтальных следов плоскости общего положения и фронтально-проецирующей также дает основание утверждать о перпендикулярности этих плоскостей. Доказательство аналогичное.

Однако если одноименные следы двух плоскостей общего положения перпендикулярны между собой, то такие плоскости не перпендикулярны (рис. 5.12), т.к. здесь не соблюдается условие перпендикулярности плоскостей. Невозможно провести прямую, принадлежащую одной плоскости, например Т и перпендикулярно ко второй плоскости Ф. Если взять в плоскости Т горизонтальную проекцию прямой и провести ее перпендикулярно горизонтальному следу $Ф_1$, то это будет горизонтальная проекция горизонтали, а фронтальная проекция горизонтали должна быть проведена параллельно оси X, т.е. не перпендикулярно $Ф_2$.

5.3. Взаимно перпендикулярные прямые

Как известно, легко построить прямой угол между прямой общего положения и прямой уровня (фронталью, горизонталью).

Чтобы построить две взаимно перпендикулярные прямые общего положения необходимо предварительно выполнить дополнительные построения, т.к. прямой угол между такими прямыми проецируется на плоскости проекций с искажением.

Пусть требуется из точки А (рис. 5.13) провести перпендикуляр к прямой общего положения b (b_1, b_2).

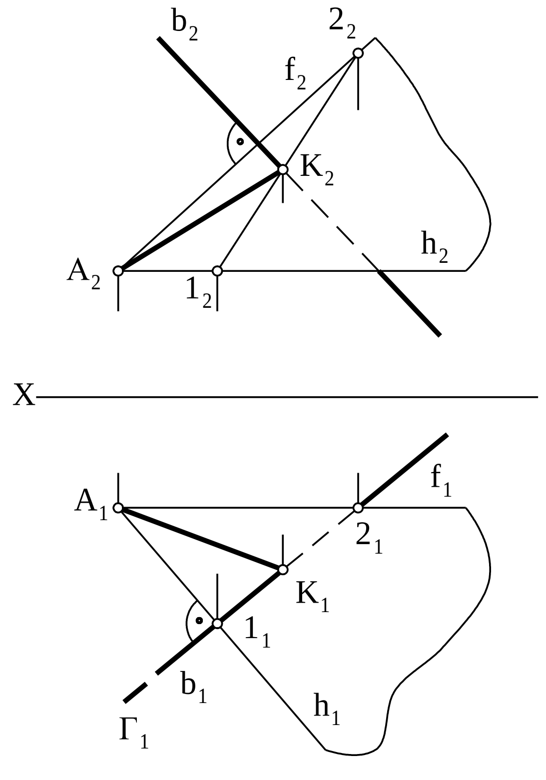

Рис. 5.13

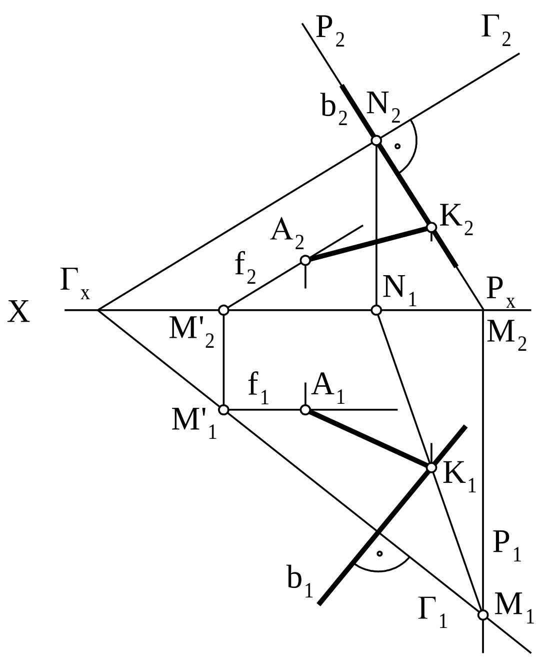

Рис. 5.14

Для решения задачи необходимо выполнить следующее:

- из точки А провести плоскость, заданную $f \cap h$ перпендикулярно к прямой b;
- определить точку пересечения К прямой b с плоскостью ($f \cap h$).

Для чего нужно заключить прямую b в проецирующую плоскость, например, горизонтально-проецирующую плоскость Г (след $Г_1$) и найти линию их пересечения (1, 2). На этой линии находится точка К (K_1, K_2)

пересечения прямой b с плоскостью ($f \cap h$). Соединив точки А и К получим искомый отрезок АК (A_1K_1, A_2K_2), перпендикулярный прямой b, так как он находится в плоскости перпендикулярной к прямой b.

На рис. 5.14 приведено решение задачи на проведение через точку А (A_1, A_2) прямой линии перпендикулярной к прямой общего положения b (b_1, b_2). Здесь в качестве плоскости, перпендикулярной к прямой b проведена плоскость Г, заданная следами $Г_1$ и $Г_2$. Для ее построения применена фронталь f (f_1, f_2), проведенная через точку А и перпендикулярно к прямой b ($f_2 \perp b_2$). Определив горизонтальный след фронтали M'_1, проводим через него горизонтальный след плоскости $Г_1$, перпендикулярно b_1. Фронтальный след $Г_2$ проводим перпендикулярно к b_2. Определив линию пересечения MN (M_1N_1, M_2N_2) двух плоскостей Г и Р, находим точку К пересечения прямой b с плоскостью Г. Отрезок АК (A_1K_1, A_2K_2) является перпендикуляром к прямой b.