

10. КРИВЫЕ ЛИНИИ

10.1. Общие сведения о кривых линиях

10.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике

7.1. Общие сведения о кривых линиях

Линию можно рассматривать как множество последовательных положений движущейся точки – траекторию точки. *Кривая* – разновидность линии, которая получается, когда движущаяся точка изменяет направление своего движения. Кривая линия может являться результатом пересечения кривой поверхности плоскостью или кривых поверхностей между собой.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривую называют *плоской*, в противном случае – *пространственной*.

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая (плоская или пространственная), необходимо определить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

Кривые линии разделяют на алгебраические (определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями) и трансцендентные (определяемые неалгебраическими уравнениями). Порядком алгебраической кривой называют наибольшую степень ее уравнения. Геометрический порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой линией, а пространственной кривой – наибольшим числом точек пересечения ее с плоскостью. При проецировании порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется. Все плоские кривые разделяются на циркульные, состоящие из сопряженных дуг окружностей (их проводят при помощи циркуля), и лекальные, вычерчиваемые с помощью лекала по предварительно построенным точкам.

Кривая линия как траектория движущейся точки должна быть непрерывной. Движущаяся точка в любом положении должна иметь определенное направление движения. Это направление указывает прямая (касательная), проходящая через рассматриваемую точку.

Длина отрезка кривой линии определяется в общем случае как сумма длин отрезков вписанной в нее ломаной линии, с заданной точностью передающей форму кривой.

Касательной t к кривой линии называется прямая, представляющая собой предельное положение секущей (рис. 10.1).

Нормалью n называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в этой точке ее касания (рис. 10.1).

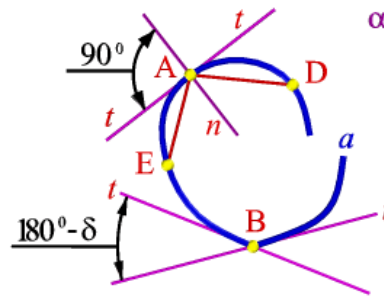


Рис. 10.1

Движение точки вдоль кривой a связано с изменением двух величин (рис.10.2):

- расстояния S , на которое удалена точка от начального положения;
- угла α поворота касательной относительно начального положения.

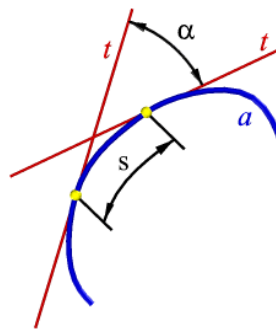


Рис.10.2

Угол α (угол смежности) между касательными в двух бесконечно близких точках кривой, отнесенный к длине дуги между этими точками, определяет *кривизну* кривой.

Кривизна прямой в любой её точке равна нулю.

Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называется *гладкой (плавной)* (точка A на рис. 10.1).

Кривая, состоящая только из одних гладких точек, называется *гладкой (плавной) кривой*.

Точка кривой называется *обыкновенной*, если при движении точки по кривой направление движения точки по кривой и направление поворота касательной не изменяются.

Точки, не отвечающие этим требованиям, называются *особыми*. К особым точкам кривой относятся следующие (рис. 10.3):

- 1) Точка излома B – кривая в этой точке имеет две полукасательные.
- 2) Точка перегиба C – касательная пересекает кривую.
- 3) Точка возврата первого рода F (точка заострения) – полукасательные совпадают.
- 4) Точка возврата второго рода D (вершина клюва) – полукасательные совпадают.

5) Узловая точка – точка А, в которой кривая пересекает сама себя и имеет две касательные.

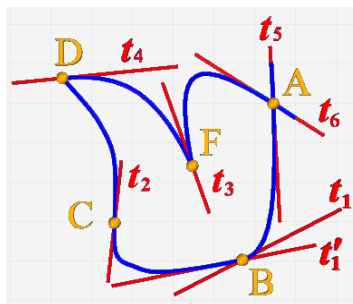


Рис. 10.3

Свойства ортогональных проекций кривой линии:

1. Проекцией кривой линии является кривая линия.
2. Касательная к кривой линии проецируется в касательную к её проекции.
3. Число узловых точек (в которых кривая пересекает сама себя) проекции равно числу узловых точек самой кривой.

7.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике

Рассмотрим построение некоторых плоских алгебраических кривых (эллипса, гиперболы, параболы), трансцендентных (спираль Архимеда, эвольвенту окружности, синусоиду), а также пространственных винтовых линий.

Эллипс (рис. 10.4) – плоская замкнутая кривая, у которой сумма расстояний от любой ее точки (например, от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) есть величина постоянная, равная большой оси эллипса AB ($F_1M + F_2M = AB$). Отрезок CD – малая ось эллипса, точка O – центр эллипса. Точки F_1 и F_2 расположены на большой оси AB симметрично относительно точки O и удалены от концов малой оси (точек C и D) на расстояние, равное половине большой оси эллипса. Существует ряд способов построения эллипса. Наиболее просто построить эллипс по двум его осям при помощи вспомогательных окружностей (рис. 10.5). Из центра проводят две окружности радиусами, равными половине большой и малой осей. Большую окружность делят на 12 равных частей и точки деления соединяют с точкой O .

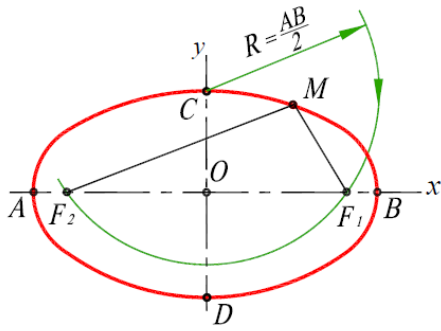


Рис. 10.4

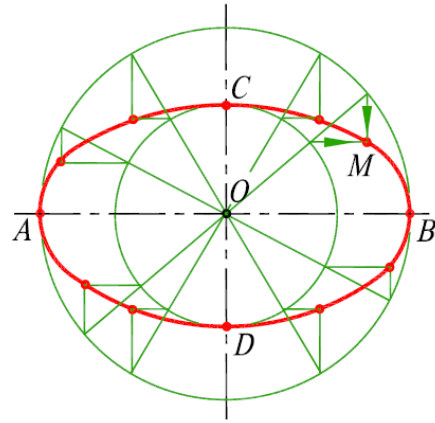


Рис. 10.5

Через точки деления меньшей окружности проводят прямые, параллельные большой оси эллипса, а через точки деления большей окружности – прямые, параллельные малой оси. Точки пересечения (например, точка M) соединяют плавной кривой. Окружность – частный вид эллипса, у которого полуоси равны между собой и являются радиусом окружности.

Гипербола (рис. 10.6) – кривая, у которой разности расстояний от любой ее точки (например, от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная AB . Гипербола имеет две ветви, действительную ось x и мнимую ось y , центр O , вершины A и B . На рис. 7.4 показано построение точки M гиперболы по действительной оси AB и фокусам F_1 и F_2 . Из фокусов, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусом R и $R + AB$. Точка их пересечения является точкой гиперболы. Изменяя радиус R и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

Парабола (рис. 10.7) – кривая, каждая точки которой (например, точка M) равноудалена от заданной точки F (фокуса) и прямой d (директрисы), ($FM = NM$). Расстояние FO от фокуса F до директрисы d – параметр параболы (P), x – ось параболы, точка A – вершина параболы.

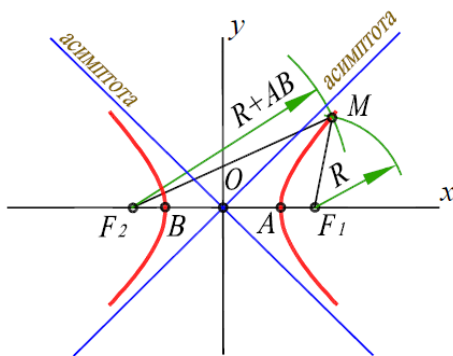


Рис. 10.6

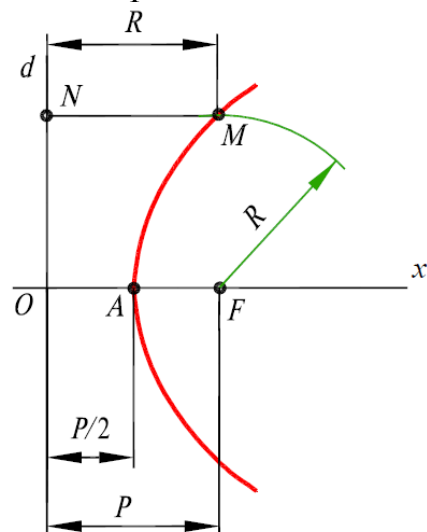


Рис. 10.7

На рис. 10.7 показано построение точки M параболы по заданным фокусу (F) и директрисе (d). Из фокуса F делаем засечку дугой радиуса R на прямой, удаленной от директриссы d на расстояние R , причем $R > P/2$. Изменяя величину R и повторяя построения, получаем новые точки параболы.

Спираль Архимеда (рис. 10.8) – кривая, которую описывает точка, равномерно вращающаяся вокруг неподвижной точки (полюса O) и одновременно равномерно удаляющаяся от него. Расстояние OA , пройденное точкой от полюса O при повороте на 360° – шаг спирали. Точки, принадлежащие спирали Архимеда, строят исходя из определения кривой, задавая шаг OA и направлением вращения.

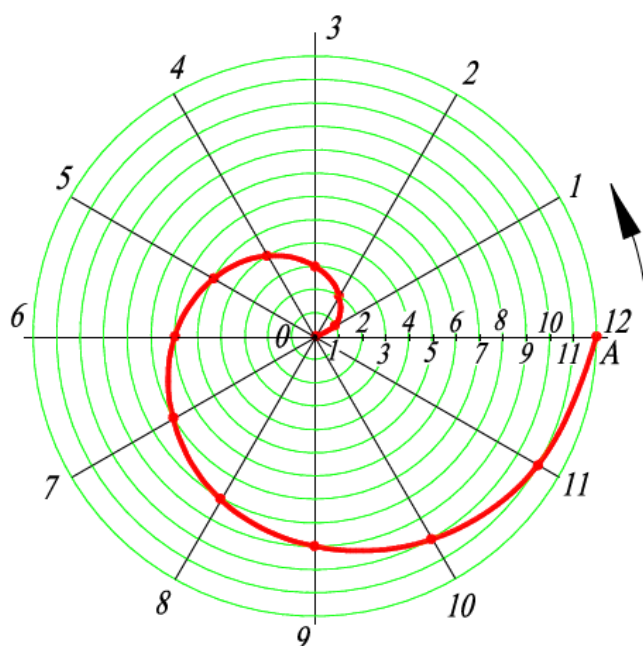


Рис. 10.8

Эвольвента окружности (рис. 10.9) – кривая, образуемая точками касательной прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности. На рис. 7.7. показано построение эвольвенты окружности диаметра D в указанном направлении и начальном положении точки A (точка A_0). Через точку A_0 проводим касательную к окружности и на ней откладываем длину заданной окружности D . Полученный отрезок и окружность делят на одинаковое число частей (12) и через точки деления окружности проводят в одном направлении касательные к ней. На каждой касательной откладывают отрезки $1A_1, 2A_2, 3A_3$ и т. д., равные соответственно A_01, A_02, A_03 и т. д. Полученные точки соединяем плавной кривой.

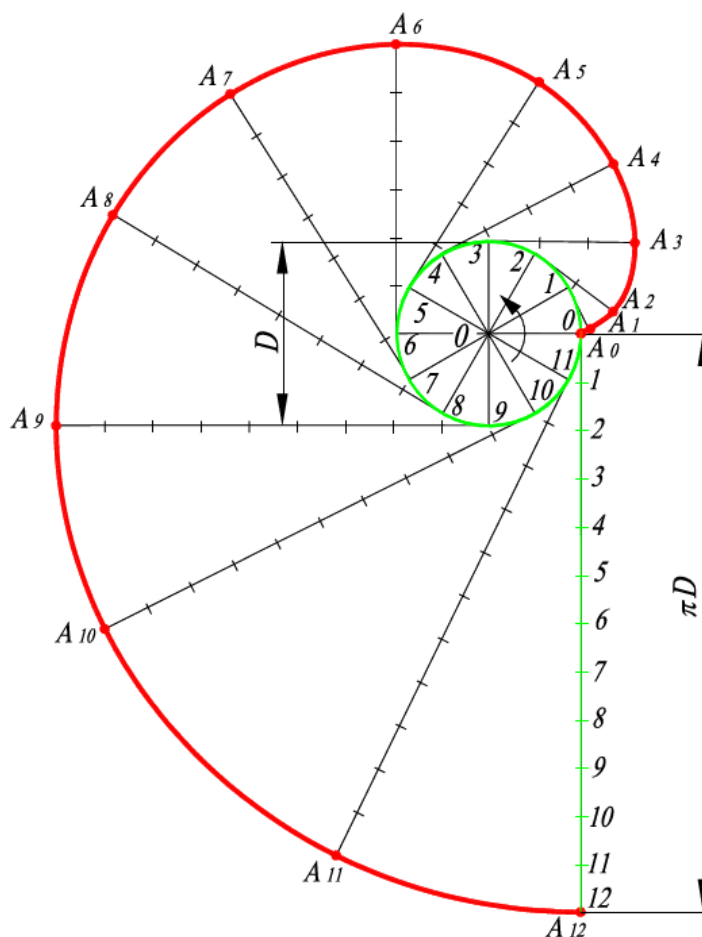


Рис. 10.9

Синусоида (рис. 10.10) – кривая, характеризующая изменение синуса угла в зависимости от величины центрального угла.

Расстояние между крайними точками синусоиды по высоте, равное диаметру производящей окружности, называется амплитудой. Расстояние $T = 2R$ – шаг синусоиды. Построение точек синусоиды ($A, A_1, A_2, \dots, A_{12}$) показано на рис. 10.10.

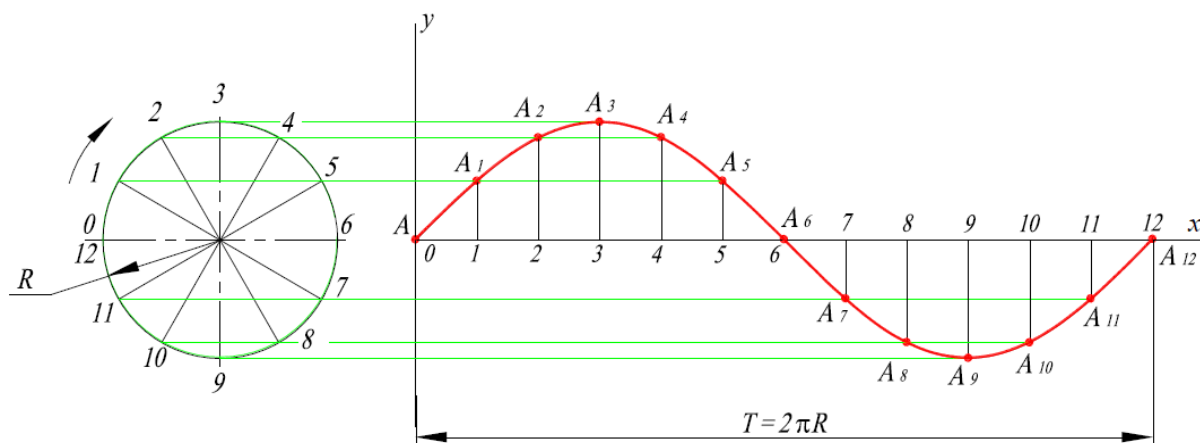


Рис. 10.10

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности цилиндра вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси цилиндра и поступательного движения вдоль образующей цилиндра (рис. 10.11). Шаг винтовой линии (P) – расстояние между двумя ее соседними витками в направлении, параллельном оси. Для построения цилиндрической винтовой линии делим окружность основания цилиндра и шаг P винтовой линии на равное число частей (12). Определяем соответствующие фронтальные проекции перемещаемой точки (A_0, A_1, \dots, A_{11}) и соединяем их плавной кривой. Горизонтальная проекция цилиндрической винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. Разверткой цилиндрической винтовой линии ($A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$) является прямая.

Различают правые и левые винтовые линии. У правой подъем слева вверх направо, у левой – справа вверх налево. Коническая винтовая линия (рис. 10.12) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности конуса вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси конуса и поступательного движения вдоль образующей конуса. Шаг конической винтовой линии (P) – величина прямолинейного перемещения точки в направлении оси конуса при полном обороте вокруг оси. Для построения проекций конической винтовой линии разделим окружность основания конуса и шаг P на равное число частей (12). Проводим проекции образующих конуса и определим на них положение соответствующих проекций точек $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$ и соединим их плавной кривой. Горизонтальная проекция винтовой линии – спираль Архимеда, а фронтальная – затухающая синусоида (синусоида с уменьшающейся амплитудой).

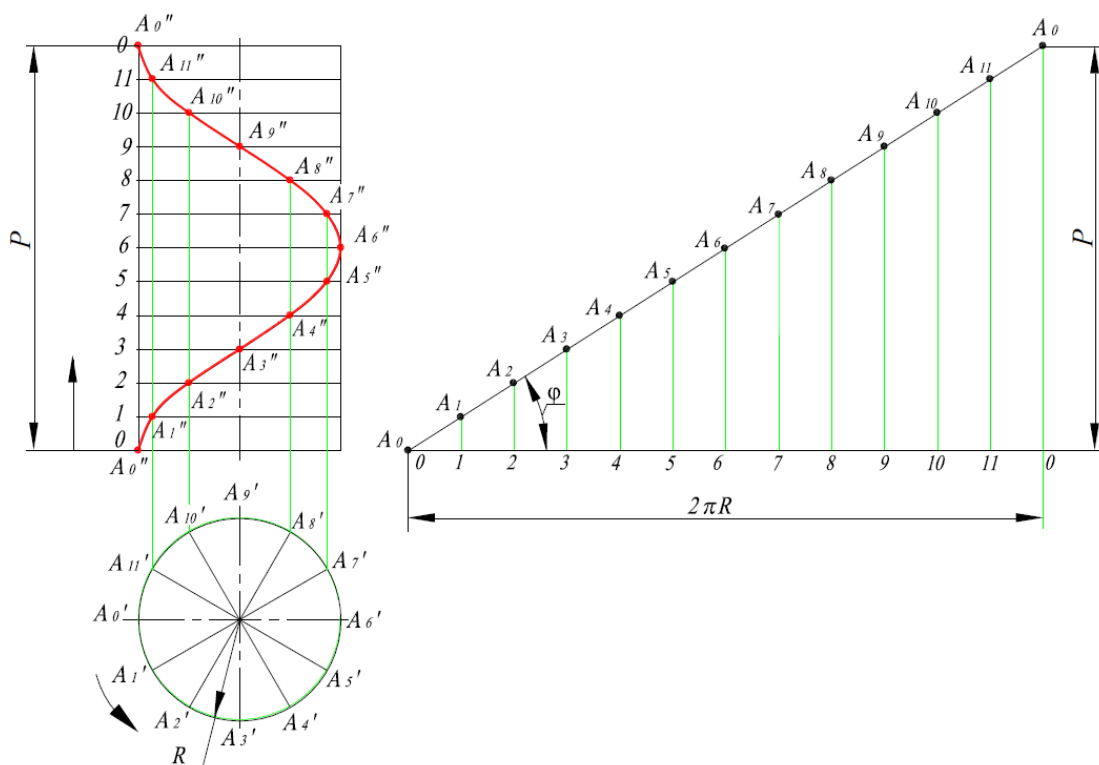


Рис. 10.11

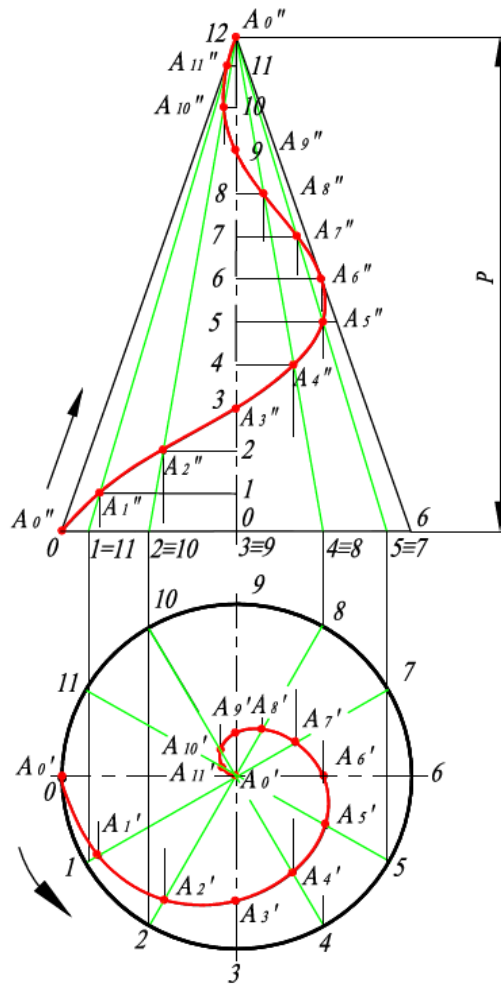


Рис. 10.12