

## СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 624.074.5.012.45.041.5(043)

### МЕТОДИКА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*д-р техн. наук, проф. Д.Н. ЛАЗОВСКИЙ,  
канд. техн. наук Д.О. ГЛУХОВ, канд. техн. наук О.Н. ЛЕШКЕВИЧ,  
(Полоцкий государственный университет)*

*Предложена методика расчета статически неопределимых железобетонных стержневых конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности деформирования. Приведены основные соотношения, позволяющие осуществлять статический расчет систем с переменными жесткостями по длине элементов, а также учитывать геометрически нелинейные эффекты, вызванные отклонением физической оси элементов. Предложенная методика апробирована экспериментально и реализована в компьютерных программах, которые предоставляют проектировщику комплексное решение по расчету стержневых железобетонных конструкций в соответствии с требованиями проекта строительных норм Беларуси СНБ 5.03.01 «Конструкции бетонные и железобетонные. Нормы проектирования».*

Стержневые железобетонные конструкции получили широкое распространение в промышленном и гражданском строительстве и включают значительную номенклатуру изделий – от простых статически определимых балок и колонн до пространственных статически неопределимых железобетонных каркасов. Одним из путей снижения расхода материала в стержневых железобетонных конструкциях является разработка методов расчета, в которых наряду со специфическими свойствами железобетона – трещинами, анизотропией, неупругими свойствами бетона и арматуры – учитывались бы также особенности работы статически неопределимых конструкций, связанные с перераспределением усилий и с влиянием деформированной расчетной схемы. Развитие методов расчета статически неопределимых строительных конструкций ограничивалось возможностью их реализации при современном уровне производительности массовой вычислительной техники. Расчет статически неопределимой пространственной стержневой железобетонной конструкции с учетом диаграмм деформирования бетона и арматуры, образования и развития трещин в сечении, изменения местоположения физической оси элемента, влияния деформирования расчетной схемы и других факторов предоставляет проектировщику полную информацию о напряженно-деформированном состоянии конструкции в целом и о любой элементарной площадке произвольного поперечного сечения, что позволит осуществлять разработку и экспертизу проектных решений с более высокой степенью надежности. Наиболее важным направлением совершенствования методов расчета является повышение их универсальности. Важно, чтобы алгоритм не накладывал ограничения на вид напряженно-деформированного состояния, форму поперечного сечения элементов, армирование, свойства бетона и арматуры, геометрию расчетной схемы, граничные условия и т.д. Реализация данных возможностей требует не только значительного усовершенствования существующих методик, но и решения ряда новых задач.

Для получения необходимых опытных данных была изготовлена пространственная железобетонная статически неопределимая шарнирно-неподвижная опертая железобетонная рама (рис. 1).

Рама изготавливалась из отдельных элементов размером  $1900 \times 120 \times 120$  мм путем соединения ручной дуговой сваркой закладных деталей с помощью стальных накладок в торцах элементов. Продольная арматура объединялась в пространственный каркас, изготовленный при помощи контактно-точечной сварки. Армирование элементов –  $4\varnothing 10\text{Aт}500\text{С}$  (рис. 2); характеристики арматуры:  $f_y = 535$  МПа,  $f_t = 624$  МПа,  $E_s = 200000$  МПа; характеристики бетона:  $f_c = 23,8$  МПа,  $E_c = 30500$  МПа. Поперечная арматура устанавливалась с шагом 50 мм по всей длине каркаса. Сосредоточенная нагрузка  $P$  прикладывалась к противоположащим ригелям рамы соответственно в середине и в трети пролета.

Эксперимент обеспечил получение необходимых данных о деформировании статически неопределимой пространственной рамы. В процессе испытания контролировались следующие параметры: прогибы ригелей и стоек рамы, деформации бетона на некоторых участках элементов (преимущественно в зоне действия максимальных моментов), горизонтальные опорные реакции, ширина раскрытия трещин и их развитие по поперечному сечению. Геометрическая форма экспериментальной рамы в плане и схема приложения внешней нагрузки позволили получить по два элемента рамы, находящиеся в идентичном напряженно-деформированном состоянии.

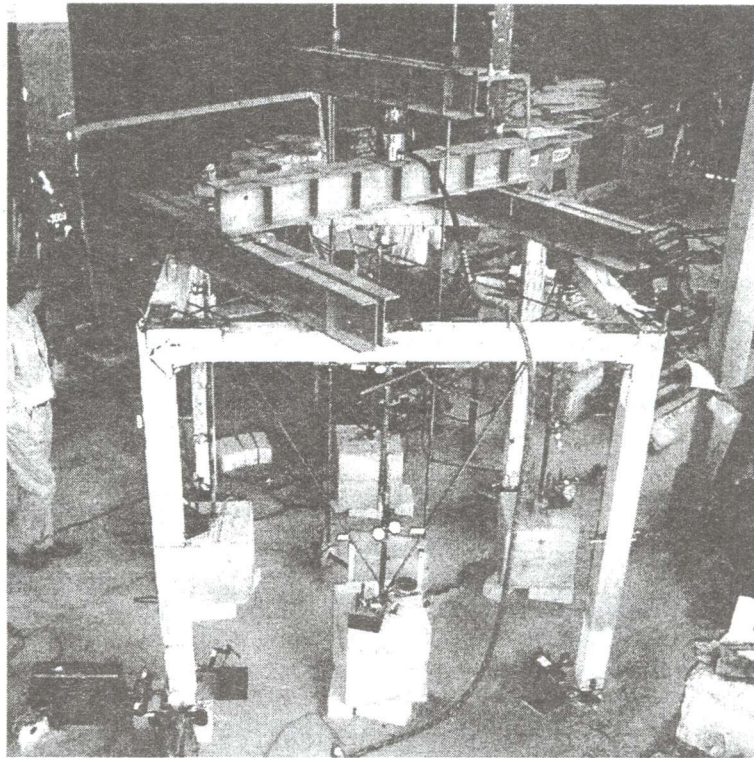


Рис. 1. Общий вид экспериментальной рамы и испытательной установки

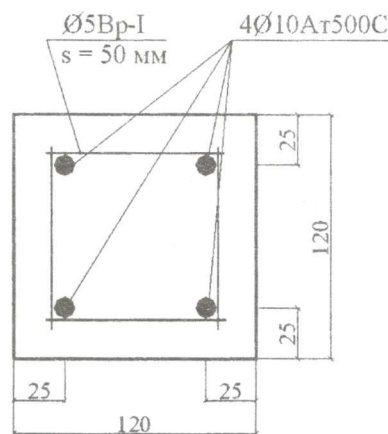


Рис. 2. Поперечное сечение элементов рамы

Для анализа сечения, нормального к продольной оси элементов, используем деформационную модель расчета, которая позволяет определять жесткость стержневых элементов при любой комбинации внутренних усилий  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $\varpi$ , где  $B_x$  и  $B_y$  – изгибная жесткость относительно осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $\varpi$  – продольная жесткость.

Рассматривая поперечное сечение как совокупность элементарных площадок, продольную жесткость элемента получаем, суммируя жесткость всех элементарных площадок сечения. Компоненты изгибной жесткости элемента вычисляются из выражений, связывающих составляющие кривизны продольной оси с изгибающими моментами.

Алгоритм определения параметров напряженно-деформированного состояния и компонентов жесткости железобетонных элементов предусматривает реализацию итерационного процесса их вычисления при заданном усилии от внешней нагрузки. Критерием окончания процесса последовательных приближений является заданная точность вычисления на смежных этапах кривизны продольной оси элементов и положения центра изгиба сечения.

Влияние величины внутренних усилий на жесткость элемента по нормальному сечению получено в результате численного эксперимента, демонстрирующего зависимость жесткости элементов экспериментальной рамы от сосредоточенной нагрузки на конструкцию. В соответствии с изложенной выше методикой было получено распределение значений изгибной (рис. 3) и продольной жесткостей (рис. 4) при фактической комбинации внутренних усилий в соответствующих элементах при действии на раму сосредоточенной нагрузки  $P$ .

В ригеле рамы при действии преимущественно изгибающего момента в одной плоскости нормальная трещина образуется после того, как изгибная жесткость элемента снизилась на  $\approx 40\%$  от первоначального уровня. Полное снижение изгибной жесткости ригеля составило  $\approx 75\%$ . Продольная сжимающая сила в стойке несколько нивелирует снижение ее изгибной жесткости, нормальная трещина образуется при большей величине изгибной жесткости. График изменения продольной жесткости стойки характеризуется снижением в начале нагружения, далее – наличием горизонтального участка перед образованием трещины, переломом в точке образования нормальной трещины, значительным снижением во время развития трещины по высоте сечения и некоторой стабилизацией процесса вплоть до разрушения конструкции.

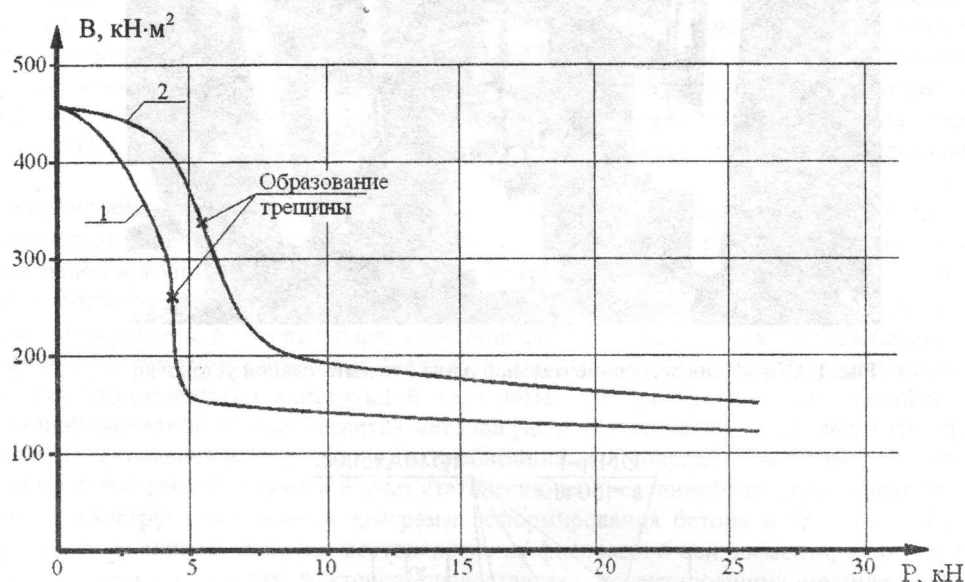


Рис. 3. Зависимость изгибной жесткости наиболее нагруженного ригеля (кривая 1) и наиболее нагруженной стойки на отметке 1,450 м (кривая 2) от сосредоточенной нагрузки на раму

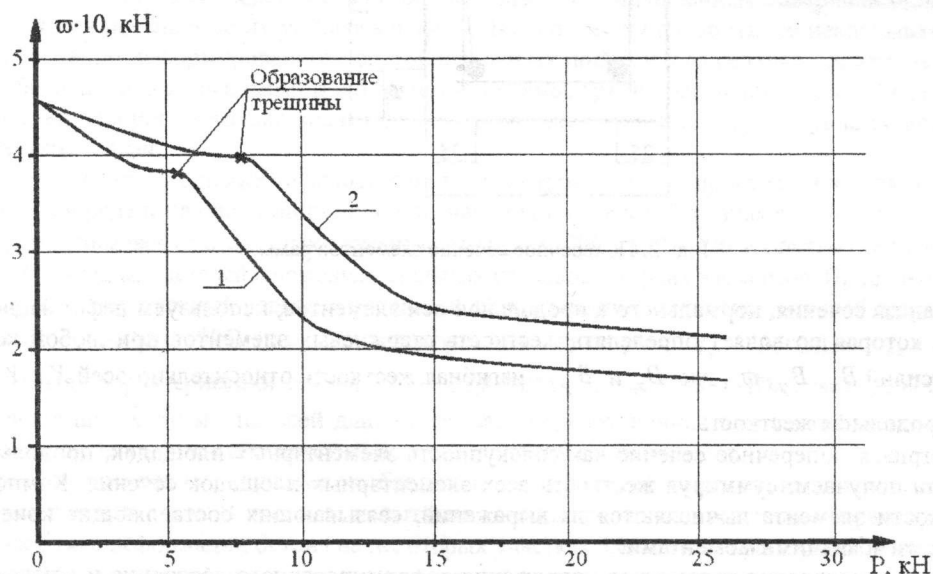


Рис. 4. Зависимость продольной жесткости наиболее нагруженной стойки на отметке 1,450 м (кривая 1) и на отметке 0,900 м (кривая 2) при совместном действии двух изгибающих моментов и продольной силы от сосредоточенной нагрузки на раму



Результаты численных экспериментов свидетельствуют о существенной изменчивости жесткостных свойств железобетонного элемента при различных комбинациях внутренних усилий. Снижение жесткости железобетонного элемента в равной степени происходит вследствие образования нормальных трещин и отличия показателей диаграмм деформирования бетона на растяжение и сжатие. С увеличением продольного сжимающего усилия изгибные жесткости первоначально возрастают, достигнув некоторого максимального значения, далее с ростом нагрузки плавно снижаются. Рост изгибающего момента снижает не только соответствующую ему составляющую изгибной жесткости, но также и смежную составляющую. При некоторых значениях продольной сжимающей силы предельная величина изгибающего момента может возрастать. С ростом изгибающего момента продольная жесткость снижается более значительно при меньших значениях продольной силы.

Вычисление жесткостей элементов конструкции при действующих в них внутренних усилиях необходимо для определения напряженно-деформированного состояния железобетонной конструкции по методу конечных элементов. Основное уравнение метода конечных элементов для вычисления перемещений имеет вид:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{F\}, \tag{1}$$

где  $\{F\}$  – вектор внешней нагрузки;  $[K]$  – матрица жесткости системы.

Коэффициенты матрицы жесткости  $[K]$  вычисляются на основе деформационной модели сечения из выражений (1) при текущей комбинации внутренних усилий.

В общем случае нагружения при действии в железобетонном стержне изгибающих моментов и продольной силы элементарные площадки сечения находятся в различном напряженно-деформированном состоянии. Их деформационные характеристики различны, в связи с этим физическая ось элемента отклоняется от своего первоначального положения. Компоненты отклонения физической оси от действия продольной силы вычисляются при текущей комбинации внутренних усилий на основании касательных модулей деформации каждой элементарной площадки бетона и арматуры  $E'_{(c,s)i}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_x &= \frac{\sum_{i=1}^n E'_{(c,s)i} A_{(c,s)i} (x_{(c,s)i} - x_0)}{\sum_{i=1}^n E'_{(c,s)i} A_{(c,s)i}}, \\ \Delta_y &= \frac{\sum_{i=1}^n E'_{(c,s)i} A_{(c,s)i} (y_{(c,s)i} - y_0)}{\sum_{i=1}^n E'_{(c,s)i} A_{(c,s)i}}, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

где  $x_0, y_0$  – расстояния от выбранной оси до центра изгиба сечения;  $x_{(c,s)i}, y_{(c,s)i}$  – расстояния от центра тяжести элементарной площадки до центра изгиба сечения;  $A_{(c,s)i}$  – площадь элементарной площадки.

Корректировка координат узлов расчетной схемы на каждом этапе расчета производится путем суммирования перемещений узлов системы, полученных из уравнения (1), и отклонений физической оси конечных элементов, полученных из выражения (2).

Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии статически неопределимых нелинейно деформируемых конструкций усовершенствовано предложение В.М. Бондаренко [1] о двухуровневом итерационном алгоритме, суть которого в сочетании процессов внутренних и внешних итераций и решении задачи с помощью последовательных приближений. Данный алгоритм расчета пространственных рам не всегда обеспечивает гарантированную сходимость вследствие возможной «раскачки» искомых величин на соседних итерациях, т.е. расхождения численных значений внутренних усилий в ряде последовательных внешних итераций. Это явление наиболее сильно проявляется в общем случае нагружения. С тем чтобы уменьшить «раскачку» и получить решение с минимальным объемом вычислений, необходима организация итерационного процесса с плавно изменяющейся расчетной жесткостью элементов. Для того чтобы доверять полученному решению нелинейной задачи, необходимо повторить расчет с иным количеством шагов нагружения. Для этого введено понятие «макроитерационный процесс». Выполнение макроитераций подразумевает повторное (двух- или многократное) решение задачи с последующим сравнением полученных результатов. Операция осуществляется до получения решения с заданной точностью.

Таким образом, предлагаемый метод расчета статически неопределимых систем с учетом нелинейности деформирования включает в себя три итерационных процесса:

1) во внутренних итерациях – расчет по деформационной модели коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов при заданных внутренних усилиях, полученных в результате выполнения одной внешней итерации;

2) во внешних итерациях – статический расчет системы при заданных жесткостях элементов системы по методу конечных элементов, на каждой последующей итерации нагрузка ступенчато увеличивается;

3) полностью выполненный внешний итерационный процесс составляет одну макроитерацию. Переход на более высокий уровень происходит после выполнения всех необходимых итераций на нижележащем уровне. Обратный переход осуществляется после одного шага итерации на вышележащем уровне.

На первой внешней итерации матрица жесткости  $[K]_{(1)}$  определяется при нулевом значении внутренних усилий. Далее из решения системы уравнений (1) определяется первое приближение поля узловых перемещений  $\{\Delta\delta\}_{(1)}$  от действия нагрузки  $\{F\}_1$ . Вычисляются внутренние усилия  $\{\bar{F}\}_{(1)}$  элементов системы, на основании которых формируется матрица жесткости  $[K]_{(2)}$  для второй внешней итерации и т.д. В дальнейшем на  $j$ -той итерации матрица  $[K]_{(j)}$  строится на основе  $\{\bar{F}\}_{(j-1)}$ , из решения (1) определяется  $\{\delta\}_{(j)}$ , на основе которого снова вычисляется  $\{\bar{F}\}_{(j)}$  и т.д. Внешний итерационный процесс считается законченным, когда поэтапно приложена вся внешняя нагрузка  $\{F\}$ . Корректировка геометрии расчетной схемы, необходимая для учета перемещения узлов и отклонения физической оси элементов системы, осуществляется на каждой внешней итерации. Для этого на основе известных усилий в конечных элементах вычисляется поле отклонений физической оси (2) и суммируется с учетом направления с полем узловых перемещений (1) на предыдущей итерации.

Количество макроитераций, соответствующее решению с требуемой точностью, предлагается определять следующим образом:

- первоначально осуществляется внешний итерационный расчет с минимальным количеством шагов нагружения;
- осуществляется новый внешний итерационный расчет, количество этапов нагружения увеличивается;

- сравниваются два предыдущих результата на соответствие последнего заданной точности, если точность не обеспечивается, осуществляется новый внешний итерационный расчет с большим количеством этапов нагружения до тех пор, пока не выполнится условие требуемой точности. Проверка сходимости и оценка результатов по ожидаемой точности производится по всем сечениям и элементам.

Расчет считается законченным, когда на текущей и предыдущей макроитерациях значения жесткостей, усилий в элементах и перемещений узлов конструкции соответствуют заданной точности.

В рамках представленной методики предложен способ улучшения сходимости итерационного процесса путем усовершенствования известного метода «закрепления минимальных жесткостей». Данный метод модифицирован таким образом, чтобы стало возможным применение его в отношении пространственных конструкций, имеющих в своем составе элементы в общем случае нагружения.

При применении метода конечных элементов для расчета конструкций матрицы жесткости элементов строятся из предположения о постоянстве деформативных свойств материалов в пределах каждого элемента. Это требует довольно густой сетки, вызывающей значительный рост разрешающей системы уравнений, поэтому оптимальное разбиение на конечные элементы имеет большое значение для расчетов железобетонных конструкций. С тем чтобы обеспечить необходимую точность расчета при минимально возможном количестве уравнений системы, важно оценить минимально необходимое количество конечных элементов на один стержень. Для анализа влияния дискретизации расчетной схемы на результаты расчета по нелинейной модели статически неопределимых конструкций были произведены сравнительные расчеты рам (Ernst, Smith, Riveland & Pierce, 1973) [2] по расчетной схеме, в которой каждый стержень включал от 1 до 10 конечных элементов. Сопоставление результатов расчета при различной степени дискретизации расчетной схемы рамы показало, что для получения результата с заданной точностью минимально необходимое разбиение стержня исследуемой рамы составляет три конечных элемента.

С помощью предложенной методики расчета были проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния ряда железобетонных конструкций. В их числе: статически определимые однопролетные балки, двухшарнирные статически неопределимые рамы, трехконтурные рамы и экспериментальная пространственная рама.

Сравнительный расчет балок (Benmokrane, Chaallal, Masmoudi, 1996) [3], армированных стальной и стеклопластиковой арматурой, подтвердил возможность применения предложенной методики для расчета конструкций с произвольными характеристиками диаграмм бетона и арматуры. Стеклопластиковая арматура имеет более низкий модуль упругости, чем стальная. Между тем анализ данных, полученных

при расчете опытных балок, выявил удовлетворительную сходимость с опытными данными при определении их жесткости и прочности, а также прогибов на всех этапах нагружения.

На основе проведенных измерений при испытании опытной железобетонной рамы были построены зависимости, связывающие сосредоточенную нагрузку  $P$  с деформациями и внутренними усилиями системы. Разрушение конструкции наступило в ригеле в зоне действия максимального момента в результате достижения растянутой арматурой предела текучести при сосредоточенной нагрузке  $P$ , равной 29 кН (расчетная разрушающая нагрузка – 27,4 кН). Приложенная в одной трети пролета в двух противоположных ригелях сосредоточенная нагрузка привела к горизонтальным перемещениям узлов и элементов рамы. Поскольку от действия сосредоточенной нагрузки перемещения противоположных сегментов рамы имеют противоположные направления, а перпендикулярные им ригели препятствуют этому, то в процессе деформирования происходит «закручивание» рамы вокруг собственной оси симметрии. В результате расчета по предлагаемой методике была получена деформированная схема рамы, полностью соответствующая фактической на всех этапах нагружения.

На рис. 5, 6 представлены опытные прогибы ригелей и стоек рамы (кривые Exp 1 и Exp 2), а также данные, полученные на основе расчета по предлагаемой методике (кривая Calc) и линейного расчета (кривая Linear).

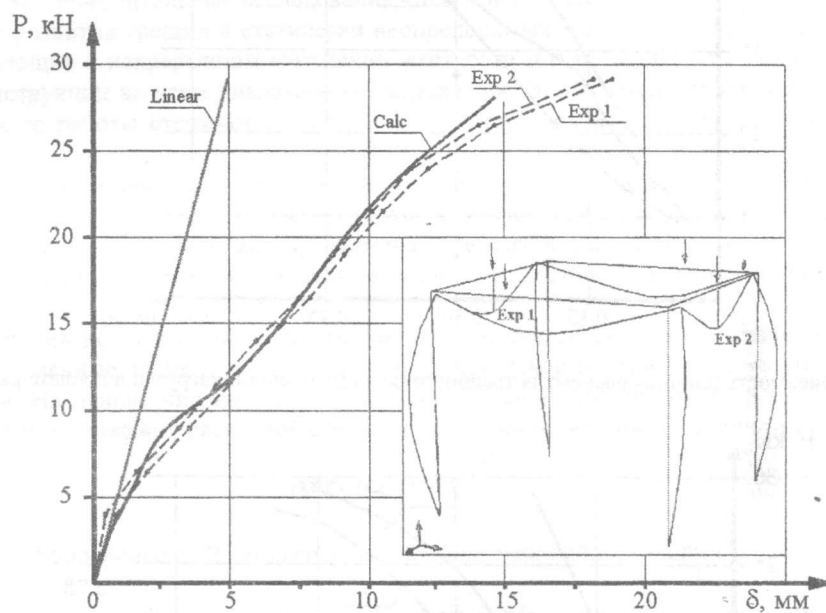


Рис. 5. Зависимость прогиба наиболее нагруженного ригеля от сосредоточенной нагрузки на раму

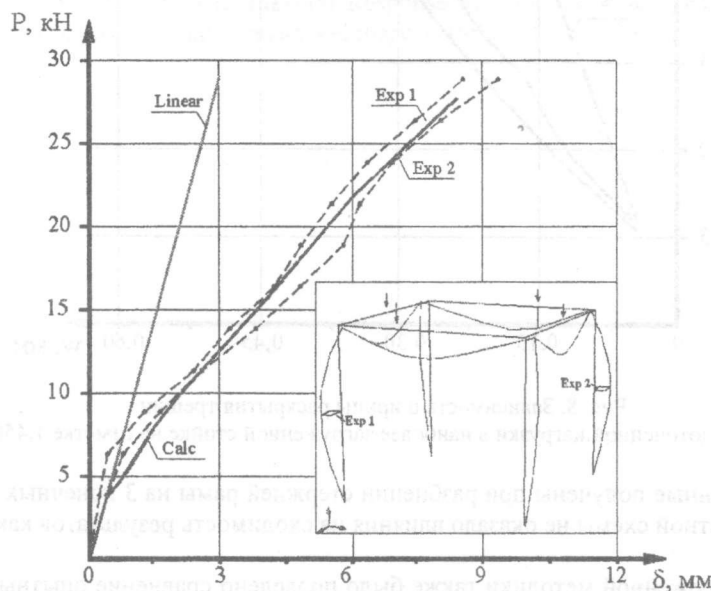


Рис. 6. Зависимость прогиба наиболее нагруженной стойки от сосредоточенной нагрузки на раму

Представленные зависимости свидетельствуют об удовлетворительном совпадении результатов эксперимента с результатами расчета деформаций по предложенной методике. Результаты расчета на основе линейной модели иллюстрируют возможность ее применения только на начальных этапах нагружения, когда снижение жесткости элементов рамы еще незначительно.

Зависимость опытной и расчетной ширины раскрытия трещин в пролете ригеля от действия внешней нагрузки приведены на рис. 7 и 8 (кривая 1 – по опытным данным; кривая 2 – расчет по предлагаемой методике; кривая 3 – расчет по СНиП 2.03.01-84\*).

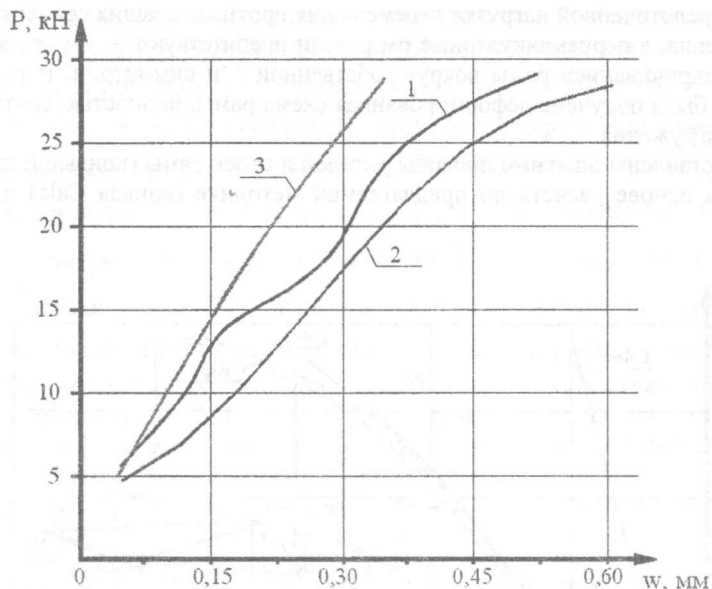


Рис. 7. Зависимость ширины раскрытия трещин от сосредоточенной нагрузки в пролете ригеля

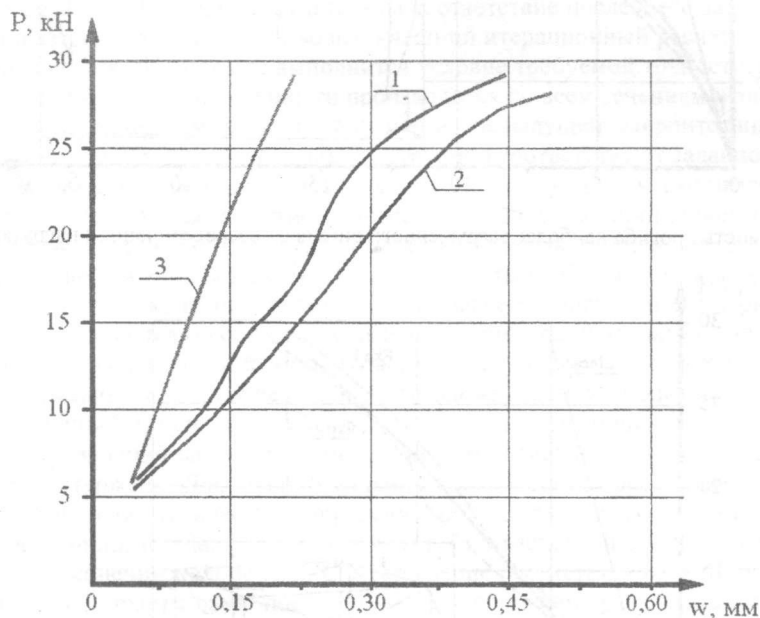


Рис. 8. Зависимость ширины раскрытия трещин от сосредоточенной нагрузки в наиболее загруженной стойке на отметке 1,450 м

Все расчетные данные получены при разбиении стержней рамы на 3 конечных элемента, увеличение фрагментации расчетной схемы не оказало влияния на сходимость результатов как для ригелей, так и для стоек.

С помощью предложенной методики также было проведено сравнение опытных и расчетных значений перемещений ригелей и стоек рамы, горизонтальных опорных реакций и фибровых деформаций

бетона в ряде сечений. Все опытные и расчетные параметры деформирования показали удовлетворительную сходимость, что подтверждает правильность принятых гипотез и демонстрирует возможности методики расчета достоверно моделировать реальную работу конструкции на всех этапах нагружения как системы в целом, так и ее отдельных элементов.

#### Выводы

1. Усовершенствована и экспериментально апробирована методика расчета статически неопределимых пространственных стержневых железобетонных конструкций, позволяющая учитывать произвольный вид напряженно-деформированного состояния поперечного сечения, армирование, свойства материалов, геометрические размеры конструкции, условия закрепления и т.д. Кроме того, методика предоставляет возможность установить фактическое распределение усилий по длине элементов, а также получить на единой методической основе информацию о напряженно-деформированном состоянии элементарных площадок поперечных сечений на всех этапах нагружения. Представленная методика позволяет выполнять как физически нелинейный расчет, за счет поэтапной корректировки физических параметров системы, так и геометрически нелинейный, за счет учета перемещения узлов конструкции и отклонения физической оси ее элементов.

2. Выполнены экспериментальные исследования, получены новые данные о характере деформирования, образования и развития трещин в статически неопределимых пространственных железобетонных рамах, свидетельствующие о непрерывном изменении жесткости и перераспределении внутренних усилий в элементах конструкции во всем диапазоне ее нагружения. Эксперимент продемонстрировал пространственный характер работы стержневых конструкций, состоящих из плоских рам, жестко объединенных между собой.

3. Сформулирована система соотношений для определения жесткости элементов в виде, позволяющем выполнять физически нелинейный расчет статически неопределимых пространственных стержневых железобетонных конструкций по методу конечных элементов. На основании численных экспериментов установлено влияние внутренних усилий на компоненты жесткости железобетонного элемента в нормальном сечении.

4. Для обеспечения необходимой точности расчета предложен способ оптимального разбиения расчетной схемы на конечные элементы, учитывающий фактическое напряженно-деформированное состояние конструкции. На основе численных исследований установлена минимально необходимая степень дискретизации одного стержня расчетной схемы для получения решения с заданной точностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
2. Ernst G.C., Smith G.M., Riveland A.R., Pierce D.N. Basic reinforced concrete frame performance under vertical and later loads // *ACI Journal*, 70(28). – 1973. – P. 261 – 269.
3. Benmokrane B., Chaallal O., Masmoudi R. Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FPR Reinforcing Bars // *ACI Structural Journal*, January-February. – 1996. – P. 46 – 55.