Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. МАКАРЕНКО

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ОПТИКА
ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Сборник заданий

В трех частях

Часть 3

Новополоцк
ПГУ
2008

УДК 53(076.2)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве сборника заданий
(протокол № 37 от 04.04.2008)

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доц. УО «ПГУ» Л. И. ПРОКОПОВИЧ;
канд. техн. наук, доц. УО «ПГУ» Н. В. ОЩЕПКОВА

Макаренко, Г. М.

М15 Колебания и волны. Оптика. Тепловое излучение. Основы квантовой механики : сб. заданий / Г. М. Макаренко. В 3 ч. Ч. 3. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 240 с.

ISBN 978-985-418-723-5 (Ч. 3).

Входит в состав учебного комплекса, включающего также учебное пособие для студентов технических специальностей вузов «Курс общей физики» того же автора. Содержание учебного пособия соответствует действующей программе по физике для втузов. Сборник охватывает следующие разделы курса физики: колебательные и волновые процессы; переменный ток; электромагнитные волны; элементы квантовой механики и статистики; физика атомного ядра и элементарных частиц.

Содержит свыше 400 задач, из них более 120 с решениями по основным разделам физики. В сборнике 60 вариантов индивидуальных заданий для студентов дневной и заочной форм обучения. Каждый вариант включает задачи по наиболее важным темам данных разделов вузовского курса общей физики.

В сборнике даны варианты типовых расчетов по темам: колебания и волны, оптика, тепловое излучение, основы квантовой механики.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов в начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения, основные законы и формулы, методические указания к решению задач, примеры с подробным решением.

Предназначен для студентов вузов.

УДК 53(076.2)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-418-723-5 (Ч. 3)
ISBN 978-985-418-705-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для усвоения курса физики важно не только знания теории, но и умение применять изученное на практике.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин.

При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теорию, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Решение физических задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать изученные явления, выделять главные факторы, обусловливающие то или иное явление, отвлекаясь от случайных и несущественных деталей.

Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает умение решать задачи». Следовательно, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решать.

Предлагаемый сборник содержит варианты типовых расчетов по темам: колебания и волны; оптика; тепловое излучение; кванты света, а также 60 вариантов индивидуальных заданий. В начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения, основные законы и формулы, методические указания к решению задач и подробно разобраны примеры их решения. Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя – можно только научиться. Но для этого существует единственный путь – самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типовых задач выполняют другую роль: показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче.

Решение задач приближается к модели научного физического исследования.

Венгерский математик Д. Пойи писал: «Крупное научное открытие дает решение крупной победы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия… Если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы».

Умение решать задачи является лучшей оценкой глубины изучения программного материала.

Сборник охватывает следующие разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений: колебательные и волновые процессы; переменный ток; электромагнитные волны;

элементы квантовой механики и статистики; физика атомного ядра и элементарных частиц.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1. Слева записать исходные данные задачи вместе с их числовыми значениями, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров.
2. Выразить исходные данные в международной системе единиц (СИ). Исключение допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения – в таком случае они могут быть выражены в любой (но одной и той же) системе единиц.
3. Сделать чертеж, схему или рисунок с обозначением исходных данных в соответствии с условием задачи.
4. Установить физические законы, отвечающие содержанию задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину.
5. Решить задачу в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.
6. Произвести проверку размерностей. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине.
7. Произвести вычисления.
8. Привести в ответе числовые значения с сокращенным наименованием единицы измерения. Ответ записывают как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 6450 надо записать $6,45\cdot10^3$, вместо $0,00214$ записать $2,14\cdot10^{-3}$ и т.п.

Как выбрать номер варианта?

Номер варианта задания соответствует двум последним цифрам номера зачетной книжки студента или порядковому номеру фамилии студента в списке группы, или по указанию преподавателя.

Комплект задач задания определяется по *таблице вариантов* (табл. 5, 6).

При этом необходимо придерживаться следующих указаний:

Номера задач в пособии содержат две части, разделенные точкой: 14.1,…,14.63,…,15.31,…,16.178, ...17.62...

Первое число (левее точки) соответствует номеру темы. Число правее точки соответствует номеру задачи данной темы.

Левый вертикальный столбец содержит номера вариантов от 1 до 60. Верхняя строка отражает последнюю цифру перед точкой в номере задачи. Остальные горизонтальные строки, начиная с номера варианта, содержат номера задач соответствующих тем в данном варианте (число после точки).

Как пользоваться таблицей вариантов?

Приведем примеры. Для студентов дневной формы обучения (табл. 5) в варианте №32 – задачи 14.144; 14.219; 14.63; 14.23; 15.31; 15.169; 15.86; 15.208; 15.268; 15.328; 15.238; 15.433; 15.493; 15.553; 15.616; 15.676; 16.38; 16.178; 16.120; 17.62.

Для студентов заочной формы обучения (табл. 6) в варианте №32 – задачи 14.186; 14.29; 15.32; 15.183; 15.347; 15.519; 15.728; 16.154; 17.143; 18.47.

Для студентов заочной формы обучения надо учесть следующее:

1. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по последующему образцу:

Студент геодезического факультета ПГУ Киселев А.В. Шифр 05560206 Адрес: г. Витебск, ул. Фрунзе 2, кв. 15 тел. 222-68-78 Контрольная работа № 3 по физике

2. Условия задач в контрольной работе надо переписывать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставляются поля.

3. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с незачтенной.

4. Зачтенные контрольные работы остаются на кафедре (у преподавателя). Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

5. Вычисления по расчетной формуле надо производить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Таблица 5

Варианты заданий для студентов дневной формы обучения

Номер вари-анта	Цифра перед точкой в номере задачи																			
	14.	14.	14.	14.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	17.
	Номер задачи (цифра после точки)																			
01	112	251	31	92	28	57	113	177	237	297	357	402	462	522	585	645	7	91	203	31
02	113	250	32	93	27	58	114	178	238	298	358	403	463	523	586	646	8	92	204	32
03	114	249	33	94	26	59	115	179	239	299	359	404	464	524	587	647	9	93	205	33
04	115	248	34	95	25	60	116	180	240	300	360	405	465	525	588	648	10	94	206	34
05	116	247	35	96	24	61	117	181	241	301	361	406	466	526	589	649	11	95	207	35
06	117	246	36	97	23	62	118	182	242	302	362	407	467	527	590	650	12	96	208	36
07	118	245	37	98	22	63	119	183	243	303	363	408	468	528	591	651	13	97	209	37
08	119	244	38	99	21	64	120	184	244	304	364	409	469	529	592	652	14	98	210	38
09	120	243	39	100	20	65	121	185	245	305	365	410	470	530	593	653	15	99	211	39
10	121	242	40	101	19	66	122	186	246	306	366	411	471	531	594	654	16	100	212	40
11	122	241	41	102	18	67	123	187	247	307	367	412	472	532	595	655	17	101	213	41
12	123	240	42	103	17	68	124	188	248	308	368	413	473	533	596	656	18	102	214	42
13	124	239	43	104	16	69	125	189	249	309	369	414	474	534	597	657	19	103	215	43
14	125	238	44	105	15	70	126	190	250	310	370	415	475	535	598	658	20	104	216	44
15	126	237	45	106	14	71	127	191	251	311	371	416	476	536	599	659	21	105	217	45
16	127	236	46	107	13	72	128	192	252	312	372	417	477	537	600	660	22	106	218	46
17	128	235	47	108	12	73	129	193	253	313	373	418	478	538	601	661	23	107	219	47
18	129	234	48	109	11	74	130	194	254	314	374	419	479	539	602	662	24	108	220	48
19	130	233	49	110	10	75	131	195	255	315	375	420	480	540	603	663	25	109	221	49
20	131	232	50	111	9	76	132	196	256	316	376	421	481	541	604	664	26	110	222	50
21	132	231	51	11	8	77	133	197	257	317	377	422	482	542	605	665	27	111	223	51
22	133	230	52	12	7	78	134	198	258	318	378	423	483	543	606	666	28	112	224	52
23	134	229	53	13	6	79	135	199	259	319	379	424	484	544	607	667	29	113	225	53
24	135	228	54	14	5	80	136	200	260	320	380	425	485	545	608	668	30	114	226	54
25	136	227	55	15	4	81	137	201	261	321	381	426	486	546	609	669	31	115	227	55
26	137	226	56	16	3	82	138	202	262	322	382	427	487	547	610	670	32	116	228	56
27	138	225	57	17	2	83	139	203	263	323	383	428	488	548	611	671	33	117	229	57
28	139	224	58	18	1	84	140	204	264	324	384	429	489	549	612	672	34	118	230	58
29	140	223	59	19	26	57	118	205	265	325	385	430	490	550	613	673	35	175	242	59

Окончание табл. 5

Номер варианта	Цифра перед точкой в номере задачи																			
	14.	14.	14.	14.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	17.
	Номер задачи (цифра после точки)																			
30	141	221	60	20	22	61	123	206	266	326	386	431	491	551	614	674	36	176	243	60
31	143	220	62	22	30	170	85	207	267	327	387	432	492	552	615	675	37	177	119	61
32	144	219	63	23	31	169	86	208	268	328	238	433	493	553	616	676	38	178	120	62
33	145	218	64	24	32	168	87	209	269	329	239	434	494	554	617	677	39	179	121	63
34	146	217	65	25	33	167	88	210	270	330	240	435	495	555	618	678	40	180	122	64
35	147	216	66	26	34	166	89	211	271	331	241	436	496	556	619	679	41	181	123	65
36	148	215	67	27	35	165	90	212	272	332	242	437	497	557	620	680	42	182	124	66
37	149	214	68	28	36	164	91	213	273	333	243	438	498	558	621	681	43	183	125	67
38	150	213	69	29	37	163	92	214	274	334	244	439	499	559	622	682	44	184	126	68
39	151	212	70	30	38	162	93	215	275	335	245	440	500	560	623	683	45	185	127	69
40	152	211	71	6	39	160	94	216	276	336	246	441	501	561	624	684	46	186	128	70
41	153	210	72	7	40	159	95	217	277	337	247	442	502	562	625	685	47	187	129	71
42	154	209	73	8	41	158	96	218	278	338	248	443	503	563	626	686	48	188	130	72
43	155	208	74	9	42	171	97	219	279	339	249	444	504	564	627	687	49	189	131	73
44	156	207	75	10	43	172	98	220	280	340	250	445	505	565	628	688	50	190	132	74
45	157	206	76	5	44	173	99	221	281	341	251	446	506	566	629	689	51	191	133	75
46	158	205	77	4	45	174	100	222	282	342	252	447	507	567	630	690	52	192	134	76
47	159	204	78	3	46	175	101	223	283	343	253	448	508	568	631	691	53	193	135	77
48	160	203	79	2	47	176	102	224	284	344	254	449	509	569	632	692	54	194	136	78
49	161	202	80	1	48	151	103	225	285	345	255	450	510	401	633	693	55	195	137	79
50	162	201	81	251	49	150	104	226	286	346	256	451	511	400	634	694	56	196	138	80
51	163	200	82	250	50	149	105	227	287	347	257	452	512	399	635	695	57	197	139	81
52	164	199	83	249	51	148	106	228	288	348	258	453	523	398	636	696	58	198	140	82
53	165	198	84	248	52	147	107	229	289	349	259	454	514	397	637	580	59	199	141	83
54	166	197	85	247	53	146	108	230	290	350	260	455	515	396	638	579	60	200	142	84
55	167	196	86	246	54	145	109	231	291	351	261	456	516	395	639	578	61	201	143	85
56	111	195	87	245	55	144	110	232	292	352	262	457	517	394	640	577	62	202	144	86
57	110	194	88	244	56	143	111	233	293	353	263	458	518	393	641	576	63	241	145	4
58	109	193	89	243	29	142	112	234	294	354	264	459	519	392	642	575	64	240	146	3
59	108	192	90	242	34	141	92	235	295	355	265	460	520	391	643	574	65	239	234	2
60	107	191	91	240	35	140	96	236	296	356	266	461	521	390	644	571	66	238	236	1

Таблица 6

Варианты заданий для студентов заочной формы обучения

Номер варианта	Цифра перед точкой в номере задачи									
	14.	14.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	17.	18.
	Номер задачи (цифра после точки)									
01	263	87	85	295	378	402	697	236	30	24
02	262	88	86	296	377	407	698	235	29	23
03	261	89	87	297	376	412	699	234	28	22
04	260	90	88	298	375	417	700	233	27	21
05	259	91	89	299	374	430	701	232	26	20
06	258	92	90	300	373	431	702	231	25	15
07	257	93	91	301	372	432	703	243	24	12
08	256	94	92	302	371	433	704	242	23	8
09	255	95	93	303	370	434	705	241	22	4
10	254	96	94	304	369	435	706	240	21	25
11	253	97	95	305	368	436	707	239	20	26
12	252	98	96	306	367	437	708	238	19	27
13	139	99	97	307	366	458	709	237	18	28
14	168	100	98	308	365	462	710	203	17	29
15	169	101	99	309	364	466	711	204	16	30
16	170	102	100	310	363	472	712	205	15	31
17	171	103	101	311	362	476	713	206	14	32
18	172	104	102	312	361	480	714	176	13	33
19	173	105	103	313	360	484	715	180	12	34
20	174	106	104	314	359	543	716	185	11	35
21	175	107	105	315	358	547	717	190	10	36
22	176	108	106	316	357	551	718	193	9	37
23	177	109	107	317	356	555	719	197	8	38
24	178	110	108	318	355	559	720	199	7	39
25	179	111	109	200	354	564	721	147	6	40
26	180	112	110	201	353	568	722	148	137	41
27	181	113	111	202	352	514	723	149	138	42
28	182	114	112	203	351	515	724	150	139	43
29	183	115	29	204	350	516	725	151	140	44
30	184	116	30	205	349	517	726	152	141	45
31	185	30	31	182	348	518	727	153	142	46
32	186	29	32	183	347	519	728	154	143	47
33	187	28	33	184	346	520	729	155	144	48
34	188	27	34	185	345	521	730	156	145	49
35	189	26	35	186	344	522	731	157	146	96
36	190	25	36	187	343	486	732	158	147	95
37	191	24	37	188	342	487	733	159	148	94
38	192	23	38	189	341	488	734	160	149	93

Окончание табл. 6

Номер варианта	Цифра перед точкой в номере задачи									
	14.	14.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	17.	18.
	Номер задачи (цифра после точки)									
39	193	22	39	190	340	489	735	161	150	92
40	194	21	40	191	339	449	736	162	151	91
41	195	20	41	192	338	448	737	163	152	90
42	196	19	42	193	337	447	738	164	153	89
43	197	18	43	194	336	446	739	165	154	88
44	198	17	44	195	335	480	740	166	155	87
45	199	16	45	196	334	479	741	167	156	86
46	200	15	46	197	333	478	742	168	157	85
47	201	14	47	198	332	477	743	169	158	84
48	202	13	48	199	331	537	744	170	159	83
49	203	12	49	206	330	536	745	171	160	82
50	204	11	50	207	329	535	746	172	161	81
51	205	10	51	208	328	534	747	173	162	80
52	206	9	52	209	327	562	748	174	163	79
53	207	8	53	267	326	563	749	120	164	78
54	208	7	54	274	325	564	750	124	165	77
55	209	6	55	278	324	565	751	128	169	76
56	210	5	56	282	323	398	752	132	173	75
57	211	4	160	286	322	399	581	136	177	74
58	212	3	161	290	321	400	582	139	181	73
59	213	2	158	294	320	397	583	92	185	72
60	214	1	159	269	319	395	584	96	192	71

14. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

14.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Колебаниями называют процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени. Простейшим колебательным движением является **гармоническое**, т.е. такое колебание, при котором какая-либо характеристика системы (например, координата грузика на пружине, угол отклонения маятника и т.п.) изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Такая система называется **гармоническим осциллятором** и реализуется, если соответствующее рассматриваемой модели уравнение динамики (например, второй закон Ньютона или основное уравнение динамики вращательного движения) можно привести к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2{}_0 x = 0, \qquad (14.1)$$

где под x понимается упомянутая выше характеристика системы. Общим решением дифференциального уравнения (14.1) является уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (14.2)$$

где A – амплитуда, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза, φ_0 – начальная фаза колебаний. Значения A и φ_0 определяются из начальных условий, т.е. по значениям отклонения x_0 и скорости υ_0 в начальный момент времени. Входящий в это уравнение параметр колебательного процесса ω_0, называемый **циклической** частотой **собственных** колебаний (или **собственной** частотой), связан с **периодом** T и **частотой** ν колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \qquad (14.3)$$

Собственная частота ω_0 зависит от свойств колеблющейся системы. Например, при малых колебаниях математического маятника она выражается через ускорение свободного падения g и длину маятника l:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (14.4)$$

при малых колебаниях грузика на пружине она выражается через его массу m и коэффициент упругости (жесткости) пружины k:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{14.5}$$

Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})\,;$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A{\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A{\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)\,.$$

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m,

$$F = -m{\omega_0}^2 x\,.$$

Кинетическая энергия точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания,

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]\,.$$

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F,

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \int_0^x m{\omega_0}^2 x dx = \frac{m{\omega_0}^2 x^2}{2} = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mA^2{\omega_0}^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]\,.$$

Механическая энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2}\,.$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = \frac{I}{ml}$ – приведенная длина физического маятника; g – ускорение свободного падения.

Решение ряда вопросов, в частности, сложения нескольких колебаний одинакового направления, облегчается, если воспользоваться **методом векторных диаграмм**. Этот метод основан на том, что при вращении вектора $\vec{A}$ с угловой скоростью ω_0 значение его проекции на ось OX (рис. 14.1) изменяется по гармоническому закону

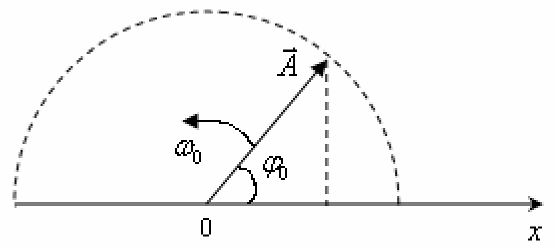


Рис. 14.1

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Если характеристика x участвует одновременно в нескольких колебательных движениях одного направления, то результирующее движение можно представить в виде суммы проекций вращающихся векторовекций вращающихся векторов.

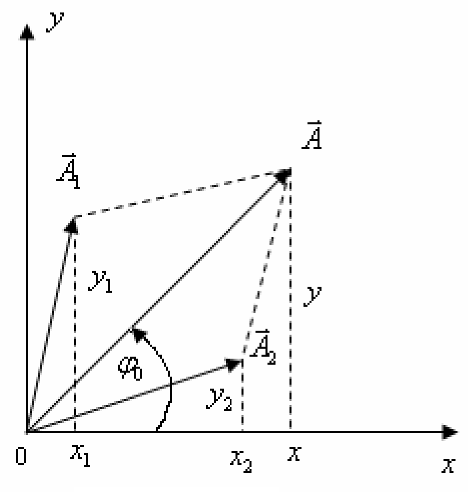


Рис. 14.2

На рис. 14.2 показан результат сложения характеристик двух колебаний с одинаковой частотой: $x = x_1 + x_2$. Смещение характеристики x, равное сумме смещений

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$$

и $x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$,

можно представить в виде проекции вращающегося вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Применив теорему косинусов, получим амплитуду результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \qquad (14.6)$$

Начальную фазу результирующего колебания определяют по формуле

$$tg\varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}. \qquad (14.7)$$

Если тело совершает одновременно два взаимно перпендикулярных колебания по законам

$$x = A\cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}) \quad \text{и} \quad y = B\cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}),$$

то характер его движения будет зависеть от разности начальных фаз и соотношения частот колебаний. Например, если частоты обоих колебаний одинаковы, то траектория движения тела представляет собой эллипс, ориентация и размер полуосей которого зависят от амплитуд A, B и разности начальных фаз $(\varphi_{02} - \varphi_{01})$. Если же частоты различны, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых. В частном случае отношения частот $\omega_{01} : \omega_{02}$ движущаяся точка через определенные промежутки времени возвращается в то же положение. Такая траектория называется **фигурой Лиссажу** (см. пример 12).

На практике гармонические колебания реализуются только с некоторой степенью приближения. Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, которые приводят к затуханиям колебаний. В наиболее часто встречающемся случае сила сопротивления $\vec{F}_c$ пропорциональна скорости $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}, \tag{14.8}$$

где r – **коэффициент сопротивления**. При не слишком сильном затухании закон движения колеблющегося тела можно записать в виде

$$x = A \cdot e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{14.9}$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – **коэффициент затухания**, m – масса колеблющегося тела, ω – циклическая частота, связанная с собственной частотой ω_0 формулой

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}.$$

На рис. 14.3 приведен характерный график закона движения в этом случае.

Множитель перед косинусом является изменяющейся амплитудой, которая в момент времени $\tau = \dfrac{1}{\delta}$ уменьшается в $e \approx 2{,}7$ раз по сравнению с первоначальной. За это время происходят $N_e = \dfrac{\tau}{T}$ колебаний.

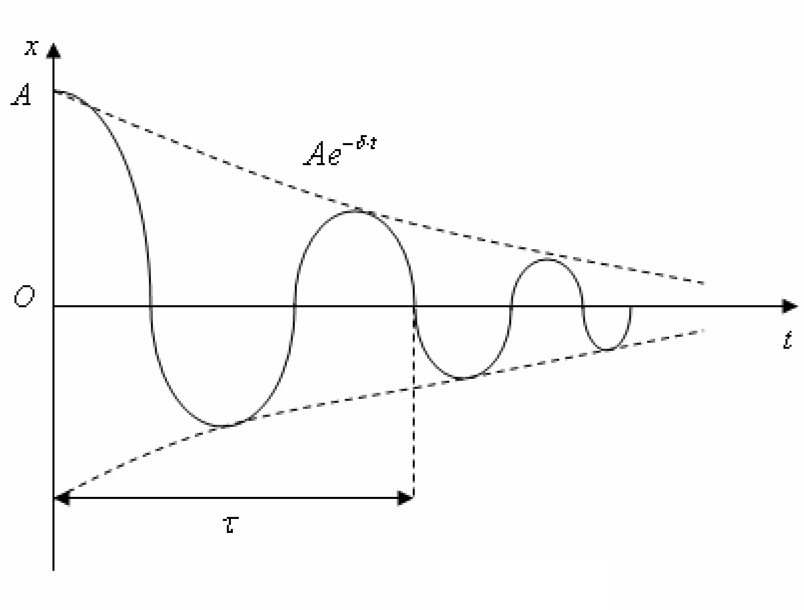


Рис. 14.3

При малом затухании $(\delta < \omega_0)$ энергия колеблющейся системы изменяется по закону

$$E = E_0 e^{-2\delta t}. \qquad (14.10)$$

Важной характеристикой колебательной системы является **логарифмический декремент затухания** θ – логарифм отношения амплитуд двух соседних колебаний:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\delta T} = \delta T. \qquad (14.11)$$

Величиной, характеризующей резонансные свойства колебательной системы при вынужденных колебаниях, является **добротность** Q, которая определяется выражением

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}, \qquad (14.12)$$

где E – запасенная в системе энергия на данный момент времени; ΔE – убыль энергии за очередной период. Можно показать, что добротность и логарифмический декремент затухания связаны соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega_0}{2}. \qquad (14.13)$$

Поэтому добротность может служить удобной характеристикой затухающих колебаний – чем больше добротность, тем медленнее затухание.

В колебательном контуре, содержащем катушку индуктивности L, емкость C и активное сопротивление R, возможны три типа колебаний:

1. Если активное сопротивление R пренебрежимо мало, в контуре имеют место свободные незатухающие колебания

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени t; q_m – амплитудное значение заряда; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебательного контура, зависящая только от параметров контура; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Для нахождения периода T незатухающих колебаний используется формула Томпсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

2. Если сопротивление R имеет значительную величину, то в контуре происходят свободные затухающие колебания, изменяющиеся по закону

$$q = q_m e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$ – частота колебаний в контуре; $\delta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания θ и добротность контура Q определяются по формулам

$$\theta = \delta T; \quad Q = \frac{\pi}{\theta},$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период затухающих колебаний.

При слабом затухании можно воспользоваться выражениями

$$\theta = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}; \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. При последовательном включении источников напряжения в контур установившиеся вынужденные колебания напряжения U и силы тока I изменяются по законам

$$U = U_m \cos\omega t; \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где ω – частота вынуждающей силы; U_m, I_m – амплитудные значения напряжения и силы тока, которые связаны между собой (закон Ома для переменного тока).

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол φ, зависящий от параметров цепи и частоты

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

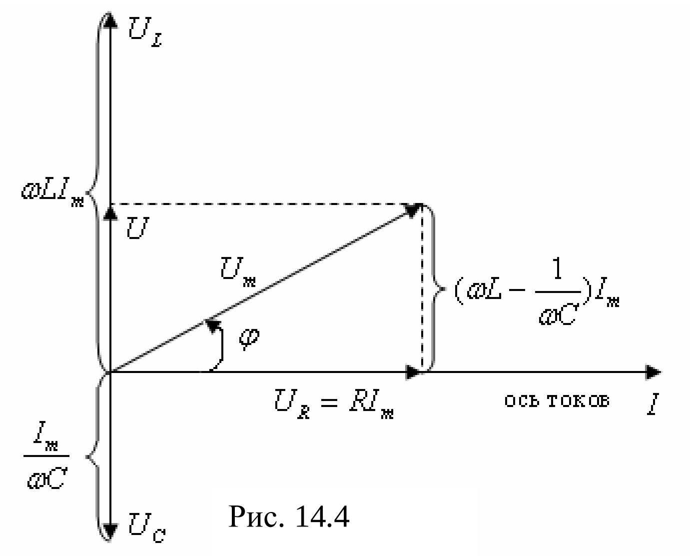


Рис. 14.4

Соответствующая векторная диаграмма напряжения показана на рис. 14.4.

Для расчета параллельных соединений в методе векторных диаграмм горизонтальной осью является ось напряжений (см. задачу 22).

Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна

$$\omega_{q\,рез} = \omega_{U\,рез} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\delta^2}.$$

Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0

$$\omega_{I\,рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Полное сопротивление контура определяется по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2},$$

где $x = x_L - x_C$ – реактивное сопротивление $\left(x_L = \omega L,\ x_C = \frac{1}{\omega C} \right)$.

Средняя мощность P, выделяющаяся в цепи переменного тока,

$$P = UI\cos\varphi,$$

где $U,\ I$ – действующие (эффективные) значения напряжения и тока

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};\quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Множитель $\cos\varphi$ называют коэффициентом мощности.

14.2. Примеры решения задач

1. Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением $x = 0{,}01\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) период колебаний; 4) частоту колебаний; 5) начальную фазу колебаний.

Дано: $x = 0{,}01\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, м.

Найти: A; ω_0; T; ν; φ.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

где x – смещение колеблющейся точки из положения равновесия в момент времени t, A – амплитуда колебаний, ω_0 – круговая (циклическая) частота, φ – начальная фаза.

По условию задачи

$$x = 0{,}01\cos(4\pi t + \frac{\pi}{8}), \text{ м}. \tag{2}$$

Из этого уравнения, согласно (1), можно записать, что $A = 0{,}01$ м; $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}5 \text{ с},$$

а частота колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени,

$$\nu = \frac{1}{T} = 2 \text{ Гц}.$$

2. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $a(t) = -45\pi^2\cos 3\pi t$. Определите зависимость смещения этой точки от времени.

Дано: $a(t) = -45\pi^2\cos 3\pi t$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt},$$

откуда $d\upsilon(t)=a(t)dt$. Проинтегрировав это выражение, найдем закон изменения скорости

$$\upsilon(t)=\int_0^t a(t)dt=-\int_0^t 45\pi^2\cos 3\pi t dt=-\frac{45\pi^2}{3\pi}\sin 3\pi t=-15\pi\sin 3\pi t.$$

Учитывая, что

$$\upsilon(t)=\frac{dx(t)}{dt},$$

аналогично получим

$$dx(t)=\upsilon(t)dt,$$

отсюда посредством интегрирования найдем зависимость смещения материальной точки от времени

$$x(t)=\int_0^t \upsilon(t)dt=-\int_0^t 15\pi\sin 3\pi t dt=\frac{15\pi}{3\pi}\cos 3\pi t=5\cos 3\pi t.$$

3. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu=1$ Гц. Запишите уравнение колебаний точки, если в начальный момент времени она проходит положение равновесия с отрицательной скоростью $\upsilon_0=-3{,}14\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Дано: $\nu=1$ Гц; $t=0$; $x_0=0$; $\upsilon_0=-3{,}14\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi). \quad (1)$$

Циклическая частота

$$\omega_0=2\pi\nu=2\pi c^{-1}.$$

В начальный момент времени $t=0$ смещение $x_0=0$ (положение равновесия), т.е.

$$x_0=A\cos\varphi=0,$$

откуда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Скорость материальной точки

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

В начальный момент времени $(t = 0)$ при прохождении положения равновесия (условие задачи) скорость точки

$$\upsilon_0 = -A\omega_0 \sin\varphi = -3{,}14 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, уравнение (2) можно записать в виде $A\omega_0 = 3{,}14 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, откуда амплитуда колебаний

$$A = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2}}{2\pi} = 0{,}005\ \text{м} = 0{,}5\ \text{см}.$$

Подставив найденные значения ω_0, A и φ в уравнение (1), запишем уравнение колебаний

$$x = 0{,}5\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}),\ \text{см}.$$

4. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}2$ Гц. Амплитуда колебаний равна 5 см. Определите: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

Дано: $m = 10$ г; $\nu = 0{,}2$ Гц; $A = 5$ см.

Найти: F_{max}; E.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тогда скорость и ускорение колеблющейся точки

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0{}^2 m\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$F = F_{\max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому максимальное значение силы

$$F_{\max} = A\omega_0{}^2 m = 4\pi^2\nu^2 Am = 0{,}8 \text{ мН}$$

(учли, что $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{\max}{}^2 = \frac{mA^2\omega_0{}^2}{2}.$$

Подставив сюда ω_0, найдем полную энергию

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2 = 19{,}7 \text{ мкДж}.$$

5. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos 2t,$ м. В тот момент времени, когда возвращающая сила достигает значения $F = -18$ мН, точка обладает потенциальной энергией $\Pi = 0{,}4$ мДж. Определите этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний.

Дано: $x = 0{,}1\cos 2t,$ м; $F = -18$ мН; $\Pi = 0{,}4$ мДж.

Найти: $t,\ \omega t$.

Решение. Возвращающая сила $F = -kx = ma$, где k – коэффициент упругости; m – масса материальной точки; a – ее ускорение.

Если уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos\omega t,$$

то соответственно скорость и ускорение материальной точки

$$\upsilon = -A\omega\sin\omega t; \quad a = -A\omega^2\cos\omega t,$$

следовательно, возвращающая сила

$$F = -mA\omega^2\cos\omega t. \tag{1}$$

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F в точке с координатой x,

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega^2 x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t. \tag{2}$$

Подставим выражения (2) и (1), найдем

$$\frac{\Pi}{F} = -\frac{A\cos\omega t}{2},$$

откуда

$$\cos\omega t = -\frac{2П}{AF}. \qquad (3)$$

Согласно условию задачи $x = 0{,}1\cos 2t$, м, откуда следует, что амплитуда $A = 0{,}1$ м, а циклическая частота $\omega = 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Из выражения (3) фаза колебаний

$$\omega t = \arccos\left(-\frac{2П}{AF}\right) = 63°37' = 1{,}11\ \text{рад};$$

$$t = 0{,}555\ \text{с}.$$

6. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 8$ см, периодом $T = 12$ с и начальной фазой $\varphi = 0$. Определите потенциальную энергию маятника в момент времени $t = 2$ с, когда возвращающая сила F в первый раз достигает значения –5мН.

Дано: $A = 8$ см; $T = 12$ с; $\varphi = 0$; $t = 2$ с; $F = -5$ мН.

Найти: $П$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника можно представить в виде

$$x = A\cos\omega t \qquad (1)$$

(учли, что начальная фаза $\varphi = 0$), где циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (2)$$

Возвращающая сила упругости деформированной пружины пропорциональна смещению x из положения равновесия и равна

$$F = -kx = -kA\cos\omega t \qquad (3)$$

(учли формулу (1), где k – жесткость пружины.

Потенциальная энергия маятника, совершающего под действием упругой силы гармонические колебания,

$$П = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t \qquad (4)$$

(учли формулу (1).

Поделив (4) на (3) и учитывая выражение (2), найдем потенциальную энергию

$$П = -\frac{1}{2}AF\cos\frac{2\pi}{T}t = 0{,}1\ \text{мДж}.$$

7. На идеально гладкой плоской поверхности лежит брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к стене (см. рисунок) упругой пружиной. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $\upsilon_0 = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в брусок и застряла в нем. Пренебрегая сопротивлением воздуха и массой пружины, определите жесткость k пружины и период колебаний бруска с застрявшей в нем пулей, если амплитуда колебаний $A = 10$ см.

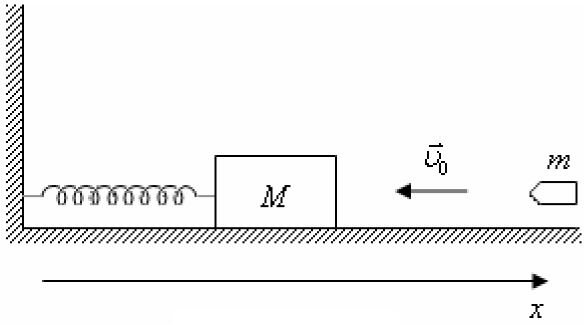


Рис. 14.5

Дано: $M = 4$ кг; $m = 10$ г; $\upsilon_0 = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $A = 10$ см.

Найти: k; T.

Решение. Брусок с застрявшей в нем пулей совершает гармонические колебания под действием упругой силы. Удар неупругий (пуля застряла в бруске), поэтому после удара брусок и пуля движутся с общей скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса

$$m\upsilon_0 = (M + m)\upsilon$$

(уравнение записано в проекции на ось X), откуда

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M + m}. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения механической энергии кинетическая энергия бруска с застрявшей в нем пулей переходит в потенциальную энергию деформации

$$\frac{(M + m)\upsilon^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

откуда жесткость пружины

$$k = \frac{(M + m)\upsilon^2}{A^2} = \frac{m^2\upsilon_0{}^2}{(M + m)A^2} = 898\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + m}},$$

тогда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}} = 0,42\ \text{с}.$$

8. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня длиной 0,5 м совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром тяжести C. Определите, на каком расстоянии x от центра масс должна находиться точка подвеса, чтобы циклическая частота колебаний была максимальна.

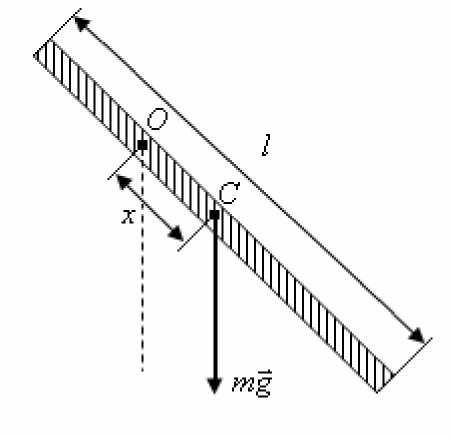


Рис. 14.6

Дано: $l = 0{,}5$ м; $\omega = \omega_{\max}$.

Найти: x.

Решение. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}},$$

где I – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O, не совпадающую с центом масс C стержня (рис. 14.6); m – масса стержня; g – ускорение свободного падения; x – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C.

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{I}}. \qquad (1)$$

Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса, находящуюся от центра масс на расстоянии x,

$$I = I_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2, \qquad (2)$$

где $I_0 = \dfrac{ml^2}{12}$ – момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс стержня (через середину стержня).

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \qquad (3)$$

Найдем экстремум функции (3) (по условию задачи циклическая частота максимальна)

$$\frac{d\omega}{dx} = 0; \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3}g(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0.$$

Нас интересуют только положительные решения, т.е. искомое расстояние

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 14,4 \text{ см}.$$

9. Период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного к потолку кабины в неподвижном лифте, равен T. Определите период колебаний этого маятника, если: 1) лифт движется вертикально вверх с ускорением $a = 0,5g$; 2) лифт движется вертикально вниз с ускорением $a = 0,5g$; 3) лифт движется равномерно.

Дано: T; 1) $a = 0,5g$; 2) $a = 0,5g$; 3) $a = 0$.

Найти: T_1; T_2; T_3.

Решение. Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина математического маятника; g – ускорение свободного падения.

1. Если лифт движется с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх, то на тело массой m помимо силы тяжести будет действовать сила инерции, направленная вниз, и суммарная сила $F = m(g + a)$.

Тогда период колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}} = 0,816T.$$

2. Если лифт движется с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вниз, то сила инерции будет направлена вверх, и

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}} = 1,41T.$$

3. При равновесном движении лифта ($a = 0$)

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T.$$

10. На концах тонкого стержня длиной $l = 1$ м и массой $m_3 = 400$ г укреплены шарики малых размеров массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (точка O на рис. 14.7). Определить период T колебаний, совершаемых стержнем.

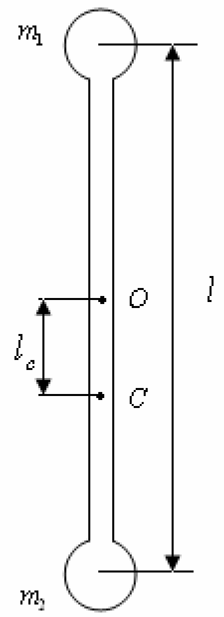


Рис. 14.7

Дано: $l = 1$ м; $m_1 = 200$ г; $m_2 = 300$ г; $m_3 = 400$ г.

Найти: T.

Решение. Период колебаний физического маятника, каким является стержень с шариками, определяется соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_c}}, \qquad (1)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; l_c – расстояние от центра масс маятника до оси.

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции шариков I_1 и I_2 и стержня I_3:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (2)$$

Принимая шарики за материальные точки, выразим моменты их инерций

$$I_1 = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2; \quad I_2 = m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Так как ось проходит через середину стержня, то его момент инерции относительно этой оси

$$I_3 = m_3\frac{l^2}{12}.$$

Подставив полученные выражения I_1, I_2 и I_3 в формулу (2), найдем общий момент инерции физического маятника

$$I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_3\frac{l^2}{12} = \frac{l^2(3m_1 + 3m_2 + m_3)}{12} = 0{,}158\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Масса маятника состоит из масс шариков и массы стержня:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}9 \text{ кг}$$

Расстояние l_c центра масс маятника от оси колебаний найдем исходя из следующих соображений. Если ось X направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой O, то расстояние l_c равно координате центра масс маятника, т.е.

$$l_c = x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\left(-\frac{l}{2}\right) + m_2\left(\frac{l}{2}\right) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3}$$

или

$$l_c = \frac{(m_2 - m_1)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{(m_2 - m_1)l}{2m} = 5{,}55 \text{ см}.$$

Произведя расчеты по формуле (1), получим период колебаний физического маятника

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}158}{0{,}9 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}55 \cdot 10^{-2}}} = 11{,}2 \text{ с}.$$

11. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания при сложении двух колебаний одного направления:

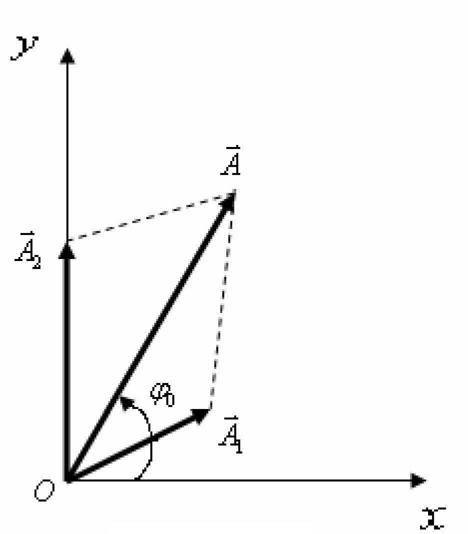


Рис. 14.8

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \text{ и}$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}),$$

где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\varphi_{01} = \frac{\pi}{6}$; $\varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Построим векторную диаграмму (рис. 14.8). Амплитуду результирующего колебания определим по формуле (14.6), а начальную фазу – по формуле (14.7).

После вычислений получим

$$A = 2{,}65 \text{ см} \quad \text{и} \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} 2{,}89 \approx 0{,}4\pi.$$

12. Светящаяся на экране осциллографа точка совершает два взаимно перпендикулярных колебания. При этом ее горизонтальная координата изменяется по закону $x = A\sin\omega_{01}t$. Вертикальная координата изменяется по закону $y = A\cos\omega_{02}t$. Построить траекторию этой точки, если отношение $\omega_{01}:\omega_{02} = 3:2$. Амплитуду считать известной.

Дано: $x = A\sin\omega_{01}t$; $y = A\cos\omega_{02}t$; $\omega_{01}:\omega_{02} = 3:2$.

Построить траекторию точки.

Решение. Перед построением траектории вычислим значения координат x и y для моментов времени, когда $\omega_0 t_n = n\dfrac{\pi}{6}$, где $\omega_0 = \dfrac{\omega_{01}}{3} = \dfrac{\omega_{02}}{2}$; $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 12$. (При выборе моментов времени для удобства учитывалось отношение частот).

Полученные результаты занесем в табл. 14.1. В процессе колебаний координаты x и y изменяются в пределах от $-A$ до $+A$, поэтому траектория светящейся точки должна располагаться внутри квадрата со стороной $2A$. Обозначим этот квадрат на координатной плоскости XOY пунктиром (рис. 14.9). При переносе результатов из таблицы на координатную плоскость отметим номера точек: $1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 12$. Тогда траекторию – **фигуру Лиссажу** – получим, соединяя точки последовательно (Если точка находится на пунктирной линии не в углу квадрата, то траектория должна быть касательной к стороне квадрата в этой точке).

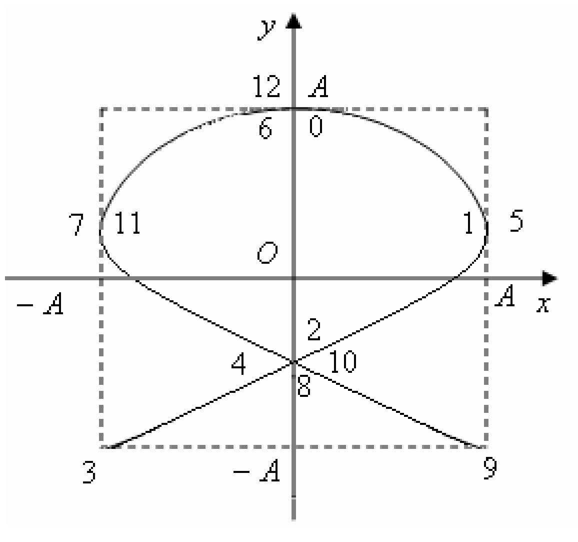


Рис. 14.9

Таблица 14.1

Данные для построения траектории точки

n	$\omega_0 t$	$\omega_{02} t$	$\cos\omega_2 t$	$\omega_{01} t$	$\sin\omega_1 t$
0	0	0	1	0	0
1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0,5	$\frac{\pi}{2}$	1
2	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	–0,5	π	0
3	$\frac{3\pi}{6}$	π	–1	$\frac{3\pi}{2}$	–1
4	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	–0,5	2π	0
5	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	0,5	$\frac{5\pi}{2}$	1
6	$\frac{6\pi}{6}$	2π	1	3π	0
7	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	0,5	$\frac{7\pi}{2}$	–1
8	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{3}$	–0,5	4π	0
9	$\frac{9\pi}{6}$	3π	–1	$\frac{9\pi}{2}$	1
10	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$	–0,5	5π	0
11	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{3}$	0,5	$\frac{11\pi}{2}$	–1
12	$\frac{12\pi}{6}$	4π	1	6π	0

13. Запишите уравнение затухающих колебаний материальной точки, если смещение x_0 точки при $t = \frac{T}{3}$ составляет 10 см, период затухающих колебаний $T = 3$ с, логарифмический декремент затухания $\theta = 0{,}03$, начальная фаза колебаний равна нулю.

Дано: $t = \frac{T}{3}$; $x_0 = 10$ см; $T = 3$ с; $\theta = 0{,}03$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение затухающих колебаний, если начальная фаза равна нулю, имеет вид

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t, \tag{1}$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$.

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Коэффициент затухания δ найдем из выражения для логарифмического декремента затухания $\theta = \delta T$, откуда

$$\delta = \frac{\theta}{T}. \tag{3}$$

Амплитуду A_0 найдем из начальных условий ($x_0 = 10$ см при $t = \frac{T}{3} = 1$ с) согласно уравнению (1), где

$$x_0 = A_0 e^{-\delta t},$$

откуда

$$A_0 = x_0 e^{\delta t} = x_0 e^{\frac{\theta}{T} \cdot \frac{T}{3}} = x_0 e^{\frac{\theta}{3}}. \tag{4}$$

Подставив в формулы (2), (3) и (4) заданные цифры, найдем

$$\omega = \frac{2\pi}{3}\ \text{с}^{-1};\ \delta = 0,01;\ A_0 = 11\ \text{см}.$$

Тогда, подставив эти значения в уравнение (1), запишем искомое уравнение затухающих колебаний

$$x = 11 e^{-0,01t} \cos \frac{2\pi}{3} t,\ \text{см}.$$

14. Маятник совершил 100 полных колебаний, при этом его амплитуда уменьшилась в 10 раз. Определите логарифмический декремент затухания маятника.

Дано: $N = 100$; $\frac{A_0}{A} = 10$.

Найти: θ.

Решение. Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \delta T = \frac{\delta}{\nu}, \qquad (1)$$

где $T = \dfrac{1}{\nu}$ – условный период затухающих колебаний (ν – частота колебаний); δ – коэффициент затухания.

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \qquad (2)$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$.

Из формулы (1) найдем $\delta = \nu\theta$, где частоту ν вычислим, зная число N полных колебаний за время t, за которое произошло указанное уменьшение амплитуды

$$N = \frac{t}{T} = t\nu, \quad \text{откуда} \quad \nu = \frac{N}{t}, \quad \text{и тогда}$$

$$\delta = \frac{N\theta}{t}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (1), получаем

$$A = A_0 e^{-N\theta},$$

откуда декремент затухания

$$\theta = \frac{1}{N}\ln\frac{A_0}{A} = 0{,}023.$$

15. Добротность Q колебательной системы равна 314. Определите, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за время, в течение которого система совершает $N = 110$ полных колебаний.

Дано: $Q = 314$; $N = 110$.

Найти: $\dfrac{A_0}{A}$.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A_N = A_0 e^{-\delta t}, \qquad (1)$$

где A_0 – начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$); δ – коэффициент затухания; t – время, за которое совершается N колебаний.

Коэффициент затухания найдем из выражения логарифмического декремента затухания $\theta = \delta T$, откуда

$$\delta = \frac{\theta}{T}, \qquad (2)$$

где T – условный период затухающих колебаний.

Время, за которое совершается N колебаний,

$$t = NT. \qquad (3)$$

С учетом формул (2) и (3) выражение (1) запишется в виде

$$A_N = A_0 e^{-\theta N}. \qquad (4)$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\theta},$$

откуда логарифмический декремент затухания

$$\theta = \frac{\pi}{Q}.$$

Подставив это выражение в (4), получаем

$$A_N = A_0 e^{-\frac{\pi N}{Q}}.$$

Тогда

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{-\frac{\pi N}{Q}} = 3.$$

Амплитуда уменьшится в 3 раза.

16. Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде за время $t = 1{,}5$ мин, уменьшилась в $n = 75$ раз. Определите коэффициент r сопротивления среды, если масса m маятника равна 200 г.

Дано: $t = 1{,}5$ мин; $\frac{W_0}{W} = n = 75$; $m = 200$ г.

Найти: r.

Решение. Коэффициент затухания

$$\delta = \frac{r}{2m},$$

где r – коэффициент сопротивления среды; m– масса маятника.

Тогда коэффициент сопротивления

$$r = 2\delta m. \qquad (1)$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \qquad (2)$$

где A_0 – начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$).

Энергия колебаний E пропорциональна квадрату произведения частоты колебаний на их амплитуду (частота колебаний постоянна), поэтому

$$n = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{A_0}{A} = \sqrt{n}. \qquad (3)$$

Из выражений (2) и (3) получаем $e^{\delta t} = \sqrt{n}$.

Логарифмируя, находим

$$\delta = \frac{\ln\sqrt{n}}{t}.$$

Подставив найденное значение δ в формулу (1), получим коэффициент сопротивления

$$r = \frac{2m\ln\sqrt{n}}{t} = 9{,}6\ \frac{\text{г}}{\text{с}}.$$

17. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 800$ Гц. Определите резонансную частоту $\nu_{рез}$, если собственная частота ν_0 колебательной системы составляет 802 Гц.

Дано: $\nu = 800$ Гц; $\nu_0 = 802$ Гц.

Найти: $\nu_{рез}$.

Решение. Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad (1)$$

где ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы; δ – коэффициент затухания.

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2; \qquad (3)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2_{рез} + 2\delta^2. \qquad (4)$$

Умножив уравнение (3) на 2 и вычитая из него (4), получаем

$$\omega^2{}_{рез} = 2\omega^2 - \omega_0{}^2. \qquad (5)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, из уравнения (5) найдем резонансную частоту

$$\nu_{рез} = \sqrt{2\nu^2 - \nu_0{}^2} = 798 \text{ Гц}.$$

18. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $Q = 10^{-6}\cos(2\pi t + \frac{2\pi}{3})$, Кл. Определите: амплитуду колебаний заряда, циклическую частоту, частоту, период и начальную фазу колебаний заряда, амплитуду силы тока в контуре.

Дано: $Q = 10^{-6}\cos(2\pi t + \frac{2\pi}{3})$, Кл.

Найти: Q_m; ω_0; ν_0; T; φ ; I_m.

Решение. Из заданного закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора

$$Q = 10^{-6}\cos(2\pi t + \frac{2\pi}{3}), \text{ Кл}$$

следует: амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора $Q_m = 10^{-6}$ А; циклическая частота $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$. Начальная фаза колебаний заряда $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад.

Частота и период колебаний соответственно равны

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Силу тока в колебательном контуре найдем, продифференцировав по времени уравнение гармонических колебаний заряда $Q = Q_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 Q_m (\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}),$$

откуда амплитуда силы тока в контуре

$$I_m = \omega_0 Q_m.$$

Вычисляя, получаем $\nu_0 = 1$ Гц; $T = 1$ с; $I_m = 2\pi \cdot 10^{-6}$ А.

19. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0{,}2\sin 250\pi t$, А. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: период колебаний; электроемкость конденсатора; максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора; максимальную энергию магнитного поля; максимальную энергию электрического поля.

Дано: $L = 0{,}2$ Гн; $I = -0{,}2\sin 250\pi t$, А; $R = 0$.

Найти: T; C; $U_{\max}$, $W^{М}_{\max}$; $W^{Э}_{\max}$.

Решение. Сила тока в колебательном контуре согласно условию задачи

$$I = -0{,}2\sin 250\pi t, \text{ А},$$

откуда следует, что амплитуда силы тока $I_m = 0{,}2$ А, а циклическая частота $\omega_0 = 250\pi$ с$^{-1}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{Q_m}{C}, \tag{1}$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора.

Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \approx 0$) по закону

$$Q = Q_m \cos\omega t$$

(начальную фазу приняли равной нулю).

Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin\omega t = -I_m \sin\omega t,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = \omega_0 Q_m, \quad \text{откуда} \quad Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C}.$$

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$ и магнитного поля катушки $\frac{LI^2}{2}$, остается постоянной.

Следовательно,

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

т.е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны.

Таким образом, максимальные значения

$$W_{\max}^{Э} = W_{\max}^{M} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Вычисляя, получаем

$$T = 8 мс; C = 8{,}11 \text{ мкФ}; \ U_m = 31{,}4 \text{ В}; \ W_{\max}^{Э} = W_{\max}^{M} = 4 \text{ мДж}.$$

20. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ пФ, катушки индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определите: период затухающих колебаний; через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Дано: $C = 100$ пФ; $L = 0{,}01$ Гн; $R = 20$ Ом.

Найти: T; N_e.

Решение. Период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 2 \text{ мкс}$$

(учли, что собственная частота контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\delta = \frac{R}{2L}$).

Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \qquad (1)$$

где τ – время релаксации $\left(\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R} \right)$.

Подставив выражение τ в формулу (1), найдем число полных колебаний

$$N_e = \frac{2L}{RT} = 5.$$

21. Определите добротность Q колебательного контура, если его собственная частота ω_0 отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано: $\omega_0 = 1{,}05\omega$.

Найти: Q.

Решение. В реальном колебательном контуре (т.е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \approx 0$)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}, \qquad (1)$$

где δ – коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\theta = \delta T$. (T – период затухающих колебаний, $T = \frac{2\pi}{\omega}$).

Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \qquad (1)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}},$$

откуда добротность колебательного контура

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}} = 1{,}56.$$

22. Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивности L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. 14.10). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC} = 100$ В, амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 160$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

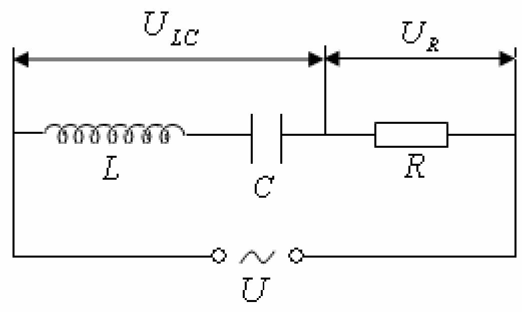


Рис. 14.10

Дано: $U_{LC} = 100$ В; $U_R = 160$ В.

Найти: φ.

Решение. В приведенной на рис. 14.10 цепи возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падение напряжений. На рис. 14.11 приведена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C).

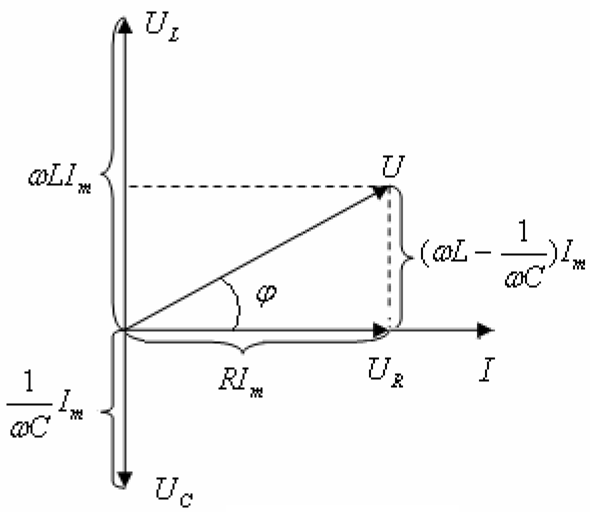


Рис. 14.11

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{1}$$

Реактивные (ωL и $\frac{1}{\omega C}$) и активное (R) сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи.

Амплитудные значения напряжения на резисторе $U_R = RI_m$, на катушке индуктивности $U_L = \omega L I_m$, на конденсаторе $U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$,

где I_m – амплитуда силы тока.

Из приведенных выражений находим

$$R = \frac{U_R}{I_m};\ \omega L = \frac{U_L}{I_m};\ \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_m}. \tag{2}$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), найдем

$$\lg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \tag{3}$$

Учитывая, что $U_{LC} = U_L - U_C$ (см. векторную диаграмму, рис. 14.11), выражение (3) можно записать в виде

$$tg\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R}, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{U_{LC}}{U_R} = 32°.$$

23. В цепь переменного тока частотой ω резистор сопротивлением R и катушка индуктивностью L один раз включены последовательно, другой – параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z.

Дано: R; L; ω.

Найти: Z.

Решение

Последовательное включение *R* и *L* (рис. 14.12)

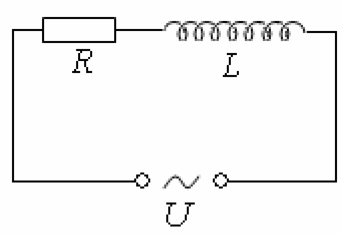


Рис. 14.12

На рис. 14.13 приведена векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжений на резисторе (U_R) и катушке (U_L), причем исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов.

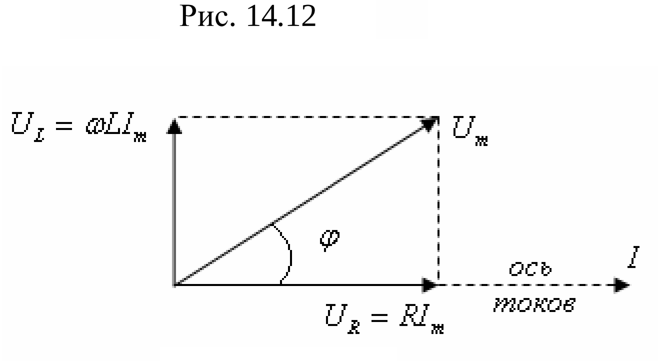


Рис. 14.13

Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_R и U_L.

Из прямоугольного треугольника имеем

$$U_m{}^2 = U_R{}^2 + U_L{}^2.$$

Учитывая, что $U_m = ZI_m$; $U_R = RI_m$; $U_L = \omega L I_m$, получаем

$$Z^2 = R^2 + (\omega L)^2,$$

откуда

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

В данном случае $\varphi > 0$, т.е. ток отстает по фазе от внешнего напряжения.

Параллельное включение *R* и *L* (рис. 14.14)

На рис. 14.15 приведена векторная диаграмма параллельной цепи. Она строится аналогично векторной диаграмме последовательной цепи (см. рис. 14.13), только исходной для построения выбирается ось напряжений. Из прямоугольного треугольника имеем

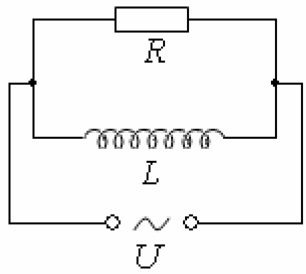


Рис. 14.14

$$I_m = \sqrt{I_R{}^2 + I_L{}^2}.$$

Учитывая, что при параллельном соединении $U_m = U_R = U_L$ и амплитуды силы токов

$$I_m = \frac{U_m}{Z};\ I_R = \frac{U_R}{R};\ I_L = \frac{U_L}{\omega L},$$

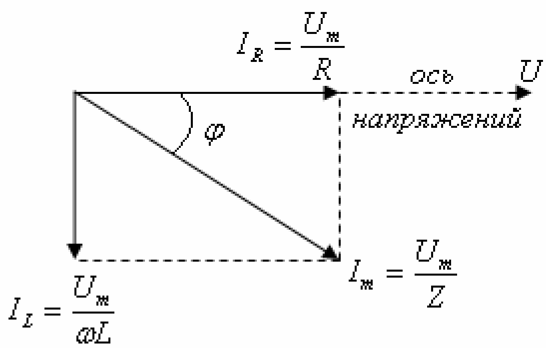


Рис. 14.15

получаем

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}},$$

откуда полное сопротивление цепи при параллельном включении резистора и катушки

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

В данном случае $\varphi < 0$, т.е. ток опережает по фазе внешнее напряжение.

24. В цепи переменного тока (рис. 14.16) с частотой $\nu = 50$ Гц амплитуда силы тока внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите индуктивность L катушки, если электроемкость C конденсатора равна 10 мкФ.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $I_m = 0$; $C = 10$ мкФ.

Найти: L.

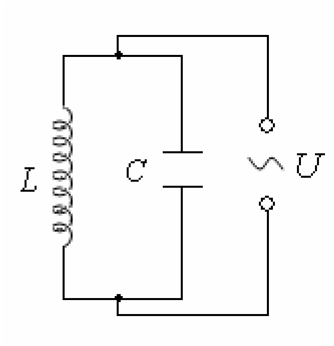


Рис. 14.16

Решение. В рассматриваемой параллельной цепи переменного тока, содержащей электроемкость C и индуктивность L, наблюдается резонанс токов. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_C - I_L| = 0, \qquad (1)$$

где I_C и I_L – соответственно амплитудные значения силы тока в обеих ветвях (содержащих C и L). Знак «минус» в формуле (1) показывает, что токи в обеих ветвях противоположны по знаку.

Из формулы (1) следует, что

$$I_C = I_L. \qquad (2)$$

Поскольку имеем параллельную цепь, то амплитудные значения внешнего напряжения и напряжений на конденсаторе и катушке равны:

$$U_C = U_L = U_m.$$

Учитывая эту формулу, выражение (2) можем записать как

$$\frac{U_m}{R_C} = \frac{U_m}{R_L},$$

откуда следует, что емкостное реактивное $\left(R_C = \frac{1}{\omega C}\right)$ и индуктивное реактивное ($R_L = \omega L$) сопротивления равны, т.е.

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L. \qquad (3)$$

Так как $\omega = 2\pi\nu$, то из формулы (3) найдем индуктивность

$$L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 1{,}05 \text{ Гн}.$$

25. В колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0,2$ Ом, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определите амплитудное значение напряжения U_{Cm} на конденсаторе, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет 5 мВт.

Дано: $C = 5$ нФ; $L = 10$ мкГн; $R = 0,2$ Ом; $< P >= 5$ мВт.

Найти: U_{Cm}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$< P >= \frac{1}{2} R I_m^2, \qquad (1)$$

где $I_m = U_{Cm} \omega C$ – амплитуда силы тока.

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания,

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), получаем

$$< P >= \frac{R U_{Cm} \omega^2 C^2}{2} = \frac{R U_{Cm} C}{2L},$$

откуда найдем амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \sqrt{\frac{2L < P >}{RC}} = 10 \text{ В}.$$

14.3. Задачи для самостоятельного решения

14.1. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 2$ см. Определить начальную фазу φ, если $x(0) = -\sqrt{3}$ см и $x(0) < 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

14.2. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает колебания с частотой $\nu = 0,5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см.

Определить: 1) скорость υ точки в момент времени, когда смещение $x = 1,5$ см; 2) максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

14.3. Физический маятник представляет собой стержень длиной $l = 1$ м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром $d = \frac{l}{2}$ и массой m_1. Горизонтальная ось маятника проходит через середину стержня, перпендикулярно ему. Определить период T колебаний такого маятника.

14.4. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси x. По прошествии времени $t_1 = 0,1$ с от начала движения смещение точки от положения равновесия $x_1 = 5$ см, скорость $\upsilon_{1x} = 62\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, ускорение $a_{1x} = -540\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Определить: 1) амплитуду A, круговую частоту ω и начальную фазу колебаний φ_0; 2) смещение x, скорость υ_x и ускорение a_x в начальный момент времени $t = 0$.

14.5. Шарик массой $m = 20$ г колеблется с периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени шарик обладал энергией $E = 0,01$ Дж и находился от положения равновесия на расстоянии $x_1 = 0,25$ м. Написать уравнение гармонического колебания шарика.

14.6 – 14.30. Тело совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Определите период T и начальную фазу φ_0 колебаний по данным табл. 14.2. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t = 0$ и графики изменения координаты, скорости и ускорения от времени $x(t)$, $\upsilon_x(t)$, $a_x(t)$.

Таблица 14.2

Условия к задачам 14.6 – 14.30

Номер задачи	Амплитуда A, см	Значения при $t = 0$		
		$x(0)$, см	$\upsilon_x(0)$, $\frac{м}{с}$	$a_x(0)$, $\frac{м}{с^2}$
14.6	4		–0,42	–6,36
14.7	4	3,46	0,20	
14.8	4	–2,83	<0	11,32
14.9	4		–0,60	0,00
14.10	4	–2,00	0,52	
14.11	5		–0,25	4,33
14.12	5	5,00		–5,00
14.13	4		0,00	16,00
14.14	6	4,24	–0,85	
14.15	4	–3,46	–0,30	
14.16	4	2,83	>0	–2,83
14.17	4	2,00	–0,35	
14.18	4	0,00	0,60	
14.19	4	–3,46	>0	13,84
14.20	5	2,50	8,66	
14.21	5		4,33	2,50
14.22	4	–4,00		9,00
14.23	4		0,40	0,00
14.24	6		0,00	–13,50
14.25	6		0,52	–3,00
14.26	4	2,83	<0	–6,37
14.27	4		–0,52	4,50
14.28	6		0,64	9,54
14.29	6		0,45	–11,69
14.30	4	0,00	–0,40	

14.31 – 14.58. Начальная фаза гармонического колебания материальной точки равна нулю. При смещении точки от положения равновесия x_1 скорость ее составляет υ_1, а при смещении x_2 скорость равна υ_2. Период колебаний равен T. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 14.3. Определить амплитуду колебания (с точностью до 0,01см).

Таблица 14.3

Условия к задачам 14.31 – 14.58

Номер задачи	x_1, см	x_2, см	υ_1, см/с	υ_2, см/с	T, с
14.31	?	1,5	4,2	2,5	2,08
14.32	3,0	?	8,	6,0	3,14
14.33	1,5	2,0	?	1,0	2,94
14.34	2,4	2,8	3,0	?	4,05
14.35	1,2	1,5	2,0	1,6	?
14.36	?	4,0	3,5	0,4	4,78
14.37	0,1	?	2,5	2,0	2,052
14.38	4,5	6,0	?	0,8	6,36
14.39	0,8	1,0	3,5	?	2,09
14.40	2,0	2,5	3,0	2,0	?
14.41	?	6,0	4,5	1,0	4,75
14.42	4,0	?	14,0	2,8	2,05
14.43	1,4	2,0	?	1,0	3,9
14.44	0,2	0,8	5,0	?	1,062
14.45	3,5	4,0	2,6	1,4	?
14.46	?	1,0	4,0	3,5	2,81
14.47	1,0	?	2,5	1,0	4,75
14.48	0,4	0,6	?	1,6	2,34
14.49	2,2	2,8	2,0	?	6,28
14.50	5,0	6,0	12,0	3,2	?
14.51	?	2,5	4,5	1,2	2,17
14.52	0,5	?	5,2	2,5	0,86
14.53	6,0	6,5	?	2,0	2,78
14.54	1,6	2,0	4,0	?	2,85
14.55	2,5	3,0	3,6	1,2	?
14.56	?	0,5	5,0	3,0	0,72
14.57	5,5	?	10,0	1,5	2,75
14.58	0,6	1,2	?	1,4	2,46

14.59 – 14.86. Физическое тело заданных форм и размеров, подвешенное на гвозде, вбитом в стену, совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний для заданного тела согласно номеру задачи в табл. 14.4. Размерами петли, за которую подвешено тело, пренебречь.

Таблица 14.4

Условия к задачам 14.59 – 14.86

Номер задачи	Физическое тело	Размеры тела		Длина нити L, см
		радиус r, см	длина l, см	
14.59	Обруч	19,6		
14.60		4,9		
14.61		122,5		
14.62		44,1		
14.63	Диск	5,29		
14.64		26,13		
14.65		6,53		
14.66		4,14		
14.67	Диск на нити	6,0		10
14.68		5,0		5
14.69		10,0		5
14.70		8,0		12
17.71	Шар	5,67		
14.72		4,48		
14.73		2,52		
14.74		7,0		
14.75	Шар на нити	2,0		3
14.76		5,0		5
14.77		12,0		8
14.78		12,0		18
14.79	Стержень		20	
14.80			50	
14.81			80	
14.82			100	
14.83	Стержень на нити		20	10
14.84			50	20
14.85			80	50
14.86			100	50

14.87 – 14.111. Применяя графический метод сложения и соблюдая масштаб, постройте траекторию светящейся точки на экране осциллографа как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний $x(t)$ и $y(t)$, которые совершает эта точка. Уравнения колебаний приведены в табл. 14.5.

Таблица 14.5

Условия к задачам 14.87 – 14.111

Номер задачи	Уравнения колебаний $x(t)$, $y(t)$	Номер задачи	Уравнения колебаний $x(t)$, $y(t)$
14.87	$x = A\sin\omega t$, $y = A\cos 2\omega t$	14.100	$x = 2A\sin\omega t$, $y = A\cos 3\omega t$
14.88	$x = A\sin 2\omega t$, $y = A\sin 3\omega t$	14.101	$x = A\sin 2\omega t$, $y = A\cos 3\omega t$
14.89	$x = A\cos 3\omega t$, $y = A\cos 2\omega t$	14.102	$x = 2A\cos 2\omega t$, $y = A\sin\omega t$
14.90	$x = 2A\cos\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$	14.103	$x = A\cos\omega t$, $y = A\sin 3\omega t$
14.91	$x = 2A\cos 3\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$	14.104	$x = 2A\sin 3\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$
14.92	$x = A\sin 3\omega t$, $y = A\sin\omega t$	14.105	$x = A\sin 2\omega t$, $y = A\cos\omega t$
14.93	$x = 2A\sin\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$	14.106	$x = 2A\sin\omega t$, $y = A\sin 3\omega t$
14.94	$x = 2A\cos 2\omega t$, $y = A\sin 3\omega t$	14.107	$x = A\cos 2\omega t$, $y = A\cos\omega t$
14.95	$x = A\cos\omega t$, $y = A\cos 3\omega t$	14.108	$x = 2A\cos 3\omega t$, $y = A\cos\omega t$
14.96	$x = 2A\sin 3\omega t$, $y = A\cos\omega t$	14.109	$x = A\sin 2\omega t$, $y = A\sin\omega t$
14.97	$x = A\cos 3\omega t$, $y = A\sin\omega t$	14.110	$x = 2A\cos\omega t$, $y = A\cos 2\omega t$
14.98	$x = 2A\cos 2\omega t$, $y = A\cos 3\omega t$	14.111	$x = 3A\sin 3\omega t$, $y = A\cos 3\omega t$
14.99	$x = 2A\cos 2\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$		

14.112 – 14.139. Материальная точка, подвешенная на пружине, массой которой можно пренебречь, колеблется по гармоническому закону с амплитудой, равной A. Максимальная сила, действующая при этом на материальную точку, равна F_{max}, полная энергия колеблющейся точки – E. Коэффициент жесткости пружины – k. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 14.6.

Таблица 14.6

Условия к задачам 14.112 – 14.139

Номер задачи	A, см	F_{max}, Н	k, $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	E, Дж
14.112	?	?	100	0,02
14.113	6	?	?	0,24
14.114	1	4	?	?
14.115	?	7	280	?
14.116	?	?	300	0,24
14.117	3	?	?	0,27
14.118	5	20	?	?
14.119	?	1,5	100	?
14.120	?	?	1400	0,07
14.121	0,8	?	?	0,012
14.122	1,5	8	?	?
14.123	?	5	200	?
14.124	?	?	200	$5{,}625 \cdot 10^{-3}$
14.125	2,5	?	?	$7{,}5 \cdot 10^{-2}$
14.126	0,9	2,5	?	?
14.127	?	12	300	?
14.128	?	?	100	0,125
14.129	4	?	?	0,18
14.130	6	30	?	?
14.131	?	1,6	320	?
14.132	?	?	233,3	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$
14.133	2	?	?	0,16
14.134	3	6	?	?
14.135	?	6,4	800	?
14.136	?	?	416,7	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$
14.137	0,7	?	?	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$
14.138	0,5	0,9	?	?
14.139	?	18	600	?

14.140 – 14.167. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного при сложении одинаково направленных колебаний, описываемых уравнениями $x_1 = f_1(t)$ и $x_2 = f_2(t)$ согласно номеру задачи в табл. 14.7.

Записать уравнение результирующего колебания.

Таблица 14.7

Условия к задачам 14.140 – 14.167

Номер задачи	$x_1 = f_1(t)$, см	$x_2 = f_2(t)$, см
14.140	$x_1 = 2\sin(5\pi t + \pi/2)$	$x_2 = 3\sin(5\pi t + \pi/4)$
14.141	$x_1 = 3\cos(10\pi t - \pi/2)$	$x_2 = \cos(10\pi t + \pi/4)$
14.142	$x_1 = 8\cos(5\pi t - \pi/4)$	$x_2 = 3\cos(5\pi t + \pi/4)$
14.143	$x_1 = \sin(0,5\pi t - \pi)$	$x_2 = 6\sin(0,5\pi t + \pi/2)$
14.144	$x_1 = 4\sin(18\pi t + \pi/6)$	$x_2 = 2\sin(18\pi t - \pi/3)$
14.145	$x_1 = 1,5\sin(6\pi t - \pi/6)$	$x_2 = \sin(6\pi t + \pi/3)$
14.146	$x_1 = 6\cos(25\pi t + \pi/2)$	$x_2 = 5\cos(25\pi t - \pi/6)$
14.147	$x_1 = 12\cos(40\pi t - \pi/2)$	$x_2 = 9\cos(40\pi t + \pi/6)$
14.148	$x_1 = 14\cos(8\pi t - \pi)$	$x_2 = 10\cos(8\pi t + \pi/3)$
14.149	$x_1 = 5\sin(14\pi t + \pi)$	$x_2 = 3\sin(14\pi t - \pi/3)$
14.150	$x_1 = 9\sin(30\pi t - \pi/3)$	$x_2 = 6\sin(30\pi t + \pi/2)$
14.151	$x_1 = 10\cos(2\pi t + \pi/3)$	$x_2 = 12\cos(2\pi t - \pi/2)$
14.152	$x_1 = 3\cos(24\pi t + \pi/4)$	$x_2 = 4\cos(24\pi t - \pi/3)$
14.153	$x_1 = 10\sin(9\pi t - \pi/4)$	$x_2 = 9\sin(9\pi t + \pi/3)$
14.154	$x_1 = \cos(35\pi t - \pi/6)$	$x_2 = 5\cos(35\pi t - \pi/4)$
14.155	$x_1 = 6\sin(16\pi t + \pi/6)$	$x_2 = 4\sin(16\pi t + \pi/4)$
14.156	$x_1 = 5\cos(20\pi t - \pi)$	$x_2 = 8\cos(20\pi t + \pi/6)$
14.157	$x_1 = 1,2\sin(3\pi t + \pi)$	$x_2 = \sin(3\pi t + \pi/6)$
14.158	$x_1 = 8\sin(28\pi t + \pi/4)$	$x_2 = 3\sin(28\pi t - \pi)$

Окончание табл. 14.7

Номер задачи	$x_1 = f_1(t)$, см	$x_2 = f_2(t)$, см
14.159	$x_1 = 12\cos(12\pi t - \pi/4)$	$x_2 = 10\cos(12\pi t - \pi)$
14.160	$x_1 = \cos(45\pi t + \pi/2)$	$x_2 = 2\cos(45\pi t + \pi/3)$
14.161	$x_1 = 10\sin(4\pi t - \pi/2)$	$x_2 = 7\sin(4\pi t + \pi/3)$
14.162	$x_1 = 4\cos(15\pi t + \pi/4)$	$x_2 = 6\cos(15\pi t - \pi/6)$
14.163	$x_1 = 8\sin(60\pi t - \pi/4)$	$x_2 = 12\sin(60\pi t - \pi/6)$
14.164	$x_1 = 3\sin(22\pi t - \pi)$	$x_2 = 4\sin(22\pi t - \pi/4)$
14.165	$x_1 = 9\cos(50\pi t + \pi)$	$x_2 = 8\cos(50\pi t - \pi/4)$
14.166	$x_1 = 12\sin(7\pi t + \pi/4)$	$x_2 = 7\sin(7\pi t + \pi/2)$
14.167	$x_1 = 1{,}5\cos(34\pi t - \pi/4)$	$x_2 = \cos(34\pi t + \pi/2)$

14.168 – 14.195. Получить уравнение траектории, по которой движется материальная точка, участвующая одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях, описываемых уравнениями $x = f_1(t)$ и $x = f_2(t)$, построить график траектории согласно номеру задачи в табл. 14.8.

Таблица 14.8

Условия к задачам 14.168 – 14.195

Номер задачи	$x = f_1(t)$, см	$x = f_2(t)$, см
14.168	$x = 2\cos(2{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2})$	$y = 2\cos(2{,}5\pi t + \pi)$
14.169	$x = 2\cos(2{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2})$	$y = 4\cos(2{,}5\pi t + \frac{\pi}{2})$
14.170	$x = 2\cos(2{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2})$	$y = 4\cos(2{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2})$
14.171	$x = 2\cos(2{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2})$	$y = 4\cos(2{,}5\pi t + 2\pi)$
14.172	$x = \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$	$y = 7\cos(5\pi t + \frac{3\pi}{4})$
14.173	$x = \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$	$y = 7\cos(5\pi t + \frac{\pi}{4})$
14.174	$x = \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$	$y = \cos(5\pi t - \frac{3\pi}{4})$
14.175	$x = \cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$	$y = 7\cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$

Окончание табл. 14.8

Номер задачи	$x = f_1(t)$, см	$x = f_2(t)$, см
14.176	$x = 3\cos(10\pi t + \frac{5\pi}{6})$	$y = 15\cos(10\pi t + \frac{\pi}{3})$
14.177	$x = 3\cos(10\pi t + \frac{\pi}{6})$	$y = 15\cos(10\pi t + \frac{\pi}{6})$
14.178	$x = 3\cos(10\pi t - \frac{5\pi}{6})$	$y = 15\cos(10\pi t + \frac{\pi}{6})$
14.179	$x = 3\cos(10\pi t + \frac{\pi}{6})$	$y = 3\cos(10\pi t - \frac{\pi}{3})$
14.180	$x = 3\cos(30\pi t + \frac{2\pi}{3})$	$y = 9\cos(30\pi t - \frac{\pi}{3})$
14.181	$x = 9\cos(30\pi t + \frac{2\pi}{3})$	$y = 9\cos(30\pi t + \frac{7\pi}{6})$
14.182	$x = 3\cos(30\pi t + \frac{2\pi}{3})$	$y = 9\cos(30\pi t + \frac{\pi}{6})$
14.183	$x = 3\cos(30\pi t + \frac{2\pi}{3})$	$y = 9\cos(30\pi t + \frac{2\pi}{3})$
14.184	$x = 4\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$	$y = 6\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$
14.185	$x = 4\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$	$y = 6\cos(20\pi t + \frac{\pi}{3})$
14.186	$x = 4\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$	$y = 6\cos(20\pi t + \frac{5\pi}{6})$
14.187	$x = 4\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$	$y = 4\cos(20\pi t - \frac{2\pi}{3})$
14.188	$x = 2\cos(25\pi t - \frac{2\pi}{9})$	$y = 2\cos(25\pi t + \frac{5\pi}{18})$
14.189	$x = 2\cos(25\pi t + \frac{7\pi}{9})$	$y = 8\cos(25\pi t + \frac{5\pi}{18})$
14.190	$x = 2\cos(25\pi t - \frac{2\pi}{9})$	$y = 8\cos(25\pi t - \frac{2\pi}{9})$
14.191	$x = 2\cos(25\pi t + \frac{7\pi}{9})$	$y = 8\cos(25\pi t - \frac{2\pi}{9})$
14.192	$x = 6\cos(15\pi t + \frac{5\pi}{12})$	$y = 3\cos(15\pi t - \frac{7\pi}{12})$
14.193	$x = 6\cos(15\pi t + \frac{5\pi}{12})$	$y = 3\cos(15\pi t + \frac{5\pi}{12})$
14.194	$x = 6\cos(15\pi t + \frac{5\pi}{12})$	$y = 3\cos(15\pi t - \frac{\pi}{12})$
14.195	$x = 3\cos(15\pi t + \frac{5\pi}{12})$	$y = 3\cos(15\pi t + \frac{11\pi}{12})$

14.196 – 14.223. За время t механическая система успевает совершить N колебаний. За это время амплитуда колебаний уменьшится в n раз. Коэффициент затухания колебаний равен β, логарифмический декремент затухания – k, добротность системы Q, относительная убыль энергии системы за период колебаний – $\Delta W/W$. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 14.9.

Таблица 14.9

Условия к задачам 14.196 – 14.223

Номер задачи	t, с	N	n	β, с$^{-1}$	k	Q	$\Delta W/W$
14.196	?	?	5,0	0,02	?	314	?
14.197	50	25	?	?	0,05	?	?
14.198	?	40	?	0,05	?	?	0,05
14.199	20	?	7,39	?	?	125,6	?
14.200	?	30	?	0,015	0,033	?	?
14.201	120	?	20,08	?	?	62,8	?
14.202	?	?	12,18	0,025	?	?	0,2
14.203	60	96	?	?	0,025	?	?
14.204	?	60	?	0,01	?	157	?
14.205	75	?	4,48	?	?	?	0,1
14.206	?	20	?	0,04	0,1	?	?
14.207	33	?	3,74	?	?	94,2	?
14.208	?	?	4,95	0,02	?	?	0,04
14.209	85	170	?	?	0,01	?	?
14.210	?	120	?	0,012	?	188,4	?
14.211	110	?	9,03	?	?	?	0,08
14.212	?	90	?	0,04	0,02	?	?
14.213	150	?	4,49	?	?	104,7	?
14.214	?	?	2,46	0,01	?	?	0,03
14.215	45	30	?	?	0,06	?	?
14.216	?	50	?	0,05	?	78,5	?
14.217	48	?	11,03	?	?	?	0,12
14.218	?	25	?	0,04	0,08	?	?
14.219	135	?	3,86	?	?	209	?
14.220	?	?	3,67	0,02	?	?	0,02
14.221	60	15	?	?	0,04	?	?
14.222	?	12	?	0,09	?	52,3	?
14.223	105	?	8,17	?	?	?	0,06

14.224 – 14.251. Колебательный контур имеет емкость C и индуктивность L. Логарифмический декремент затухания равен k. За время t' в контуре вследствие затухания теряется $\Delta W/W_0$ энергии. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 14.10. Выполнить дополнительное задание.

Таблица 14.10

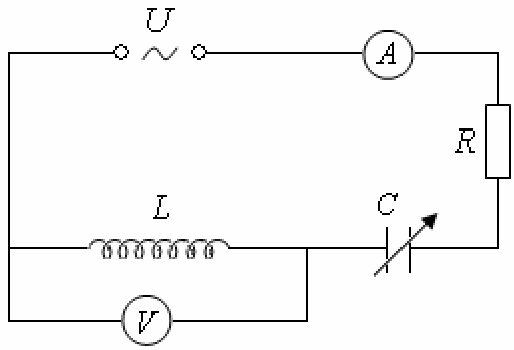
Условия к задачам 14.224 – 14.251

Номер задачи	C, мкФ	L, Гн	k	t', с	$\Delta W/W_0$, %	Пояснить зависимость
14.224	12	0,03	0,006	0,15	?	$\frac{\Delta W}{W_0} = f(t')$
14.225				0,20	?	
14.226				0,25	?	
14.227				0,30	?	
14.228	14,4	0,1	0,001	0,8	?	$\frac{\Delta W}{W_0} = f(k)$
14.229			0,002		?	
14.230			0,003		?	
14.231			0,004		?	
14.232	18	0,5	0,01	?	90	$t'_{90\%} = f(k)$
14.233			0,015	?		
14.234			0,02	?		
14.235			0,025	?		
14.236	80	0,2	0,005	?	60	$\frac{\Delta W}{W_0} = f(t')$
14.237				?	70	
14.238				?	80	
14.239				?	90	
14.240	16	0,25	0,001	1,5	?	$\frac{\Delta W}{W_0} = f(t')$
14.241				3,0	?	
14.242				4,5	?	
14.243				6,0	?	
14.244	40	0,4	0,01	?	99	$t'_{99\%} = f(k)$
14.245			0,02	?		
14.246			0,03	?		
14.247			0,04	?		
14.248	90	0,1	0,003	1,0	?	$\frac{\Delta W}{W_0} = f(k)$
14.249			0,005		?	
14.250			0,007		?	
14.251			0,009		?	

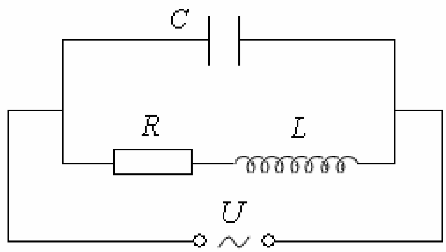
14.252. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L = 1{,}00$ мГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться в пределах от $C_{\min} = 9{,}7$ пФ до $C_{\max} = 92$ пФ. В каком диапазоне длин волн $\lambda_{\min}...\lambda_{\max}$ может принимать радиостанции этот приемник?

14.253. Активное сопротивление колебательного контура $R = 0{,}33$ Ом. Какую мощность P потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой силы тока $I_m = 30$ мА?

14.254. На зажимы цепи, изображенной на рисунке, подается переменное напряжение с действующим значением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Активное сопротивление цепи $R = 22$ Ом, индуктивность $L = 318$ мГн. Переменная емкость в цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно индуктивности, стало максимальным. Найти показания U_1 вольтметра и I амперметра в этих условиях. Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.



14.255. Определить действующие значения силы тока I_C, I_{RL} и I на всех участках цепи, изображенной на рисунке, если $R = 1$ Ом, $L = 1{,}00$ мГн, $C = 0{,}111$ мкФ, $U = 30$ В, $\omega = 1{,}00 \cdot 10^5 \ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$.



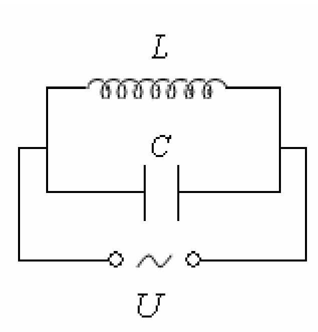
14.256. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 5{,}0$ мкФ и катушки индуктивности $L = 0{,}2$ Гн. Определить максимальную силу тока I_m в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_m = 90$ В. Сопротивлением контура R пренебречь.

14.257. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется со временем по закону $U = 100\sin 1000\pi t$. Электроемкость конденсатора 0,5 мкФ. Определите: 1) период собственных колебаний; 2) индуктивность; 3) энергию контура; 4) максимальную силу тока, текущего по катушке индуктивности.

14.258. В цепь переменного тока с амплитудным значением напряжения $U_m = 100$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 1$ кОм, катушка индуктивностью $L = 0,5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Определите среднюю мощность $< P >$, выделяемую в цепи.

14.259. В цепь переменного тока с действующим значением напряжения $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор с активным сопротивлением $R = 5$ Ом и катушка индуктивности. Определите индуктивность L катушки, если амплитудное значение I_m силы тока в цепи равно $2A$.

14.260. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 5$ мГн и конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ. Добротность колебательного контура $Q = 100$. Какую среднюю мощность следует подводить для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{Cm} = 2$ В?



14.261. В цепи переменного тока (см. рисунок) с частотой $\nu = 50$ Гц амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите емкость C конденсатора, если индуктивность L катушки равна $0,2$ Гн.

14.262. В цепь переменного тока с амплитудным значением внешнего напряжения $U_m = 150$ В последовательно включены резистор, конденсатор емкостью $C = 0,1$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 1$ мГн. Определите сопротивление R резистора, амплитудные значения напряжений на элементах цепи, если амплитуда силы тока при резонансе $(I_m)_{рез} = 3$ А.

14.263. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 10$ нФ и катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн. Определите критическое сопротивлении $R_{кр}$ контура, при котором наступает апериодический процесс.

15. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

15.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Процесс распределения колебаний в среде называют **волновым**.

Механические колебания возникают в любой упругой среде, содержащей атомы и молекулы, когда происходит нарушение устойчивого равновесия.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси *X*,

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - Kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды с координатой *X* в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; K – волновое число $\left(K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}\right)$; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Уравнение сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - Kr + \varphi_0),$$

где $\xi(r,t)$ – смещения точек среды на расстояние r от центра волны в момент времени t; A_0 – постоянная величина.

Скорость распространения волнового процесса зависит от плотности среды, в которой возникают волны. В случае распространения продольных волн она зависит от модуля Юнга *E* и определяется как

$$\upsilon_{прод} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

В случае распространения поперечных волн скорость зависит от модуля сдвига *N*

$$\upsilon_{попер} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}.$$

Волновой процесс характеризуется тем, что частицы среды совершают только колебательные движения относительно положения равновесия и почти не перемещаются поступательно. Поступательно перемещаются лишь фаза и энергия колебаний всегда в направлении от «источника». Скорость перемещения фазы колебаний характеризуется фазовой скоростью $\left(\upsilon_{\Phi}=\dfrac{\omega}{K}\right)$, а энергия – групповой $\left(\upsilon_{\Gamma}=\dfrac{d\omega}{dK}\right)$. Связь между ними

$$\upsilon_{\Gamma}=\upsilon_{\Phi}-\lambda\frac{d\upsilon_{\Phi}}{d\lambda},$$

где ω – циклическая частота; K – волновое число; λ –- длина волны ($\lambda=\upsilon_{\Phi}\cdot T$).

Существование явлений электромагнитной и магнитоэлектрической индукции создает возможность распространения переменного электромагнитного поля в виде бегущих волн. Наибольший интерес при изучении их свойств представляют бегущие плоские гармонические волны, так как любую другую волну вдали от источников можно представить через суперпозицию определенного набора таких волн. Векторы напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в бегущей плоской гармонической волне взаимно ортогональны и изменяются синфазно в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t)&=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_0);\\ \vec{B}(\vec{r},t)&=\vec{B}_0\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_0).\end{aligned} \qquad (15.1)$$

Кроме того, векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогональны и к направлению распространения волны, которое задается волновым вектором $\vec{K}$. Модуль волнового вектора называется волновым числом K и определяется по формуле $K=\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

В каждой точке волны векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{K}$ составляют правовинтовую тройку (рис. 15.1) и связаны соотношением

$$\left[\vec{K},\vec{E}\right]=\omega\vec{B} \quad \text{или} \quad E=cB, \qquad (15.2)$$

где c – скорость света.

Электромагнитные волны переносят энергию, плотность которой равна сумме плотностей энергии электрического ω_E и магнитного ω_M полей в вакууме и определяется по формуле

$$\omega=\omega_E+\omega_M=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}. \qquad (15.3)$$

Соответственно модуль вектора плотности потока энергии равен

$$S = \omega c = \frac{1}{\mu_0} EB, \qquad (15.4)$$

а вектор плотности потока энергии, называемый **вектором Пойнтинга**, определяется по формуле

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}, \vec{B}\right]. \qquad (15.5)$$

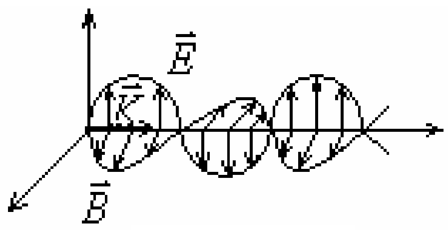


Рис. 15.1

На практике векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{S}$ быстро осциллируют и измерять можно только модуль среднего по времени значения плотности потока энергии электромагнитной волны:

$$I = \left|<\vec{S}>\right| = c < \omega > = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} < E^2 > = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{E_0^2}{2}. \qquad (15.6)$$

Эта величина называется **интенсивностью** волны.

Из теории электромагнитных волн следует, что вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля плоской волны всегда расположен в плоскости, перпендикулярной к направлению ее распространения. Если его направление в каждый момент времени непредсказуемо (хаотично), то излучение называется **естественным** или **неполяризованным**. Если же зависимость $\vec{E}(\vec{r}, t)$ может быть задана неслучайной функцией, то говорят, что волна поляризована. Например, монохроматическая волна всегда поляризована, и в любой точке поперечной распространению волны неподвижной плоскости конец вектора $\vec{E}$ описывает эллипс. Такая электромагнитная волна называется эллиптически поляризованной.

Практический интерес представляют случаи эллиптической поляризации: линейной (или плоской), когда эллипс вырождается в отрезок прямой линии (рис. 15.2), и циркулярной (или круговой), когда эллипс становится окружностью (рис. 15.3). В первом случае плоскость, в которой колеблется вектор, называется **плоскостью колебаний**.

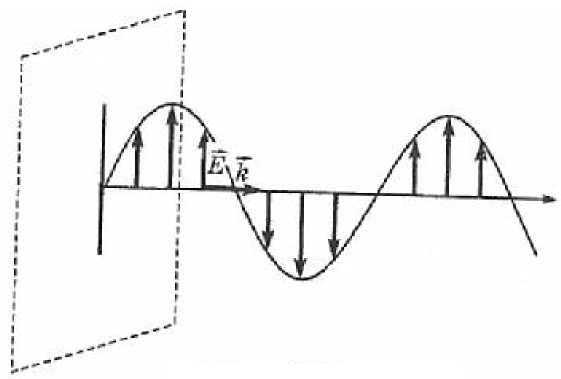


Рис. 15.2

При циркулярной поляризации в зависимости от направления вращения вектора $\vec{E}$ различают волны, поляризованные по **правому** и **левому кругу**. В первом случае вектор $\vec{E}$ совершает вращение по часовой стрелке, а во втором – против при наблюдении вдоль направления распространения волны.

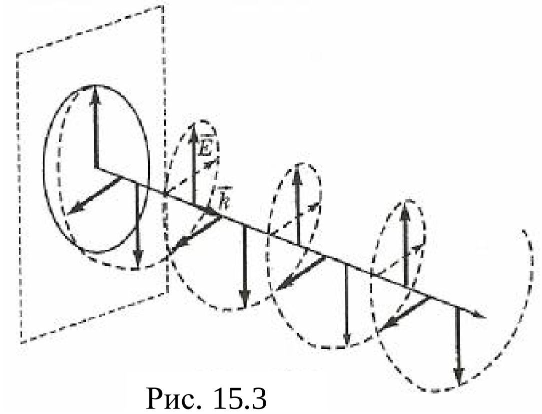


Рис. 15.3

Любое состояние поляризации представляется как суперпозиция двух базисных состояний. Например, линейно-поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух базисных (независимых) линейно-поляризованных или двух базисных волн, поляризованных по левому и правому кругу. Выбор базисных состояний произволен и определяется из соображений удобства. Например, он может быть обусловлен поляризационными характеристиками устройств, с помощью которых поляризованная волна создается или регистрируется. Такие устройства называются **поляризаторами** или **анализаторами**, и они пропускают через себя только проекцию состояния поляризации волны на соответствующее базисное состояние. Например, поляризатор, называемый **призмой Николя** (или просто **николь**), пропускает волну, плоскость колебаний которой параллельна некоторой плоскости призмы, называемой **плоскостью поляризатора**. При прохождении волны с другой плоскостью колебаний через такое устройство пропускается только проекция $\vec{E}_{ПР}$ ее вектора $\vec{E}$ на плоскость поляризатора MN (рис. 15.4).

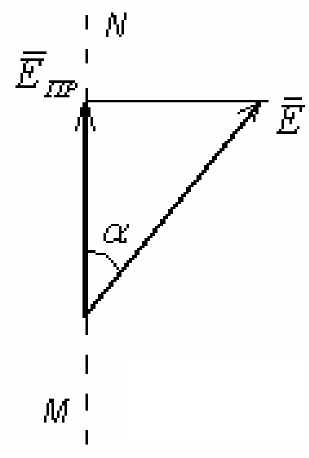


Рис. 15.4

$$E_{ПР} = E\cos\alpha, \tag{15.7}$$

где α – угол между плоскостью колебаний падающей волны и плоскостью поляризатора. Тогда с учетом формулы (15.6) для интенсивности $I_{ПР}$ прошедшей через поляризатор волны выполняется закон Малюса

$$I_{ПР} = I_0\cos^2\alpha, \tag{15.8}$$

где I_0 – интенсивность падающей линейно-поляризованной волны.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Закон Брюстера

$$tg\alpha_B = n_{21},$$

где α_B – угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным, n_{21} – относительный показатель преломления.

Двойным лучепреломлением называется способность некоторых веществ, в частности кристаллов, расщеплять падающий световой луч на два луча – обыкновенный (о) и необыкновенный (е), которые распространяются в различных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Кристаллы, в которых существует выделенное направление, называемое оптической осью, и вдоль которого луч света не испытывает двойного преломления, называются оптически одноосными. При этом, если показатель преломления необыкновенного луча n_e больше показателя преломления обыкновенного n_o ($n_e > n_o$, $\nu_e < \nu_o$), то такие кристаллы называются оптически положительными, если же $n_e < n_o$, т.е $\nu_e > \nu_o$, то такие кристаллы называются оптически отрицательными.

Волновая поверхность обыкновенного луча всегда сферическая, волновая поверхность необыкновенного луча представляет собой эллипсоид.

Наложение согласованных волновых процессов при определенных условиях приводит к возникновению явления интерференции – устойчивого во времени пространственного распределения амплитуд колебаний суммарного электромагнитного поля. Основным условием наблюдения интерференции волн является их **когерентность** – постоянство во времени разности фаз складываемых волн. Эта разность может изменяться (и изменяется) при переходе от одной точки пространства к другой.

При решении задач на интерференцию необходимо помнить, что принцип суперпозиции, выражаемый в виде формулы

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \tag{15.9}$$

справедлив лишь для ненаблюдаемого вектора напряженности (не регистрируемого с помощью приборов вследствие высокой частоты его колебаний в электромагнитной волне).

Реально наблюдается интенсивность результирующей волны, которая определяется посредством усреднения квадрата результирующего вектора напряженности по формуле (15.6)

$$I \sim < E^2 >. \qquad (15.10)$$

Принцип суперпозиции для интенсивности при интерференции не выполняется. Поэтому при решении задачи на интерференцию электромагнитных волн необходимо сначала по формуле (15.9) найти выражение для результирующего вектора напряженности, а затем определить пространственное распределение интенсивности излучения.

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1, \qquad (15.11)$$

где L_1 и L_2 – соответственно оптические длины проходимых волнами путей.

Оптическая длина пути $L = nS$ (S – геометрическая длина пути световой волны в среде; n – показатель преломления этой среды).

Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где λ_0 – длина волны в вакууме; Δ – оптическая разность хода двух световых волн.

Амплитуда колебаний среды в данной точке максимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна целому числу длин волн (условие интерференционных максимумов)

$$\Delta = \pm m\lambda, \quad m = 0,\ 1,\ 2,...$$

Амплитуда колебаний среды в данной точке минимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна нечетному числу полуволн (условие интерференционных минимумов)

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \kappa = 0,\ 1,\ 2,...$$

Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d},$$

где d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, причем $l >> d$.

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$2dn\cos\gamma \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,...);$$

$$2dn\cos\gamma \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,...),$$

где d – толщина пластинки; n – показатель преломления; α – угол падения; γ – угол преломления; λ_0 – длина волны света.

В общем случае член $\pm \lambda_0 / 2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак «плюс», если $n < n_0$ – знак «минус».

Кольца Ньютона наблюдаются в том случае, когда выпуклая поверхность линзы малой кривизны соприкасается с плоской поверхностью хорошо отполированной пластинки, так что остающаяся между ними прослойка постоянно утолщается от центра к краям (рис. 15.5). Если на линзу падает пучок монохроматического света, то световые волны, отраженные от верхней и нижней границ этой воздушной прослойки, будут интерферировать между собой. При этом в центре наблюдается черное пятно, окруженное рядом концентрических светлых и темных колец убывающей толщины. При наблюдении в проходящем свете будет обратная картина: пятно в центре будет светлым, все светлые кольца заменятся на темные и наоборот.

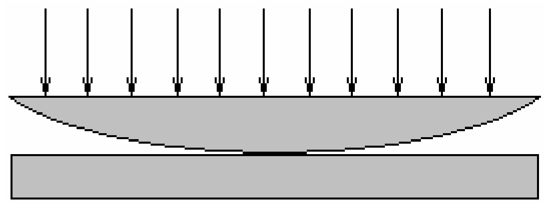


Рис. 15.5

Радиусы светлых колец Ньютона в проходящем свете определяются формулой

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (m = 1,\ 2,...).$$

Радиусы темных колец Ньютона в проходящем свете

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda R} \quad (m = 1,\ 2,...),$$

где m – номер кольца, R – радиус кривизны линзы.

В отраженном свете расположение светлых и темных колец обратно их расположению в проходящем свете.

Если показатель преломления материала прослойки n меньше показателей преломления материалов, из которых изготовлены линза и пластинка, то в отраженном свете радиусы светлых колец Ньютона (или темных в проходящем)

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda(2m-1)}{2n}},\ m = 1,\ 2,...$$

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda m}{n}},\ m = 1,\ 2,...$$

Явления, вызванные нарушением целостности волновой поверхности в среде с резкими неоднородностями, называют **дифракцией света**. Это явление свойственно всем волновым процессам.

Каждая точка поверхности, которой достигла в данный момент волна, является точечным источником вторичных волн: волновая поверхность в любой момент времени представляет собой не просто огибающую вторичных волн, а результат их интерференции (принцип Гюйгенса – Френеля).

Дифракция сферических волн (дифракция Френеля). Радиус внешней границы m-ной зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda},$$

где m – номер зоны Френеля; λ – длина волны; a и $в$ – соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина.

Дифракция Фраунгофера на щели

Положение максимумов и минимумов освещенности при дифракции на щели, на которую нормально падает пучок параллельных лучей, определяется соответственно условиями

$$a\sin\varphi = \pm(2K+1)\frac{\lambda}{2},\quad K = 1,\ 2,\ 3,...\ \text{и}$$

$$a\sin\varphi = \pm 2K\frac{\lambda}{2} = \pm K\lambda, \quad K = 1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

где a – ширина щели, φ – угол дифракции, λ – длина волны падающего света.

Дифракционная решетка представляет собой прозрачную пластинку с нанесенной на ней системой непрозрачных параллельных полос, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Если на решетку падает монохроматический свет длиной волны λ, то в результате дифракции на каждой щели свет распространяется не только в первоначальном направлении, но и по всем другим направлениям. Если за решеткой поставить собирающую линзу, то на экране в фокальной плоскости все лучи будут собираться в одну полоску.

Параллельные лучи, идущие от краев соседних щелей, имеют разность хода $\Delta = d\sin\varphi$, где d – постоянная решетки, т.е. расстояние между соответствующими краями соседних щелей, называемое иначе периодом решетки, φ – угол отклонения световых лучей от перпендикуляра к плоскости решетки.

При разности хода, равной целому числу длин волн

$$d\sin\varphi = \pm K\lambda \quad (K = 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

наблюдается дифракционный максимум для данной длины волны. В результате при прохождении через дифракционную решетку пучок белого света разлагается в спектр. Угол дифракции имеет наибольшее значение для красного света, наименьшее значение – для фиолетового света.

Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} mN,$$

где λ, $\lambda + \delta\lambda$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

15.2. Примеры решения задач

1. Определите, во сколько раз изменится длина ультразвуковой волны при переходе ее из меди в сталь, если скорости распространения ультразвука в меди и стали соответственно равны $\upsilon_1 = 3{,}6\ ^{\text{км}}\!/_{\text{с}}$ и $\upsilon_2 = 5{,}5\ ^{\text{км}}\!/_{\text{с}}$.

Дано: $\upsilon_1 = 3{,}6\ ^{\text{км}}\!/_{\text{с}}$, $\upsilon_2 = 5{,}5\ ^{\text{км}}\!/_{\text{с}}$.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. При распространении волн частота колебаний не изменяется при переходе из одной среды в другую (она зависит только от свойств источника волн), т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Связь длины λ волны с частотой ν

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{1}$$

где υ – скорость волны.

Искомое отношение, согласно (1),

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 1{,}53 \text{ (увеличится в 1,53 раза).}$$

2. Плоская волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси *X*, в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $\upsilon = 300\ ^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Две частицы среды находятся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 6$ м и $x_2 = 12$ м от источника колебаний. Определите длину волны и разность фаз колебаний этих частиц, если период колебаний $T = 40$ мс.

Дано: $\upsilon = 300\ ^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$; $x_1 = 6$ м; $x_2 = 12$ м; $T = 40$ мс.

Найти: λ; $\Delta\varphi$.

Решение. Длина волны – расстояние, на которое распространяется определенная фаза волны за период

$$\lambda = \upsilon T = 12 \text{ м}. \tag{1}$$

Уравнения колебаний частиц, лежащих в плоскостях x_1 и x_2,

$$\xi_1(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x_1}{\upsilon}) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x_1}{\upsilon});$$

$$\xi_2(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x_2}{\upsilon}) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x_2}{\upsilon}),$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота. Тогда фазы колебаний этих частиц

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}(t - \frac{x_1}{\upsilon}) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}(t - \frac{x_2}{\upsilon}). \qquad (2)$$

Найдем разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, учитывая формулы (1) и (2):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \pi.$$

3. Смещение ξ_1 из положения равновесия частицы среды, находящейся на расстоянии $x_1 = 5$ см от источника колебаний, через промежуток времени $t = T/3$ равно половине амплитуды. Определите длину волны.

Дано: $x_1 = 5$ см; $t = T/3$; $\xi_1 = A/2$.

Найти: λ.

Решение. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси X в среде, не поглощающей энергию,

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon}), \qquad (1)$$

где ξ – смещение частицы среды от положения равновесия; A – амплитуда волны; x – расстояние частицы среды от источника волн; υ – скорость распространения волны.

Подставив выражения для циклической частоты $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ и длины волны $\lambda = VT$ в уравнение (1), можем записать

$$\xi(x,t) = A\cos(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}).$$

По условию задачи $\xi_1(x,t)=\dfrac{A}{2}$, поэтому можем записать

$$\frac{A}{2}=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x_1}{\lambda}\right),$$

откуда $\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}-\dfrac{2\pi x_1}{\lambda}\right)=\dfrac{1}{2}$,

т.е. аргумент косинуса $\dfrac{2\pi t}{T}-\dfrac{2\pi x_1}{\lambda}=\dfrac{\pi}{3}$.

Согласно условию задачи $t={}^{T}\!/_{3}$, поэтому $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi x_1}{\lambda}=\dfrac{\pi}{3}$, откуда длина волны $\lambda=6x_1=0{,}3$ м.

4. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu=50$ Гц, скорость υ распространения волн в не поглощающей энергию среде равна $400\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, наблюдается максимальное усиление и максимальное ослабление колебаний.

Дано: $\nu=50$ Гц, $\upsilon=400\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$.

Найти: Δ_{max}, Δ_{min}.

Решение. При наложении в пространстве двух когерентных волн в разных его точках наблюдается усиление или ослабление результирующей волны – интерференция волн.

Максимальное усиление колебаний (интерференционный максимум) наблюдается при разности хода

$$\Delta_{max}=\pm 2m\frac{\lambda}{2}\quad (m=0,\ 1,\ 2,...). \qquad (1)$$

Максимальное ослабление колебаний (интерференционный минимум) – при разности хода

$$\Delta_{min}=\pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}\quad (m=0,\ 1,\ 2,...), \qquad (2)$$

где длина волны

$$\lambda=\frac{\upsilon}{\nu}. \qquad (3)$$

Из выражений (1) и (2) с учетом (3) получаем условия наименьших разностей хода, не равных нулю, для интерференционных максимумов ($m=1$) и минимумов ($m=1$)

$$\Delta_{\max} = \frac{\upsilon}{\nu} = 8 \text{ м}; \quad \Delta_{\min} = \frac{\upsilon}{2\nu} = 4 \text{ м}.$$

5. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\sin\omega t$, а другой конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определите уравнение стоячей волны; координаты узлов и координаты пучностей.

Дано: $\xi = A\sin\omega t$.

Найти: $\xi(x,t)$; x_y; x_n.

Решение. Уравнение падающей волны

$$\xi_1(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \qquad (1)$$

где A – амплитуда волны; ω – циклическая частота; υ – скорость волны.

Согласно условию задачи отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, поэтому волна меняет фазу на противоположную, и уравнение отраженной волны

$$\xi_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right) + \pi\right] = -A\sin\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right). \qquad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) - A\sin\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right),$$

откуда $\xi(x,t) = 2A\sin\omega\dfrac{x}{\upsilon}\cos\omega t = 2A\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$

(учли, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\lambda = \upsilon T$).

В точках среды, где

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm m\pi \quad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \qquad (3)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль (наблюдаются узлы), в точках среды, где

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(m+\frac{1}{2})\pi \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad (4)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$ (наблюдаются пучности).

Координаты узлов и пучностей находим из выражений (3) и (4).

Координаты узлов $x_y = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

Координаты пучностей $x_n = \pm(m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

6. Плотность ρ азота при давлении 10^5 Па равна $1{,}43\ ^{кг}/_{м^3}$. Определите скорость распространения звука в азоте при данных условиях.

Дано: $\rho = 1{,}43\ ^{кг}/_{м^3}$; $i = 5$; $P = 10^5$ Па.

Найти: υ.

Решение. Скорость распространения звука в газах

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \qquad (1)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}$ – отклонения молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме (i – число степеней свободы, для двухатомного газа равное 5); $R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; M – молярная масса газа.

Температуру газа найдем из уравнения Клапейрона – Менделеева $P\upsilon = \frac{m}{M}RT$, учитывая, что $\rho = \frac{m}{\upsilon}$,

$$T = \frac{PM}{\rho R}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем скорость звука в азоте

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{(i+2)P}{i\rho}} = 313\ ^{м}/_{с}.$$

7. Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны с частотой $\nu_0 = 360$ Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой $\nu = 400$ Гц. Принимая температуру воздуха $T = 300$ К, его молярную массу $M = 0{,}029$ кг/моль, определите скорость движения источника звука.

Дано: $\upsilon_{пр} = 0$; $\nu_0 = 360$ Гц; $\nu = 400$ Гц; $T = 300$ К; $M = 0{,}029$ кг/моль.

Найти: $\upsilon_{ист}$.

Решение. Согласно общей формуле, описывающей эффект Доплера в акустике, и учитывая, что приемник покоится ($\upsilon_{пр} = 0$), а источник приближается к приемнику, частота звука, воспринимаемая приемником,

$$\nu = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{ист}} \cdot \nu_0, \qquad (1)$$

где υ – скорость распространения звука. Отсюда

$$\upsilon_{ист} = (1 - \frac{\nu_0}{\nu}) \cdot \upsilon.$$

Скорость звука в газах зависит от природы газа и температуры и определяется по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}, \qquad (2)$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_\upsilon}$ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме. Для воздуха число степеней свободы $i = 5$ и $\gamma = \dfrac{i+2}{i} = \dfrac{7}{5}$.

Подставив формулу (2) в уравнение (1) и учитывая выражение для γ, найдем скорость движения источника звука

$$\upsilon_{ист} = (1 - \frac{\nu_0}{\nu}) \cdot \sqrt{\frac{(i+2)RT}{iM}} = 34{,}7 \text{ м/с}.$$

8. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме в соответствии с уравнениями

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_0);$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\cos(\omega t-\vec{K}\vec{r}+\varphi_0),$$

где $\vec{E}_0=\{30;\ \ 30;\ \ 0\}\ \text{мВ}/\text{м}$, вектор $\vec{B}$ параллелен некоторому вектору $\vec{a}=\{-1;\ \ 1;\ \ 0\}$, $\omega=3\cdot10^7\ \text{с}^{-1}$.

Найти: 1) направление распространения волны; 2) волновое число 3) максимальное значение плотности энергии волны в произвольной точке.

Решение. 1. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ составляют правовинтовую тройку (см. рис. 15.1). Это значит, что вектор $\vec{k}$ сонаправлен векторному произведению $\left[\vec{E},\vec{B}\right]$ или $\left[\vec{E}_0,\vec{a}\right]$. Воспользовавшись этим свойством, определим направление вектора $\vec{k}$, которое совпадает с направлением распространения электромагнитной волны

$$\left[\vec{E}_0,\vec{a}\right]=\begin{bmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ E_{xo} & E_{yo} & 0\\ a_x & a_y & 0\end{bmatrix}=\vec{e}_z(E_{xo}a_y-E_{yo}a_x)=\vec{e}_z(30+30)\ \text{мВ}/\text{м}=60\vec{e}_z\ \text{мВ}/\text{м}.$$

Следовательно, волна распространяется в направлении $+OZ$.

2. Волновое число находим по формуле $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}=\frac{3\cdot10^7}{3\cdot10^8}\ \text{м}^{-1}=0{,}1\ \text{м}^{-1}.$$

3. Максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля в любой точке пространства получим по формуле (15.3) при условии $E^2=E_0^2$ и $B^2=B_0^2$. Тогда

$$\omega_{\max}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{B_0^2}{2\mu_0}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{E_0^2}{2\mu_0c^2}=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}=\varepsilon_0E_0^2=\varepsilon_0(E_{ox}^2+E_{oy}^2).$$

Произведем вычисления

$$\omega_{\max}=8{,}85\cdot10^{-12}(30^2+30^2)\cdot10^{-6}\ \text{Дж}/\text{м}^3=1{,}6\cdot10^{-14}\ \text{Дж}/\text{м}^3.$$

9. Космическая станция зарегистрировала электромагнитное излучение удаленного объекта, которое в принятой на этой станции системе отсчета можно описать в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx)$, где $\nu = 15$ кГц, $\vec{E}_0 = \{0;1;0\}$ $^{\text{мВ}}/_{\text{м}}$. Необходимо: 1) записать закон изменения вектора $\vec{E}$ в точке *A* с координатами $x_A = 10^5$ м; $y_A = 10$ м; $z_A = 10^2$ м, где расположена другая станция, неподвижная относительно первой; 2) найти модуль вектора $\vec{E}$ в точке *A* в момент времени $t = 1$ мс.

Решение. Уравнение $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси *OX*. Ее волновое число вычислим по формуле $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Тогда произведение kx_A в точке расположения станции *A* равно $\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 = 10\pi$. Разность фаз электромагнитной волны для этих станций равна 10π, а закон изменения вектора $\vec{E}$ в точке расположения второй станции имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - 10\pi) = \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t.$$

Подставив в это уравнение заданное значение времени, находим модуль вектора напряженности

$$E = E_0 \cos(2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}) = E_0 \cos 30\pi = E_0 = 1 \ ^{\text{мВ}}/_{\text{м}}.$$

10. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, расстояние между отверстиями $d = 1$ мм, расстояние от отверстий до экрана $l = 3$ м. Найти положение третьей и четвертой полос.

Дано: $\lambda = 600$ нм; $d = 1$ мм; $l = 3$ м.

Найти: y_3; y_4.

Решение. Ширина интерференционной полосы $\Delta x = {}^{l\lambda}/_{d}$, где d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, причем $l >> d$.

Первая светлая полоса находится на расстоянии $y_1 = \dfrac{l\lambda}{d}$, третья полоса находится на расстоянии $y_3 = 3y_1$, n-я полоса – на расстоянии $y_n = ny_1$. Таким образом, $y_3 = 5,4$ мм, $y_4 = 7,2$ мм.

11. Плоская монохроматическая световая волна (длина волны $\lambda = 0,5$ мкм) падает нормально на диафрагму *Д* с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстоянии $d = 2,5$ мм. На экране *Э*, расположенном за диафрагмой на расстоянии $L = 1$ м, образуется система интерференционных полос. Определить ширину интерференционных полос.

Дано: $\lambda = 0,5$ мкм; $d = 2,5$ мм; $L = 1$ м.

Найти: Δx.

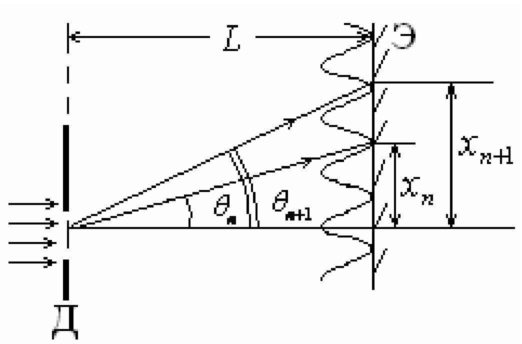


Рис. 15.6

Решение: Рассмотрим узкие щели как два вторичных линейных источника когерентных волн, интерферирующих на экране. Ширина интерференционной полосы Δx равна расстоянию между двумя последовательными минимумами (или двумя последовательными максимумами) на экране (рис. 15.6)

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n;$$

$$x_{n+1} = L \cdot \mathrm{tg}\theta_{n+1};$$

$$x_n = L \cdot \mathrm{tg}\theta_n.$$

Значения соответствующих углов входят в формулы для условий минимумов

$$d\sin\theta_{n+1} = \left[2(n+1)+1\right]\frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad d\sin\theta_n = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$

По условию $L > d$, и тогда выполняется приближенное равенство для малых углов $\sin\theta = \mathrm{tg}\theta$. С учетом этого

$$\Delta x = L(\mathrm{tg}\theta_{n+1} - \mathrm{tg}\theta_n) = L(\sin\theta_{n+1} - \sin\theta_n) = L\left[2(n+1)+1-(2n+1)\right]\frac{\lambda}{2d} = \frac{L\lambda}{d}.$$

Ширина интерференционных полос не зависит от номера максимума.

Выполним вычисления

$$\Delta x = \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 10^{-3}}\ \text{м} = 0,2\ \text{мм}.$$

12. Параллельный пучок света с длиной волны λ нормально падает на основание бипризмы с малыми преломляющими углами θ. Показатель преломления стекла призмы равен n. За призмой параллельно ее основанию расположен экран, на котором видна интерференционная картина. Найти ширину интерференционных полос.

Дано: λ; θ; n.

Найти: Δx.

Решение. Ширина интерференционных полос определяется по формуле $\Delta x = \dfrac{l\lambda}{d}$, где d – расстояние между двумя когерентными источниками. В данном случае когерентные источники получаются расщеплением исходного пучка лучей бипризмой. Угол отклонения каждого луча в силу малости преломляющего угла призмы $\delta = (n-1)\theta$ (рис. 15.7). Следовательно, можно считать $\dfrac{d}{2l} = \mathrm{tg}\delta = \sin\delta = \delta$, откуда

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\theta}.$$

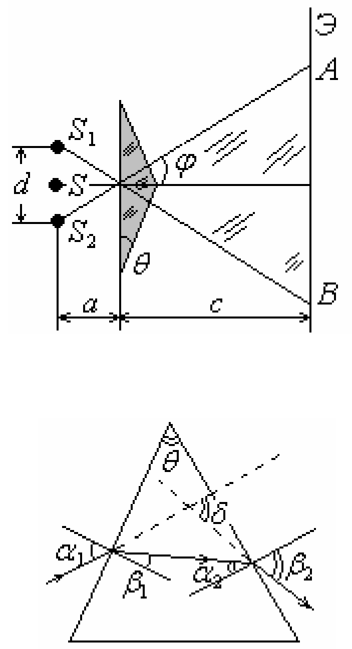


Рис. 15.7

13. В просветленной оптике для устранения отражения света на поверхность линзы, сделанной из стекла с показателем преломления $n_1 = 1{,}5$, наносится тонкая пленка с показателем преломления $n_2 = 1{,}26$. При какой толщине d пленки отражение света от линзы не будет наблюдаться? Длина волны падающего света $\lambda = 550$ нм, угол падения $\alpha = 30^0$.

Дано: $n_1 = 1{,}5$; $n = 1{,}26$; $\lambda = 550$ нм; $\alpha = 30^0$.

Найти: d.

Решение. Свет, падая на систему пленка – стекло под углом α, отражается как от верхней, так и от нижней поверхности пленки. Отраженные лучи когерентны, поскольку образованы от одного падающего луча. Результат интерференции этих лучей зависит от оптической разности хода. Лучи отражаются от среды с большим показателем преломления, поэтому как на верхней, так и на нижней поверхности пленки происходит потеря полуволны и, следовательно, условие интерференционного минимума

$$2d_m\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}=(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$d_m=\frac{\lambda(2m+1)}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Полагая $m=0,\ 1,\ 2,\ldots$, получим ряд возможных значений толщины пленки

$$d_0=\frac{\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}=120\ \text{нм},\quad d_1=\frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}=350\ \text{нм},$$

$$d_2=\frac{5\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}=590\ \text{нм}\quad \text{и т.д.}$$

14. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R_1=1$ м, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом кривизны $R_2=2$ м. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

Дано: $\lambda=0{,}5$ мкм; $R_1=1$ м; $R_2=2$ м; $k=5$.

Найти: r_5.

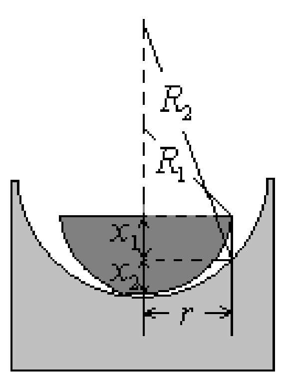


Рис. 15.8

Решение. Определим величину X_1 воздушного зазора между плосковыпуклой и вогнутой линзами на расстоянии r от точки их соприкосновения – центра линз. Из рис. 15.8 видно, что

$$x_2=R_2-\sqrt{R_2^2-r^2};$$

$$x_1=R_1-x_2-\sqrt{R_1^2-r^2}=R_1-R_2+\sqrt{R_2^2-r^2}-\sqrt{R_1^2-r^2}.$$

В дальнейших вычислениях будем полагать $x_1<<R_1$ и $x_2<<R_2$. Записывая последнее равенство в виде

$$x_1+(R_2-R_1)=\sqrt{R_2^2-r^2}-\sqrt{R_1^2-r^2},$$

возводя его в квадрат и пренебрегая слагаемым x_1^2, получаем

$$R_1R_2-r^2-x_1(R_2-R_1)=\sqrt{(R_2^2-r^2)(R_1^2-r^2)}.$$

Второй раз возводя в квадрат данное равенство и учитывая малость x_1, получаем

$$r=\sqrt{\frac{x_1R_1R_2}{R_2-R_1}}.$$

Разность хода Δd в отраженном свете $\Delta d=2x_1+\frac{\lambda}{2}$. С другой стороны, условие наблюдения темного кольца $\Delta d=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, откуда $x_1=k\lambda$.

Следовательно, радиус k-того темного кольца в отраженном свете определяется формулой

$$r_к=\sqrt{\frac{k\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}}.$$

Подставляя k=5, $R_1=1$ м, $R_2=2$ м, $\lambda=0{,}5$ мкм, получаем $r_5=2{,}24$ мм.

15. Когерентные лучи, длины волн которых в вакууме $\lambda_0=600$ нм, приходят в некоторую точку с геометрической разностью хода $\Delta S=1{,}2$ мкм. Определите, максимум или минимум наблюдается в этой точке, если лучи проходят в воздухе (показатель преломления $n_1=1$), стекле ($n_2=1{,}75$) и скипидаре ($n_3=1{,}5$).

Дано: $\lambda_0=600$ нм; $\Delta S=1{,}2$ мкм; $n_1=1$; $n_2=1{,}75$; $n_3=1{,}5$.

Найти: max или min.

Решение. Из условий интерференционных максимумов и минимумов

$$\Delta=\pm m\lambda_0\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)\quad\text{и}\quad\Delta=\pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

следует, что максимум наблюдается, если оптическая разность хода Δ равна целому числу длин волн в вакууме, минимум – полуцелому числу длин волн в вакууме. Оптическая разность хода в перечисленных средах $\Delta_1=n_1\Delta S$, $\Delta_2=n_2\Delta S$, $\Delta_3=n_3\Delta S$.

Тогда

$$\frac{\Delta_1}{\lambda_0}=\frac{n_1\Delta S}{\lambda_0}=2;\quad\frac{\Delta_2}{\lambda_0}=\frac{n_2\Delta S}{\lambda_0}=3{,}5;\quad\frac{\Delta_3}{\lambda_0}=\frac{n_3\Delta S}{\lambda_0}=3.$$

В воздухе и скипидаре наблюдается интерференционный максимум, в стекле – интерференционный минимум.

16. При освещении зеркал Френеля монохроматическим светом ($\lambda = 600$ нм) от узкой щели S на экране, отстоящем на расстоянии $a = 2,7$ м от линии пересечения зеркал, наблюдаются интерференционные полосы, ширина которых $b = 2,9$ мм. Источник света находится на расстоянии $r = 10$ см от линии пересечения зеркал. Определите угол между зеркалами.

Дано: $\lambda = 600$ нм; $a = 2,7$ м; $b = 2,9$ мм; $r = 10$ см.

Найти: α.

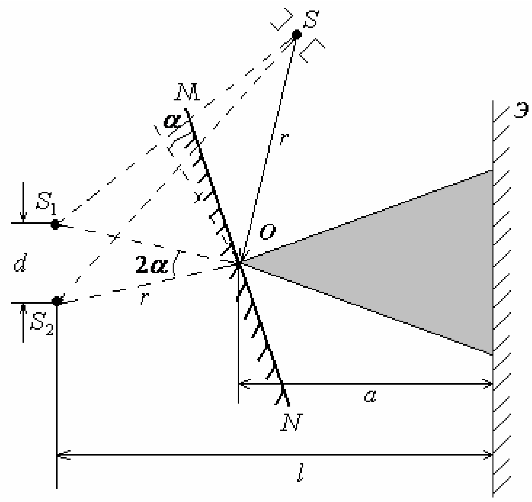


Рис. 15.9

Решение. После отражения от зеркал OM и ON световые пучки можно считать как бы выходящими из двух когерентных источников S_1 и S_2, являющихся мнимыми изображениями щели S (рис. 15.9). Если расстояние между источниками S_1 и S_2 обозначить d, а расстояние от них да экрана l, то величины l, d, b и λ связаны соотношением

$$b = \frac{l\lambda}{d}. \qquad (1)$$

Точки S_1 и S_2 симметричны точке S относительно соответствующих зеркал. Поэтому $S_1O = S_2O = r$ и угол S_2OS_1 равен 2α. Так как угол α очень мал и экран обычно располагают параллельно S_1S_2, то $d = 2\alpha \cdot r$, $l = r + a$.

Подставив эти выражения в (1), получим угол между зеркалами

$$\alpha = \frac{(r + a)\alpha}{2rb} = 10'.$$

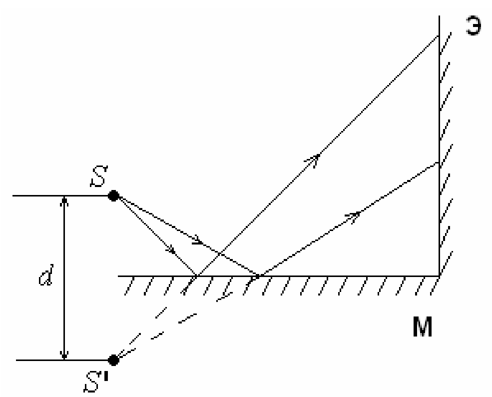


Рис. 15.10

17. В зеркале Ллойда (рис. 15.10) точечный источник S находится на расстоянии $l = 2$ м от экрана. На экране образуется система интерференционных полос (когерентными источниками являются первичный источник S и его мнимое изображение S' в зеркале). Ширина интерференционных полос b на экране равна 1,2 мм. Определите длину волны λ света, если после того, как источник света S отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta d = 0,5$ мм, ширина полос уменьшилась в $n = 2$ раза.

Дано: $l = 2$ м; $b = 1{,}2$ мм; $\Delta d = 0{,}5$ мм; $n = 2$.

Найти: λ.

Решение. Ширина интерференционной полосы (расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами)

$$b = \frac{l\lambda}{d}$$

не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных l, λ и d, откуда расстояние между источником S и его мнимым изображением S'

$$d = \frac{l\lambda}{b}. \qquad (1)$$

После того как источник S отодвинули от плоскости зеркала на Δd, расстояние между источником и его мнимым изображением стало

$$d + 2\Delta d = \frac{l\lambda}{b/n} \qquad (2)$$

(учли, что ширина полос стала в n раз меньше).

Вычитая выражение (1) из (2), получаем

$$2\Delta d = \frac{l\lambda}{b}(n-1),$$

откуда длина волны $\lambda = \dfrac{2b\Delta d}{(n-1)l} = 600$ нм.

18. На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите преломляющий угол клина, если в отраженном свете на 1 см укладывается $N = 9$ темных интерференционных полос.

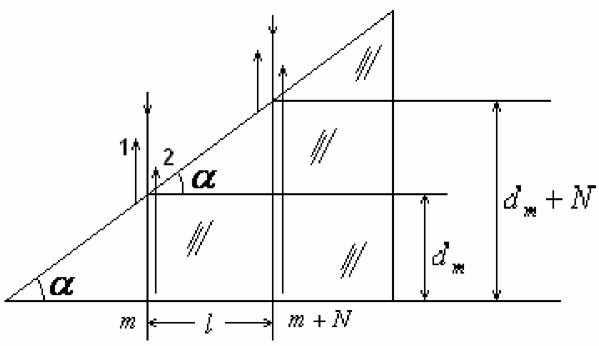


Рис. 15.11

Дано: $n = 1{,}5$; $\lambda = 550$ нм; $l = 1$ см; $N = 9$.

Найти: α.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от верхней и нижней его граней (рис. 15.11).

Так как угол клина мал, то отраженные лучи 1 и 2 практически параллельны. Отраженные лучи когерентны, и на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Условия минимумов для m- и ($m+N$)-порядков в отраженном свете

$$2d_m \cdot n - \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}; \tag{1}$$

$$2d_{m+N} \cdot n - \frac{\lambda}{2} = [2(m+N)+1]\frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

где d_m и d_{m+N} – толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номерам m и ($m+N$); n – показатель преломления стекла; $-\frac{\lambda}{2}$ определяет потерю полуволны, обусловленную отражением световой волны 1 от оптически более плотной среды (от верхней поверхности клина). В выражениях (1) и (2) учтено, что угол падения, согласно условия задачи, равен нулю. Следовательно, и угол преломления равен нулю. Согласно условию задачи на расстоянии l укладывается N темных полос. Из рис. 15.11 следует, что

$$\sin\alpha = \frac{d_{m+N} - d_m}{l}, \tag{3}$$

угол клина мал (на рисунке не в масштабе), поэтому можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$. Подставив значения d_m и d_{m+N} из формул (1) и (2) в выражение (3), с учетом малости угла получим

$$\alpha = \frac{[2(m+n)+1]\frac{\lambda}{2} - (2m+1)\frac{\lambda}{2}}{2nl} = \frac{N\lambda}{2nl} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}\,\text{рад}.$$

19. Найти радиус r_4 четвертой зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Дано: $b = 1$ м; $\lambda = 500$ нм.

Найти: r_4.

Решение. Для плоской волны в формуле $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$ для радиуса m-ной зоны Френеля следует положить $a \to \infty$, поскольку плоский фронт волны дает бесконечно удаленный источник. Тогда

$$r_m = \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda} = \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{b}{1+b/a}m\lambda} = \sqrt{bm\lambda}.$$

Следовательно, $r_4 = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 1{,}4$ мм.

20. На щель падает нормально плоская монохроматическая световая волна. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному максимуму, равен $\alpha = 30^0$. Определить ширину щели, если длина волны падающего света $\lambda = 0,6$ мкм.

Дано: $K = 2$; $\alpha = 30^0$; $\lambda = 0,6$ мкм.

Найти: a.

Решение: Положение максимумов освещенности при дифракции от щели определяется по формуле

$$a \sin\alpha = (2K+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда ширина щели $a = \dfrac{(2K+1)\lambda}{2\sin\alpha}$

Подставляя в последнюю формулу $K = 2$, $\alpha = 30^0$, $\lambda = 0,6$ мкм, получаем $a = 5\lambda = 3$ мкм.

21. Какое число штрихов N на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 546,1$ нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 19^0 8'$?

Дано: $\lambda = 546,1$ нм; $K = 1$; $\varphi = 19^0 8'$.

Найти: N.

Решение. Число штрихов N дифракционной решетки на 1 мм вычисляется по формуле $N = \dfrac{10^{-3}}{d}$, где d – период решетки в метрах. Период d определяется из формулы $d\sin\varphi = K\lambda$, откуда $d = \dfrac{K\lambda}{\sin\varphi}$.

По условию $K = 1$, тогда $N = \dfrac{10^{-3}\sin\varphi}{\lambda} = 600\ \dfrac{\text{штр}}{\text{мм}}$.

22. На диаграмму с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние $b_{\max}$ от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Дано: $r = 1$ мм; $\lambda = 0,5$ мкм.

Найти: $b_{\max}$.

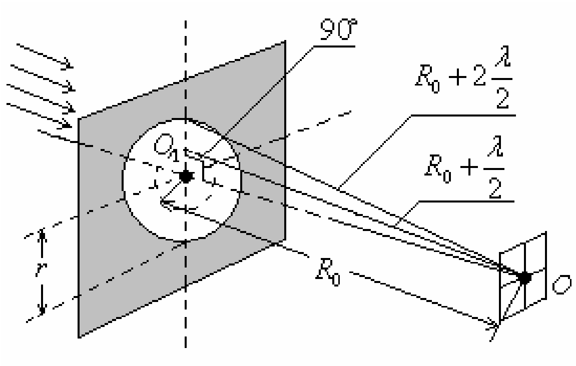


Рис. 15.12

Решение. Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля. Из рис. 15.12 следует, что расстояние от точки наблюдения O на экране до края отверстия на $2\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ больше, чем расстояние $R_0 = b_{\max}$.

По теореме Пифагора получим

$$r^2 = (b_{\max} + 2\frac{\lambda}{2})^2 - b_{\max}^2 = 2\lambda b_{\max} + \lambda^2.$$

Учтя, что $\lambda << b_{\max}$ и что членом, содержащим λ^2, можно пренебречь, последнее равенство перепишем в виде

$$r^2 = 2\lambda b_{\max}, \quad \text{откуда} \quad b_{\max} = \frac{r^2}{2\lambda} = 1 \text{ м}.$$

23. Точечный источник света ($\lambda = 600$ нм) расположен перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r = 2$ мм. Определите расстояние a от источника до диафрагмы, если отверстие открывает пять зон Френеля и расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения составляет 3 м.

Дано: $\lambda = 600$ нм; $r = 2$ мм; $b = 3$ м; $m = 5$.

Найти: a.

Решение. Пусть на открытой части волновой поверхности в плоскости круглого отверстия умещается m зон Френеля. Тогда расстояние от точки наблюдения M на экране до края отверстия равно $b + \frac{m\lambda}{2}$ (рис. 15.13).

По теореме Пифагора

$$a^2-(a-x)^2=(b+\frac{m\lambda}{2})^2-(b+x)^2,$$

где $x=AB$. Учитывая, что $\lambda \ll a$ и $\lambda \ll b$, получаем $x=\dfrac{bm\lambda}{2(a+b)}$ (пренебрегли слагаемым $\dfrac{m^2\lambda^2}{4}$).

Из треугольника SAN

$$r^2=a^2-(a-x)^2,$$

откуда с учетом выражения для x, пренебрегая слагаемым второго порядка $\left[\dfrac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2\right]$ малости, получаем расстояние от источника до диафрагмы

$$a=\frac{br^2}{mb\lambda-r^2}=2{,}4\ \text{м}.$$

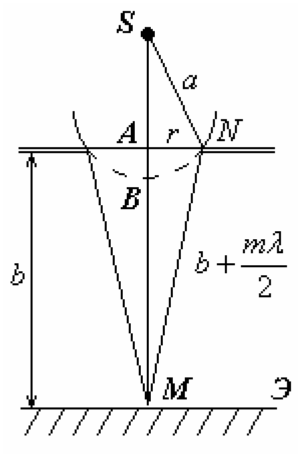


Рис. 15.13

24. На пути параллельного пучка монохроматического света ($\lambda=550$ нм) находится круглый диск диаметром 3 мм. Наблюдение производится в точке, лежащей на линии, соединяющей точку с центром диска и отстоящей от экрана на расстоянии 1 м. Определите ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану.

Дано: $\lambda=550$ нм, $d=3$ мм, $l=1$ м.

Найти: x.

Решение. Диск BC закрывает часть плоского фронта волны. $СД=x$ – ширина первой открытой зоны Френеля (рис. 15.14). Дифрагирующие лучи $АД$ и AC имеют разность хода $\dfrac{\lambda}{2}$. Из рисунка следует, что

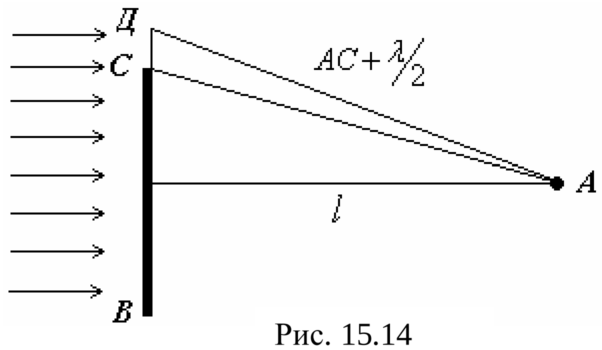


Рис. 15.14

$$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+l^2=\left(AC+\frac{\lambda}{2}\right)^2;\quad AC=\sqrt{l^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+l^2=\left(\sqrt{l^2+\frac{d^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

откуда $x^2+xd=\lambda\sqrt{l^2+\frac{d^2}{4}+\frac{\lambda^2}{4}}$, где слагаемыми $\frac{d^2}{4}$ и $\frac{\lambda^2}{4}$ можно пренебречь.

$$x^2+xd-l\lambda=0.$$

Решив это уравнение, получим ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану,

$$x=-\frac{d}{2}+\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+l\lambda}=0{,}173\text{ мм}$$

(учли только положительное решение, имеющее физический смысл).

25. На щель шириной $a=0{,}1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda=0{,}6$ мкм). Определите ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L=1$ м.

Дано: $a=0{,}1$ мм; $\lambda=0{,}6$ мкм; $L=1$ м.

Найти: l.

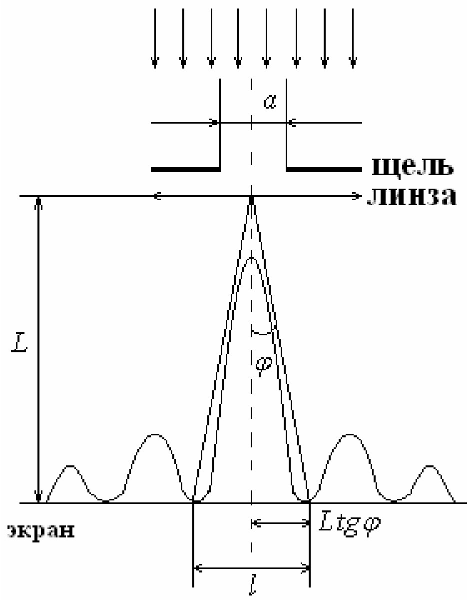


Рис. 15.15

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (рис. 15.15). Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$$a\sin\varphi=\pm K\lambda, \qquad (1)$$

где K – порядок минимума, в нашем случае равен единице ($K=1$). Расстояние между двумя минимумами на экране определим по чертежу: $l=2L\cdot\text{tg}\varphi$. При малых углах $\text{tg}\varphi\approx\sin\varphi$, тогда

$$l=2L\sin\varphi \qquad (2)$$

Выразим $\sin\varphi$ из формулы (1) и подставим его в равенство (2)

$$l=\frac{2LK\lambda}{a}=1{,}2\text{ см}.$$

26. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно $20{,}2$ см (рис. 15.16). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которые при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Дано: $\lambda = 0{,}5$ мкм; $L = 1$ м; $l = 20{,}2$ см.

Найти: d; n; N; φ_{max}.

Решение. 1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий K-тому дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \cdot \sin\varphi = K\lambda, \qquad (1)$$

где K – порядок спектра, или в случае монохроматического света – порядок максимума. В данном случае $K = 1$, $\sin\varphi = \mathrm{tg}\varphi$ (ввиду того, что $l/2 << L$, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{l/2}{L}$ (из рис. 15.16). С учетом последних трех равенств соотношение (1) примет вид $d\frac{l}{2L} = \lambda$, откуда постоянная решетки $d = \frac{2L\lambda}{l} = 4{,}95$ мкм.

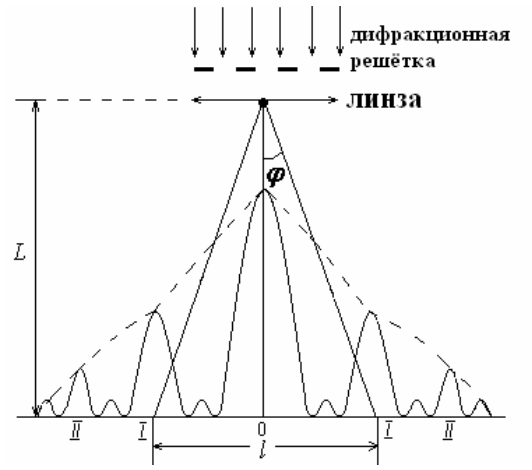


Рис. 15.16

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы

$$n = \frac{1}{d} = 2{,}02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение K_{max} исходя их того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90°.

Из формулы (1) запишем $K_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin\varphi = 9{,}9$.

Число K обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно.

Следовательно, $K_{\max} = 9$.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному $K_{\max}$, т.е. всего $2K_{\max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N = 2K_{\max} + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения $K_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin\varphi$ синус этого угла $\sin\varphi_{\max} = \frac{K_{\max}\lambda}{d}$, отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{K_{\max}\lambda}{d}\right) = 65{,}4^{\circ}.$$

27. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения ($\lambda = 243$ пм) падает под углом скольжения $\theta = 60^{\circ}$ на грань кристалла каменной соли. Определите расстояние d между атомными плоскостями кристалла, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум второго порядка.

Дано: $\lambda = 243$ пм; $\theta = 60^{\circ}$; $m = 2$.

Найти: d.

Решение. Дифракционные максимумы от пространственной решетки (в данном случае кристалла каменной соли) определяются согласно формуле Вульфа – Брэггов.

$$2d \sin\theta = m\lambda \quad (m = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

где d – расстояние между искомыми плоскостями кристалла; θ – угол скольжения (угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла); λ – длина волны падающего рентгеновского излучения; m – порядок максимума.

Тогда расстояние между атомными плоскостями кристалла

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\theta} = 0{,}28 \text{ нм}.$$

28. Дифракционная решетка длиной $l = 5$ мм может разрешить в спектре первого порядка две спектральные линии натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм). Определите, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с $\lambda_3 = 600$ нм, падающий на решетку нормально.

Дано: $l = 5$ мм; $\lambda_1 = 589,0$ нм; $\lambda_2 = 589,6$ нм; $\lambda_3 = 600$ нм; $m_1 = 1$; $m_2 = 3$.

Найти: φ.

Решение. Для нахождения искомого угла запишем условие дифракционного максимума

$$d \cdot \sin\varphi = m_3\lambda_3, \quad \text{откуда} \quad \sin\varphi = \frac{m_3\lambda_3}{d}. \tag{1}$$

Период дифракционной решетки $d = \dfrac{l}{N}$, где N – общее число штрихов дифракционной решетки. Найдем N из формулы для разрешающей способности дифракционной решетки

$$R = m_1 N = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}, \quad \text{где} \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Тогда

$$N = \frac{\lambda_1}{m_1\Delta\lambda} \quad \text{и} \quad d = \frac{m_1 l\Delta\lambda}{\lambda_1}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), найдем искомый угол

$$\varphi = \arcsin\frac{m_3\lambda_1\lambda_3}{m_1 l\Delta\lambda} = 20^{\mathbf{o}}42'.$$

29. При нормальном падении света на дифракционную решетку на экране с помощью линзы (фокусное расстояние $F = 0,8$ м) наблюдается дифракционная картина. Красная линия ($\lambda = 630$ нм) в спектре второго порядка наблюдается под углом $\varphi = 11°$. Определите постоянную решетки и линейную дисперсию решетки D.

Дано: $F = 0,8$ м; $\lambda = 630$ нм; $\varphi = 11°$; $m = 2$.

Найти: d; D.

Решение. Постоянную дифракционной решетки найдем из условия главного максимума

$$d \cdot \sin\varphi = m\lambda \quad (m = 1,\ 2, \ldots), \tag{1}$$

где m – порядок спектра (по условию задачи $m = 2$).

Тогда значение постоянной решетки

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi} = 6{,}6 \text{ мкм}. \qquad (2)$$

Линейная дисперсия дифракционной решетки, согласно определению,

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} F, \qquad (3)$$

где F – фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран.

Дифференцируя условие максимума для решетки ($d\sin\varphi = m\lambda$), получаем

$$d\cos\varphi(d\varphi) = md\lambda, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

Учитывая (2),

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\lambda}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем линейную дисперсию дифракционной решетки

$$D = \frac{F\mathrm{tg}\varphi}{\lambda} = 2{,}47 \cdot 10^5 \ ^{\text{м}}\!/_{\text{м}}.$$

30. Интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшилась в четыре раза. Пренебрегая поглощением света, определите угол α между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

Дано: $\frac{I_{ест}}{I_2} = 4$.

Найти: α.

Решение. Если пропустить естественный свет через поляризатор и анализатор, главные плоскости которых образуют угол α, то после прохождения поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{ест},$$

а из анализатора, согласно закону Малюса, выйдет свет интенсивностью

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha.$$

Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_{ест} \cos^2 \alpha,$$

откуда $\cos^2 \alpha = \frac{2 \cdot I_2}{I_{ест}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ и угол $\alpha = 45^{\mathbf{0}}$.

31. Определите, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, расположенные так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 30^{\mathbf{0}}$ и в каждом из них теряется 8 % падающего света.

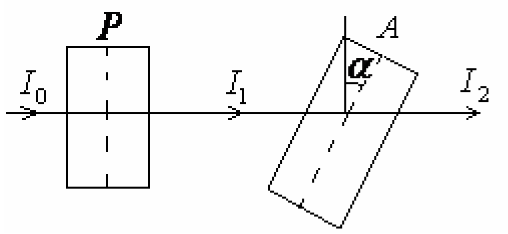


Рис. 15.17

Дано: $\alpha = 30^{\mathbf{0}}$; $K = 0{,}08$.

Найти: $\frac{I_0}{I_2}$.

Решение. Естественный свет, проходя через поляризатор *P* (рис. 15.17), превращается в плоскополяризованный, и его интенсивность на выходе из поляризатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_1 = \frac{1}{2}(1 - K) I_0. \tag{1}$$

Согласно закону Малюса интенсивность света на выходе из анализатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_2 = I_1 (1 - K) \cos^2 \alpha. \tag{2}$$

Подставив выражение (1) в (2), получим

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1 - K)^2 \cos^2 \alpha.$$

Тогда ослабление интенсивности при прохождении света через поляризатор и анализатор

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - K)^2 \cos^2 \alpha} = 3{,}15.$$

32. Частично поляризованный свет проходит сквозь николь. При повороте николя на угол $\varphi = \pi/3$ от положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего пучка уменьшилась в $n = 2$ раза. Пренебрегая поглощением света в николе, определите отношение интенсивностей плоскополяризованного и естественного света и степень поляризации падающего света.

Дано: $\varphi = \pi/3$; $n = 2$.

Найти: $\dfrac{I_n}{I_{ест}}$; P.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь света плоскополяризованного и естественного. Николь пропускает половину падающего на него естественного света, при этом превращая его в плоскополяризованный. Степень пропускания падающего на николь поляризованного света зависит, согласно закону Малюса, от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора.

При первом положении николя, соответствующем его максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света равна

$$I_1 = 0,5I_{ест} + I_П, \tag{1}$$

где $I_П$ – интенсивность всего ранее поляризованного света.

При втором положении николя интенсивность прошедшего света

$$I_2 = 0,5I_{ест} + I_П \cos^2\frac{\pi}{3} = 0,5I_{ест} + 0,25I_П. \tag{2}$$

Так как по условию задачи $I_1 = 2I_2$, то из соотношений (1) и (2) получим

$$0,5I_{ест} + I_П = 2(0,5I_{ест} + 0,25I_П),$$

откуда $I_{ест} = I_П$,т.е. искомое отношение $\dfrac{I_П}{I_{ест}} = 1$.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{3}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого поляризатором.

Максимальная интенсивность света, пропускаемого николем, с учетом (1)

$$I_{\max} = I_1 = 0,5I_{ест} + I_П = 1,5I_П. \tag{4}$$

При повороте николя на $\dfrac{\pi}{2}$ свет, ранее поляризованный, не проходит, а поэтому минимальная интенсивность

$$I_{\min} = 0,5I_{ест} = 0,5I_П. \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), найдем степень поляризации

$$P = \frac{1,5I_П - 0,5I_П}{1,5I_П + 0,5I_П} = 0,5.$$

33. Определите показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления $\gamma = 30^{0}$.

Дано: $\gamma = 30^{0}$.

Найти: n.

Решение. Свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован (содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения), если он падает на диэлектрик под углом Брюстера (рис. 15.18). Тогда согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha_Б}{\sin\gamma} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = n, \qquad (1)$$

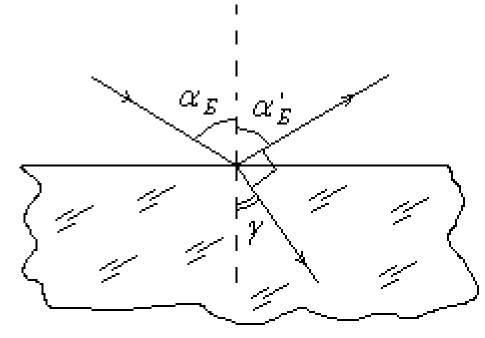


Рис. 15.18

где n_{21} – показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (воздуха), $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = n$ (поскольку $n_1 = 1$).

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны ($\text{tg}\alpha_Б = \frac{\sin\alpha_Б}{\cos\alpha_Б}$; $n_{21} = \frac{\sin\alpha_Б}{\sin\gamma}$, откуда $\cos\alpha_Б = \sin\gamma$). Следовательно, $\alpha_Б + \gamma = \frac{\pi}{2}$, но $\alpha'_Б = \alpha_Б$ (закон отражения), поэтому $\alpha'_Б + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Тогда угол Брюстера, при котором отраженный луч полностью поляризован,

$$\alpha_Б = 90° - \gamma = 60^{0}.$$

Подставляя значение угла Брюстера в выражение (1), находим показатель преломления стекла $n = 1{,}73$.

34. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 550$ нм, падает на пластинку кварца перпендикулярно к его оптической оси. Принимая показатели преломления в кварце для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_0 = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$, определите длины волн этих лучей в кристалле.

Дано: $\lambda = 550$ нм; $n_0 = 1{,}544$; $n_e = 1{,}553$.

Найти: λ_0; λ_e.

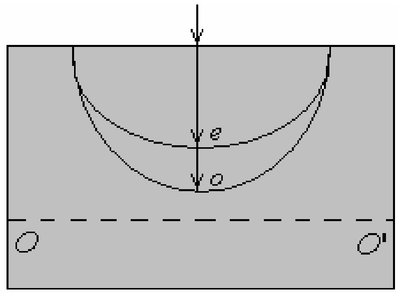


Рис. 15.19

Решение. Кварц – положительный кристалл ($\upsilon_0 > \upsilon_e$). На рис. 15.19 показаны направление оптической оси OO', направление падения на кристалл света и сечения волновых поверхностей для обыкновенного (окружность) и необыкновенного (эллипс) лучей. Длина волны света в вакууме и в кристалле

$$\lambda = cT\,;\;\; \lambda_o = \upsilon_o T\,;\;\; \lambda_e = \upsilon_e T\,,$$

где c – скорость распространения света в вакууме; индексы o и e относятся к обыкновенному и необыкновенному лучам. Учитывая, что $\upsilon_o = \dfrac{c}{n_o}$ и $\upsilon_e = \dfrac{c}{n_e}$, получаем выражения для длин волн обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле $\lambda_o = \dfrac{\lambda}{n_o} = 356{,}2$ нм, $\lambda_e = \dfrac{\lambda}{n_e} = 354{,}2$ нм.

35. Плоскопараллельная пластинка с наименьшей толщиной $d_{\min} = 16$ мкм служит пластинкой в четверть длины волны для света длиной волны $\lambda = 589$ нм. Определите показатель преломления для необыкновенного луча, если показатель преломления для обыкновенного луча $n_o = 1{,}544$.

Дано: $d_{\min} = 16$ мкм; $\lambda = 589$ нм; $n_o = 1{,}544$.

Найти: n_e.

Решение. Пластинка в четверть длины волны – пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + \frac{1}{4})\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2, ...),$$

причем знак «+» соответствует отрицательным кристаллам, «–» – положительным. При нормальном падении на пластинку $\left(\dfrac{\lambda}{4}\right)$ плоскополяризованного света между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке (в кристалле лучи пространственно не разделены) возникает оптическая разность хода, равная $\frac{\lambda}{4}$. Минимальная толщина пластинки в четверть длины волны соответствует $m=0$. Тогда

$$d_{\min}(n_o - n_e) = \frac{\lambda}{4},$$

откуда показатель преломления необыкновенного луча

$$n_e = n_o + \frac{\lambda}{4d_{\min}} = 1{,}553.$$

Поскольку $n_e > n_o$, имеем дело с пластинкой, вырезанной из положительного кристалла.

36. Определите разность показателей преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей, если наименьшая толщина кварцевой кристаллической пластинки в целую длину волны для голубого света ($\lambda = 486$ нм) равна 54 мкм.

Дано: $\lambda = 486$ нм; $d_{\min} = 54$ мкм.

Найти: $n_e - n_o$.

Решение. Кристаллическая пластинка в целую длину волны – пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m+1)\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

где знак «–» соответствует положительным кристаллам, «+» – отрицательным. При нормальном падении на пластинку (λ) плоскополяризованного света между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке (в кристалле эти лучи пространственного не разделены) возникает оптическая разность хода, равная λ.

Рассматриваемый в задаче кварц – положительный кристалл ($n_e > n_o$), поэтому можем записать

$$(n_e - n_o)d = (m+1)\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Минимальная толщина пластинки в целую длину волны соответствует $m=0$. Тогда

$$(n_e - n_o)d_{\min} = \lambda,$$

откуда разность показателей преломления

$$n_e - n_o = \frac{\lambda}{d_{\min}} = 0{,}009.$$

37. Ячейку Керра поместили между скрещенными поляризатором и анализатором. Вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля составляет угол $\alpha = 45^{\mathbf{0}}$ с плоскостями пропускания (главными плоскостями) поляризаторов. Конденсатор имеет длину $l = 15$ см и заполнен нитробензолом, постоянная Керра в котором для используемой длины волны и данной температуры равна $2,2 \cdot 10^{-10}$ $\text{см}/\text{В}$. Определите минимальное значение напряженности электрического поля в конденсаторе, при которой интенсивность света за анализатором не будет зависеть от поворота анализатора.

Дано: $\alpha = 45^{\mathbf{0}}$; $l = 15$ см; $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$ $\text{см}/\text{В}$.

Найти: $E_{\min}$.

Решение. При электрическом поле в конденсаторе, напряженность $\vec{E}$ которого составляет угол $\alpha = 45^{\mathbf{0}}$ с главными плоскостями поляризаторов, вещество в конденсаторе становится оптически анизотропным, двоякопреломляющим, оптическая ось которого совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.

Возникающая разность показателей между обыкновенным и необыкновенным лучами

$$n_o - n_e = B\lambda E^2,$$

где B – постоянная Керра; λ – длина волны света; E – напряженность электрического поля в конденсаторе.

Чтобы интенсивность прошедшего через систему света не зависела от поворота анализатора, необходимо, чтобы вышедший из ячейки Керра свет был циркулярно поляризованным. Это означает, что нитробензол должен соответствовать пластинке в четверть длины волны. Тогда можем записать

$$B\lambda E^2 l = (m + \frac{1}{4})\lambda .$$

Поскольку значению $E_{\min}$ соответствует $m = 1$, то

$$B\lambda E_{\min}^2 l = \frac{\lambda}{4}, \quad \text{откуда} \quad E_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{Bl}} = 8,7 \ \text{кВ}/\text{см}.$$

38. Пластинка кварца толщиной $d = 2$ мм (удельное вращение кварца 15 $\text{град}/\text{мм}$), вырезанная перпендикулярно к оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями. Пренебрегая потерями света в николях, определите, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего эту систему.

Дано: $d = 2$ мм; $\alpha = 15$ $^{\text{град}}\!/_{\text{мм}}$.

Найти: $\dfrac{I_0}{I}$.

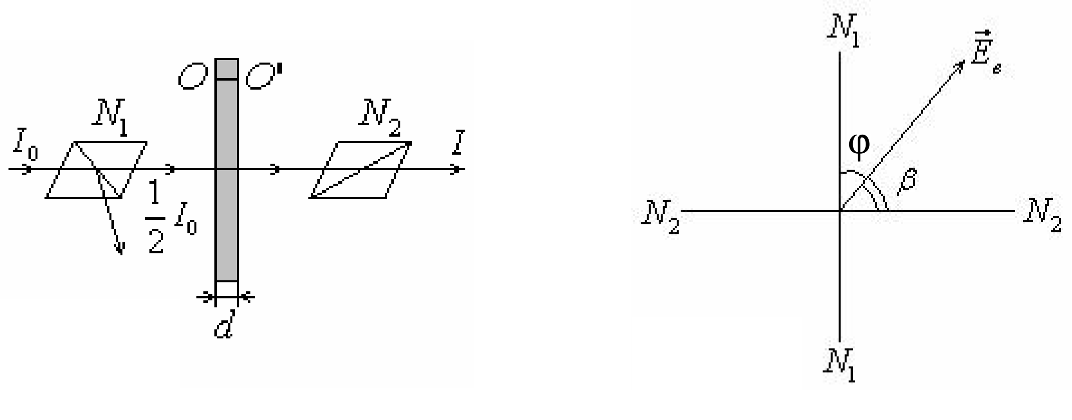
Решение. Естественный свет, проходя через первый николь (рис. 15.20, *а*), вследствие двойного лучепреломления расщепляется на два пучка: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Оба пучка одинаковы по интенсивности и поляризованы полностью, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Из первого николя выходит необыкновенный (e) луч света с интенсивностью $^{I_0}\!/_{2}$ (обыкновенный (o) луч претерпевает полное внутреннее отражение).

В кварцевой пластинке наблюдается вращение плоскости поляризации необыкновенного луча на угол

$$\varphi = \alpha d = 30^{\circ}.$$

Электрический вектор $\vec{E}_e$ луча, падающего на николь N_2, после прохождения пластинки (рис. 15.20, *б*) составляет с его направлением пропускания угол

$$\beta = 90^{\circ} - \varphi = 60^{\circ}.$$



а) б)

Рис. 15.20

Согласно закону Малюса интенсивность прошедшего через николь N_2 света

$$I = \frac{1}{2} I_o \cos^2 \beta.$$

Следовательно, $\dfrac{I_o}{I} = \dfrac{2}{\cos^2 \beta} = 8$.

15.3. Задачи для самостоятельного решения

15.1 – 15.28. Колебания частотой ν и амплитудой *A* распространяются в однородной среде. Длина волны равна λ, фазовая скорость – *c*, максимальная скорость частиц воздуха – υ_{max}. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.1.

Таблица 15.1

Условия к задачам 15.1 – 15.28

Номер задачи	ν, Гц	*A*, мм	λ, м	*c*, м/с	υ_{max}, м/с
15.1	?	0,3	0,825	?	0,754
15.2	?	0,5	1,1	330	?
15.3	450	?	0,75	?	0,68
15.4	5000	0,46	?	350	?
15.5	3500	?	0,4	?	3,3
15.6	2200	?	?	836	4,15
15.7	?	0,28	0,08	320	?
15.8	80	0,25	5,0	?	?
15.9	?	0,42	0,12	?	7,92
15.10	140	0,56	?	910	?
15.11	1100	?	0,64	?	3,456
15.12	?	0,32	0,525	420	?
15.13	?	0,26	0,5	600	?
15.14	?	0,15	0,84	?	0,707
15.15	630	?	?	756	1,425
15.16	4800	0,2	?	720	?
15.17	?	0,4	0,26	520	?
15.18	86	?	4,2	?	0,433
15.19	100	1,15	?	330	?
15.20	?	0,6	1,2	?	1,131
15.21	750	0,7	?	825	?
15.22	5000	?	0,125	?	3,14
15.23	?	0,45	3,2	?	0,34
15.24	?	?	0,9	405	0,99
15.25	500	0,25	0,7	?	?
15.26	?	0,8	1,6	?	1,257
15.27	4000	?	?	480	2,01
15.28	90	0,6	?	378	?

15.29 – 15.56. Уравнение незатухающих колебаний источника имеет вид $\xi = f_1(t)$. Найти смещение ξ_1 точки, находящейся на расстоянии x_1 от источника колебаний, спустя время t_1 после начала колебаний, если скорость распространения колебаний равна c. На какое расстояние продвинется фронт волны к моменту времени t_2? Решить согласно номеру задачи в табл. 15.2, выполнить дополнительное задание.

Таблица 15.2

Условия к задачам 15.29 – 15.56

Номер задачи	$\xi = f_1(t)$, см	x_1, м	t_1, с	t_2, с	c, м/с	Построить график
15.29 15.30 15.31 15.32	$\xi = 3\cos 500\pi t$	6,4	$1{,}1\cdot 10^{-2}$ $1{,}2\cdot 10^{-2}$ $1{,}3\cdot 10^{-2}$ $1{,}4\cdot 10^{-2}$	0,2 0,4 0,6 0,8	320	$\xi = f(t)$ при x = const
15.33 15.34 15.35 15.36	$\xi = 3\cos 500\pi t$	5,2 5,6 6,0 6,4	10^{-2}	1,0 1,2 1,4 1,6	320	$\xi = f(x)$ при t = const
15.37 15.38 15.39 15.40	$\xi = 4\sin 600\pi t$	0,75	$\xi = f(t)$	2,0 3,0 4,0 5,0	300	$\xi = f(t)$ при x = const
15.41 15.42 15.43 15.44	$\xi = 4\sin 600\pi t$	0,6 0,8 1,0 1,2	10^{-2}	0,5 1,0 1,5 2,0	300	$\xi = f(x)$ при t = const
15.45 15.46 15.47 15.48	$\xi = 5\cos 66\pi t$	9,9	0,10 0,11 0,12 0,13	0,2 0,4 0,6 0,8	330	$\xi = f(t)$ при x = const
15.49 15.50 15.51 15.52	$\xi = 5\cos 66\pi t$	2 4 6 8	0,1	1,0 1,2 1,4 1,6	330	$\xi = f(x)$ при t = const
15.53 15.54 15.55 15.56	$\xi = 2\sin 160\pi t$	1,28	$1{,}25\cdot 10^{-2}$ $1{,}5\cdot 10^{-2}$ $1{,}75\cdot 10^{-2}$ $2{,}0\cdot 10$	2,0 3,0 4,0 5,0	320	$\xi = f(t)$ при x = const

15.57 – 15.84. Разность фаз двух колеблющихся точек, находящихся соответственно на расстоянии x_1 и x_2 от источника колебаний, составляет $\Delta\varphi$. Волновое число, соответствующее данной волне, равно κ.

Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.3. Определить длину волны.

Таблица 15.3

Условия к задачам 15.57 – 15.84

Номер задачи	x_1, м	x_2, м	$\Delta\varphi$, рад	κ, $рад/м$
15.57	?	12,0	π	0,628
15.58	0,4	?	$\pi/4$	12,566
15.59	11,0	16,0	?	0,314
15.60	0,2	0,7	$1,5\pi$	?
15.61	?	6,5	2π	1,571
15.62	3,75	?	$\pi/2$	6,283
15.63	6,0	8,5	?	1,257
15.64	5,0	5,667	$\pi/6$	?
15.65	?	6,0	3π	3,14
15.66	4,1	?	$\pi/2$	15,708
15.67	2,0	3,25	?	1,257
15.68	1,2	1,755	$\pi/3$	?
15.69	?	1,2625	$\pi/2$	25,133
15.70	5,2	?	$0,1\pi$	0,942
15.71	2,1	2,5167	?	37,699
15.72	5,5	6,75	π	?
15.73	?	3,933	5π	18,849
15.74	6,25	?	$\pi/4$	0,628
15.75	0,7	0,8	?	31,416
15.76	8,2	9,867	$\pi/6$	?
15.77	?	1,325	$\pi/4$	6,283
15.78	1,4	?	2π	15,708
15.79	3,1	4,35	?	1,257
15.80	0,8	1,2	π	?
15.81	?	1,7	4π	12,566
15.82	0,55	?	$\pi/2$	31,416
15.83	10,0	14,0	?	1,57
15.84	11,5	12,75	$\pi/4$	?

15.85 – 15.112. Стоячая волна, образованная при сложении двух одинаковых волн, имеющих длину волны λ и амплитуду A, распространяющихся навстречу одна другой, на расстоянии x от одного из источников колебаний имеет амплитуду B. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.4.

Таблица 15.4

Условия к задачам 15.85 – 15.112

Номер задачи	λ, м	A, см	x, м	B, см
15.85	?	3,0	0,5	4,243
15.86	8,0	?	4,0	10,0
15.87	1,5	2,5	?	2,5
15.88	5,0	4,0	0,625	?
15.89	?	1,5	0,25	2,598
15.90	0,8	?	0,1	2,828
15.91	1,2	2,5	?	3,535
15.92	2,0	1,0	0,25	?
15.93	?	3,0	0,2	4,243
15.94	0,6	?	0,1	2,0
15.95	0,4	0,5	?	1,0
15.96	4,0	2,0	0,5	?
15.97	?	0,5	0,1	0,5
15.98	0,3	?	0,05	1,0
15.99	6,0	2,0	?	3,464
15.100	3,2	1,5	0,4	?
15.101	?	1,0	0,2	1,0
15.102	1,8	?	0,15	5,196
15.103	6,0	3,5	?	6,062
15.104	0,9	0,2	0,075	?
15.105	?	5,0	1,25	7,07
15.106	8,0	?	1,0	5,657
15.107	1,5	4,2	?	4,2
15.108	2,4	1,5	0,2	?
15.109	?	2,0	0,75	3,464
15.110	6,0	?	0,5	5,196
15.111	0,8	0,2	?	0,283
15.112	3,0	0,5	0,25	?

15.113 – 15.140. Найти, согласно номеру задачи в табл. 15.5., положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны, образованной сложением падающей и отраженной от границы раздела двух сред бегущей волны, если известно, что расстояние между n-ной и κ-той пучностями стоячей волны равно Δx и отражение происходит в точке, находящейся на расстоянии x от источника. Учесть условия отражения от границы двух сред.

Таблица15.5

Условия к задачам 15.113 – 15.140

Номер задачи	n	κ	Δx, м	x, м	Плотность среды, от которой происходит отражение
15.113 15.114	2	5	0,75	1,5	Более плотная Менее плотная
15.115 15.116	4	8	0,4	1,0	Более плотная Менее плотная
15.117 15.118	3	7	2,4	4,8	Более плотная Менее плотная
15.119 15.120	2	6	4,0	7,0	Более плотная Менее плотная
15.121 15.122	1	4	0,24	0,4	Более плотная Менее плотная
15.123 15.124	1	5	1,2	1,5	Более плотная Менее плотная
15.125 15.126	2	4	0,28	0,7	Более плотная Менее плотная
15.127 15.128	1	7	4,8	7,2	Более плотная Менее плотная
15.129 15.130	1	3	0,4	1,2	Более плотная Менее плотная
15.131 15.132	3	5	0,8	2,0	Более плотная Менее плотная
15.133 15.134	2	6	0,64	0,96	Более плотная Менее плотная
15.135 15.136	1	5	16,0	32,0	Более плотная Менее плотная
15.137 15.138	3	6	6,0	14,0	Более плотная Менее плотная
15.139 15.140	2	3	0,32	1,6	Более плотная Менее плотная

15.141 – 15.157. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, уравнения которой имеют вид: $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)$, $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)=\vec{B}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)$. Некоторые параметры волны заданы в табл. 15.6. Определите величины и направления характеристик волны, приведенные в последнем столбце таблицы. Сделайте рисунок с указанием направления векторов относительно декартовой системы координат и найдите разность фаз электромагнитной волны в точках $\vec{r}_1=\{0;0;0\}$ м, $\vec{r}_2=\{3;4;5\}$ м и модуль вектора напряженности $\vec{E}$ во второй точке в момент времени $t=30$ нс.

Принятые обозначения: T – период; ν – частота; λ – длина волны; I – интенсивность волны; ω_0 и $\vec{S}_0$ – плотность энергии и вектор плотности потока энергии в точке с радиусом-вектором $\vec{r}=0$ в момент времени $t=0$, $\uparrow\uparrow$ – однонаправленные векторы; $\uparrow\downarrow$ – противоположно направленные векторы.

Таблица 15.6

Условия к задачам 15.140 – 15.157

Номер задачи	Заданные параметры электромагнитной волны	Найти
15.141	$\vec{E}_0=\{50;0;0\}$ мВ/м, $\vec{B}_0\uparrow\uparrow\vec{e}_Z$, $\omega=6\cdot10^8$ рад/с	$\vec{\kappa},\lambda,I$
15.142	$\vec{B}_0=\{1;0;0\}$ нТл, $\vec{\kappa}=\{0;0;-1\}$ м$^{-1}$	$\vec{E}_0,T,\omega_0$
15.143	$\vec{B}_0,T$, $\vec{\kappa}=\{0;1;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{B}_0,T,\vec{S}_0$
15.144	$\vec{B}_0=\{0;0;1\}$ нТл, $\nu=100$ МГц, $\vec{E}_0\uparrow\downarrow\vec{e}_y$	$\vec{\kappa},\omega,\omega_0$
15.145	$\vec{B}_0=\{-5;0;0\}$ нТл, $\vec{\kappa}=\{0;-\pi;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{E}_0,\nu,\vec{S}_0$
15.146	$\vec{E}_0=\{-20;0;0\}$ мВ/м, $\vec{\kappa}=\{0;0;-2\}$ м$^{-1}$	$\vec{B}_0,\nu,I$
15.147	$\vec{E}_0=\{0;50;0\}$ мВ/м, $\vec{B}_0\uparrow\uparrow\vec{e}_X$, $T=10$ нс	$\vec{\kappa},\lambda,\vec{S}_0$
15.148	$\vec{E}_0=\{0;70;0\}$ мВ/м, $\vec{\kappa}=\{0;0;\pi\}$ м$^{-1}$	$\vec{B}_0,\lambda,\omega_0$
15.149	$\vec{B}_0=\{-0,5;0;0\}$ нТл, $\vec{E}_0\uparrow\uparrow\vec{e}_y$, $\lambda=3$ м	$\vec{\kappa},\omega,I$
15.150	$\vec{E}_0=\{0;30;0\}$ мВ/м, $\vec{B}_0\uparrow\downarrow\vec{e}_Z$, $\omega=3\cdot10^8$ рад/с	$\vec{\kappa},\lambda,\omega_0$
15.151	$\vec{B}_0=\{0;-1;0\}$ нТл, $\vec{\kappa}=\{\pi;0;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{E}_0\lambda,I$
15.152	$\vec{B}_0=\{0;0,5;0\}$ нТл, $\vec{\kappa}=\{0;0;1\}$ м$^{-1}$	$\vec{E}_0,\omega,\omega_0$
15.153	$\vec{E}_0\{0;-50;0\}$ мВ/м, $\vec{\kappa}=\{-\pi;0;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{B}_0,\omega,\vec{S}_0$
15.154	$\vec{B}_0=\{0;0;-0,3\}$ нТл, $\vec{E}_0\uparrow\downarrow\vec{e}_y$, $\nu=150$ МГц	$\vec{\kappa},\lambda,\vec{S}_0$
15.155	$\vec{E}_0=\{0;0;30\}$ мВ/м, $\vec{\kappa}=\{2;0;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{B}_0,T,I$
15.156	$\vec{E}_0=\{0;0;70\}$ мВ/м, $\vec{B}_0\uparrow\uparrow\vec{e}_y$, $T=7$ нс	$\vec{\kappa},\omega,I$
15.157	$\vec{B}_0=\{0;0;1\}$ нТл, $\vec{\kappa}=\{-\pi;0;0\}$ м$^{-1}$	$\vec{E}_0,T,\vec{S}_0$

15.158. Определите энергию, переносимую плоской синусоидальной электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме, за 1 с сквозь поверхность площадью $1\ \text{м}^2$, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны $5\ {}^{\text{мВ}}\!/_{\text{м}}$. Период волны $T << t$.

15.159. Определите разность фаз двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 40\ \text{см}$, если при частоте $\nu = 500\ \text{Гц}$ волны распространяются со скоростью $\upsilon = 400\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$.

15.160. Источник незатухающих колебаний совершает колебания по закону $x = 0{,}4\cos 60\pi t,\ \text{м}$. Скорость распространения колебаний $\upsilon = 90\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Запишите уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси *X*, в среде, не поглощающей энергию. Определите: 1) длину λ бегущей волны; 2) смещение ξ_1 и ξ_2 точек среды, находящихся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 20\ \text{м}$ и $x_2 = 21\ \text{м}$ от источника, через $t = 2\ \text{с}$ от момента начала колебаний источника; 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний точек 1 и 2.

15.161. Бегущая плоская звуковая волна описывается уравнением вида $\xi(x,t) = 6\cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x),\ \text{м}$. Определите: 1) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны; 2) отношение амплитуды колебаний скорости частиц среды к скорости распространения волны.

15.162. Определите длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и девятой пучностями равно 20 см.

15.163. Расстояние между соседними узлами стоячей волны, создаваемой камертоном в воздухе, $l = 42\ \text{см}$. Принимая скорость звука в воздухе $\upsilon = 332\ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$, определите частоту колебаний ν камертона.

15.164. Колебательный контур содержит плоский конденсатор площадью пластин $S = 150\ \text{см}^2$, расстояние между которыми $d = 1{,}5\ \text{мм}$, и катушку индуктивностью $L = 0{,}2\ \text{мГн}$. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной $\lambda = 663\ \text{м}$.

15.165. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью, равной 2, и магнитной проницаемостью, равной 1, распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $50 \ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}$. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны.

15.166. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Определите амплитуду напряженности электрического поля волны, если амплитуда H_0 напряженности магнитного поля волны равна $5 \ {}^{\text{мА}}\!/_{\text{м}}$.

15.167. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 12 \ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}$. Определите: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

15.168. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна $10 \ {}^{\text{В}}\!/_{\text{м}}$. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны.

15.169. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет $50 \ {}^{\text{мВ}}\!/_{\text{м}}$. Определить интенсивность волны I.

15.170. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет $\upsilon = 250 \ {}^{\text{Мм}}\!/_{\text{с}}$. Определите длину волны электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме $\nu_0 = 1 \text{ МГц}$.

15.171. В упругой среде распространяется волна со скоростью $20 \ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Частота колебаний 2 с^{-1}, амплитуда 0,02 м. Определить фазу колебаний, смещение, скорость, ускорение точки, отстоящей на расстоянии 60 м от источника, в момент времени $t = 4$ с, и длину волны.

15.172. Волна распространяется по прямой со скоростью $20 \ {}^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии 12 и 15 м от источника колебаний, колеблются по закону синуса с амплитудами, равными 0,1 м и с разностью фаз $135°$. Найти длину волны, написать ее уравнение и найти смещение указанных точек в момент времени $t = 1{,}2$ с.

15.173. Колеблющиеся точки, находящиеся на одном луче, удалены от источника колебаний на 6 и 8,7 м и колеблются с разностью фаз $\frac{3\pi}{4}$. Период колебания источника 10^{-2} с. Чему равны длина волны и скорость распространения колебаний в данной среде? Составить уравнение волны для первой и второй точек, считая амплитуды колебаний точек равными 0,5м.

15.174. Изменение разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре происходит в соответствии с уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$. Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность контура, закон изменения силы тока со временем и длину волны.

15.175. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой 100 В/м. Какую энергию переносит эта волна через площадку 50 см^2, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны, за 1мин? Период волны $T << t$.

15.176. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью, равной 1, имеет вид $E = 10\sin(6,28\cdot 10^8 t - 4,19x)$. Определить диэлектрическую проницаемость среды и длину волны.

15.177. Два когерентных источника, расстояние между которыми 0,2 мм, расположены от экрана на расстоянии 1,5 м. Найти длину световой волны, если 3-й интерференционный минимум расположен на расстоянии 12,6 мм от центра картины.

15.178. Расстояние между двумя когерентными источниками d = 0,9 мм. Источники посылают монохроматический свет с длиной волны $6,4\cdot 10^{-7}$ м на экран, расположенный от них на расстоянии 3,5 м. Определить число световых полос на 1 см длины.

15.179. Найти угловое расстояние между соседними светлыми полосами в опыте Юнга, если известно, что экран отстоит от когерентных источников света на 1 м, а пятая светлая полоса на экране расположена на расстоянии 1,5 мм от центра интерференционной картины.

15.180. Для устранения отражения света от поверхности линзы на нее наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления 1,25, меньшим, чем у стекла (просветление оптики). При какой наименьшей толщине пленки отражение света с длиной волны 0,72 мкм не будет наблюдаться, если угол падения лучей $60°$?

15.181. В опыте Юнга щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, расстояние d между щелями равно 1 мм, и расстояние l от щелей до экрана 1,2 м. Определите положение первой темной полосы и положение третьей светлой полосы.

15.182 – 15.209. Расстояние между щелями в опыте Юнга равно d, расстояние от щелей до экрана – l. Расстояние между двумя соседними полосами, соответствующее длине волны λ, равно ΔX. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.7.

Таблица 15.7

Условия к задачам 15.182 – 15.209

Номер задачи	d, мм	l, м	λ, мкм	ΔX, мм
15.182	0,7	0,32	0,35	?
15.183	4,0	2,0	?	0,23
15.184	3,1	?	0,62	0,30
15.185	?	4,6	0,40	0,92
15.186	1,5	3,5	0,66	?
15.187	7,0	28	?	1,36
15.188	4,5	?	0,55	1,10
15.189	?	5,0	0,38	1,00
15.190	10	30	0,65	?
15.191.	2,1	4,2	?	0,84
15.192	2,6	?	0,52	1,20
15.193	?	24	0,34	2,04
15.194	1,6	6,2	0,48	?
15.195	3,0	18	?	3,12
15.196	2,4	?	0,60	2,50
15.197	?	4,4	0,54	2,97
15.198	0,2	0,8	0,50	?
15.199	2,1	2,2	?	0,66
15.200	4,0	?	0,36	0,72
15.201	?	7,5	0,44	2,20
15.202	1,8	4,5	0,64	?
15.203	6,5	26	?	2,28
15.204	2,7	?	0,45	2,50
15.205	?	40	0,58	4,64
15.206	4,0	25	0,32	?
15.207	0,9	3,6	?	1,80
15.208	3,4	?	0,68	4,00
15.209	?	4,8	0,56	3,84

15.210 – 15.237. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая прозрачная пластинка толщиной d и коэффициентом преломления n, вследствие чего интерференционная картина смещалась на m полос. Длина волны падающего света – λ, свет падает на пластинку нормально. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.8, выполнить дополнительное задание.

Таблица 15.8

Условия к задачам 15.210 – 15.237

Номер задачи	d, мкм	n	m	λ, мкм	Построить градуировочный график
15.210	?	1,5	2	0,60	$m = f(d)$
15.211	?		5		
15.212	?		8		
15.213	?		10		
15.214	10	?	6	0,50	$m = f(n)$
15.215		?	10		
15.216		?	4		
15.217		?	8		
15.218	15	1,3	?	0,55	$m = f(\lambda)$
15.219			?	0,45	
15.220			?	0,65	
15.221			?	0,35	
15.222	?	1,4	5	0,55	$d = f(\lambda)$
15.223	?			0,40	
15.224	?			0,65	
15.225	?			0,35	
15.226	?	1,3	10	0,45	$d = f(n)$
15.227	?	1,4			
15.228	?	1,5			
15.229	?	1,6			
15.230	7,5	1,36	8	?	$n = f(\lambda)$
15.231		1,75		?	
15.232		1,62		?	
15.233		1,48		?	
15.234	11	?	4	0,55	$n = f(m)$
15.235		?	9,6		
15.236		?	7		
15.237		?	8,4		

15.238 – 15.265. Пучок параллельных лучей длиной волны λ падает в воздухе под углом α на тонкую пленку с показателем преломления n_1, находящуюся на материале, показатель преломления которого n_2. Наименьшая толщина пленки, при которой отраженные лучи будут максимально ослаблены интерференцией, равна d_1, максимально усилены – d_2. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.9.

Таблица 15.9

Условия к задачам 15.238 – 15.265

Номер задачи	λ, мкм	α, град	n_1	n_2	d_1, мкм	d_2, мкм
15.238	?	45	1,10	1,30	?	0,6865
15.239	0,35	?	1,25	1,50	0,0971	?
15.240	0,66	60	?	1,10	?	0,1347
15.241	0,41	30	1,40	1,65	?	?
15.242	?	60	1,45	1,14	?	0,1397
15.243	0,44	?	1,30	1,15	0,2017	?
15.244	0,55	30	?	1,46	?	0,2521
15.245	0,38	45	1,20	1,40	?	?
15.246	?	45	1,15	1,45	?	0,2371
15.247	0,48	?	1,35	1,20	0,1914	?
15.248	0,40	60	?	1,65	?	0,2219
15.249	0,63	30	1,50	1,25	?	?
15.250	?	30	1,40	1,25	?	0,1109
15.251	0,54	?	1,20	1,35	0,1392	?
15.252	0,36	60	?	1,55	?	0,1856
15.253	0,46	45	1,55	1,15	?	?
15.254	?	60	1,60	1,30	?	0,0892
15.255	0,39	?	1,10	1,40	0,1437	?
15.256	0,43	45	?	1,60	?	0,1698
15.257	0,50	30	1,30	1,10	?	?
15.258	?	45	1,55	1,25	?	0,1160
15.259	0,37	?	1,15	1,35	0,102	?
15.260	0,56	60	?	1,55	?	0,2546
15.261	0,42	30	1,35	1,15	?	?
15.262	?	30	1,45	1,60	?	0,1286
15.263	0,45	?	1,50	1,20	0,1591	?
15.264	0,60	45	?	1,50	?	0,284
15.265	0,34	60	1,25	1,45	?	?

15.266 – 15.293. Для улучшения качества линз в оптических приборах широко используется «просветление» оптики, т.е. нанесение пленочного покрытия такой толщины d, чтобы при нормальном падении лучей в отраженном свете осуществлялся интерференционный минимум порядка m для света с длиной волны $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, соответствующей наибольшей чувствительности человеческого глаза к зеленому свету. Показатель преломления линзы – n_1, показатель преломления просветляющей пленки – n_2. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.10.

Таблица 15.10

Условия к задачам 15.166 – 15.293

Номер задачи	n_1	n_2	m	d, мкм
15.266	1,6	1,5	0	?
15.267			1	?
15.268			2	?
15.269			3	?
15.270	1,75	?	4	0,825
15.271		?		0,728
15.272		?		0,884
15.273		?		0,773
15.274	1,5	1,45	?	1,233
15.275			?	0,8534
15.276			?	0,6638
15.277			?	1,043
15.278	1,3	1,35	2	?
15.279		1,40		?
15.280		1,45		?
15.281		1,50		?
15.282	1,15	?	5	1,375
15.283		?	6	
15.284		?	7	
15.285		?	8	
15.286	1,15	1,20	?	0,6875
15.287		1,25	?	0,44
15.288		1,30	?	0,6346
15.289		1,35	?	0,4074
15.290	1,35	1,4	0	?
15.291			1	?
15.292			2	?
15.293			3	?

15.294 – 15.321. Между двумя прозрачными пластинками с показателем преломления n_1, находящимися в жидкой или газообразной среде с показателем преломления n_2, попала нить диаметром d так, что образовался клин. Расстояние от нити до вершины клина – L. При нормальном падении на пластинку лучей с длиной волны λ в отраженном свете наблюдается m интерференционных минимумов и максимумов на l длины пластинки. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.11.

Таблица 15.11

Условия к задачам 15.294 – 15.321

Номер задачи	n_1	n_2	d, мкм	L, см	λ, мкм	m	l, см
15.294	1,5	?	2	10	0,3472	5	3,1
15.295	1,75	1,0	?	12	0,4091	11	5,4
15.296	1,6	1,00077	16	?	0,4982	9	3,5
15.297	1,42	1,63	10	15	?	12	3,0
15.298	1,58	1,02	12	30	0,5814	?	5,7
15.299	1,65	1,16	2,5	17	0,4199	13	?
15.300	1,5	?	7	11	0,3733	6	1,6
15.301	1,47	1,2	?	15	0,6240	4	5,2
15.302	1,34	1,05	8	?	0,4536	10	5,4
15.303	1,62	1,0	15	22	?	8	3,1
15.304	1,49	1,1	3	14	0,4007	?	1,7
15.305	1,7	1,00038	5	16	0,6044	6	?
15.306	1,36	?	13	23	0,4845	7	2,5
15.307	1,55	1,54	?	8	0,5133	3	1,0
15.308	1,43	1,33	9	?	0,4309	5	0,9
15.309	1,8	1,12	10	18	?	8	3,9
15.310	1,45	1,0	17	21	0,5667	?	1,4
15.311	1,72	1,2	20	24	0,3500	4	?
15.312	1,38	?	4	9	0,5123	6	2,6
15.313	1,68	1,4	?	12	0,4480	10	3,2
15.314	1,76	1,08	4	?	0,6336	3	3,3
15.315	1,5	1,6	18	25	?	7	1,4
15.316	1,35	1,004	6	10	0,4016	?	1,0
15.317	1,44	1,1	11	19	0,5459	7	?
15.318	1,73	?	19	20	0,5146	6	1,3
15.319	1,48	1,005	?	11	0,4568	3	1,5
15.320	1,55	1,4	14	?	0,3733	7	0,8
15.321	1,64	1,18	5	13	?	9	5,3

15.322 – 15.349. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой с показателем преломления n_1 и пластинкой с показателем преломления n_3 заполнено газом или жидкостью с показателем преломления n_2. При наблюдении в проходящем (отраженном) свете с длиной волны λ радиус m-ного светлого (темного) кольца равен r_m. Радиус кривизны линзы – R. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.12. Определить, светлое или темное пятно будет в центре интерференционной картины.

Таблица 15.12

Условия к задачам 15.322 – 15.349

Номер задачи	Условия наблюдения	n_1	n_2	n_3	λ, мкм	Кольцо	m	r_m, мм	R, м
15.322	В отраженном свете	1,5	1,0	1,8	0,70	Темное	2	?	0,5
15.323							3	?	
15.324							4	?	
15.325							5	?	
15.326	В проходящем свете	1,5	1,0	1,8	0,55	Темное	?	1,11	0,5
15.327							?	0,83	
15.328							?	0,64	
15.329							?	0,98	
15.330	В отраженном свете	1,8	1,63	1,5	?	Светлое	3	0,81	0,6
15.331					?			0,74	
15.332					?			0,88	
15.333					?			0,66	
15.334	В проходящем свете	1,5	1,63	1,5	0,4240	Светлое	6	1,06	?
15.335					0,5477			0,84	?
15.336					0,6405			2,06	?
15.337					0,7232			2,42	?
15.338	В отраженном свете	1,5	1,63	1,7	0,50	Светлое	5	0,88	?
15.339								1,24	?
15.340								2,77	?
15.341								3,92	?
15.342	В проходящем свете	1,5	1,63	1,7	0,64	Темное	2	?	8,0
15.343							4	?	
15.344							6	?	
15.345							8	?	
15.346	В отраженном свете	1,7	1,0	1,5	0,45	Светлое	?	0,80	0,4
15.347			1,05				?	0,66	
15.348			1,1				?	0,95	
15.349			1,15				?	0,84	

15.350 – 15.377. На зеркала Френеля, угол между которыми φ, от узкой щели, находящейся на расстоянии r от линии пересечения зеркал, падает монохроматический свет длиной волны λ. Отраженный от зеркал свет дает интерференционную картину на экране, отстоящем на расстоянии b от линии пересечения зеркал, расстояние между интерференционными полосами при этом равно Δx. Найти неизвестную величину в табл. 15.13.

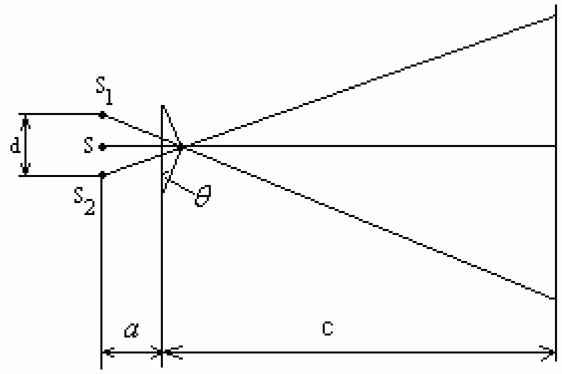
Таблица 15.13

Условия к задачам 15.350 – 15.377

Номер задачи	φ, мин	b, м	r, м	λ, мкм	Δx, мм
15.350	10	2,5	0,12	0,45	?
15.351				0,51	?
15.352				0,60	?
15.353				0,68	?
15.354	5	3,0	0,10	?	7,67
15.355				?	6,82
15.356				?	5,86
15.357				?	4,26
15.358	2	2,0	?	0,65	19,18
15.359			?		10,72
15.360			?		8,01
15.361			?		6,77
15.362	8	?	0,07	0,55	6,87
15.363		?			5,86
15.364		?			3,83
15.365		?			2,65
15.366	?	4,0	0,15	0,43	6,82
15.367	?				4,09
15.368	?				2,56
15.369	?				1,70
15.370	10	3,5	0,05	0,70	?
15.371	20				?
15.372	30				?
15.373	40				?
15.374	20	5,0	?	0,51	1,87
15.375			?		2,24
15.376			?		3,17
15.377			?		5,52

15.378. В опыте Юнга угловое расстояние Δd между соседними светлыми полосами составляет 10^{-3}рад. Определите расстояние l от щелей до экрана, если вторая светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4 мм.

15.379. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников($\lambda = 500$ нм). На пути одного из лучей перпендикулярно к нему поместили стеклянную пластинку($n = 1,6$) толщиной $d = 5$ мкм. Определите, на сколько полос сместится при этом интерференционная картина.



15.380. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны $a = 48$ см и $c = 6$ м. Бипризма стеклянная (n=1,5) с преломляющим углом $\theta = 10'$. Определите число полос, наблюдаемых на экране, если длина волны λ монохроматического света равна 600 нм (см. рис.).

15.381. На плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления n = 1,5 под углом $\alpha = 30°$ падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в красный свет($\lambda = 670$ нм).

15.382. На тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку (n = 1,5) под углом $\alpha = 30°$ падает белый свет. Определите минимальную толщину пленки, если она в проходящем свете кажется желтой ($\lambda = 600$ нм).

15.383. На стеклянный клин(n = 1,5) с углом при вершине $\alpha = 1'$ падает под углом $\alpha = 18°$ монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции в отраженном свете.

15.384. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим нормально. Определите толщину d воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где наблюдается пятое светлое кольцо в отраженном свете.

15.385. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено прозрачной жидкостью с показателем преломления n = 1,33. Определите длину волны падающего света, если радиус R кривизны линзы равен 10 м, радиус r третьего светлого кольца 3,65 мм, а наблюдение ведется в проходящем свете.

15.386. Плосковыпуклая линза (n = 1,5) выпуклой стороной прижата к стеклянной пластинке. Расстояние между четвертым и третьим кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 0,4 мм. Определите оптическую силу линзы, если освещение производится монохроматическим светом с $\lambda = 550$ нм, падающим нормально.

15.387. Постоянная дифракционной решетки равна 2,5 мкм. Определить наибольший порядок спектра, общее число главных максимумов в дифракционной картине и угол дифракции в спектре 2-го порядка при нормальном падении монохроматического света с длиной волны 0,62 мкм.

15.388. Дифракция наблюдается на расстоянии 1,2 м от точечного источника монохроматического света. Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определите длину волны падающего света, если диаметр отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным, равен 1,2 мм.

15.389. Диафрагма с круглым отверстием расположена посередине между точечным источником S монохроматического света($\lambda = 500$ нм) и экраном. Расстояние между источником и экраном $L = 4$ м. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец на экране будет наиболее темным?

15.390. На диафрагму с круглым отверстием падает нормально параллельный пучок света длиной волны 625 нм. Определите радиус четвертой зоны Френеля, если расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, находящейся на оси отверстия, составляет 2,5 м.

15.391. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 2 м, на расстоянии 3 м от своей поверхности. Определите расстояние от зонной пластинки до изображения, если источник поместить в бесконечность.

15.392. Определите длину волны монохроматического света, нормально падающего на узкую щель шириной 0,05 мм, если направление света на первый дифракционный максимум (по отношению к первоначальному направлению света) составляет $1°$.

15.393. На узкую щель нормально падает монохроматический свет. Определите его направление на вторую темную дифракционную полосу, если на ширине щели укладывается 100 длин волн.

15.394. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы с фокусным расстоянием F = 0,5 м. Ширина центральной светлой полосы равна 5 см. Определите, как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран (при любой ширине экрана).

15.395. Наибольший порядок спектра, получаемый с помощью дифракционной решетки, равен 5. Определите постоянную дифракционной решетки, если известно, что монохроматический свет ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает на нее нормально.

15.396. На дифракционную решетку, содержащую 200 штрихов на 1 мм, нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Вблизи решетки помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран, на который проецируется дифракционная картина. Определите расстояние L экрана от линзы, если первый главный максимум наблюдается на расстоянии $b = 10$ см от центрального.

15.397. На дифракционную решетку, имеющую n = 500 щелей на одном миллиметре ширины, нормально падает свет от разрядной трубки, наполненной гелием. Найти: 1) наибольший порядок дифракционного максимума, который дает эта решетка для фиолетового участка спектра с длиной волны $\lambda = 410$ нм; 2) длину волны в спектре второго порядка, на которую накладывается синяя линия $\lambda_c = 447$ нм спектра третьего порядка.

15.398. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. На экран, находящийся от линзы на расстоянии L = 1 м, расположенный вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 12$ см от центрального. Определите: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3) общее число максимумов, даваемых решеткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

15.399. Сравните наибольшую разрешающую способность для желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм) двух дифракционных решеток одинаковой длины ($l = 4$ мм), но разных периодов ($d_1 = 5$ мкм; $d_2 = 10$ мкм).

15.400. Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки для $\lambda = 600$ нм в спектре второго порядка составляет $4 \cdot 10^5 \, {}^{\text{рад}}\!/_{\text{м}}$. Определите постоянную дифракционной решетки.

15.401 – 15.428. Свет от монохроматического источника длиной волны λ падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом r. За диафрагмой на расстоянии L от нее находится экран. Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым? Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии диафрагмы при наблюдении из центра дифракционной картины, равно m. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.14.

Таблица 15.14

Условия к задачам 15.401 – 15.428

Номер задачи	λ, мкм	r, мм	L, м	m
15.401	0,500	0,4	0,08	?
15.402	0,577	1,5	?	3
15.403	0,408	?	0,2	6
15.404	?	0,9	1,8	1
15.405	0,416	0,8	0,22	?
15.406	0,641	1,0	?	2
15.407	0,533	?	0,54	5
15.408	?	0,5	0,16	4
15.409	0,457	1,1	0,53	?
15.410	0,643	0,6	?	7
15.411	0,485	?	1,32	1
15.412	?	1,4	1,45	2
15.413	0,706	1,2	0,34	?
15.414	0,544	0,7	?	5
15.415	0,440	?	1,94	3
15.416	?	0,9	0,23	6
15.417	0,676	0,5	0,37	?
15.418	0,402	1,3	?	3
15.419	0,538	?	0,52	7
15.420	?	0,8	0,47	4
15.421	0,521	1,0	0,96	?
15.422	0,457	0,4	?	5
15.423	0,417	?	1,20	2
15.424	?	1,2	3,0	1
15.425	0,571	0,6	0,21	?
15.426	0,620	1,4	?	2
15.427	0,483	?	0,70	5
15.428	?	0,9	0,39	4

15.429 – 15.456. На диафрагму с круглым отверстием радиусом r падает нормально параллельный пучок света длиной волны λ. При удалении экрана от диафрагмы последний минимум наблюдается на расстоянии $b'_{\min}$ между диафрагмой и экраном, а последний максимум – на расстоянии $b'_{\max}$. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.15.

Таблица 15.15

Условия к задачам 15.429 – 15.456

Номер задачи	r, мм	λ, мкм	$b'_{\min}$, м	$b'_{\max}$, м
15.429	1,2	0,45	?	?
15.430	0,4	?	?	0,291
15.431	?	0,67	?	1,21
15.432	?	0,53	0,236	?
15.433	1,8	?	3,857	?
15.434	0,7	0,46	?	?
15.435	1,3	?	?	3,38
15.436	?	0,51	?	1,255
15.437	?	0,64	0,125	?
15.438	1,4	?	2,04	?
15.439	0,3	0,40	?	?
15.440	1,0	?	?	1,667
15.441	?	0,47	0,0957	?
15.442	?	0,70	?	1,428
15.443	1,6	0,62	?	?
15.444	0,5	?	0,236	?
15.445	?	0,44	?	2,75
15.446	?	0,58	0,4225	?
15.447	0,9	?	?	1,246
15.448	1,5	?	2,5	?
15.449	0,6	0,50	?	?
15.450	?	0,38	?	0,948
15.451	?	0,55	1,31	?
15.452	1,1	?	?	1,73
15.453	1,7	?	2,26	?
15.454	0,8	0,48	?	?
15.455	?	0,60	?	2,82
15.456	?	0,42	0,048	?

15.457 – 15.484. Круглое отверстие радиусом r в диафрагме освещается монохроматическим светом длиной волны λ. Дифракционная картина рассматривается в точке, находящейся на расстоянии L от источника света. Сколько раз в центре дифракционной картины будет наблюдаться полное затемнение при перемещении диафрагмы с расстояния a_1 до расстояния a_2 от источника света? Данные в табл. 15.16. согласно номеру задачи.

Таблица 15.16

Условия к задачам 15.457 – 15.484

Номер задачи	r, мм	λ, мкм	L, м	a_1, м	a_2, м
15.457	1,5	0,55	2,5	0,4	0,5
15.458					1,0
15.459					1,5
15.460					2,0
15.461	0,8	0,40	1,4	0,2	1,0
15.462				0,3	
15.463				0,4	
15.464				0,5	
15.465	0,8	0,45	1,0	0,3	0,8
15.466	0,9				
15.467	1,0				
15.468	1,1				
15.469	1,3	0,4	3,0	1,0	1,8
15.470		0,5			
15.471		0,6			
15.472		0,7			
15.473	1,0	0,64	1,5	0,3	0,8
15.474					1,0
15.475					1,2
15.476					1,4
15.477	1,2	0,40	2,8	0,6	2,0
15.478				1,0	
15.479				1,2	
15.480				1,6	
15.481	0,9	0,43	1,0	0,1	0,7
15.482		0,52			
15.483		0,66			
15.484		0,72			

15.485-15.512. На щель шириной b нормально падает параллельный пучок монохроматического света длиной волны λ. Ширина изображения щели на экране, удаленном на расстояние L от линзы, равна Δx. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.17. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Таблица 15.17

Условия к задачам 15.485 – 15.512

Номер задачи	b, мкм	λ, мкм	L, м	Δx, см
15.485	?	0,50	0,65	8,14
15.486	10	?	1,20	16,36
15.487	6	0,58	?	17,48
15.488	21	0,44	0,90	?
15.489	?	0,57	1,05	4,79
15.490	18	?	1,35	10,51
15.491	13	0,40	?	8,00
15.492	11	0,66	0,75	?
15.493	?	0,60	1,30	5,20
15.494	15	?	0,55	3,30
15.495	20	0,42	?	3,36
15.496	19	0,51	1,00	?
15.497	?	0,45	0,85	7,66
15.498	35	?	0,70	2,40
15.499	20	0,64	?	4,48
15.500	8	0,56	1,40	?
15.501	?	0,52	0,60	2,71
15.502	12	?	0,95	9,04
15.503	14	0,48	?	7,55
15.504	16	0,63	1,10	?
15.505	?	0,43	0,80	5,74
15.506	13	?	1,45	10,27
15.507	22	0,55	?	3,85
15.508	27	0,67	1,15	?
15.509	?	0,65	0,50	1,91
15.510	17	?	0,72	4,41
15.511	9	0,47	?	1,05
15.512	14	0,54	0,25	?

15.513 – 15.540. Дифракционная решетка шириной l имеет число щелей N и постоянную решетки d. Разрешающая способность решетки для длины волны λ в порядке m равна $R = \lambda / (\Delta\lambda)$, ее угловая дисперсия $D = \Delta\varphi / (\Delta\lambda)$, где $\Delta\lambda$ – разница в длинах волн двух соседних максимумов, которые может разрешить дифракционная решетка. Найти неизвестные величины в табл. 15.18. согласно номеру задачи.

Таблица 15.18

Условия к задачам 15.513 – 15.540

Номер задачи	l, см	d, см	N	m	λ, Å	$\Delta\lambda$, Å	R	D, см$^{-1}$
15.513	?	?	?	2	?	0,2	20000	4000
15.514	?	$2\cdot10^{-3}$	5000	2	5500	?	?	?
15.515	4,0	?	5000	3	?	0,3	?	?
15.516	6,0	?	4000	3	6000	?	?	?
15.517	4,5	$5\cdot10^{-4}$	?	?	?	0,2	?	6000
15.518	3,0	?	?	4	6000	?	?	2500
15.519	?	$6\cdot10^{-4}$	?	3	5000	?	25000	?
15.520	?	$5\cdot10^{-4}$	7500	?	?	0,3	?	4000
15.521	2,0	?	?	1	6400	?	8000	?
15.522	2,5	?	12500	2	5000	?	?	?
15.523	6,3	$1{,}5\cdot10^{-3}$	?	2	?	0,5	?	?
15.524	?	$1{,}25\cdot10^{-3}$	3200	?	?	0,75	6400	?
15.525	2,0	$5\cdot10^{-4}$	?	3	6000	?	?	?
15.526	1,4	$7\cdot10^{-4}$	?	4	?	0,7	?	?
15.527	?	?	8750	?	?	0,25	17500	5000
15.528	1,8	?	2700	?	4050	?	?	4500
15.529	?	$7\cdot10^{-4}$	?	1	?	0,6	10000	?
15.530	?	?	?	2	?	0,4	12600	6300
15.531	2,8	?	7000	2	?	0,35	?	?
15.532	3,2	?	?	3	?	0,3	?	4800
15.533	5,0	10^{-3}	?	?	?	0,25	?	3000
15.534	1,5	$1{,}25\cdot10^{-3}$	?	3	4200	?	?	?
15.535	2,5	?	?	2	5250	?	5000	?
15.536	2,4	?	3000	?	?	0,9	6000	?
15.537	?	$2\cdot10^{-3}$	1500	1	4800	?	?	?
15.538	?	?	4500	?	?	0,6	9000	6000
15.539	?	$5\cdot10^{-4}$	6500	1	?	1,0	?	?
15.540	1,6	?	?	2	?	1,5	3000	?

15.541 – 15.568. На грань кристалла падает параллельный пучок рентгеновских лучей длиной волны λ. Расстояние между атомными плоскостями равно d. Когда лучи падают под углом θ к поверхности кристалла, наблюдается интерференционный максимум порядка m. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.19.

Таблица 15.19

Условия к задачам 15.541 – 15.568

Номер задачи	λ, нм	d, нм	θ	m
15.541 15.542 15.543 15.544	0,075	0,28	? ? ? ?	1 2 3 4
15.545 15.546 15.547 15.548	0,062	? ? ? ?	7°25′ 7°25′ 5°05′ 11°56′	1
15.549 15.550 15.551 15.552	? ? ? ?	0,3	19°28′ 15°28′ 15°28′ 7°40′	2
15.553 15.554 15.555 15.556	0,045 0,060 0,025 0,037	0,44	 7°50′ 1°38′ 4°49′	? ? ? ?
15.557 15.558 15.559 15.560	0,05	0,25 0,30 0,35 0,40	? ? ? ?	2
15.561 15.562 15.563 15.564	0,08	? ? ? ?	10°29′ 5°06′ 12°09′ 6°58′	1
15.565 15.566 15.567 15.568	? ? ? ?	0,21	59° 68°13′ 16°36′ 25°23′	3

15.569. На систему, состоящую из поляризатора и анализатора, у которых угол α между главными плоскостями составляет $60°$, падает естественный свет, интенсивность которого после прохождения системы ослабляется в n = 10 раз. Пренебрегая потерями на отражение света, определите, какой процент интенсивности падающего света теряется при прохождении данной системы (потери в поляризаторе и анализаторе считать одинаковыми).

15.570. При прохождении естественного света с интенсивностью I_0 через систему из двух поляризаторов его интенсивность уменьшилась в 2 раза. Когда на пути луча между поляризаторами поместили кварцевую пластинку, интенсивность уменьшилась еще в 2 раза. На какой угол повернулась плоскость колебаний луча в кварцевой пластинке? Поглощением пренебречь.

15.571. Интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор, уменьшилась в 2,3 раза. Во сколько раз она уменьшится, если за первым поставить второй такой же поляризатор так, чтобы угол между их главными плоскостями был равен $60°$?

15.572. Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Степень поляризации преломленного луча составляет 0,124. Найти коэффициент пропускания света.

15.573. Какой угол образуют плоскости поляризации двух николей, если свет, вышедший из второго николя, был ослаблен в 5 раз? Учесть, что поляризатор поглощает 10, а анализатор 8 % падающего на них света.

15.574. Угол между плоскостями поляризации двух поляроидов $70°$. Как изменится интенсивность прошедшего через них света, если этот угол уменьшится в 5 раз?

15.575. Луч света, проходя слой льда, падает на алмазную пластинку, частично отражается, частично преломляется. Определить, каким должен быть угол падения, чтобы отраженный луч был максимально поляризован.

15.576. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол $45°$. Каждый николь поглощает 8 % света, падающего на него.

15.577. Степень поляризации P света, представляющего собой смесь естественного света с плоскополяризованным, равна 0,5. Определить отношение интенсивности поляризованного света к интенсивности естественного.

15.578. Пучок естественного света, идущий в воздухе, отражается от поверхности некоторого вещества, скорость υ распространения света в котором равна $1{,}5 \cdot 10^8$ $^{\text{м}}\!/_{\text{с}}$. Определите угол падения, при котором отраженный свет полностью поляризован.

15.579. Определите минимальную толщину пластинки исландского шпата, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий на нее нормально плоскополяризованный свет выходил циркулярно поляризованным. Показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей $n_e = 1{,}489$, $n_o = 1{,}664$, длина световой волны 527 нм.

15.580. При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит $\eta_1 = 30$ % светового потока, а через два таких поляризатора – $\eta_2 = 13{,}5\%$. Найти угол φ между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

15.581. На пути частично поляризованного света поместили поляризатор. При повороте поляризатора на угол $\varphi = 60°$ из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3{,}0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

15.582. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между плоскостями колебаний составляет $60°$. При прохождении света через каждый из николей потери на отражение и поглощение составляют 5 %. Найти, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один и через оба николя.

15.583. Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в четверть длины волны для $\lambda = 530$ нм, если для данной длины волны разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей $n_o - n_e = 0{,}01$.

15.584-15.611. Естественный свет, интенсивность которого равна I_0, проходит два идеальных николя, плоскости поляризации которых составляют угол α. Интенсивность света, прошедшего первый николь, – I_P, интенсивность света после второго николя – I_A. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.20.

Таблица 15.20

Условия к задачам 15.584 – 15.611

Номер задачи	I_0, Вт/м^2	I_P, Вт/м^2	I_A, Вт/м^2	α, град
15.584	?	?	0,0582	10
15.585	0,28	?	?	60
15.586	?	0,05	0,025	?
15.587	?	0,34	?	80
15.588	?	0,18	0,1479	?
15.589	?	?	0,0362	55
15.590	0,10	?	0,0293	?
15.591	0,34	?	?	65
15.592	?	0,09	0,0795	?
15.593	0,40	?	0,0234	?
15.594	?	0,20	?	20
15.595	0,16	?	?	35
15.596	0,36	?	0,0592	?
15.597	?	0,10	?	40
15.598	?	?	0,1068	25
15.599	?	0,08	0,0776	?
15.600	?	0,16	?	75
15.601	?	?	0,029	50
15.602	?	0,12	0,09	?
15.603	0,32	?	?	15
15.604	?	?	0,03	30
15.605	?	0,06	0,0248	?
15.606	0,30	?	?	70
15.607	?	0,09	?	20
15.608	0,06	?	0,028	?
15.609	0,20	?	?	10
15.610	?	0,15	0,0375	?
15.611	?	0,07	?	45

15.612 – 15.639. Естественный свет проходит через несовершенные анализатор и поляризатор, расположенные так, что угол между их плоскостями равен α. При этом поляризатор отражает и поглощает β_P падающего на него света, а анализатор – β_A. Интенсивность света, прошедшего анализатор, равна κ интенсивности света, падающего на поляризатор. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.21.

Таблица 15.21

Условия к задачам 15.612 – 15.639

Номер задачи	α, град	β_P, %	β_A, %	κ, %
15.612	?	4	2	23,52
15.613	40	?	9	25,36
15.614	65	11	?	7,31
15.615	10	16	3	?
15.616	?	5	7	7,89
15.617	70	?	4	5,28
15.618	30	12	?	26,70
15.619	45	17	15	?
15.620	?	10	15	15,62
15.621	20	?	5	39,00
15.622	50	15	?	15,45
15.623	75	6	8	?
15.624	?	18	17	22,83
15.625	80	?	6	1,37
15.626	40	13	?	23,23
15.627	15	2	4	?
15.628	?	20	14	4,02
15.629	50	?	7	17,29
15.630	25	7	?	36,28
15.631	60	21	13	?
15.632	?	9	12	23,50
15.633	30	?	8	31,74
15.634	55	14	?	12,59
15.635	70	19	10	?
15.636	?	8	11	13.47
15.637	35	?	9	26,26
15.638	75	22	?	2,22
15.639	60	3	5	?

15.640 – 15.667. Естественный свет проходит через два идеальных николя, плоскости поляризации которых расположены под углом θ. После прохождения через второй николь свет падает на зеркало с коэффициентом отражения κ таким образом, что при отражении плоскость поляризации не меняется. Отразившись, свет проходит опять оба николя. Интенсивность света после обратного прохождения через оба николя стала в m раз меньше интенсивности падающего естественного света. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.22.

Таблица 15.22

Условия к задачам 15.640 – 15.667

Номер задачи	θ, град	κ	m
15.640	20	0,75	?
15.641	30		?
15.642	40		?
15.643	50		?
15.644	35	?	9,87
15.645		?	7,41
15.646		?	14,81
15.647		?	6,35
15.648	?	0,6	30,8
15.649	?		9,68
15.650	?		4,94
15.651	?		7,4
15.652	45	0,1	?
15.653		0,2	?
15.654		0,3	?
15.655		0,4	?
15.656	25	?	7,41
15.657		?	5,93
15.658		?	4,56
15.659		?	3,95
15.660	?	0,7	3,28
15.661	?		89,57
15.662	?		3,67
15.663	?		8,3
15.664	15	0,5	?
15.665	30		?
15.666	45		?
15.667	60		?

15.668 – 15.695. Пластинка, вырезанная из одноосного кристалла параллельно оптической оси, помещена между двумя поляризаторами так, что ее оптическая ось составляет угол $45°$ с плоскостями поляризации обоих поляризаторов. Минимальная толщина пластинки, при которой свет с длиной волны λ_1 будет максимально усилен, а с длиной волны λ_2 – максимально ослаблен, равна d. Разница показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле для света с длиной волны λ_1 равна Δn_1, для света с длиной волны λ_2 равна Δn_2. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.23.

Таблица 15.23

Условия к задачам 15.668 – 15.695

Номер задачи	Плоскости поляризации поляризаторов	α, мм	λ_1, мкм	λ_2, мкм	Δn_1	Δn_2
15.668	Параллельны	?	0,62	0,68	0,013	0,014
15.669		0,238	?	0,65	0,024	0,027
15.670		0,325	0,52	?	0,008	0,009
15.671		0,143	0,43	0,56	?	0,028
15.672	Перпендикулярны	0,344	0,47	0,60	0,014	?
15.673		?	0,35	0,55	0,019	0,026
15.674		0,130	?	0,52	0,030	0,037
15.675		10,675	0,61	?	0,007	0,008
15.676	Параллельны	0,062	0,45	0,58	?	0,034
15.677		1,408	0,58	0,68	0,013	?
15.678		?	0,37	0,50	0,020	0,025
15.679		0,052	?	0,63	0,029	0,032
15.680	Перпендикулярны	0,560	0,48	?	0,018	0,022
15.681		0,329	0,40	0,51	?	0,026
15.682		0,729	0,53	0,66	0,010	?
15.683		?	0,49	0,64	0,025	0,031
15.684	Параллельны	1,358	?	0,53	0,028	0,036
15.685		0,843	0,46	?	0,017	0,020
15.686		0,737	0,55	0,67	?	0,030
15.687		2,79	0,54	0,62	0,021	?
15.688	Перпендикулярны	?	0,50	0,61	0,016	0,019
15.689		1,307	?	0,51	0,009	0,011
15.690		0,285	0,38	?	0,026	0,030
15.691		0,66	0,44	0,54	?	0,018
15.692	Параллельны	0,3	0,36	0,45	0,011	?
15.693		?	0,60	0,70	0,027	0,031
15.694		0,442	?	0,59	0,015	0,019
15.695		14,790	0,51	?	0,022	0,025

15.696 – 15.723. В установке по наблюдению эффекта Керра к конденсатору, длина пластин которого l и расстояние между ними d, приложена разность потенциалов U. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в жидкой среде для длины волны 0,6 мкм равна $n_o - n_e$, а постоянная Керра для данной длины волны при комнатной температуре – $2{,}2 \cdot 10^{-12}$ $м/В^2$. При прохождении ячейки Керра между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода, равная Δ, и разность фаз, равная δ. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 15.24.

Таблица 15.24

Условия к задачам 15.696 – 15.723

Номер задачи	l, см	d, мм	U, В	$n_o - n_e$	Δ, мкм	δ
15.696	?	2,67	?	$4{,}17 \cdot 10^{-7}$	0,05	?
15.697	10	1,41	?	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	?	?
15.698	?	?	1150	$9 \cdot 10^{-7}$	?	$0{,}225\pi$
15.699	5	2,0	1200	?	?	?
15.700	?	?	1500	$3 \cdot 10^{-6}$	0,11	?
15.701	8	?	1340	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	?	?
15.702	?	1,2	?	$4{,}1 \cdot 10^{-6}$	?	$\pi/2$
15.703	7,5	?	900	?	?	$\pi/4$
15.704	?	2,1	1050	?	0,09	?
15.705	16	?	1400	?	0,13	?
15.706	?	1,0	850	?	?	$0{,}2\pi$
15.707	?	1,3	?	$7{,}5 \cdot 10^{-7}$	?	$0{,}4\pi$
15.708	12	1,8	?	?	0,07	?
15.709	?	2,2	?	$8 \cdot 10^{-7}$	0,15	?
15.710	?	1,6	800	?	0,12	?
15.711	9	?	1400	?	?	$0{,}3\pi$
15.712	15	1,46	?	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$	?	?
15.713	12,5	?	750	?	0,1	?
15.714	?	?	1100	$7 \cdot 10^{-7}$	?	$0{,}15\pi$
15.715	?	1,7	1450	?	?	$0{,}45\pi$
15.716	10,5	1,9	?	?	0,08	?
15.717	18,5	?	1000	?	0,16	?
15.718	13	?	1300	?	?	$0{,}35\pi$
15.719	?	?	1360	$2 \cdot 10^{-6}$	0,14	?
15.720	11	1,5	1250	?	?	?
15.721	14	?	950	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	?	?
15.722	?	1,1	?	$8{,}5 \cdot 10^{-7}$	0,06	?
15.723	?	0,9	?	$9{,}5 \cdot 10^{-7}$	?	$0{,}55\pi$

15.724 – 15.751. Поляризованный в вертикальной плоскости дневной свет проходит через вырезанную перпендикулярно к оптической оси правовращающую кварцевую пластинку толщиной l, за которой установлен поляризатор. Длина волны света, который преобладает в луче, вышедшем из поляризатора, если плоскость поляризатора составляет с вертикалью угол φ, равна λ. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 15.25, считая постоянную вращения α кварца изменяющейся линейно с длиной волны от $\alpha_1 = 31°$ на 1 мм при $\lambda_1 = 0{,}5$ мкм до $\alpha_2 = 17°$ на 1 мм при $\lambda_2 = 0{,}65$ мкм .

Таблица 15.25

Условия к задачам 15.724 – 15.751

Номер задачи	l, мм	φ	λ, мкм	Цвет
15.724	1,0	30°	?	?
15.725		26°	?	?
15.726		21°	?	?
15.727		19°	?	?
15.728	0,75	?	0,650	Красный
15.729		?	0,590	Желтый
15.730		?	0,555	Зеленый
15.731		?	0,510	Зелено-голубой
15.732	?	16°	0,505	Зелено-голубой
15.733	?	23°		
15.734	?	27°30′		
15.735	?	36°30′		
15.736	1,25	21°	?	?
15.737	1,05		?	?
15.738	0,81		?	?
15.739	0,7		?	?
15.740	0,6	?	0,6	Оранжевый
15.741	0,7	?		
15.742	0,8	?		
15.743	0,9	?		
15.744	?	24°	0,650	Красный
15.745	?		0,625	Красный
15.746	?		0,595	Оранжевый
15.747	?		0,552	Зеленый
15.748	0,65	17°	?	?
15.749		15°	?	?
15.750		13°30′	?	?
15.751		11°	?	?

16. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

16.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Корпускулярно-волновой дуализм является важнейшим внутренним свойством всех материальных объектов природы и заключается в том, что они обладают одновременно корпускулярными и волновыми характеристиками. Эксперименты доказывают, что электроны, нейтроны, электромагнитное излучение и т.п. в одних условиях проявляют признаки частиц, движущихся по классическим траекториям и обладающих определенными энергией и импульсом, а в других обнаруживают волновые свойства, характерные для явлений интерференции и дифракции.

Закономерности равновесного теплового излучения привели в 1900 г. М. Планка к необходимости принять гипотезу о дискретном (квантовом) характере излучения. Он предположил, что атомы испускают электромагнитную энергию отдельными порциями – квантами. Энергия каждой порции прямо пропорциональна частоте ν излучения

$$E = h\nu, \tag{16.1}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка.

При испускании и поглощении свет ведет себя подобно потоку частиц с энергией $E = h\nu$. Световая частица называется фотоном или квантом электромагнитного излучения.

Масса и импульс фотона

$$m_ф = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad P_ф = \frac{h\nu}{c}. \tag{16.2}$$

Здесь и далее $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Гипотеза о фотонах была подтверждена закономерностями фотоэффекта, тормозного рентгеновского излучения и эффекта Комптона.

Фотоэффект – это эффект испускания электронов веществом под действием света.

Законы фотоэффекта: 1. Сила тока насыщения прямо пропорциональна интенсивности светового излучения, падающего на поверхность тела. **2.** Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности. **3.** Если частота света меньше некоторой определенной для данного вещества минимальной частоты, то фотоэффект не происходит.

По теории Эйнштейна фотоэффект имеет следующее объяснение: поглощая квант света, электрон приобретает энергию $h\nu$. При вылете из металла энергия каждого электрона уменьшается на величину $A_{вых}$ – работу выхода – работу, которую необходимо затратить для удаления электрона из металла. Максимальная энергия электрона после вылета

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = h\nu - A_{вых}. \qquad (16.3)$$

Это уравнение носит название уравнения Эйнштейна. Если $h\nu < A_{вых}$, фотоэффект не происходит, частота $\nu_{\min} = \frac{A_{вых}}{h}$ называется **красной границей фотоэффекта.**

Это дает основание из соображений удобства вместо работы выхода использовать величины $h\nu_{кр}$ и $\frac{hc}{\lambda_{кр}}$. Представление о фотонах было окончательно подтверждено при изучение рассеяния на свободных электронах (**эффект Комптона**). Закон сохранения импульса в процессе соударения налетающего фотона, имеющего импульс $\vec{P}_ф$, с покоящимся электроном приведен в виде векторной диаграммы на рис.16.1. После удара у фотона импульс становится равным $\vec{P}'_ф$, а электрон приобретает импульс $\vec{P}_e$. Используя законы сохранения энергии и импульса, можно получить формулу взаимосвязи длин волн налетающего (λ) и рассеянного (λ') фотонов

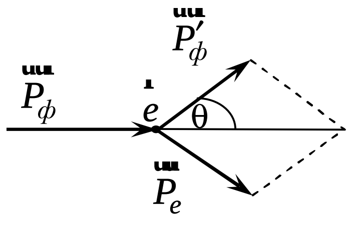


Рис. 16.1

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta), \qquad (16.4)$$

где m_e – масса покоя электрона; θ – угол рассеяния фотона, а величина

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2{,}43\cdot 10^{-12} \text{ м}$$

называется **комптоновской длиной волны электрона.**

Наличие у электромагнитных волн свойств частиц побудило Луи де Бройля высказать гипотезу о всеобщем характере корпускулярно-волнового дуализма. Не только фотоны, но и любая движущаяся частица с энергией E и импульсом $\vec{P}$ обладает волновыми свойствами, которые соответствуют длине волны и частоте, определяемым по формулам

$$\lambda_Б = \frac{h}{p} \quad \text{и} \quad \nu_Б = \frac{E}{h}. \qquad (16.6)$$

Здесь в нерелятивистском случае $(\upsilon << c)$

$$P = m\upsilon = \sqrt{2mE_к}, \qquad (16.7)$$

где $m, \upsilon, E_к$ – масса, скорость и кинетическая энергия частицы.

В релятивистском случае $(u \sim c)$

$$P = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2mc^2\right)}. \qquad (16.8)$$

Из приведенных формул следует связь длины волны де Бройля с кинетической энергией частицы:

– в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\mathbf{h}}{\sqrt{2mE_к}}; \qquad (16.9)$$

– в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\mathbf{h}c}{\sqrt{E_к\left(E_к + 2mc^2\right)}}. \qquad (16.10)$$

Комптоновская длина волны частицы

$$\lambda_c = \frac{2\pi\mathbf{h}}{mc}. \qquad (16.11)$$

При решении задач полезно иметь под рукой численные значения этого параметра:

– для электрона

$$\lambda_c^e = 2,426 \cdot 10^{-12}\,\text{м};$$

– для протона

$$\lambda_c^p = 1,321 \cdot 10^{-15}\,\text{м}.$$

Использование комптоновской длины волны частицы позволяет упростить численные расчеты длины волны де Бройля в релятивистском случае, позволяя оперировать безмерными отношениями сходных физических величин. Так, формула зависимости дебройлевской длины волны от скорости частицы может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{2\pi\mathbf{h}}{m\upsilon} = \frac{\lambda c}{\upsilon/c}, \qquad (16.15)$$

а зависимость λ (см. 16.10) от кинетической энергии имеет вид

$$\lambda = \frac{\lambda c}{\sqrt{\frac{E_\kappa}{mc^2}\left(2+\frac{E_\kappa}{mc^2}\right)}}. \qquad (16.16)$$

Поскольку в релятивистском случае скорость частицы выражается обычно в долях скорости света, а кинетическая энергия – в единицах МэВ, то формулы (16.15) и (16.16) становятся очень удобными.

В нерелятивистском случае также удобно иметь отношения безразмерных величин. Так, формула (16.9) может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{\lambda c}{\sqrt{\frac{2E_\kappa}{mc^2}}}. \qquad (16.17)$$

Энергия покоя:

– для электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ;

– для протона $m_p c^2 = 938,27$ МэВ.

Гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме всех квантовых объектов ограничивает возможность применения к микрочастицам понятий координаты и импульса в их классическом понимании. Следствием внутренних свойств микрообъектов являются **соотношения неопределенностей**, установленные В. Гейзенбергом. Соотношения неопределенностей записываются в виде неравенств, например,

$$\Delta x \Delta P_x \geq \frac{\mathbf{h}}{2},$$

где $\mathbf{h} = \frac{h}{2\pi}$, Δx и ΔP_x – неопределенности значений координаты x и сопряженной с ней компоненты импульса P_x. Аналогичные соотношения справедливы и для других пар: y и P_y, z и P_z, E и t:

– для координат и проекций импульсов частицы

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \mathbf{h}; \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq \mathbf{h}; \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq \mathbf{h}, \qquad (16.18)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – неопределенности координат частицы и $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z$ – неопределенности проекции импульса частицы на соответствующие координатные оси;

– для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \qquad (16.19)$$

где ΔE – неопределенность энергии данного энергетического состояния; Δt – неопределенность во времени пребывания системы в этом состоянии.

В классической механике состояние частицы задается радиусом-вектором $\vec{r}$ и импульсом $\vec{P}$, изменение которого определяется с помощью второго закона Ньютона. В физике микромира, где выполняются соотношения неопределенностей, классическое определение состояния утрачивает смысл и можно говорить лишь о **вероятности** обнаружения частицы в той или иной области пространства. Эта вероятность описывается с помощью **волновой функции** (пси-функции) $\Psi(x, y, z, t)$, которая является решением уравнения Шредингера и задает **состояние микрочастицы.** Для стационарных (не зависящих от времени) состояний волновую функцию можно разложить на два множителя:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t},$$

где E – энергия частицы. В этом случае **уравнение Шредингера** принимает вид

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

Вероятность dW обнаружения частицы в элементе объема dV в окрестности некоторой точки с координатами (x, y, z) равна

$$dW = \left|\Psi(x, y, z, t)\right|^2 dV = \left|\Psi(x, y, z)\right|^2 dV = \rho(x, y, z) dV, \qquad (16.20)$$

где величина $\rho(x, y, z) = \left|\Psi(x, y, z)\right|^2$ называется **плотностью вероятности.**

Для определения вероятности dW обнаружения частицы в объеме V_0 необходимо проинтегрировать это выражение:

$$W = \int_{V_0} \left|\Psi(x, y, z)\right|^2 dV. \qquad (16.21)$$

Соответственно в одномерном случае вероятность обнаружения частицы в пределах области $[x_1, x_2]$ равна

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\Psi(x)\right|^2 dx, \qquad (16.22)$$

а в случае сферической симметрии вероятность обнаружения частицы в сферическом слое в пределах значений расстояний от центра $r_1 \div r_2$ равна

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \left|\Psi(r)\right|^2 4\pi r^2 dr. \qquad (16.23)$$

Учитывая, что вероятность достоверного события равна 1, можно написать **условие нормировки** для Ψ функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x)\right|^2 dx = 1. \qquad (16.24)$$

Знание волновой функции позволяет определить **средние значения** физических величин по формуле

$$< A >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi dx, \qquad (16.25)$$

где $\hat{A}$ – линейный оператор соответствующей физической величины A (табл. 16.1); Ψ^* – волновая функция, комплексно сопряженная с Ψ.

Таблица 16.1

Операторы физических величин

Величина в классической механике	Сокращенная запись оператора	Вид оператора
Координата x	$\hat{x}$	x
Проекция импульса P_x	$\hat{P}_x$	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
Кинетическая энергия T	$\hat{T}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
Потенциальная энергия $U(r)$	$\hat{U}$	$U(r)$
Величина, являющаяся функцией координаты $f(x)$	$\hat{x}$	$f(x)$

Дополнительную информацию о степени разброса величины A можно получить, определив **среднее квадратичное отклонение** от средней величины по формуле

$$\delta A = \sqrt{< (\Delta A)^2 >} = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}. \qquad (16.26)$$

Вид волновой функции в конкретной задаче находят с помощью соответствующего уравнения. В частности, решение стационарного уравнения Шредингера для частицы массой m, локализованной в **одномерной потенциальной яме** со стороной l и абсолютно непроницаемыми стенками, дает набор собственных функций Ψ_n и собственных значений полной энергии E_n:

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}; \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \qquad (16.27)$$

где $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \infty$.

Если потенциальная яма имеет форму куба со стороной l и с абсолютно непроницаемыми стенками, то собственные функции и собственные значения энергии зависят от трех квантовых чисел $\{n_1, n_2, n_3\}$:

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{\frac{2^3}{l^3}} \sin\frac{\pi n_1 x}{l} \sin\frac{\pi n_2 x}{l} \sin\frac{\pi n_3 x}{l};$$

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right). \tag{16.28}$$

При этом возможны состояния с различными наборами квантовых чисел, но имеющие одинаковую энергию. Число таких состояний называется **кратностью вырождения** собственных значений энергии.

В квантовой механике для волновых функций справедлив **принцип суперпозиции.**

Потенциальный барьер – пространственно ограниченная область высокой потенциальной энергии частицы в силовом поле, с одной или с двух сторон которой потенциальная энергия более или менее резко спадает. На рис. 16.2 и 16.3 показаны потенциальные барьеры простейшей формы для случая движения частицы вдоль оси Ox. Максимальное значение потенциальной энергии U_0 называется **высотой барьера.**

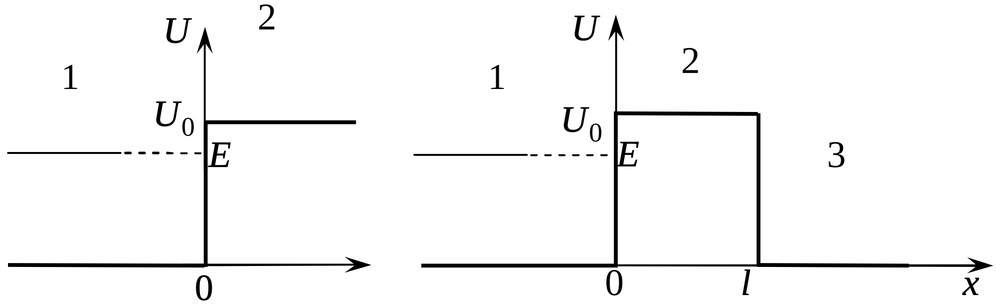


Рис. 16.2

Решение стационарного уравнения Шредингера для частиц, движущихся в области потенциального барьера, приводит к следующим выводам, отличным от классической физики:

1. Если частица, имеющая массу m и полную механическую энергию E, налетает на высокий потенциальный барьер в виде ступеньки (рис. 16.2 при $E < U_0$), то она отражается от него не на границе барьера, а проникая в глубину. Плотность вероятности обнаружить частицу «внутри» потенци-

ального барьера (при $x>0$) убывает экспоненциально в соответствии с формулой

$$\left|\Psi(x)\right|^2 = Ce^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}x}, \tag{16.29}$$

где $C = \text{const}$.

При этом в области 1 наблюдается интерференция падающей и отраженной волн де Бройля частицы.

2. Если частица налетает на низкий потенциальный барьер в виде ступеньки (рис. 16.2 при $E > U_0$), то для нее имеются вероятность D прохождения в область 2 (где ее кинетическая энергия $T = E - U$) и вероятность R отражения от барьера, определяемые по формулам

$$D = \frac{4\sqrt{E(E-U_0)}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}\right)^2}, \quad R = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}}\right)^2. \tag{16.30}$$

Очевидно, что $R + D = 1$. Величины D и R называют **коэффициентами прохождения (пропускания)** и **отражения** соответственно. Изменение кинетической энергии частицы при прохождении границы областей 1 и 2 с разной потенциальной энергией приводит к изменению ее волнового числа $K = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ и длины волны де Бройля.

Величина $n = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$ называется **коэффициентом преломления** волн де Бройля.

3. Если частица с энергией $E < U_0$ налетает на прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины l (см. рис. 16.3), то у нее имеются вероятность отразиться, вероятность проникнуть в область 2 и вероятность пройти потенциальный барьер (**туннельный эффект**) и попасть в область 3. Соответствующий **коэффициент прохождения** (**пропускания** или **прозрачности**) D определяется по формуле

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}l}.$$

При решении задач на прохождение частицей потенциального барьера полезно записать качественный вид функции плотности вероятности ее обнаружения $\left|\Psi(x)\right|^2$ для областей 1, 2, 3 (см. рис. 16.2 и 16.3) и построить соответствующие графики.

16.2. Примеры решения задач

1. Фототок, вызываемый падающим на катод электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,44$ мкм, прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_з = 0,95$ В. Определить работу выхода катода. Найти максимальную скорость фотоэлектронов. Вычислить, какой станет максимальная скорость фотоэлектронов, если у падающего излучения длина волны уменьшится в 2 раза.

Дано: $\lambda_1 = 0,44$ мкм; $U_з = 0,95$ В; $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{2}$.

Найти: $A_{вых}$; $\upsilon_{1\max}$; $\upsilon_{2\max}$.

Решение. Запишем формулу Эйнштейна

$$\varepsilon_ф = A + T,$$

где $\varepsilon_ф$ – энергия фотонов; A – работа выхода электронов из вещества; T – максимально возможная кинетическая энергия вылетевшего электрона.

Используя выражение для энергии фотонов

$$\varepsilon_ф = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \text{ и равенство } T = eU_з, \text{ получим}$$

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_{вых} + eU_з \quad \text{или} \quad A_{вых} = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_з.$$

Подставляя числовые значения величин и произведя вычисления, имеем

$$A_{вых} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,44 \cdot 10^{-6}} \text{ Дж} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,95 \text{ Дж} = 3 \cdot 10^{-19} \text{Дж} = 1,88 \text{ эВ}.$$

Полученное значение работы выхода характерно для цезия (см. прил.).

Скорость фотоэлектрона определим через кинетическую энергию, равную в первом случае

$$T_1 = eU_з = 0,95 \text{ эВ}.$$

Это значение намного меньше энергии покоя электрона ($m_0c^2 = 0,511$ МэВ). Следовательно, в данном случае можно использовать нерелятивистское выражение для кинетической энерги:

$$T_1 = \frac{m_0\upsilon_{1\max}^2}{2}.$$

Тогда

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2T_1}{m_0}} = \sqrt{\frac{2eU_з}{m_0}};$$

$$\upsilon_{1\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}95}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \frac{м}{с} \approx 5{,}8 \cdot 10^5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Если длина волны падающего излучения уменьшится в 2 раза, т.е. $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} = 0{,}22$ мкм, то энергия фотона увеличится в 2 раза, а кинетическая энергия фотоэлектрона возрастет в соответствии с формулой $T_2 = \varepsilon_{ф2} - A$ или $T_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - A_{вых}$.

Учитывая, что $\upsilon_{2\max} = \sqrt{\frac{2T_2}{m_0}}$, получим

$$\upsilon_{2\max} = \sqrt{\frac{2}{m_0}\left(\frac{hc}{\lambda_2} - A_{вых}\right)}.$$

Произведем вычисления

$$\upsilon_{2\max} = \sqrt{\frac{2}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}22 \cdot 10^{-6}} - 3 \cdot 10^{-19}\right)} \ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 1{,}15 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Фотон с импульсом $P = 1{,}02 \ \frac{\text{МэВ}}{c}$, где c – скорость света, рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего импульс фотона стал равным $P' = 0{,}255 \ \frac{\text{МэВ}}{c}$. Под каким углом рассеялся фотон? Какая доля энергии первичного фотона приходится на кинетическую энергию электрона отдачи?

Дано: $P = 1{,}02 \ \frac{\text{МэВ}}{c}$; $P' = 0{,}255 \ \frac{\text{МэВ}}{\text{с}}$.

Найти: θ; $\frac{T}{\varepsilon_ф}$.

Решение. При столкновении фотона со свободным электроном (рис. 16.4) выполняется формула (16.4). Запишем ее, выразив длины волн исходного (λ) и рассеянного (λ') фотонов через импульсы с помощью формулы $\vec{P}_ф = \frac{h}{\lambda}\vec{n}$:

$$\frac{h}{p} - \frac{h}{p_1} = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right).$$

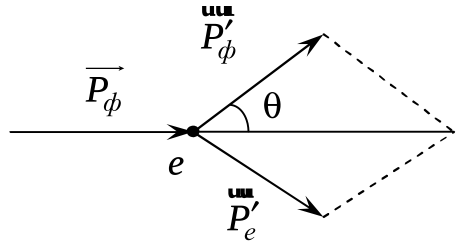


Рис. 16.4

После преобразований получим

$$m_0 c \frac{P - P'}{PP'} = 1 - \cos\theta \pm.$$

Тогда $\theta = \pm\arccos(1 - m_0 c\frac{P - P'}{PP'})$ или

$$\theta = \pm\arccos(1 - m_0 c^2 \frac{PC - P'C}{PCP'C}),$$

где $m_0 c^2 = 0,511\,\text{МэВ}$ – энергия покоя электрона. По условию задачи $PC = 1,02$ МэВ, $P'C = 0,255$ МэВ. После подстановки этих значений получим

$$\theta = \pm\arccos\left(1 - 0,511\frac{1,02 - 0,255}{1,02 \cdot 0,255}\right) \approx \pm\arccos\left(-0,5\right) \approx \pm\frac{2}{3}\pi.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$\varepsilon_ф + m_0 c^2 = \varepsilon'_ф + m_0 c^2 + T,$$

где T – кинетическая энергия электрона отдачи,

$$\varepsilon_ф = PC; \quad \varepsilon'_ф = P'C.$$

Вычислим требуемое отношение

$$\frac{T}{\varepsilon_ф} = \frac{\varepsilon_ф - \varepsilon'_ф}{\varepsilon_ф} = \frac{P - P'}{P},$$

т.е. на кинетическую энергию протона отдачи приходит 75 % энергии первичного фотона.

3. Красная граница фотоэффекта для никеля равна 0,257 мкм. Найти длину волны света, падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов, равной 1,5 В.

Дано: $\lambda_к = 0,257$ мкм; $U_з = 1,5$ В.

Найти: λ.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A + T_{\max}. \qquad (1)$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия равенства энергии фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ работе выхода электронов *A*, т.е.

$$\frac{hc}{\lambda_к} = A. \qquad (2)$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов может быть определена через задерживающею разность потенциалов *U*:

$$T_{\max} = eU, \qquad (3)$$

где e – элементарный заряд (заряд электрона).

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU,$$

откуда $$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU}{hc}\right)^{-1}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\lambda = \left(\frac{1}{2,57 \cdot 10^{-7}} + \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}\right)^{-1} \approx 1,96 \cdot 10^{-7}\,\text{м} \approx 0,196\ \text{мкм}.$$

4. Определить максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности металла γ-квантом с энергией 1,53 Мэв.

Дано: $E = 1,53$ МэВ; $E_0 = 0,511$ МэВ.

Найти: $\upsilon_{\max}$.

Решение. По формуле Эйнштейна для фотоэффекта $E = A_{вых} + T$. Энергия кванта излучения расходуется на работу вырывания электрона $A_{вых}$ и сообщение ему кинетической энергии T. Так как $A_{вых} << E$, то электрон будет релятивистским и $E = T$, а кинетическая энергия будет выражаться формулой

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - E_0,$$

где E_0 – энергия покоя электрона.

$$T + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \left(\frac{E_0}{T+E_0}\right)^2 = \left(\frac{0,511}{1,53+0,511}\right)^2 \approx 0,063;$$

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} \approx 0,937; \quad \upsilon = c \cdot 0,937 \approx 2,8 \cdot 10^8 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Угол рассеяния фотона с энергией 1,2 МэВ на свободном электроне 60°. Найти длину волны рассеянного фотона, энергию и импульс электрона отдачи (кинетической энергией электрона до соударения пренебречь).

Дано: $\varepsilon = 1,2$ МэВ $= 1,92 \cdot 10^{-13}$ Дж; $\theta = 60^{\circ}$.

Найти: λ_2; E_e; P_e.

Решение. Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta). \qquad (1)$$

Из формулы (1) находим $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + \lambda_c(1-\cos\theta)$.

Выражая λ_1 через энергию фотона $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$, получаем

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\varepsilon_1} + \lambda_c(1-\cos\theta). \qquad (2)$$

Энергия электрона отдачи по закону сохранения энергии

$$E_e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 .$$

Выразим изменение длины волны через изменение частоты

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} = \frac{c(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_2 \nu_1} .$$

С учетом (1) можно записать:

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{h\nu_1\nu_2}{mc^2}(1 - \cos\theta) . \qquad (3)$$

Умножая формулу (3) на h и учитывая, что $h\nu_1 = \varepsilon_1$, $h\nu_2 = \varepsilon_2$, $mc^2 = E_0$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = E_e$, получим

$$E_e = \frac{\varepsilon_1^2 (1 - \cos\theta)}{E_0 + \varepsilon_1 (1 - \cos\theta)} , \qquad (4)$$

где $E_0 = 0{,}511\ \text{МэВ} = 0{,}82 \cdot 10^{-13}\,\text{Дж}$ – энергия покоя электрона.

Зная энергию электрона, найдем

$$P_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_e (E_e + 2E_0)} . \qquad (5)$$

Подставляя числовое значения в формулы (2), (4) и (5), получаем

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}92 \cdot 10^{-13}} + 2{,}43 \cdot 10^{-12}(1 - 0{,}5) \approx 2{,}25 \cdot 10^{-12}\,\text{м} ;$$

$$E_e = \frac{(1{,}2)^2 \cdot 0{,}5}{(0{,}511 + 1{,}2) \cdot 0{,}5} \approx 0{,}648\ \text{МэВ} \approx 1{,}04 \cdot 10^{-13}\,\text{Дж} ;$$

$$P_e = \frac{1}{3 \cdot 10^8}\sqrt{1{,}04 \cdot 10^{-13}\left(1{,}04 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-13}\right)} = 5{,}56 \cdot 10^{-22}\,\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

6. В результате комптоновского рассеяния на свободном покоящемся электроне длина волны γ-фотона λ_1 увеличилась вдвое. Найти кинетическую энергию и импульс электрона отдачи, если угол рассеяния равен $60^{\mathbf{0}}$.

Дано: $\lambda_2 = 2\lambda_1$; $\theta = 60^{\mathbf{0}}$.

Найти: E; P.

Решение. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при комптон-эффекте определяется по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c(1-\cos\theta),$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн фотона до и после рассеяния; $\lambda_c = 2,43\cdot10^{-12}$ – комптоновская длина волны; θ – угол рассеяния.

По условию задачи $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1$, и тогда

$$\lambda_1 = \lambda_c(1-\cos\theta); \quad \lambda_2 = 2\lambda_c(1-\cos\theta).$$

Энергия электрона

$$E = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_c(1-\cos\theta)}\left(1-\frac{1}{2}\right);$$

$$E = \frac{6,63\cdot10^{-34}\cdot0,5\cdot3\cdot10^{8}}{2,43\cdot10^{-12}\cdot(1-0,5)} \approx 0,8\cdot10^{-13}\text{Дж} \approx 0,5\ \text{МэВ}.$$

Импульс электрона

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)},$$

где $E_0 = 0,511$ МэВ – энергия покоя электрон; c – скорость света.

$$P = \frac{1}{3\cdot10^{8}}\sqrt{0,8\cdot10^{-13}\left(0,8\cdot10^{-13}+2\cdot0,82\cdot10^{-13}\right)} = 4,7\cdot10^{-22}\ \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

7. Сравнить длину волны де Бройля молекулы водорода с ее диаметром. Считать, что молекула имеет скорость, равную средней квадратичной скорости молекул газообразного водорода при температуре $0\ ^{\mathbf{o}}\text{C}$. Диаметр молекулы водорода $d = 0,27$ нм.

Дано: $\upsilon = <\upsilon_{кв}>$; $t = 0\ ^{\mathbf{o}}\text{C}$; $d = 0,27$ нм.

Найти: $\lambda_Б$.

Решение. Из молекулярно-кинетической теории следует, что средняя квадратичная скорость молекул газа определяется по формуле

$$<\upsilon_{кв}> = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где $k = 1,38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана; $T = 273$ К – абсолютная температура газа; m – масса молекулы газа.

С учетом этого формулу де Бройля $\lambda_Б = \dfrac{h}{p}$ запишем в виде

$$\lambda_Б = \frac{h}{m < \upsilon_{кв} >} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = h\sqrt{\frac{N_A}{3MkT}},$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$ – постоянная (число) Авогадро; $M = 0{,}002\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода.

Выполнив вычисления, получим $\lambda_Б = 0{,}11\ \text{нм}$. Это значение одного порядка с размерами молекулы водорода.

8. Кинетическая энергия протона в 4 раза меньше его энергии покоя. Вычислить дебройлеровскую длину волны протона.

Дано: $T = \dfrac{E_0}{4}$; $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{Дж}$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{1}$$

Поскольку по условию задачи

$$T = \frac{E_0}{4} \tag{2}$$

кинетическая энергия T протона сравнима с его энергией покоя E_0, то импульс P и кинетическая энергия связаны релятивистским соотношение

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T + 2E_0\right)}. \tag{3}$$

Подставляя в (3) условия (2), найдем

$$P = \frac{3}{4}\frac{E_0}{c}. \tag{4}$$

С учетом равенства (4) выражение (1) примет вид

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{hc}{E_0};$$

$$\lambda = \frac{4 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-10}} \approx 1{,}77 \cdot 10^{-15}\,\text{м}.$$

9. Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0,75c$ (c – скорость света в вакууме).

Дано: $\upsilon = 0,75c$; $c = 3\cdot 10^8 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $m = 9,1\cdot 10^{-31}\,\text{кг}$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Импульс частицы, движущейся с релятивистской скоростью υ, равен

$$P = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

тогда

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}};$$

$$\lambda = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 0,75\cdot 3\cdot 10^8}\sqrt{1-0,75^2} \approx 2,14\cdot 10^{-12}\,\text{м}.$$

10. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Вычислить длину волны де Бройля для такого протона.

Дано: $T = E_0$; $E_0 = 1,5\cdot 10^{-10}\,\text{Дж}$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля вычисляется по формуле $\lambda = \dfrac{h}{p}$.

Импульс релятивистской частицы (каким является протон в условиях данной задачи, так как $T = E_0$) вычисляется по формуле

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T+2E_0\right)} = E_0\frac{\sqrt{3}}{c}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}}, \quad \lambda = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1,5\cdot 10^{-10}\cdot\sqrt{3}} \approx 7,7\cdot 10^{-16}\,\text{м}.$$

11. Протон обладает кинетической энергией, равной энергии покоя. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля протона, если его кинетическая энергия увеличится в 2 раза?

Дано: $T_1 = E_0$; $T_2 = 2E_0$.

Найти: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Решение: Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$, импульс $P = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$, тогда

$$\lambda_1 = \frac{hc}{\sqrt{T_1(T_1+2E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2E_0)}} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}};$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{T_2(T_2+2E_0)}} = \frac{hc}{2\sqrt{2}E_0};$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1{,}63.$$

Длина волны уменьшится в 1,63 раза.

12. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля для случаев: $U = 51$ В; $U = 510$ кВ.

Дано: $U_1 = 51$ В; $U_2 = 5{,}1 \cdot 10^5$ В; $E_0 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Найти: λ_1; λ_2.

Решение. Длина волны де Бройля равна $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс выразим из условия, что кинетическая энергия электрона равна $T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m^2\upsilon^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$, откуда $P = \sqrt{2Tm}$. С другой стороны, $T_1 = eU_1$, где e – заряд электрона.

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2eU_1m}};$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}72 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Во втором случае импульс P определяется по формуле

$$P_2 = \frac{1}{c}\sqrt{T_2\left(T_2 + 2E_0\right)},$$

где E_0 – энергия покоя электрона; $T_2 = eU_2$.

Тогда

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{T_2\left(T_2 + 2E_0\right)}};$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5 \left(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 8,2 \cdot 10^{-14}\right)}} = 1,4 \cdot 10^{-12}\text{ м}.$$

13. Электрон локализован в области в виде плоской пластины, толщина которой $l = 25$ нм. Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию электрона, при которой ее относительная неопределенность будет порядка $\eta = 0,01$.

Дано: $l = 25$ нм; $\eta = 0,01$.

Найти: T.

Решение. При локализации частицы неопределенность ее координаты примерно равна области локализации. Считаем, что $\Delta x \approx \frac{l}{2}$, $\Delta y \to \infty$, $\Delta z \to \infty$, а соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ для оценочных расчетов запишем со знаком приблизительного равенства, т.е.

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2}.$$

Тогда

$$\Delta P_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{l}; \quad \Delta P_y \approx 0, \quad \Delta P_z \approx 0.$$

Для установления взаимосвязи неопределенности кинетической энергии ΔT с неопределенностью импульса возьмем дифференциал от левой и правой частей нерелятивистской формулы кинетической энергии $T = \frac{p^2}{2m}$ (считая, что $P = P_x$):

$$dT = \frac{P_x dP_x}{m}.$$

В приближенных отсчетах можно считать, что

$$\Delta T = \frac{P_x \Delta P_x}{m}.$$

Тогда относительную неопределенность кинетической энергии запишем в виде

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{P_x \Delta P_x \cdot 2m}{m P_x^2} = \frac{2\Delta P_x}{P_x}.$$

После подстановки в эту формулу значения неопределенности импульса получим $\eta = \frac{2\mathbf{h}}{P_x l}$, отсюда определим импульс $P_x = \frac{2\mathbf{h}}{\eta l}$ и найдем искомое значение кинетической энергии

$$T = \frac{P_x^2}{2m} = \frac{4\mathbf{h}^2}{2m\eta^2 l^2} = \frac{2\mathbf{h}^2}{m\eta^2 l^2},$$

где масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг.

Произведем вычисления

$$T = \frac{2\left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-4} \cdot 625 \cdot 10^{-18}} \text{ Дж} = 3{,}9 \cdot 10^{-19} \text{Дж} = 2{,}4 \text{ эВ}.$$

14. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано: $T = 10$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-18}$Дж; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг.

Найти: r.

Решение. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geq \mathbf{h},$$

где Δx – неопределенность координаты; Δp_x – неопределенность импульса; $\mathbf{h}$ – постоянная Планка.

Полагая, что $\Delta x = r$ – линейному размеру атома, получим $r = \frac{\mathbf{h}}{\Delta p}$.

Импульс электрона, обладающего кинетической энергией T, равен

$$P = \sqrt{2mT}.$$

Полагая, что по порядку величины $\Delta p \approx p$, оценим r.

$$r = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{2mT}}; \quad r = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}} \approx 0{,}62 \cdot 10^{-10} \text{м}.$$

15. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны λ=12 мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано: $\Delta t = 1,2\cdot 10^{-8}$ с; $\lambda = 1,2\cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Энергия излучаемого фотона

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Продифференцируем E по λ:

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad \text{или} \quad \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Из соотношения неопределенностей для энергии и времени $\Delta E\Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ выразим ΔE. $\Delta E = \frac{h}{\Delta t\cdot 2\pi}$, здесь Δt и ΔE – неопределенности времени и энергии.

Приравняем выражения для ΔE:

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{h}{\Delta t 2\pi}, \quad \text{откуда} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 h}{hc\Delta t 2\pi};$$

$$\Delta\lambda = \frac{1,2^2\cdot 10^{-14}}{3\cdot 10^8\cdot 1,2\cdot 10^{-8}\cdot 6,28} \approx 6,4\cdot 10^{-16}\,\text{м}.$$

16. Среднее время жизни π^0-мезона равно $1,9\cdot 10^{-16}$ с. Какова должна быть энергетическая разрешающая способность прибора, с помощью которого можно зарегистрировать π^0-мезон?

Дано: $t = 1,9\cdot 10^{-16}$ с.

Найти: $\Delta E'$.

Решение. Разрешающая способность $\Delta E'$ должна быть не меньше неопределенности энергии ΔE в условиях поставленной задачи, т.е. $\Delta E' = \Delta E$. Предполагая, что время жизни мезона t примерно равно неопределенности времени Δt в соотношении неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени

$$\Delta E\Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \text{ получим}$$

$$\Delta E' = \frac{h}{2\pi t}; \quad \Delta E = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{6,28\cdot 1,9\cdot 10^{-16}} = 5,6\cdot 10^{-19}\,\text{Дж}.$$

17. Атом испустил фотон с длиной волны $0{,}55$ мкм. Продолжительность излучения 10 нс. Определить наименьшую погрешность, с которой может быть измерена длина волны излучения.

Дано: $\lambda = 0{,}55$ мкм; $t = 10^{-8}$ с.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Энергия фотона $E = \dfrac{hc}{\lambda}$;

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad \text{или} \quad \Delta E = -\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{(\Delta E)\lambda^2}{hc}.$$

Соотношение неопределенностей для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi},$$

отсюда

$$\Delta E = \frac{h}{t 2\pi}.$$

Подставляя ΔE в формулу для $\Delta\lambda$, получим

$$\Delta\lambda = \frac{h}{t2\pi}\frac{\lambda^2}{hc};$$

$$\Delta\lambda = \frac{5{,}5^2 \cdot 10^{-14}}{1 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

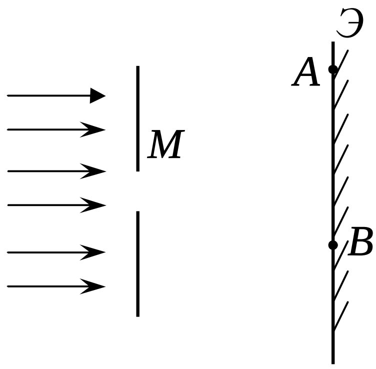


Рис. 16.5

18. После дифракции на щели *M* электроны вызывают на экране *Э* сцинтилляционные вспышки (рис. 16.5). Интенсивность вспышек на небольшой площади экрана вблизи точки *A* составляет 10 с$^{-1}$, а на такой же площади вблизи точки *B* равна 40 с$^{-1}$. Чему равно отношение волновых функций электронов в этих точках?

Решение. Интенсивность вспышек прямо пропорциональна плотности вероятности обнаружения электронов в соответствующей точке: $I \sim |\Psi^2|$.

Получаем

$$\frac{|\Psi_B|^2}{|\Psi_A|^2} = \frac{I_B}{I_A} = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{или} \quad \frac{|\Psi_B|}{|\Psi_A|} = 2.$$

19. Поток электронов проходит через две узкие щели A и B, образуя на экране интерференционную картину. Интенсивность ее в минимуме равна I_0. Какова интенсивность в максимуме, если щель B пропускает в 4 раза больше электронов, чем щель A?

Решение. Так как щель B пропускает в 4 раза больше электронов, то $\Psi_B^2 = 4\Psi_A^2$ или $\Psi_B = \pm 2\Psi_A$. Интенсивность пропорциональна плотности вероятности обнаружения электронов, которая в максимуме равна квадрату суммы волновых функций, а в минимуме – квадрату их разности

$$I_{\max} \sim \left(\Psi_B + \Psi_A\right)^2 = 9\Psi_A^2; \qquad I_{\min} = I_0 \sim \left(\Psi_B - \Psi_A\right)^2 = \Psi_A^2.$$

Сравнивая эти соотношения, получим $I_{\max} = 9I_0$.

20. Состояние микрочастицы описывается волновой функцией $\Psi(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, где $\Psi(x,y,z)$ – координатная часть волновой функции. Определите плотность вероятности (вероятность нахождения частицы в единичном объеме).

Дано: $\Psi(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

Найти: ω.

Решение. Плотность вероятности, т.е. вероятность нахождения микрочастицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами x, y, z,

$$\omega = \left|\Psi(x,y,z,t)\right|^2 = \Psi(x,y,z,t)\Psi^*(x,y,z,t), \qquad (1)$$

где $\Psi^*(x,y,z,t)$ – функция, комплексно сопряженная с Ψ.

Подставив в формулу (1) заданную волновую функцию $\Psi(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ и комплексно сопряженную с ней $\Psi^*(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, получим искомую плотность вероятности

$$\omega = \left|\Psi(x,y,z)\right|^2,$$

т.е. она определяется квадратом модуля координатной части волновой функции и не зависит от времени.

21. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$, где r – расстояние электрона от ядра; a – постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A.

Дано: $\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$; $a = \text{const}$.

Найти: A.

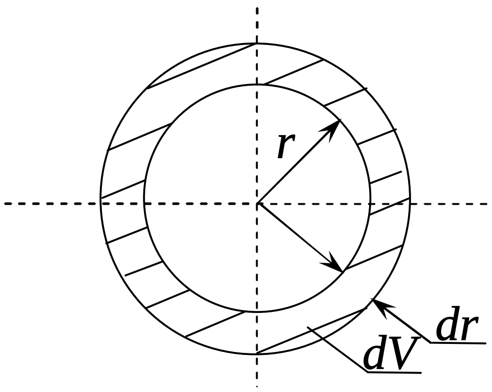


Рис. 16.6

Решение. Рассматриваемая волновая функция сферически симметрична, т.е. зависит только от r. Условие нормировки вероятностей

$$\int_0^\infty |\Psi(r)|^2 dV = 1, \qquad (1)$$

где интеграл берется по той области, в которой $\Psi(r)$ отлична от нуля.

В силу сферической симметрии Ψ-функции вероятность обнаружить электрон на расстоянии r от ядра одинакова по всем направлениям, т.е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, – сферический слой радиусом r и толщиной dr (рис. 16.6),

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (2)$$

Согласно условию нормировки (1) с учетом (2)

$$1 = \int_0^\infty |\Psi(r)|^2 dV = \int_0^\infty A^2 e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 dr$$

или

$$1 = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr = 4\pi A^3 \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \pi A^2 a^3$$

(учли $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$), откуда искомый нормировочный коэффициент $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$.

22. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\Psi(x)=\dfrac{A}{r}e^{-\frac{r^2}{a^2}}$, где $A=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}}$; r – расстояние частицы от силового центра; a – постоянная. Определите среднее значение квадрата расстояния $<r^2>$ частицы от силового центра.

Дано: $\Psi(x)=\dfrac{A}{r}e^{-\frac{r^2}{a^2}}$; $A=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}}$; $a=\text{const}$.

Найти: $<r^2>$.

Решение. Согласно определению среднее значение физической величины

$$<r^2>=\int\limits_0^{\infty} r^2\left|\Psi(r)\right|^2 dV,$$

где интеграл берется по той области, в которой $\Psi(x)$ отлична от нуля.

В силу сферической симметрии функции $\Psi(x)$ (она зависит только от r) вероятность обнаружить частицу на расстоянии r от силового центра одинакова по всем направлениям, т.е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, – сферический слой радиусом r и толщиной dr (см. рис. 16.6),

$$dV=4\pi r^2 dr.$$

Учитывая это выражение, получаем

$$<r^2>=\int\limits_0^{\infty} r^2\frac{A^2}{r^2}e^{-\frac{2r^2}{a^2}}4\pi r^2 dr=4\pi A^2\int\limits_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2r^2}{a^2}}dr=4\pi A^2\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{a^2}{4}.$$

23. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, ширина которой $1{,}4\cdot10^{-9}$м. Определить энергию, излучаемую при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй.

Дано: $l=1{,}4\cdot10^{-9}$м; $n=2$; $n+1=3$.

Найти: ΔE.

Решение. Энергия E_n электрона (масса m), находящегося на ($n-m$)-ном энергетическом уровне в потенциальной яме шириной l, определяется по формуле $E_n = \dfrac{h^2 n^2}{8ml^2}$. Энергия, излучаемая при переходе электрона с $(n+1)$-го уровня на n-ный, равна

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1);$$

$$\Delta E = \frac{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\right) \cdot 5}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{-18}} \approx 1{,}54 \cdot 10^{-19} \text{Дж} \approx 1 \text{ эВ}.$$

24. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l на втором энергетическом уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Дано: l; $\omega_n = \omega_\infty$; $n = 2$.

Найти: x.

Решение. Волновая функция Ψ, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l, имеет вид

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (1)$$

Согласно физическому смыслу волновой функции

$$|\Psi|^2 = \omega, \qquad (2)$$

где ω – плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Если частица находится на втором энергетическом уровне $(n = 2)$, то

$$\omega_2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \qquad (3)$$

В соответствии с принципом соответствия Бора выражение для классической плотности вероятности получается при $n \to \infty$

$$\omega_\infty = \frac{1}{l}. \qquad (4)$$

Приравнивая по условию задачи выражения (3) и (4), получим

$$\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right)=\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Решая уравнение (5), найдем

$$x=\left(k\pm\frac{1}{4}\right)\frac{l}{2}, \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots .$$

В пределах ямы $(0\le x\le l)$ таких точек будет четыре:

$$x=\left(\frac{l}{8},\ \frac{3l}{8},\ \frac{5l}{8},\ \frac{7l}{8}\right).$$

25. Определить ширину одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй излучается энергия 1 эВ.

Дано: $i=3$; $n=2$; $\Delta E=1$ эВ $=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: l.

Решение. Энергия электрона, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-ном энергетическом уровне, определяется по формуле $E=\dfrac{h^2}{8ml^2}n^2$. Разность энергий электрона ΔE на n-ном и i-том уровнях $\Delta E=E_i-E_n=\dfrac{h^2}{8ml^2}\left(i^2-n^2\right)$, откуда

$$l=h\sqrt{\frac{i^2-n^2}{8m\Delta E}};$$

$$l=6{,}63\cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{9-4}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}}\approx 1{,}37\cdot 10^{-9}\,\text{м}.$$

26. Электрон с энергией $E=1{,}2$ кэВ движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0=150$ эВ. Определите, во сколько раз изменится длина волны де Бройля при прохождении через этот потенциальный порог.

Дано: $E=1{,}2$ кэВ; $U_0=150$ эВ.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

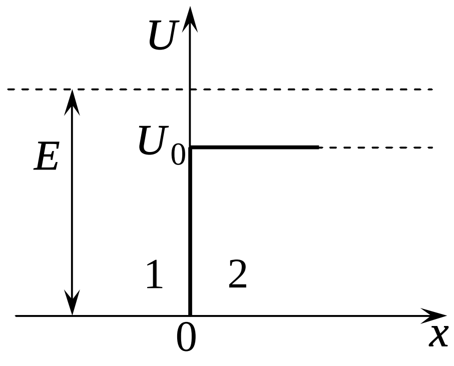


Рис. 16.7

Решение. Длины волн де Бройля, соответствующие областям 1 и 2 (рис. 16.7),

$$\lambda_1 = \frac{h}{m\upsilon_1}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon_2},$$

где m – масса электрона; υ_1 и υ_2 – его скорость в областях 1 и 2. Учитывая эти соотношения, получим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}, \qquad (1)$$

где

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(E-U_0)}{m}} \qquad (2)$$

(в области 1 кинетическая энергия равна полной энергии (так как $U_0 = 0$), а в области 2 она, согласно закону сохранения энергии, равна $E - U_0$).

Подставив выражение (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{E}{E-U_0}} = 1{,}07.$$

27. Частица массой m с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной l. Энергия частицы $E > U_0$ (рис. 16.8). Запишите уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы и найдите их решения.

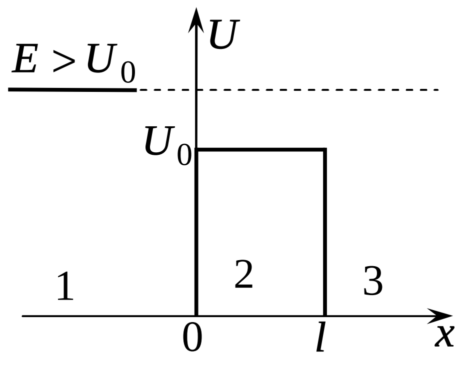


Рис. 16.8

Решение. Рассматриваемый потенциальный барьер конечной ширины описывается энергией вида

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0); \\ U_0 & (0 \le x \le l); \\ 0 & (x > l). \end{cases} \qquad (1)$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(x)\right]\Psi = 0,$$

где потенциальная энергия $U(x)$ задается условием (1).

В случае $E > U_0$ (условие задачи) уравнение Шредингера для стационарных состояний примет вид:

– для областей 1, 3

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1,3}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_{1,3} = 0; \tag{2}$$

– для области 2

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\Psi_2 = 0. \tag{3}$$

Обозначив

$$K_{1,3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,3}}; \tag{4}$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \tag{5}$$

где $\lambda_{1,3}$ и λ_2 – соответственно длины волн де Бройля в областях 1, 3 и 2, получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1,3}}{\partial x^2} + K_{1,3}^2 \Psi_{1,3} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + K_2^2 \Psi_2 = 0. \tag{7}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (6) и (7) для трех областей

$$\Psi_1(x) = A_1 e^{iK_{1,3}x} + B_1 e^{-iK_{1,3}x}; \tag{8}$$

$$\Psi_2(x) = A_2 e^{iK_2 x} + B_2 e^{-iK_2 x}; \tag{9}$$

$$\Psi_3(x) = A_3 e^{iK_{1,3}x} + B_3 e^{-iK_{1,3}x}. \tag{10}$$

Слагаемые вида $e^{\pm iKx}$ соответствуют плоским волнам, распространяющимся в положительном $\left(e^{iKx}\right)$ и отрицательном $\left(e^{-iKx}\right)$ направлениях оси x (о волне как таковой можно говорить после умножения координатной части волновой функции на временной множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$).

Если в областях 1 и 2 имеются как падающая, так и отраженная волны (здесь смысл имеют общие решения (8) и (9) в виде двух слагаемых), то в области 3 имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся вдоль положительного направления оси x. Поэтому коэффициент B_3 в выражении (10) следует принять равным нулю. Тогда

$$\Psi_3(x) = A_3 e^{iK_{1,3}x}.$$

28. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}15$ нм. Определите в электрон-вольтах разность энергий $U_0 - E$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,4.

Дано: $l = 0{,}15$ нм; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$кг; $W = 0{,}4$.

Найти: $U_0 - E$.

Решение. Вероятность прохождения электрона сквозь потенциальный барьер по физическому содержанию равна коэффициенту прозрачности, т.е. $W = D$. Следовательно, вероятность того, что электрон пройдет сквозь потенциальный барьер, определяется выражением

$$W = D = D_0 e^{-\frac{\lambda}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}l}, \qquad (1)$$

где D_0 принимается в расчетах равным 1.

Логарифмируя выражение (1), получаем

$$\ln W = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}l.$$

Тогда искомая разность энергий

$$U_0 - E = \hbar^2 \frac{(\ln W)^2}{8ml^2} = 5{,}7 \cdot 10^{-2} \text{Дж} \ (0{,}356 \text{ эВ}).$$

16.3. Задачи для самостоятельного решения

16.1. Давление света с длиной волны 0,55 мкм, нормально падающего на зеркальную поверхность, равно 9 мкПа. Определите концентрацию фотонов вблизи поверхности.

16.2. Красная граница фотоэффекта для никеля равна 0,257 мкм. Найти длину волны света, падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов, равной 1,5 В.

16.3. Определите, с какой скоростью υ должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия T была равна энергии ε фотона с длиной волны $\lambda = 1\,\text{пм}$.

16.4. Определите длину волны λ фотона, импульс P которого в два раза меньше импульса P_e электрона, движущегося со скоростью 0,1 Мм/с.

16.5. Некоторый металл, работа выхода электронов из которого составляет 4 эВ, освещается монохроматическим светом с длиной волны 220 нм. Определите, какое напряжение следует приложить, чтобы фотоэффект прекратился.

16.6. Короткий импульс света с энергией $E = 10\,\text{Дж}$ в виде узкого параллельного монохроматического пучка фотонов падает на пластинку под углом падения $\alpha = 60°$. При этом $K = 30\ \%$ фотонов поглощаются пластинкой, а остальные зеркально отражаются. С какой силой действует этот импульс на пластинку, если его длительность $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{с}$?

16.7 – 16.34. Красная граница фотоэффекта равна λ_0, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона $T_{\max}$, при этом доля энергии фотона, израсходованная на работу вырывания фотоэлектрона, составляет K. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 16.2.

Таблица 16.2

Условия к задачам 16.7 – 16.34

Номер задачи	λ_0, мкм	T_{max}, эВ	K
16.7 16.8 16.9 16.10	0,66 0,473 0,276 0,545	0,5	? ? ? ?
16.11 16.12 16.13 16.14	0,621	? ? ? ?	0,9 0,8 0,7 0,6
16.15 16.16 16.17 16.18	? ? ? ?	0,767 0,465 1,48 0,637	0,75
16.19 16.20 16.21 16.22	0,5176	0,074 0,209 0,327 0,457	? ? ? ?
16.23 16.24 16.25 16.26	0,887 0,776 0,276 0,234	? ? ? ?	0,8
16.27 16.28 16.29 16.30	? ? ? ?	0,65	0,95 0,85 0,75 0,70
16.31 16.32 16.33 16.34	0,472 0,621 0,262 0,776	0,054 0,105 0,772 0,478	? ? ? ?

16.35 – 16.62. При фотоэффекте с поверхности металла, освещаемого излучением с длиной волны λ, вырываются электроны, работа выхода которых из металла равна $A_{вых}$. Фотоэффект наблюдается для излучения с длиной волны $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 – красная граница фотоэффекта. Задерживающая разность потенциалов равна $U_з$. Определить неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 16.3.

Таблица 16.3

Условия к задачам 16.35 – 16.62

Номер задачи	λ, мкм	$A_{вых}$, эВ	λ_0, мкм	$U_з$, В
16.35	?	?	0,565	0,9
16.36	?	1,9	?	0,36
16.37	0,2	4,74	?	?
16.38	0,3	?	?	0,34
16.39	0,25	?	0,289	?
16.40	0,46	2,3	?	?
16.41	?	?	0,522	0,1
16.42	?	1,4	?	0,37
16.43	?	?	0,621	0,07
16.44	0,42	?	?	0,16
16.45	0,23	?	0,282	?
16.46	0,21	5,3	?	?
16.47	?	?	0,284	0,41
16.48	?	2,4	?	0,135
16.49	0,72	?	0,776	?
16.50	0,26	4,5	?	?
16.51	0,31	?	0,327	?
16.52	0,22	?	?	0,33
16.53	?	?	0,259	0,38
16.54	?	2,63	?	0,13
16.55	0,28	4,25	?	?
16.56	0,32	?	0,341	?
16.57	0,48	?	?	0,24
16.58	?	2,49	?	0,61
16.59	?	?	0,376	0,25
16.60	0,54	?	?	0,14
16.61	0,29	3,92	?	?
16.62	?	4,7	?	0,95

16.63 – 16.90. Пучок монохроматического света длиной волны λ падает нормально на плоскую поверхность с отражательной способностью ρ. При этом за время Δt на поверхность падает N фотонов. Поток энергии равен Φ, а сила давления, испытываемая этой поверхностью, – F. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 16.4.

Таблица 16.4

Условия к задачам 16.63 – 16.90

Номер задачи	λ, мкм	ρ	Δt, с	N, 10^{20}	Φ, Вт	F, 10^{-7} н
16.63	?	?	1,0	0,823	36,36	2
16.64	0,46	?	8,5	93,2	?	30
16.65	0,60	0,7	?	5,33	88,24	?
16.66	0,53	?	5,0	?	154,8	8
16.67	?	0,95	6,5	1,685	?	0,5
16.68	0,55	0,3	3,0	?	92,3	?
16.69	0,48	?	?	6,79	56,25	3
16.70	?	0,75	4,5	17,5	154,3	?
16.71	0,58	0,45	?	0,796	?	0,6
16.72	0,44	0,6	2,0	4,98	?	?
16.73	0,65	?	?	3,817	116,7	7
16.74	0,52	0,9	1,5	?	31,58	?
16.75	0,43	0,35	9,0	?	?	0,3
16.76	?	?	5,5	14,05	92,3	6
16.77	0,50	0,5	?	0,176	2,0	?
16.78	?	0,25	8,0	5,41	?	0,8
16.79	0,62	?	10,0	?	180	9
16.80	?	0,65	2,5	6,4	127,3	?
16.81	0,45	0,8	?	0,795	?	0,7
16.82	0,59	?	7,0	16,85	?	5
16.83	0,54	0,2	6,0	?	?	0,4
16.84	?	?	9,5	106,52	342,85	20
16.85	0,42	0,85	3,5	3,6	?	?
16.86	0,64	0,15	?	2,1	26,1	?
16.87	0,68	?	1,0	?	70,6	4
16.88	?	0,55	4,0	2,1	?	0,9
16.89	0,56	1,0	?	0,338	?	0,2
16.90	0,40	0,4	7,5	?	171,4	?

16.91 – 16.118. Часть фотонов при рассеянии на электронах, которые можно считать свободными, в результате эффекта Комптона была отклонена от первоначального направления на угол θ. Кинетическая энергия и импульс электронов до соударения с фотонами были пренебрежимо малы. Энергия фотонов ϵ до рассеяния соответствует излучению с длиной волны λ. Энергия ϵ' рассеянных фотонов соответствует излучению с длиной волны λ'. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 16.5. Выполнить дополнительное задание.

Таблица 16.5

Условия к задачам 16.91 – 16.118

<table>
<tr><th>Номер задачи</th><th>θ, град</th><th>ϵ , МэВ</th><th>λ, Å</th><th>ϵ' , МэВ</th><th>λ', Å</th><th>Построить график</th></tr>
<tr><td>16.91</td><td>30</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">0,5</td><td></td><td>?</td><td rowspan="4">$\Delta\lambda = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.92</td><td>60</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.93</td><td>90</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.94</td><td>120</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.95</td><td>?</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">0,2</td><td></td><td>0,2087</td><td rowspan="4">$\lambda' = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.96</td><td>?</td><td></td><td>0,2398</td></tr>
<tr><td>16.97</td><td>?</td><td></td><td>0,2200</td></tr>
<tr><td>16.98</td><td>?</td><td></td><td>0,2452</td></tr>
<tr><td>16.99</td><td>?</td><td rowspan="4">0,4</td><td></td><td>0,2757</td><td></td><td rowspan="4">$\epsilon' = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.100</td><td>?</td><td></td><td>0,1653</td><td></td></tr>
<tr><td>16.101</td><td>?</td><td></td><td>0,2246</td><td></td></tr>
<tr><td>16.102</td><td>?</td><td></td><td>0,1753</td><td></td></tr>
<tr><td>16.103</td><td>60</td><td rowspan="4">0,7</td><td></td><td>?</td><td></td><td rowspan="4">$\Delta\epsilon = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.104</td><td>90</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.105</td><td>120</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.106</td><td>150</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.107</td><td rowspan="4">120</td><td></td><td>0,2</td><td></td><td>?</td><td rowspan="4">$\Delta\lambda = f(\lambda)$</td></tr>
<tr><td>16.108</td><td></td><td>0,4</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.109</td><td></td><td>0,6</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.110</td><td></td><td>0,8</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>16.111</td><td>40</td><td></td><td>?</td><td></td><td rowspan="4">0,65</td><td rowspan="4">$\Delta\lambda = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.112</td><td>80</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.113</td><td>120</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.114</td><td>160</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>16.115</td><td>40</td><td>?</td><td></td><td rowspan="4">0,1</td><td></td><td rowspan="4">$\Delta\epsilon = f(\theta)$</td></tr>
<tr><td>16.116</td><td>80</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16.117</td><td>120</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16.118</td><td>160</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
</table>

16.119 – 16.146. Частица, ускоренная разностью потенциалов U, имеет длину волны де Бройля, равную λ. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 16.6.

Таблица 16.6

Условия к задачам 16.119 – 16.146

Номер задачи	Движущаяся частица	U, В	λ, Å
16.119	Электрон	1	?
16.120		10^2	?
16.121		10^3	?
16.122		10^4	?
16.123	Протон	?	0,064
16.124		?	0,045
16.125		?	0,037
16.126		?	0,032
16.127	?	1000	0,3873
16.128	?	100	0,0286
16.129	?	10	0,0905
16.130	?	1	0,2862
16.131	α–частица	5	?
16.132		10	?
16.133		50	?
16.134		100	?
16.135	Электрон	?	1,83
16.136		?	1,0
16.137		?	0,5
16.138		?	0,316
16.139	?	5	0,128
16.140	?	50	1,734
16.141	?	75	1,416
16.142	?	15	0,074
16.143	Протон	25	?
16.144		50	?
16.145		75	?
16.146		100	?

16.147 – 16.174. Возбужденный атом испускает фотон в течение промежутка времени Δt. Длина волны излучения равна λ, ширина спектральной линии – $\Delta\lambda$. Энергия фотона равна ϵ, неопределенность в определении энергии и положения фотона – $\Delta\epsilon$ и Δx соответственно. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 16.7. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 16.7

Условия к задачам 16.147 – 16.174

Номер задачи	λ, Å	$\Delta\lambda$, Å	Δt, с	ϵ, эВ	$\Delta\epsilon$, эВ	Δx, см
16.147	6000	?	10^{-8}	?	?	?
16.148	6000	?	10^{-9}	?	?	?
16.149	4500	?	10^{-8}	?	?	?
16.150	4500	?	10^{-9}	?	?	?
16.151	?	?	?	0,9	10^{-7}	?
16.152	?	?	?	0,9	10^{-6}	?
16.153	?	?	?	1,2	10^{-7}	?
16.154	?	?	?	1,2	10^{-6}	?
16.155	5500	0,1	?	?	?	?
16.156	5500	0,01	?	?	?	?
16.157	7000	0,1	?	?	?	?
16.158	7000	0,01	?	?	?	?
16.159	?	?	?	1,0	?	0,1
16.160	?	?	?	1,0	?	10
16.161	?	?	?	3,0	?	0,1
16.162	?	?	?	3,0	?	10
16.163	?	?	10^{-8}	1,5	?	?
16.164	?	?	10^{-10}	1,5	?	?
16.165	?	?	10^{-8}	2,5	?	?
16.166	?	?	10^{-10}	2,5	?	?
16.167	2500	?	?	?	10^{-5}	?
16.168	2500	?	?	?	10^{-8}	?
16.169	6500	?	?	?	10^{-5}	?
16.170	6500	?	?	?	10^{-8}	?
16.171	7500	?	?	?	?	200
16.172	7500	?	?	?	?	0,2
16.173	4000	?	?	?	?	200
16.174	4000	?	?	?	?	0,2

16.175 – 16.202. В электронно–лучевой трубке ускоряющее напряжение пучка электронов равно U, диаметр пучка – d, длина пути электрона – l. Определить неопределенность в значении импульса ΔP_x и неконтролируемое смещение ΔS электронов на экране, вызываемое квантовым эффектом, согласно номеру задачи в табл. 16.8.

Таблица 16.8

Условия к задачам 16.175 – 16.202

Номер задачи	U, кВ	d, м	l, м	Пояснить зависимость
16.175	1	10^{-5}	0,5	$\Delta S = f(U)$
16.176	5			
16.177	10			
16.178	15			
16.179	10	10^{-5}	0,3	$\Delta S = f(d)$
16.180		$5\cdot10^{-5}$		
16.181		10^{-4}		
16.182		$5\cdot10^{-4}$		
16.183	15	$2\cdot10^{-5}$	0,2	$\Delta S = f(l)$
16.184			0,4	
16.185			0,6	
16.186			0,8	
16.187	8	10^{-5}	0,45	$\Delta P_x = f(U)$
16.188	10			
16.189	12			
16.190	14			
16.191	7,5	10^{-6}	0,35	$\Delta P_x = f(d)$
16.192		$4\cdot10^{-6}$		
16.193		$8\cdot10^{-6}$		
16.194		$1,2\cdot10^{-5}$		
16.195	13	$2,5\cdot10^{-5}$	0,25	$\Delta P_x = f(l)$
16.196			0,5	
16.197			0,75	
16.198			1,0	
16.199	16	$2\cdot10^{-5}$	0,65	$\Delta S = f(\Delta P_x)$
16.200		$4\cdot10^{-5}$		
16.201		$6\cdot10^{-5}$		
16.202		$8\cdot10^{-5}$		

16.203 – 16.230. Пучок электронов с энергией W встречает на своем пути полубесконечный потенциальный барьер высотой U. Относительная плотность вероятности пребывания электрона на расстоянии x от начала барьера равна η. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 16.9.

Таблица 16.9

Условия к задачам 16.203 – 16.230

Номер задачи	W, эВ	U, эВ	x, Å	η
16.203	?	22	0,5	0,48
16.204	25	?	1,9	0,14
16.205	40	45	?	0,25
16.206	31	33	1,0	?
16.207	?	30	1,5	0,11
16.208	21	?	2,6	0,02
16.209	33	35	?	0,56
16.210	28	32	0,8	?
16.211	?	22	1,2	0,12
16.212	36	?	2,0	0,016
16.213	18	20	?	0,23
16.214	24	26	1,8	?
16.215	?	28	0,7	0,29
16.216	29	?	2,2	0,006
16.217	22	25	?	0,41
16.218	34	37	1,3	?
16.219	?	24	0,9	0,27
16.220	26	?	1,4	0,057
16.221	32	35	?	0,1
16.222	19	20	2,5	?
16.223	?	31	0,6	0,42
16.224	23	?	2,4	0,085
16.225	37	39	?	0,175
16.226	30	35	1,6	?
16.227	?	40	0,4	0,44
16.228	20	?	1,7	0,049
16.229	35	36	?	0,44
16.230	27	29	2,2	?

16.231. Цезий освещается монохроматическим светом с длиной волны 500 нм. Определите максимальную скорость фотоэлектронов, зная, что красная граница для цезия 658 нм.

16.232. Определите, во сколько раз максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка (работа выхода $4{,}0$ эВ) монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 220$ нм, превосходит среднюю энергию теплового движения электронов при температуре $27\ ^\circ\mathrm{C}$.

16.233. Определить энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон ($\lambda = 100$ пм) был рассеян на угол $\theta = 180°$.

16.234. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказалось, что длины волн рассеянного под углами $\theta_1 = 60°$ и $\theta_2 = 120°$ излучения отличаются в $n = 1{,}5$ раза. Определите длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

16.235. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}23$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 15 %.

16.236. В результате эффекта Комптона фотон рассеялся на покоившемся свободном электроне на угол $\theta = 90°$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon' = 216$ кэВ. Определите: 1) энергию фотона до рассеяния; 2) кинетическую энергию электрона отдачи; 3) угол φ, под которым движется электрон отдачи.

16.237. Определите длину волны де Бройля электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, если коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра $\lambda_{min} = 2$ нм.

16.238. Определите кинетическую энергию протона и электрона, для которых длина волны де Бройля равна 0,06 нм.

16.239. Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Бройля протона равнялась его комптоновской длине волны?

16.240. Считая, что электрон находится внутри атома диаметром $d = 1$ нм, определите (в электрон-вольтах) неопределенность кинетической энергии данного электрона.

16.241. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ. Принимая, что неопределенность импульса равна 0,1 % от его числового значения, определите неопределенность координаты электрона.

16.242. Электрон находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определите среднее значение координаты $< x >$ электрона.

16.243. Определите ширину l одномерной прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, при которой дискретность энергетического спектра электрона, находящегося в возбужденном состоянии ($n = 3$), вдвое больше его средней кинетической энергии при температуре $T = 300$ К.

17. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

17.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Равновесное тепловое излучение, заключенное в полости с температурой стенок T, представляет собой совокупность фотонов, распределенных по **модам** – типам волн, характеризующихся своей частотой ω, волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией.

Среднее число фотонов в моде $<n>$ (заселенность моды) зависит лишь от энергии фотонов $\varepsilon_{Ф} = \hbar\omega$ и температуры стенок. Моды, характеризующиеся разным направлением распространения волн (разными $\vec{k}$) или разными поляризациями, при совпадающих частотах ω заселены одинаково. Из **распределения Бозе – Эйнштейна**, справедливого для бизонов (частиц с целым спином), в котором следует принять значение химического потенциала равным нулю, следует

$$<n>=\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}. \qquad (17.1)$$

В интервале частот от ω до $\omega+d\omega$ имеется $dN(\omega)$ различных мод. Величина $D(\omega)=\frac{dN}{d\omega}$ называется спектральной плоскостью мод и для вакуумированной полости объемом V рассчитывается по формуле

$$D(\omega)=\frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2. \qquad (17.2)$$

Используя эти величины и формулу для энергии фотона $\varepsilon_{Ф} = \hbar\omega$, можно найти среднюю энергию теплового излучения в интервале частотой от ω до $\omega+d\omega$

$$d\varepsilon(\omega)=\hbar\omega<n>dN(\omega)=\hbar\omega<n>D(\omega)d\omega=U(\omega)d\omega.$$

Входящая в это выражение величина $U(\omega)=\hbar\omega<n>D(\omega)$ имеет смысл **спектральной плотности энергии теплового излучения** в объеме V.

Используя (17.1) и (17.2), можно записать **формулу Планка**

$$U(\omega)=\frac{Vh\omega^3}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\omega}{KT}}-1}.$$

Учитывая взаимосвязь частоты ω с длинной волны λ, эту формулу можно преобразовать к виду

$$U(\lambda)=\frac{8\pi hcV}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}.$$

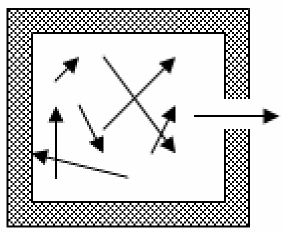


Рис. 17.1

При излучении с поверхности **абсолютно черного тела**, модель которого представляет собой небольшое отверстие в плоскости (рис. 17.1), поток энергии, испускаемый единицей площади тела (отверстия на рис 17.1) по всем направлениям в пределах телесного угла 2π, называется **энергетической светимостью** и обозначается буквой R^*. Из этого потока на интервал длин волн $d\lambda$ приходится величина $dR_\lambda{}^*=r_\lambda d\lambda$, где r_λ – **спектральная плотность энергетической светимости** (или испускательная способность). Она связана со спектральной плотностью энергии излучения $U(\lambda)$ соотношением

$$r_\lambda=\frac{c}{4V}U(\lambda). \qquad (17.3)$$

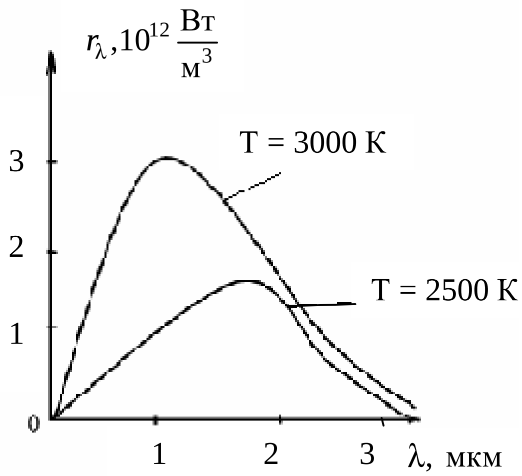


Рис. 17.2

На рис. 17.2 приведен график зависимости спектральной плотности энергетической светимости от длины волны. Интегрирование этого выражения с учетом формулы Планка по всему возможному диапазону длин волн приводит к закону **Стефана – Больцмана** для энергетической светимости абсолютно черного тела

$$R^*=\int_0^\infty r_\lambda d\lambda=\sigma T^4. \qquad (17.4)$$

Величина $\sigma=5,67\cdot10^{-8}\frac{\text{Вт}}{(\text{м}^2\cdot\text{К}^4)}$ называется **постоянной Стефана – Больцмана.**

Положение максимума на графике спектральной плотности энергии теплового излучения абсолютно черного тела (и на графике испускательной способности) можно определить по **закону смещения Вина**

$$T\lambda_{\max}=b, \qquad (17.5)$$

где $b=2,9\cdot10^{-3}\text{м}\cdot\text{К}$.

Максимум спектральной плотности энергетической светимости зависит от температуры

$$r_{\max} = cT^5, \tag{17.6}$$

где $c = 1{,}28 \cdot 10^{-5} \dfrac{\text{Вт}}{(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)}$.

Колебания кристаллической решетки являются одним из основных видов внутреннего движения в твердом теле, когда составляющие его структурные частицы (атомы, молекулы, ионы) колеблются около положения равновесия – узлов кристаллической решетки. Амплитуда этих колебаний увеличивается с ростом температуры, но всегда остается значительно меньше, чем пространственный период решетки. Когда температура достигает некоторого критического значения, кристаллическая решетка разрушается, начинается процесс плавления.

При расчете энергии кристаллической решетки П. Дебай учел, что колебания атомов не являются независимыми. В этом случае сложное движение N упруго связанных между собой атомов, обладающих $3N$ степенями свободы и совершающих малые колебания вблизи своих равновесных положений, можно представить как суперпозицию $3N$ различных независимых движений атомов решетки – упругих колебаний, называемых **нормальными модами.** В соответствии с выводами квантовой механики энергия каждой моды с частотой ω может иметь только дискретные значения

$$\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \tag{17.7}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$, а величина $\frac{1}{2}\hbar\omega$ характеризует **энергию нулевых колебаний.**

Квант энергии упругих колебаний $\varepsilon = \hbar\omega$ называется **фотоном**. Между упругими волнами в кристаллах и электромагнитными волнами в полости существует аналогия.

Среднее число фотонов в одной моде с частотой ω, как и в случае с фотонами, определяется формулой

$$< n >= \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}. \tag{17.8}$$

С учетом (17.7) и (17.8) можно записать формулу для среднего значения энергии моды с частотой ω.

$$< \varepsilon(\omega) >= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}. \qquad (17.9)$$

В отличие от электромагнитных волн спектр фононных мод ограничен сверху величиной ω_D, имеющей название **дебаевской частоты.**

Смысл этого ограничения становится ясным, если учесть, что в кристаллах не могут существовать упругие волны, длина которых меньше расстояния между соседними атомами.

Значение ω_D рассчитывается по формуле

$$\omega_D = \left(\frac{6\pi^2 N \upsilon_{зв}^3}{V} \right)^{\frac{1}{3}}, \qquad (17.10)$$

где V – объем кристалла; $\upsilon_{зв}$ – скорость звуковых волн в кристалле, соответствующим образом усредненная по поляризациям, частотам и направлениям.

Спектральная плотность фононных мод $D(\omega)$ определяется аналогично с (17.2) формулой

$$D(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 \upsilon_{зв}^3} \omega^2, \qquad (17.11)$$

где поправочный множитель $\frac{3}{2}$ учитывает, что в твердом теле, помимо поперечных волн двух поляризаций, могут распространятся еще и продольные волны.

С учетом формул (17.9) и (17.10) можно получить выражение для полной энергии упругих колебаний твердого тела.

$$U = \int_0^{\omega_D} U(\omega) d\omega = U_0 + \frac{9N\hbar}{\omega_D^2} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}, \qquad (17.12)$$

где U_0 – энергия нулевых колебаний кристаллической решетки.

Анализ этого соотношения становится нагляднее, если для температуры T ввести масштабную единицу, называемую **температурой Дебая**

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{K}. \qquad (17.13)$$

Наибольший интерес представляют результаты вычисления в двух предельных случаях:

– при высоких температурах $(T > \theta_D)$

$$U = U_0 + 3NKT; \tag{17.14}$$

– при низких температурах $(T < \theta_D)$

$$U = U_0 + \frac{3\pi^4 NKT^4}{5\theta_D^3}. \tag{17.15}$$

С их помощью можно определить соответствующие теплоемкости твердого тела:

– при $T > \theta_D$

$$C_V = 3NK \quad \text{(закон Дюлонга – Пти)}; \tag{17.16}$$

– при $T < \theta_D$

$$C_V = \frac{12\pi^4 NK}{5}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \quad \text{(закон } T^3 \text{ Дебая)}. \tag{17.18}$$

Определение энергетического спектра электронов в реальных кристаллах является сложной задачей квантовой теории. Опыт показывает, что в металлах валентные электроны атомов образуют своего рода газ отрицательных частиц, обволакивающий положительно заряженные ионы кристаллической решетки. В первом приближении силы притяжения, действующие со стороны ионов на эти электроны, можно усреднить и представить в виде постоянного потенциала $U_0 < 0$. Такие электроны могут свободно перемещаться в области, ограниченной размерами кристалла, что дает основание применить к ним результаты решения задачи о квантовании энергии частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме. В этом случае для образца металла в виде куба с объемом V формула для расчета числа электронных состояний ν_E, энергия которых не превышает некоторого значения E, имеет вид

$$\nu_E = \frac{8}{3}\pi V \frac{(2m_e)^{\frac{3}{2}}}{h^3} E^{\frac{3}{2}}. \tag{17.19}$$

Плотность состояний g_E (число состояний, приходящееся на единичный интервал энергии) равна

$$g_E = \frac{d\nu_E}{dE} = 4\pi V \frac{(2m_e)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\sqrt{E}\,. \qquad (17.20)$$

Электроны являются фермионами, так как подчиняются **принципу Паули:** в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. В общем случае произвольной температуры электроны заселяют состояния в соответствии с распределением **Ферми – Дирака**, которое имеет вид

$$< n_i >= \frac{1}{e^{\frac{Ei-\mu}{KT}}+1}, \qquad (17.21)$$

где $< n_i >$ – среднее число электронов, находящихся в i-том квантовом состоянии с энергией E_i.

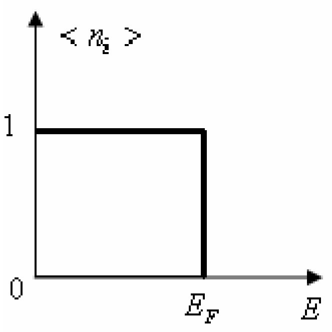


Рис. 17.3

Параметр μ, носящий название химического потенциала, в общем случае слабо зависит от температуры. В физике твердого тела химический потенциал μ часто называют **уровнем Ферми**. При нулевой температуре в каждом квантовом состоянии с энергией меньше некоторого значения E_F находится по одному электрону (рис 17.3). В состояниях с большей энергией электроны при нулевой температуре отсутствуют. Величина E_F называется **энергией Ферми**. При $E_i = \mu$ вероятность заполнения состояния равна 0,5. Значение μ при нулевой температуре соответствует энергии Ферми E_F. Пренебрегая слабой зависимостью химического потенциала от температуры, распределение (17.21) можно переписать в виде

$$< n_i >= \frac{1}{e^{\frac{E_i-E_F}{KT}}+1}. \qquad (17.22)$$

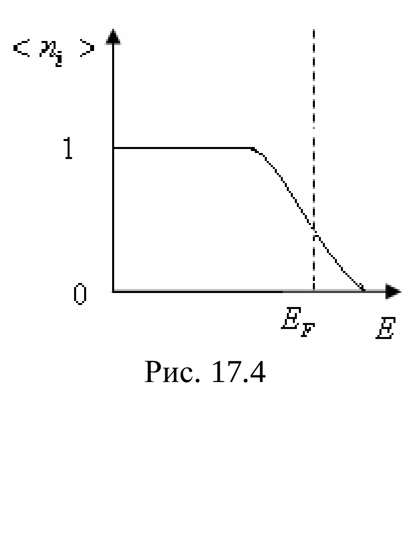


Рис. 17.4

График этого распределения при $KT = 0{,}05E_F$ приведен на рис. 17.4.

В металлах с концентрацией валентных электронов n энергию Ферми можно найти по формуле

$$E_F = \frac{\mathbf{h}^2}{2m}(3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}, \qquad (17.23)$$

а среднее значение энергии электронов

$$< E >= \frac{3}{5}E_F. \qquad (17.24)$$

Таким образом, в приближении свободных электронов в металлах спектр возможных значений энергии валентных электронов является непрерывным, а заселенность уровней определяется распределением Ферми – Дирака. Если же при решении уравнения Шредингера учитывать периодичность силового поля ионов кристаллической решетки, то в результате получится, что спектр значений энергии электронов состоит из **разрешенных** (1, 2, 3) и **запрещенных** (4, 5) **зон** шириной ΔE (рис 17.5, *а*).

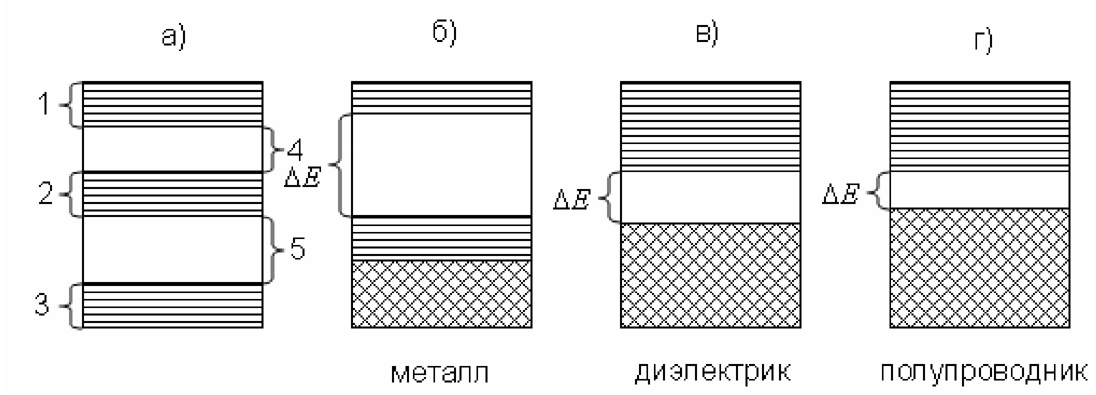


Рис. 17.5

Разрешенная зона, в которой при температуре $T = 0$ K находятся валентные электроны атомов, называется **валентной зоной**. В зонах выше валентной при температуре $T = 0$ K электроны отсутствуют. Такие зоны называются **свободными**. В зависимости от степени заполнения валентной зоны и ширины запрещенной зоны ΔE химически чистые кристаллы можно разбить на три класса: металлы, диэлектрики и полупроводники.

В **металлах** (рис 17.5, *б*) электроны заселяют нижнюю часть валентной зоны. При воздействии электрического поля часть электронов переходит в такие свободные квантовые состояния этой же зоны, которые предполагают движение в направлении воздействия внешнего поля. Именно эти электроны и становятся теми упорядоченно движущимися зарядами, которые создают электрический ток.

В **диэлектриках** (рис 17.5, *в*) все уровни энергии в валентной зоне при температуре $T = 0$ К заполнены, а ширина запрещенной зоны ΔE настолько велика, что в обычных температурных условиях при воздействии электрического поля вероятность перехода электронов на более высокие энергетические уровни в свободной зоне практически нулевая и электрический ток в диэлектриках не возникает. В химически **чистых полупроводниках** (рис 17.5, *г*) характер заполнения зон при температуре $T = 0$ К отличается от предыдущего случая тем, что ширина запрещенной зоны ΔE относительно невелика и в обычных условиях энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы вероятность перехода электронов в свободную зону стала ощутимой. Перешедшие в свободную зону электроны, как и электроны в металлах, могут получить дополнительную энергию от электрического поля и создать электрический ток. В любом случае распределение электронов по энергетическим уровням в зонах описывается функцией Ферми – Дирака (17.22). При этом можно приближенно считать, что в чистых полупроводниках уровень Ферми находится посередине запрещенной зоны. Используя функцию распределения Ферми – Дирака (17.22), можно получить выражение для концентрации электронов проводимости n_e в чистом полупроводнике

$$n_e \sim e^{-\frac{\Delta E}{2KT}}. \qquad (17.25)$$

Поскольку электропроводность σ пропорциональна концентрации n_e носителей тока, можно сделать вывод, что для чистых полупроводников она изменяется по закону

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2KT}}, \qquad (17.25)$$

где $\sigma_0 = \text{const}$.

17.2. Примеры решения задач

1. Температура стенок вакуумированной полости равна $3000\,\text{К}$. Ее объем $V = 1\,\text{л}$. Определить: 1) какова частота моды равновесного излучения в полости, средняя заселенность которой фотонами равна 1; 2) чему равна спектральная плотность мод при этом значении частоты.

Решение

1. Используя формулу (17.1) для средней заселенности мод фотонами при $<n>=1$, запишем

$$e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} = \frac{1}{<n>} + 1, \quad e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{\hbar\omega}{KT} = \ln 2.$$

Тогда $\omega = \frac{KT}{\hbar}\ln 2$. После вычислений получим

$$\omega \approx 2{,}7 \cdot 10^{14}\,\text{с}^{-1}.$$

2. Спектральную плотность мод на этой частоте рассчитаем по формуле (17.2)

$$D(\omega) = \frac{10^{-3} \cdot 2{,}7^2 \cdot 10^{28}}{3{,}14^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^3}\,\text{с} \approx 0{,}28\,\text{с}.$$

2. При какой температуре с каждого квадратного сантиметра поверхности абсолютно черного тела вылетает ежесекундно в среднем по 10 фотонов в диапазоне длин волн $\lambda_1 = 549\,\text{нм}$ до $\lambda_2 = 551\,\text{нм}$?

Дано: $S = 1\,\text{см}^2$; $N_0 = 10$; $\lambda_1 = 549\,\text{нм}$; $\lambda_2 = 551\,\text{нм}$.

Найти: T.

Решение. Используя определение спектральной плотности энергетической светимости (17.3), находим энергию, испускаемую единицей поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн

$$dR = r_\lambda d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}d\lambda.$$

Учитывая малость величины $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, это выражение запишем в виде

$$\Delta R = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}\Delta\lambda,$$

где $\lambda = 550\,\text{нм}$ – средняя длина волны в заданном диапазоне.

Тогда среднее число фотонов N_0, покидающих ежесекундно единицу поверхности абсолютно черного тела, определяется по формуле

$$N_0 = \frac{\Delta R}{\varepsilon_\Phi} = \frac{2hc}{\lambda^4} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} \Delta\lambda .$$

Здесь $N = \frac{N}{S}$, $S = 1\ \text{см}^2 = 10^{-4}\,\text{м}^2$.

Из этой формулы выразим искомую температуру:
вначале запишем

$$e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 1 + \frac{2\pi c \Delta\lambda S}{\lambda^4 N},$$

а затем находим

$$T = \frac{hc}{\lambda K \ln(1 + \frac{2\pi c \Delta\lambda S}{\lambda^4 N})} = 552\ \text{К} .$$

3. В модели абсолютно черного тела (см. рис. 17.1) температура стенок полости поддерживается равной 2000 К. Площадь отверстия $S = 1\ \text{мм}^2$. Определите энергию, излучаемую через отверстие за 1 мин.

Дано: $T = 2000$ К; $S = 1\ \text{мм}^2$; $t = 1\ \text{мин}$.

Найти: E.

Решение. Воспользовавшись законом Стефана – Больцмана (17.4), находим искомую величину

$$E = R^* St = \sigma T^4 St ,$$

где по условию $T = 2000$ К; $S = 10^{-6}\,\text{м}^2$; $t = 60$ с.

Произведя вычисления, получим ответ: $E = 54{,}4$ Дж.

4. Максимум испускательной способности поверхности Солнца приходится на длину волны $\lambda_{maz} = 0{,}5$ мкм. Необходимо: 1) определить температуру солнечной поверхности, считая, что она по своим свойствам близка к абсолютно черному телу; 2) найти значение солнечной постоянной – интенсивности солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы.

Решение:

1. Температуру солнечной поверхности определим с помощью закона Вина (17.5)

$$T = \frac{b}{\lambda_{maz}}.$$

Произведя вычисления, получим $T = 5800$ К.

2. Значение солнечной постоянной C находим, разделив поток энергии Φ_E, излучаемый Солнцем по всем направлениям, на площадь поверхности сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Земли до Солнца $L = 1{,}5 \cdot 10^{11}$м (рис. 17.6). Поток энергии Φ_E равен про**изведению энергетической светимости** R * **Солнца на площадь его поверхности**, т.е.

$$\Phi_E = R^* 4\pi r_C^2,$$

где r_C – радиус Солнца.

Тогда

$$C = \frac{4\pi r_C^2}{4\pi L^2} R^* = \frac{r_C^2}{L^2} \sigma T^4.$$

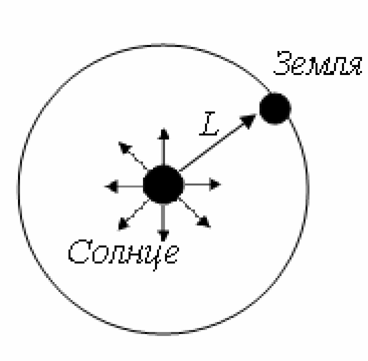


Рис. 17.6

Произведя вычисления, получим ответ:

$$C = 1400\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}; \quad T = 5800\ \text{К}.$$

5. Абсолютно черное тело было нагрето от температуры 100 ºС до 300 ºС. Найти, во сколько раз изменилась мощность суммарного излучения при этом.

Дано: $T_1 = 100\ °\text{C} = 373\ \text{K}$; $T_2 = 300\ °\text{C} = 573\ \text{K}$.

Найти: $\dfrac{N_2}{N_1}$.

Решение. Мощность N излучения тела определяется выражением $N = RS$, где R – энергетическая светимость тела; S – площадь его поверхности. В соответствии с законом Стефана – Больцмана $R = \sigma T^4$.

Из этих выражений получаем:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\sigma T_2^4 S}{\sigma T_1^4 S}; \quad \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{573}{373}\right)^4 \approx 5{,}6.$$

Мощность излучения возрастет в 5,6 раза.

6. Максимум энергии излучения абсолютно черного тела приходится на длину волны 450 нм. Определить температуру и энергетическую светимость тела.

Дано: $\lambda_{max} = 450\text{ нм} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}\text{м}$; $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\text{м} \cdot \text{К}$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\dfrac{\text{Вт}}{(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)}$.

Найти: T, R.

Решение. Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, по закону Вина равна

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

отсюда $T = \dfrac{b}{\lambda_{max}}$; $T = \dfrac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} \approx 6422\text{ К}$.

В соответствии с законом Стефана – Больцмана энергетическая светимость R абсолютно черного тела равна $R = \sigma T^4$.

$$R = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}422^4 \cdot 10^{12} \approx 9{,}6 \cdot 10^7\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

7. Температура абсолютно черного тела понизилась с 1000 К до 850 К. Определить, как и на сколько при этом изменилась длина волны, отвечающая максимуму распределения энергии.

Дано: $T_1 = 1000\text{ К}$; $T_2 = 850\text{ К}$; $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\text{м} \cdot \text{К}$.

Найти: $\Delta\lambda_{max}$.

Решение. В соответствии с законом смещения Вина длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум распределения энергии, выражается формулой $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$.

Исходя из этого запишем:

$$\lambda_{1\,max} = \frac{b}{T_1}; \quad \lambda_{2\,max} = \frac{b}{T_2};$$

$$\Delta\lambda_{max} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1} = b\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2 T_1}\right);$$

$$\Delta\lambda_{max} = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1000 - 850}{1000 \cdot 850}\right) = 0{,}51 \cdot 10^{-6}\text{м};$$

$$\lambda_{1\max} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{1000} = 2{,}89 \cdot 10^{-6} \text{м}; \quad \lambda_{2\max} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{850} = 3{,}4 \cdot 10^{-6} \text{м}.$$

Следовательно, длина волны возросла на 0,51 мкм.

8. Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано: $\lambda_К = 0{,}76$ мкм; $\lambda_Ф = 0{,}38$ мкм.

Найти: $\dfrac{N_{ср}}{N_К}$.

Решение. Длина волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, согласно закону смещения Вина равна

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}. \qquad (1)$$

Из формулы (1) определяем температуру, при которой максимум энергии излучения приходится на красную $\lambda_К$ и фиолетовую $\lambda_Ф$ границы видимого спектра

$$T_К = \frac{b}{\lambda_К}; \quad T_Ф = \frac{b}{\lambda_Ф}. \qquad (2)$$

Мощность излучения равна $N = RS$.

В соответствии с законом Стефана – Больцмана

$$R = \sigma T^4.$$

Для температур $T_К$ и $T_Ф$ имеем

$$N_К = \sigma T_К^4 S \quad \text{и} \quad N_Ф = \sigma T_Ф^4 S,$$

отсюда находим $\dfrac{N_Ф}{N_К} = \left(\dfrac{T_Ф}{T_К}\right)^4$, или с учетом (2) имеем

$$\frac{N_Ф}{N_К} = \left(\frac{\lambda_К}{\lambda_Ф}\right)^4.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{N_Ф}{N_К} = \left(\frac{0{,}76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$$

9. Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость $\Delta R_Э$ абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 10\ \overset{o}{A}$, соответствующий максимуму энергетической светимости при температуре тела $T = 3 \cdot 10^3$ К.

Дано: $\Delta\lambda = 10\overset{o}{A} = 10 \cdot 10^{-10}$ м; $T = 3 \cdot 10^3$ К.

Найти: $\Delta R_Э$.

Решение. Физическую систему составляет абсолютно черное тело. Энергетическая светимость $dR_Э$, приходящаяся на интервал длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, связана с распределением энергии излучения по длинам волн $r_{\lambda,T}$ соотношением

$$dR_Э = r_{\lambda,T} d\lambda. \qquad (1)$$

Для нахождения $r_{\lambda,T}$ воспользуемся формулой Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{\omega,T}$:

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \qquad (2)$$

где ω – частота излучения; $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К – постоянная Больцмана; $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$ – скорость света в вакууме.

Найдем связь между интервалом частот $d\omega$ и интервалом длин волн $d\lambda$. Длина волны λ с частотой ω связана соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \qquad (3)$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$d\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega. \qquad (4)$$

Энергетическая светимость, приходящаяся на интервал длин волн $d\lambda$, равна с противоположным знаком энергетической светимости, приходящейся на интервал частотой $d\omega$, т.е.

$$r_{\omega,T} d\omega = -r_{\lambda,T} d\lambda. \qquad (5)$$

Подставляя выражение (4) в формулу (5), получаем

$$r_{\omega,T} = r_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{2\pi c},$$

откуда следует

$$r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} \frac{2\pi c}{\lambda^2}. \tag{6}$$

С учетом формул (1) – (3) и формулы (6) окончательно получаем

$$r_{\lambda,T} = \frac{4\pi^2 \mathbf{h}^2 c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi \mathbf{h} c}{kT\lambda}} - 1}. \tag{7}$$

Поскольку речь идет о конечном и достаточно узком интервале длин волн, то

$$\Delta R_Э = r_{\lambda_0} \Delta\lambda, \tag{8}$$

где r_{λ_0} – максимальное значение спектральной плоскости энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре.

Для определения длины волны λ_0, на которую приходится максимум r_{λ_0}, воспользуемся законом смещения Вина

$$\lambda_0 = \frac{b}{T}, \tag{9}$$

где $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3} \text{м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина; T – температура тела.

Подставив выражения (7) и (9) в формулу (8), получаем, что энергетическая светимость $\Delta R_Э$ абсолютно черного тела, приходящаяся на интервал длин волн, соответствующий максимуму энергетической светимости при данной температуре,

$$\Delta R_Э = \frac{4\pi^2 \mathbf{h} c^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{\frac{2\pi \mathbf{h} c}{kT}} - 1}. \tag{10}$$

Подставляя в формулу (10) значения величин, получаем

$$\Delta R_Э = 3{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

10. Медный шарик диаметром $d = 1{,}2$ см поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300$ К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через сколько времени его температура уменьшится в $n = 2$ раза.

Дано: $d = 1{,}2$ см; $T_0 = 300$ К; $T \approx 0$ К; $n = 2$.

Найти: t.

Решение. Внутренняя энергия медного шарика определяется выражением

$$U = \frac{1}{6}\pi\rho c T d^3, \qquad (1)$$

где ρ и c – плотность и удельная теплоемкость меди соответственно; d – диаметр шарика; T – его термодинамическая температура.

Энергия, излучаемая шариком в единицу времени, равна

$$\frac{dW}{dt} = P = \pi d^2 R, \qquad (2)$$

где R – энергетическая светимость шарика.

Поскольку по условию задачи шарик рассматривается как абсолютно черное тело, светимость R вычисляем по формуле Стефана – Больцмана (17.4), т.е.

$$P = \pi\sigma d^2 T^4, \qquad (3)$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана.

Учитывая, что изменение внутренней энергии шарика dU за время dt должно равняться энергии излучения за то же время с обратным знаком $-dW$, с помощью формул (1), (3) находим

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{6\sigma}{\rho c d} dt. \qquad (4)$$

Интегрируя это уравнение, с учетом начального условия ($T = T_0$ при $t = 0$) получаем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) = \frac{6\sigma}{\rho c d} t, \qquad (5)$$

где T – термодинамическая температура шарика в момент времени t.

Из выражения (5) следует, что время, в течение которого температура шарика T уменьшится в n раз $\left(\frac{T_0}{T} = n\right)$, определяется формулой

$$t = \frac{\rho c d (n^3 - 1)}{18\sigma T_0^3} \approx 3 \text{ ч},$$

где ρ и c – плотность и удельная теплоемкость меди соответственно.

11. Определите количество теплоты, теряемой 50 см^2 поверхности расплавленной пластины за 1 мин, если поглощательная способность пластины $A_T = 0{,}8$. Температура t плавления пластины равна 1770 ºС.

Дано: $S = 50$ см^2($5 \cdot 10^{-3}$м^2), $t = 1$ мин (60 с); $t = 1770$ °С ($T = 2043$ К); $A_T = 0{,}8$.

Найти: Q.

Решение. Количество теплоты, теряемое пластиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью

$$Q = W = A_T R_Э St, \qquad (1)$$

где $R_Э$ – энергетическая светимость черного тела; S – поверхность излучения; t – время.

Согласно закону Стефана – Больцмана

$$R_Э = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Подставив (2) в (1), найдем количество теплоты, теряемое расплавленной пластиной,

$$Q = A_T \sigma T^4 St = 237 \text{ кДж}.$$

12. Выведите связь между истинной T и радиационной T_p температурами, если известна поглощательная способность A_T серого тела.

Дано: A_T.

Найти: $T = f(T_p)$.

Решение. В случае серого тела энергетическая светимость

$$R_T^c = A_T R_Э = A_T \sigma T^4, \qquad (1)$$

где $R_Э = \sigma T^4$ – энергетическая светимость черного тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – истинная температура; A_T – поглощательная способность серого тела.

С другой стороны,

$$R_T^c = \sigma T_p^4, \qquad (2)$$

где T_p – радиационная температура.

Приравнивая выражения (1) и (2), запишем:

$$A_T\sigma T^4=\sigma T_p^4,$$

откуда искомая связь между истинной и радиационной температурами

$$T=\frac{T_p}{\sqrt[4]{A_T}}.$$

13. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии диаметром 6 см равна 650 ºС. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определите, какая доля мощности рассеивается стенками, если мощность, потребляемая печью, составляет 600 Вт.

Дано: $d=6$ см($6\cdot10^{-2}$м); $t=650$ °С ($T=923$ К); $P=600$ Вт.

Найти: η.

Решение. В случае установившегося теплового режима печи доля потребляемой мощности, рассеиваемая стенками,

$$\eta=\frac{P-\Phi}{P}=1-\frac{\Phi}{P}, \tag{1}$$

где Φ – поток излучения, испускаемый отверстием.

Поток излучения

$$\Phi=R_Э S, \tag{2}$$

где $R_Э$ – энергетическая светимость черного тела; $S=\dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь отверстия.

Согласно закону Стефана – Больцмана

$$R_Э=\sigma T^4, \tag{3}$$

где $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую долю мощности, рассеиваемой стенками

$$\eta=1-\frac{\pi d^2}{4}\frac{\sigma T^4}{P}=0{,}806.$$

14. Определить среднее число фононов в моде упругих колебаний кристаллической решетки, для которой спектральная плотность числа фотонов максимальна. Считать выполненным условие $T<0{,}5\theta_D$.

Решение. Определим частоту моды, соответствующей максимальной спектральной плотности числа фотонов. Функцию спектральной плотности числа фотонов $f(\omega)$ получим, перемножая спектральную плотность фононных мод $D(\omega)$ на среднее число фононов в моде $<n>$.

$$f(\omega) = D(\omega) <n> = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v_{зв}^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}.$$

Для упрощения последующих преобразований произведем замену $\frac{\hbar\omega}{KT} = x$. Тогда

$$f(x) = \frac{3V(KT)^2}{2\pi^2 v_{зв}^2 \hbar^2} \cdot \frac{x^2}{e^x - 1} = a\frac{x^2}{e^x - 1},$$

где $a = \frac{3V(KT)^2}{2\pi^2 v_{зв}^2 \hbar^2}$.

При $x \to 0$ и $x \to \infty$ эта неотрицательная функция стремится к нулю. Значит, где-то между нулем и бесконечностью должен быть максимум функции $f(x)$.

Дифференцируя полученное выражение по x и приравнивая результат к нулю, находим

$$\frac{2x\left(e^x - 1\right) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{(e^x - 1)^2}(2e^x - 2 - xe^x) = 0.$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения $x = 0$ и $x = \infty$ соответствуют минимумам функции $f(x)$. Запишем условие максимума:

$$2e^x - 2 - xe^x = 0 \quad \text{или} \quad x = 2(1 - e^x).$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получим $x_M = 1{,}59$. Проведя обратную замену, находим частоту моды ω_M, соответствующей максимуму функции спектральной плотности числа фононов $f(\omega)$:

$$\omega_M = \frac{1{,}59KT}{\hbar}.$$

Тогда искомое среднее число фононов в этой моде вычислим по формуле (17.8)

$$<n> = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} = \frac{1}{e^{1{,}59} - 1} \approx 0{,}26.$$

15. Сравнить количества теплоты, необходимые для нагревания одного моля железа на $\Delta T = 10$ К от температуры $T_1 = 0$ К и $T_2 = 900$ К. Для железа температура Дебая $\theta_D = 470$ К.

Дано: 1 моль; $\Delta T = 10$ К; $T_1 = 0$ К; $T_2 = 900$ К; $\theta_D = 470$ К.

Найти: Q_1; Q_2.

Решение. В первом случае, учитывая малое увеличение объема железа при нагревании, первое начало термодинамики запишем в виде $Q = \Delta U$. Тогда при низких температурах, с учетом формулы (17.15), необходимое для нагревания количество теплоты будет равно

$$Q_1 = \Delta U = \frac{3\pi^4 N_A K \Delta(T^4)}{5\theta_D^3} = \frac{3\pi^4 R \Delta(T^4)}{5\theta_D^3},$$

где $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

Во втором случае можно считать, что выполняется условие $T_2 > \theta_D$, и необходимое для нагревания количество теплоты находим с помощью формулы (17.14)

$$Q_2 = \Delta U = 3N_A K \Delta T = 3R\Delta T.$$

Выполним расчеты:

$$Q_1 = \frac{3 \cdot 3{,}14^4 \cdot 8{,}31 \cdot 10^4}{5 \cdot 470^3} \text{ Дж} = 46{,}8 \text{ мДж};$$

$$Q_2 = 3 \cdot 8{,}31 \cdot 10 \text{ Дж} = 249{,}3 \text{ Дж}.$$

16. Кристаллический алюминий массой 10 г нагревается от 10 К до 20 К. Пользуясь теорией Дебая, определите количество теплоты, необходимое для нагревания. Характеристическая температура Дебая для алюминия равна 418 К. Считать, что условие $T << \theta_D$ выполняется.

Дано: $m = 0{,}01$ кг; $T_1 = 10$ К; $T_2 = 20$ К; $\theta_D = 418$ К; $M = 27 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Найти: Q.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания алюминия от температуры T_1 до T_2, будем вычислять по формуле

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c\,dT, \tag{1}$$

где m – масса алюминия; c – его удельная теплоемкость, которая связана с молярной теплоемкостью соотношением

$$c = \frac{C_m}{M}.$$

Учитывая это, формулу (1) запишем в виде

$$Q = \frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \qquad (2)$$

По теории Дебая, если условие $T < \theta_D$ выполнено, молярная теплоемкость определяется предельным законом

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3, \qquad (3)$$

где $R = NK = 8,31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – молярная газовая постоянная; θ_D – характеристическая температура Дебая; T – термодинамическая температура.

Подставляя (3) в (2) и выполняя интегрирование, получаем

$$Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{m}{M} R \int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 dT = \frac{3\pi^4}{5}\frac{m}{M}\frac{R}{\theta_D^3}(T_2^4 - T_1^4).$$

Вычисляя, получим

$$Q = \frac{3\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}01\cdot 8{,}31}{5\cdot 27\cdot 10^{-3}\cdot 418^3}(20^4 - 10^4) = 0{,}36\ \text{Дж}.$$

17. Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К, если известно, что их средняя энергия равна 1,5 эВ.

Дано: $T = 0K$; $< E >= 1{,}5$ эВ.

Найти: n.

Решение. Концентрацию свободных электронов определим с помощью формулы (17.23) для энергии Ферми, которая связана со средней энергией свободных электронов соотношением (17.24).

После преобразований запишем расчетную формулу:

$$n = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_F(0)}{\mathbf{h}^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{10m < E >}{3\mathbf{h}^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Выполнив расчет, получим $n = 2{,}1\cdot 10^{28}\text{м}^{-3}$.

18. Образец из чистого полупроводника нагревают на $\Delta T = 125$ K от температуры $T_1 = 250$ K. При этом его удельная электрическая проводимость увеличивается в 800 раз. Как она изменится при последующем нагревании еще на $\Delta T = 125$ K?

Дано: $\Delta T = 125$ K; $T_1 = 250$ K; $\Delta T = 125$ K; $\Delta\sigma = 800$.

Найти: $\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$.

Решение. Используя формулу температурной зависимости удельной электрической проводимости чистого полупроводника (17.25), запишем отношение ее значения σ_2 при температуре $T_2 = T_1 + \Delta T$ к значению σ_1 при температуре T_1

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{\frac{\Delta E}{2K}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}$$

или

$$\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E}{2K}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{\Delta E}{2K}\frac{\Delta T}{T_1 T_2}.$$

Аналогичное соотношение для значений σ_3 при температуре $T_3 = T_1 + 2\Delta T$ и σ_2 имеет вид

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = e^{\frac{\Delta E}{2K}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)}$$

или

$$\ln\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2K}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) = \frac{\Delta E}{2K}\frac{\Delta T}{T_2 T_3}.$$

Решая полученную систему уравнений (исключая ширину запрещенной зоны ΔE), находим:

$$\ln\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2K}\frac{\Delta T}{T_2 T_3} = \frac{\Delta T}{T_2 T_3}\frac{T_1 T_2}{\Delta T}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_3}\ln\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Учитывая, что $T_1 + 2\Delta T = 2T_1$, упростим это выражение

$$\ln\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \ln\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}.$$

Тогда

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \approx 28{,}3.$$

17.3. Задачи для самостоятельного решения

17.1. Металлическая поверхность площадью $S = 10\ \text{см}^2$, нагретая до температуры $T = 2{,}5\ \text{кК}$, излучает в одну минуту $60\ \text{кДж}$. Определите: 1) энергию, излучаемую этой поверхностью, считая ее черной; 2) отношение энергетических светимостей этой поверхности и черного тела при данной температуре.

17.2. Максимум спектральной плотности энергетической светимости Солнца приходится на длину волны $\lambda = 0{,}48\ \text{мкм}$. Считая, что Солнце излучает как черное тело, определите: 1) температуру его поверхности; 2) мощность, излучаемую его поверхностью.

17.3. Черное тело находится при температуре $1{,}5\ \text{кК}$. При остывании этого тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $5\ \text{мкм}$. Определите температуру, до которой тело охладилось.

17.4. В результате охлаждения черного тела длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1\max} = 0{,}8\ \text{мкм}$ до $\lambda_{2\max} = 2{,}4\ \text{мкм}$. Определите, во сколько раз изменилась: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости.

17.5. Используя формулу Планка, определите энергетическую светимость $\Delta R_Э$ черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1\ \text{нм}$, соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если температура черного тела $T = 3{,}2\ \text{кК}$.

17.6-17.30. Вакуумированный контейнер имеет небольшое окно, изготовленное из прозрачного материала (см рис. 17.1). Объем контейнера V, температура его стенок T и площадь окна S заданы в табл. 17.1. Определите среднее число фотонов, приходящихся на моду электромагнитного излучения в контейнере с частотой ω_1, соответствующей длине волны λ_1, и число мод электромагнитного поля в диапазоне длин волн от λ_1 до λ_2. Определите мощность теплового излучения из окна контейнера согласно номеру задачи в табл. 17.1.

Таблица 17.1

Условия к задачам 17.6 – 17.30

Номер задачи	V, л	S, см^2	T, К	λ_1, нм	λ_2, нм
17.6	1	0,09	1100	3000	3010
17.7	1000	1	3000	900	901
17.8	100	0,85	300	9660	9670
17.9	500	1,2	2500	1100	1110
17.10	2	0,15	1000	2900	2910
17.11	700	1,1	273	10000	10010
17.12	3	0,17	1500	2000	2010
17.13	0,5	0,1	4000	600	601
17.14	7	0,2	500	6000	6010
17.15	150	0,9	750	4000	4010
17.16	20	0,3	370	7900	7910
17.17	0,2	0,11	1800	1700	1710
17.18	25	0,4	400	7300	7310
17.19	0,6	0,12	2200	1300	1310
17.20	50	0,35	330	9000	9010
17.21	0,8	0,13	600	4900	4910
17.22	200	0,8	800	3600	3610
17.23	12	0,45	1400	2000	2010
17.24	70	0,7	3100	940	941
17.25	24	0,25	1600	1800	1810
17.26	0,7	0,14	3300	880	881
17.27	6	0,5	1900	1500	1510
17.28	36	1,1	2900	1000	1010
17.29	17	0,6	350	8300	8310
17.30	400	1,3	3400	850	851

17.31 – 17.58. Определить, во сколько раз испускательная способность абсолютно черного тела вблизи длины волны λ_1 при температуре T_1 больше его испускательной способности вблизи длины волны λ_2 при температуре T_2. Выполнить задание согласно номеру задачи в табл. 17.2.

Таблица 17.2

Условия к задачам 17.31 – 17.58

Номер задачи	λ_1, мкм	T_1, К	λ_2, мкм	T_2, К
17.31	1,2	1000	0,6	1000
17.32		2000		
17.33		3000		
17.34		4000		
17.35	0,75	2000	0,5	2000
17.36	1,25			
17.37	1,5			
17.38	1,75			
17.39	2,0	1500	0,5	1500
17.40			1,0	
17.41			1,5	
17.42			2,5	
17.43	2,2	1300	0,7	1300
17.44				1400
17.45				1500
17.46				1600
17.47	1,0	1700	0,45	1700
17.48	1,5			
17.49	1,7			
17.50	2,0			
17.51	0,45	6000	0,40	6000
17.52			0,55	
17.53			0,60	
17.54			0,70	
17.55	2,4	1200	0,65	1000
17.56				1200
17.57				1400
17.58				1600

17.59 – 17.86. Электрическая лампа мощностью P имеет площадь излучающей поверхности, равную S. Температура нити накала – T, излучение нити составляет k излучения абсолютно черного тела при данной температуре. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 17.3; потерями тепла, связанными с теплопроводностью, пренебречь.

Таблица 17.3

Условия к задачам 17.59 – 17.86

Номер задачи	P, Вт	S, см^2	T, К	k, %
1.59	?	2,16	2430	70
17.60	25	?	2365	30
17.61	150	1,73	?	45
17.62	60	0,58	2390	?
17.63	?	1,56	2410	50
17.64	100	?	2400	55
17.65	50	0,42	?	65
17.66	200	1,65	2440	?
17.67	?	0,85	2360	40
17.68	500	?	2415	75
17.69	200	2,87	?	35
17.70	250	3,28	2405	?
17.71	?	0,57	2355	25
17.72	250	?	2425	60
17.73	100	1,44	?	40
17.74	150	2,50	2435	?
17.75	?	1,18	2397	45
17.76	60	?	2385	65
17.77	200	2,11	?	50
17.78	50	0,4	2370	?
17.79	?	3,75	2450	65
17.80	100	?	2380	60
17.81	60	0,98	?	30
17.82	300	3,33	2435	?
17.83	?	0,9	2300	35
17.84	25	?	2375	40
17.85	150	1,65	?	55
17.86	500	3,41	2420	?

17.87 – 17.111. Найдите среднее число фононов в моде упругих колебаний кристаллической решетки с дебаевской частотой при температуре T_1 для материала, указанного в табл. 17.4 согласно номеру задачи.

17.112 – 17.136. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, по данным табл. 17.4 определите изменение внутренней энергии одного килограмма материала при нагревании от $T_0 = 0$ К до $T_2 = 0{,}1\theta_D$ согласно номеру задачи. Считать условие $T < \theta_D$ выполненным.

Таблица 17.4

Условия к задачам 17.87 – 17.136

Номер задачи		Материал	Температура плавления $T_{пл}$, К	Температура Дебая θ_D, К	$\frac{T_1}{T_{пл}}$	Молярная масса M, $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$
17.87	17.112	Литий	454	344	0,5	6,9
17.88	17.113	Натрий	371	158	0,3	23,0
17.89	17.114	Алюминий	933	428	0,3	27,0
17.90	17.115	Калий	336	91	0,2	39,1
17.91	17.116	Титан	1941	420	0,15	47,9
17.92	17.117	Ванадий	2163	380	0,15	50,9
17.93	17.118	Хром	2176	630	0,2	52,0
17.94	17.119	Железо	1808	470	0,2	55,8
17.95	17.120	Кобальт	1765	445	0,2	58,9
17.96	17.121	Вольфрам	3683	400	0,1	183,9
17.97	17.122	Медь	1356	343	0,2	63,5
17.98	17.123	Рений	3453	430	0,1	186,2
17.99	17.124	Ниобий	2760	275	0,1	92,9
17.100	17.125	Молибден	2898	450	0,15	95,9
17.101	17.126	Родий	2233	480	0,15	102,9
17.102	17.127	Палладий	1825	274	0,15	106,4
17.103	17.128	Серебро	1234	225	0,15	107,9
17.104	17.129	Иридий	2716	420	0,1	192,2
17.105	17.130	Платина	2042	240	0,1	195,1
17.106	17.131	Гафний	2500	252	0,1	178,5
17.107	17.132	Цирконий	2128	291	0,1	91,2
17.108	17.133	Золото	1336	165	0,1	197,0
17.109	17.134	Свинец	600	105	0,1	207,2
17.110	17.135	Титан	3269	240	0,05	180,9
17.111	17.136	Никель	1726	450	0,2	58,7

17.137 – 17.164. Определить согласно номеру задачи энергию и импульс электрона на уровне Ферми в металле, плотность которого равна ρ, считая, что на каждый атом металла приходится β свободных электронов, где β – число электронов на внешней оболочке отдельного атома элемента (экспериментально определенные значения β могут быть значительно ниже, например, у алюминия – 2,2). Зависимостью энергии на уровне Ферми от температуры пренебречь (см. табл. 17.5).

Таблица 17.5

Условия к задачам 17.137 – 17.164

Номер задачи	Металл	ρ, $\frac{кг}{м^3}$	β
17.137	Алюминий	2698,9	3
17.138	Натрий	968,4	1
17.139	Ниобий	8570	1
17.140	Платина	21450	1
17.141	Медь	8960	1
17.142	Тантал	16600	2
17.143	Хром	7190	1
17.144	Калий	862	1
17.145	Вольфрам	19300	2
17.146	Цинк	7140	2
17.147	Иридий	22400	2
17.148	Железо	7874	2
17.149	Бериллий	1847,7	2
17.150	Молибден	10200	1
17.151	Литий	534	1
17.152	Никель	8900	2
17.153	Бор	2340	3
17.154	Уран	18950	2
17.155	Золото	19320	1
17.156	Титан	4500	2
17.157	Ванадий	6110	2
17.158	Осмий	22570	2
17.159	Торий	11720	2
17.160	Кобальт	8900	2
17.161	Индий	7310	3
17.162	Серебро	10500	1
17.163	Цезий	1870	1
17.164	Магний	1738	2

17.165 – 17.192. Считая энергию электронов на уровне Ферми в заданном металле равной W_F, определить согласно номеру задачи в табл. 17.6 долю электронов (в процентах), которые при нагревании металла до температуры T выйдут за пределы уровня Ферми.

Таблица 17.6

Условия к задачам 17.165 – 17.192

Номер задачи	Металл	W_F, эВ	T, К
17.165	Медь	7,0	300
17.166			600
17.167			1000
17.168			1300
17.169	Золото	5,5	300
17.170			600
17.171			1000
17.172			1300
17.173	Кобальт	11,7	300
17.174			1000
17.175			1300
17.176			1700
17.177	Тантал	8,4	300
17.178			1000
17.179			1700
17.180			3000
17.181	Иридий	9,8	300
17.182			1000
17.183			1700
17.184			2500
17.185	Платина	6,0	300
17.186			1000
17.187			1700
17.188			2000
17.189	Вольфрам	9,2	300
17.190			1000
17.191			2000
17.192			3600

18. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

18.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Атом является наименьшей частью химического элемента, в которой сохраняется его индивидуальность. Опыты Э. Резерфорда доказали, что атом состоит из положительно заряженного ядра, в котором представлена почти вся масса атома, и движущихся по периферии электронов.

Решая уравнение Шредингера с учетом взаимодействия в такой системе зарядов, получим собственные функции, содержащие три целочисленных параметра n, l, m:

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi),$$

где r, θ, φ – сферические координаты.

Эти параметры называются **квантовыми числами** и могут принимать следующие значения:

n = 1, 2, 3, …, ∞ – **главное** квантовое число;

l = 0, 1, 2, …, $n-1$ – **орбитальное** (азимутальное) квантовое число;

m = 0, ±1, ±2, …, $\pm l$ – **магнитное** квантовое число.

В атоме водорода эти числа определяют соответственно квантование энергии электрона E_n, модули момента импульса M и проекции момента импульса электрона на выделенную ось (например, 0z) M_Z:

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\mathbf{h}^2}\frac{1}{n^2};$$
$$M = \mathbf{h}\sqrt{l(l+1)};\qquad (18.1)$$
$$M_Z = m\mathbf{h}.$$

Из экспериментальных фактов следует, что у электрона имеется собственный момент импульса – **спин**, проекция которого на выделенную ось M_{SZ} определяется формулой

$$M_{SZ} = m_S\mathbf{h}, \qquad (18.2)$$

где $m_S = \pm S$, $S = \dfrac{1}{2}$ – спиновое квантовое число.

Итак, состояние электрона в атоме водорода характеризуется четырьмя квантовыми числами: n, l, m, m_S. В атомной физике принята схема условных обозначений состояния электрона с различными значениями числа l:

$l = 0$ – s-состояние;

$l = 1$ – p-состояние;

$l = 2$ – d-состояние;

$l = 3$ – f-состояние;

$l = 4$ – g-состояние

и далее по алфавиту.

Значение главного квантового числа указывается цифрой перед условным обозначением квантового числа l. Например, электрон в состоянии с $n = 4$ и $l = 2$ обозначается $4d$.

При определенном значении квантового числа n азимутальное квантовое число l может принимать n значений от 0 до $n-1$, а при каждом значении l квантовое число m может принимать $2l+1$ значение, следовательно, с учетом спинового квантового числа кратность вырождения по энергии состояния с квантовым числом n равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \tag{18.3}$$

Совокупность состояний электрона с одинаковым главным квантовым числом n называется **оболочкой**. В свою очередь, оболочка состоит из **подоболочек** – состояний с одинаковыми значениями квантового числа l. Пре переходе электрона с одного уровня энергии на другой происходит испускание или поглощение кванта энергии в виде фотона, который обладает моментом импульса. Поэтому закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на переходы в виде **правила отбора**: возможны переходы между состояниями, для которых выполняется условие

$$\Delta l = \pm 1. \tag{18.4}$$

В атомах, содержащих больше одного электрона, энергия состояния зависит в основном от квантовых чисел n и l, а распределение электронов по состояниям определяется **принципом Паули**: в одном стационарном состоянии, характеризующемся четырьмя квантовыми числами $\{n, l, m, m_S\}$, не может одновременно быть больше одного электрона.

В основном (невозбужденном) состоянии атома электроны располагаются на самых низких энергетических уровнях, не нарушая принципа Паули. В атоме гелия ($Z = 2$) оба электрона при различных значениях спинового числа находятся в состоянии с $n = 1$ и $l = 0$. Тогда так называемая **электронная конфигурация** атома гелия записывается как $1s^2$ (два электрона в s-состоянии на 1-й оболочке). Следующим по порядку в периодической системе стоит атом лития ($Z = 3$) с тремя электронами. Два из них находятся на 1-й оболочке, а третий – на второй. Электронная конфигурация атома лития $1s^2 2s^1$.

Для первых 18 элементов периодической системы Менделеева выполняется следующий порядок заполнения электронами состояний: сначала заполняется оболочка с меньшим значением квантового числа n, а внутри данной оболочки вначале заполняются состояния с $l = 0$, затем по порядку – с большими значениями l до $l = n - 1$. Нарушение этого порядка начинается с калия ($Z = 19$). Энергия электрона в $4s$-состоянии оказывается меньше, чем в состоянии $3d$. Поэтому вначале электроны «предпочитают» заполнять подоболочку $4s$, а затем $3d$.

Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, которые имеют одинаковый спин $\hbar/2$ и почти равные массы. Общее название этих частиц – **нуклоны.** Физические свойства ядра определяются **зарядовым числом** (**порядковым номером**) Z, равным числу протонов в атомном ядре, и числом нейтронов N. Число A всех нуклонов в ядре атома называется **массовым числом.** Очевидно, что

$$A = Z + N.$$

Для описания ядра принято слева от символа химического элемента указывать вверху число нуклонов A, а внизу – заряд ядра Z. Например, ${}^{27}_{13}Al$ – ядро атома алюминия, имеющего число протонов $Z = 13$ и массовое число $A = 27$.

В первом приближении формулу атомного ядра можно смоделировать в виде шара, радиус которого определяется по эмпирической формуле

$$R = 1{,}3 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ м}. \tag{18.5}$$

Объединение нуклонов в ядро атома осуществляется посредством ядерных сил, обусловленных **сильным взаимодействием** между нуклонами. При этом освобождается энергия, соответствующая **энергии связи** ядра $E_{св}$. Для разрушения ядра на составляющие его нуклоны необходимо затратить энергию, равную энергии связи. Согласно уравнению эквивалентности массы – энергии энергия покоя ядра $E_я = M_{яд}c^2$, а энергия покоя составляющих его нуклонов равна $\left(Zm_p + Nm_n\right)c^2$. Следовательно,

$$E_{св} = \left(Zm_p + Nm_n - M_{яд}\right)c^2, \tag{18.6}$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $M_{яд}$ – масса ядра атома.

Отсюда видно, что этой энергии связи соответствует разность масс между суммарной массой отдельных нуклонов и массой ядра атома, которая называется **дефектом масс**:

$$\Delta m = \frac{E_{св}}{c^2}. \tag{18.7}$$

Энергию связи ядра атома можно рассчитать также с помощью **формулы Вейцзеккера**

$$E_{св} = C_{об}A - C_{пов}A^{2/3} - C_{кул}Z^2A^{-1/3} - C_{сим}\frac{\left(N-Z\right)^2}{A} + C_{сп}A^{-3/4}\delta, \tag{18.8}$$

где слагаемые имеют следующий физический смысл:

$C_{об}A = 15{,}75A$ МэВ – энергия связи короткодействующими ядерными силами;

$C_{пов}A^{2/3} = 17{,}8A^{2/3}$ МэВ – уменьшение энергии связи вследствие ненасыщенности связей поверхностных нуклонов;

$C_{кул}Z^2A^{-1/3} = 0{,}71Z^2A^{-1/3}$ МэВ – уменьшение энергии связи из-за кулоновского отталкивания;

$C_{сим}\frac{\left(N-Z\right)^2}{A} = 23{,}7\frac{\left(N-Z\right)^2}{A}$ МэВ – энергия симметрии, т.е. уменьшение энергии при отклонении от равенства $N = Z$.

$C_{сп}A^{-3/4}\delta = 34A^{-3/4}\delta$ МэВ – изменение энергии связи, связанное со спариванием одинаковых нуклонов в ядре, т.е. объединением в пары как протонов, так и нейтронов;

$\delta = +1$ для четно-четных ядер (четное N и четное Z);

$\delta = 0$ для ядер с нечетным A;

$\delta = -1$ для нечетно-нечетных ядер (нечетное N и Z).

(Энергия связи отражает уменьшение массы ядра по сравнению с суммарной массой составляющих ядро нуклонов).

Свойство атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) изменять свой состав (заряд, массовое число) называется **радиоактивностью**. При этом испускаются элементарные частицы или ядерные фрагменты. К числу радиоактивных процессов относят: испускание электрона (β-распад), испускание позитрона (β^+-распад), захват ядром электрона из оболочки атома (K-захват), спонтанное деление ядра, вылет ядра гелия (α-распад) и другие виды распадов. Радиоактивный процесс может происходить, если превращение является энергетически выгодным, и часто сопровождается излучением γ-квантов.

В процессе радиоактивного распада выполняются законы сохранения энергии и электрического заряда. Кроме того, должны выполняться и другие законы сохранения (импульса, момента импульса и т.п.).

При α-распаде из ядра вылетает α-частица (ядро атома гелия ${}^4_2He$). В результате зарядовое и массовое числа ядра уменьшаются соответственно на две и четыре единицы и образуется новый элемент, который в периодической таблице находится на две позиции левее исходного элемента. При β-распаде из ядра вылетает электрон (и антинейтрино). Массовое число ядра не изменяется, а зарядовое возрастает на единицу. Поэтому образуется ядро следующего по порядку элемента в периодической системе.

Из вероятностного характера этих процессов следует **основной закон радиоактивного распада:**

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{18.9}$$

где N – число нераспавшихся атомов к моменту времени t; N_0 – первоначальное число радиоактивных атомов; λ – постоянная радиоактивного распада, имеющая смысл вероятности распада ядер за единицу времени. На практике используется понятие периода полураспада, т.е. времени, в течение которого число нераспавшихся атомов уменьшается в 2 раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \tag{18.10}$$

С учетом этого основной закон радиоактивного распада (18.9) записывается в виде

$$N = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \tag{18.11}$$

Число распадов радиоактивных ядер за единицу времени называется **активностью**. Очевидно, что активность можно представить в виде

$$A = \lambda N. \tag{18.12}$$

Единицей активности является беккерель (Бк) – 1 распад в секунду.

При прохождении радиоактивного излучения через вещество плотность его потока уменьшается. Закон ослабления пучка γ-излучения или β-частиц имеет вид

$$j = j_0 e^{-\mu x}, \tag{18.13}$$

где j_0 – плотность потока частиц, падающих на поверхность вещества; j – плотность потока на глубине x; μ – **линейный коэффициент ослабления**.

Интенсивность γ-излучения I после прохождения слоя вещества толщиной x можно определить по формуле

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \tag{18.14}$$

где I_0 – интенсивность γ-излучения, падающего на поверхность вещества.

Процесс, который происходит при столкновении ядра или элементарной частицы с другим ядром, в результате которого изменяется нуклонный состав исходного ядра, а также появляются новые частицы среди продуктов реакции, называется **ядерной реакцией**.

При записи ядерной реакции слева пишется сумма исходных частиц, затем ставится стрелка, а за ней – сумма конечных продуктов. Например,

$${}_1^1p + {}_3^7Li \to {}_0^1n + {}_4^7Be.$$

Эту реакцию можно записать в более короткой символической форме

$${}^7Li(p,n)\,{}^7Be.$$

При рассмотрении ядерных реакций используют точные **законы сохранения**: энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и другие. Если в качестве элементарных частиц в ядерной реакции фигурируют только протоны, нейтроны и γ-кванты, то в процессе реакции сохраняется и число нуклонов. Тогда должны соблюдаться баланс нейтронов и баланс протонов в начальном и конечном состояниях.

Для реакции ${}^7Li(p,n)\,{}^7Be$ получим:

число протонов $3 + 1 = 0 + 4$;

число нейтронов $4 + 0 = 1 + 3$.

Пользуясь этим правилом, можно идентифицировать одного из участников реакции, зная остальных. Достаточно частыми участниками ядерных реакций являются α-частицы (^4He – ядра гелия), дейтроны (^2H – ядра тяжелого изотопа водорода, содержащие, кроме протона, по одному нейтрону) и тритоны (^3H – ядра сверхтяжелого изотопа водорода, содержащие, кроме протона, два нейтрона).

Разность энергий покоя начальных и конечных частиц, участвующих в реакции, определяет ее энергию. Она может быть как больше нуля, так и меньше нуля.

В более полной форме рассмотренная выше реакция записывается как

$$p + {}^7Li \to n + {}^7Be + Q,$$

где Q – энергия реакции. Для ее расчета с помощью таблиц, в которых приводятся свойства ядер, сравнивают разность суммарной массы исходных участников реакции и суммарной массы продуктов реакции. Затем полученную разность масс (обычно выраженную в а.е.м.) пересчитывают в энергетические единицы (1 а.е.м. соответствует $931{,}5$ МэВ).

В современной физике элементарными называются частицы, не являющиеся атомами или их ядрами (исключение составляет протон). Кроме протонов к ним относятся фотоны, электроны, нейтроны, мезоны, гипероны – всего более 350 названий частиц, и число их продолжает расти (благодаря новым открытиям). Макроскопические массы и размеры элементарных частиц обусловливают ядерный характер их поведения. Поэтому каждая элементарная частица описывается набором дискретных значений определенных физических величин. В ряде случаев эти дискретные значения выражаются через дискретные или дробные числа (их называют **квантовыми числами**) и некоторый общий множитель – единицу измерения. При описании элементарных частиц часто задают только эти числа, опуская единицы измерения.

Общими характеристиками всех элементарных частиц является масса m, время жизни τ, спин j и электрический заряд q. В зависимости от времени жизни элементарные частицы делятся на стабильные ($\tau > 10^{21}$ лет), квазистабильные ($\tau > 10^{-20}$ с) и нестабильные ($\tau \approx 10^{-22} - 10^{-24}$ с).

Большинство частиц имеют **античастицы** («двойники»), отличающиеся от них лишь знаком некоторых характеристик взаимодействия (например, электрического заряда, магнитного момента). Обозначаются античастицы либо с противоположным знаком заряда (электрон e^-, позитрон e^+), либо над символом частицы ставится знак тильда (протон p, антипротон $\tilde{p}$).

Существует много способов систематизации элементарных частиц: по времени жизни, по массе, по наличию или отсутствию электрического заряда, по участию в фундаментальных взаимодействиях (сильном, электромагнитном и слабом) и т.п.

Обычно элементарные частицы подразделяются на три основные группы.

В первую группу попадает только одна частица – фотон, который участвует только в электромагнитном взаимодействии. Вторую группу образуют частицы, которые участвуют только в электромагнитном и слабом взаимодействиях. Их называют **лейптонами**. К третьей группе относятся **адроны**, характеризующиеся сильным взаимодействием наряду со слабым и электромагнитным. Гравитационное взаимодействие у всех элементарных частиц подразумевается.

В 50-х гг. прошлого века были открыты так называемые странные адроны. В связи с их странным по тем временам поведением для адронов ввели еще одно квантовое число – **странность** S. **Закон сохранения странности** выполняется только при сильных взаимодействиях.

Смысл введенных квантовых чисел в том, что они сохраняются в определенных классах взаимопревращений частиц. Во всех фундаментальных взаимодействиях частиц сохраняются энергия, импульс, момент импульса, электрический заряд, лептонные заряды и барионный заряд.

18.2. Примеры решения задач

1. Какое максимальное число электронов в атоме могут иметь следующие одинаковые квантовые числа: 1) n, l, m; 2) n, l?

Решение: 1. В соответствии с принципом Паули в атоме не может быть более одного электрона с одинаковыми четырьмя квантовыми числами. В первом случае три из них фиксированы, а четвертое (спиновое) m_S может принимать только два значения. Следовательно, в атоме только два электрона могут иметь одинаковый набор квантовых чисел n, l, m.

2. При заданном значении квантовых чисел n, l магнитное квантовое число m может принимать значения 0, ±1, ±2,…, $\pm l$, т.е. всего $2l+1$ значение. При каждом из них возможны два значения спинового квантового числа. Следовательно, в атоме не более $2(2l+1)$ электронов могут иметь одинаковый набор квантовых чисел n, l.

2. Электрон в атоме водорода находится в $4d$-состоянии. Какой максимальный квант энергии может выделиться при самопроизвольном переходе электрона в основное состояние?

Решение. Правило отбора (формула (18.4) накладывает ограничение на прямой переход из $4d$- в $1s$-состояние. Поэтому переход возможен только в два этапа: из состояния $4d$ в какое-либо p-состояние, а затем в основное $1s$. Соответственно при переходе будет выделено два кванта энергии. Возможными являются переходы $4d \to 3p \to 1s$ и $4d \to 2p \to 1s$. Энергия перехода (формула (18.1) равна

$$\Delta E = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\mathbf{h}^2}\left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Ее значение будет максимальным при переходе $3p \to 1s$ ($n_i = 1$, $n_j = 3$). Произведем вычисления:

$$\Delta E = -9^2 \cdot 10^{18} \cdot \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^4 \cdot 10^{-76}}{2 \cdot 1{,}05^2 \cdot 10^{-68}}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) \text{Дж} = 19{,}3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 12{,}1 \text{ эВ}.$$

3. Оценить расстояние между центрами нуклонов в ядрах атомов.

Решение. Используя формулу (18.5), определим объем ядра атома с массовым числом A:

$$V = \frac{3}{4}\pi R^3 = \frac{3}{4}\pi\left(1{,}3\cdot 10^{-15}\right)^3 A = 9{,}2\cdot 10^{-45} A \text{ м}^3.$$

Тогда на каждый нуклон приходится объем, равный

$$V' = \frac{V}{A} = 9{,}2\cdot 10^{-45} \text{ м}^3.$$

Принимая для простоты, что каждый нуклон занимает в ядре кубическую ячейку, оценим расстояние между центрами нуклонов, считая его равным стороне куба:

$$l = \sqrt[3]{V'} \approx 2{,}1\cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

4. Считая, что ядро ${}^{95}_{40}Zr$ моделируется однородно заряженным шаром, оценить потенциал электрического поля в точке, расположенной на поверхности ядра.

Решение. В заданном приближении потенциал электрического поля на поверхности ядра определим с помощью закона Гаусса по формуле

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R},$$

где $q = Ze$ – заряд ядра, R – его радиус, e – элементарный заряд.

Тогда, используя (18.5), преобразуем последнюю формулу к виду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{1{,}3\cdot 10^{-15} A^{1/3}}.$$

Подставив в нее заданные величины ($Z = 40$ и $A = 95$), получим

$$\varphi = 9{,}7\cdot 10^6 \text{ В}.$$

5. Вычислить разность масс «зеркальных» ядер атомов ${}^{33}S$ и ${}^{33}Cl$.

Решение. По периодической системе элементов определяем, что в ядре атома заданного изотопа серы ${}^{33}S$ число протонов $Z_1 = 16$, а число нейтронов $N_1 = 17$. В ядре ${}^{33}Cl$, наоборот, $Z_2 = 17$, а $N_2 = 16$. Поэтому они называются «зеркальными». Массу каждого ядра определим как сумму масс образующих его нуклонов за вычетом дефекта масс

$$M_1 = \left(Z_1 m_p + N_1 m_n\right) - \frac{E_{1св}}{c^2} = \left(16 m_p + 17 m_n\right) - \frac{E_{1св}}{c^2};$$

$$M_2 = \left(Z_2 m_p + N_2 m_n\right) - \frac{E_{2св}}{c^2} = \left(17 m_p + 16 m_n\right) - \frac{E_{2св}}{c^2}.$$

Тогда искомая разность масс равна

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \left(m_p - m_n\right) - \frac{1}{c^2}\left(E_{2св} - E_{1св}\right).$$

Для удобства расчетов выразим ее в энергетических единицах:

$$\Delta M c^2 = \left(m_p c^2 - m_n c^2\right) - \left(E_{2св} - E_{1св}\right),$$

где $m_p c^2 = 938{,}26$ МэВ – энергия покоя протона; $m_n c^2 = 939{,}55$ МэВ – энергия покоя нейтрона.

Используя формулу (18.8), получим с учетом, что $A_1 = A_2$,

$$E_{2св} - E_{1св} = -0{,}71 \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{A^{1/3}}.$$

Тогда $$\Delta M c^2 = \left(m_p c^2 - m_n c^2\right) + 0{,}71 \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{A^{1/3}}.$$

После расчета получим $\Delta M c^2 = 6 \text{ МэВ} = 9{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж. Соответственно

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = 1{,}07 \cdot 10^{-29} \text{ кг} = 6{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.м.}$$

На это значение масса ядра ^{33}Cl больше массы ядра ^{33}S.

6. Какие изотопы образуются в последовательности $\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$ радиоактивных распадов ядра радона ^{222}Rn?

Решение. Так как α-частица содержит два протона и два нейтрона, то при α-распаде зарядовое и массовые числа ядра уменьшаются соответственно на две и четыре единицы и образуется новый элемент, который в периодической системе находится на две позиции левее исходного элемента. У радона зарядовое число равно 86. Следовательно, образуется $^{218}_{84}Po$. Аналогично следующий α-распад приведет к образованию $^{214}_{82}Pb$. При β-распаде свинца один из нейтронов ядра превращается в протон. Общее число нуклонов ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу. В результате β-распада образуется новый элемент, который в периодической системе находится на одну позицию правее свинца. Это изотоп висмута $^{214}_{83}Bi$. Его α-распад приведет опять к смещению на две позиции левее в периодической системе элементов, т.е. к образованию изотопа таллия $^{210}_{81}Tl$.

7. В хорошо откачанную вакуумную камеру объемом $V = 1$ л поместили 1 кг радиоактивного полония ^{210}Po. В результате α-распада полония в камере появляется газообразный гелий. Определить его давление через 1 ч, если температура стенок камеры равна 300 К.

Решение. Для определения давления гелия используем уравнение состояния идеального газа Клапейрона – Менделеева

$$PV = \nu RT,$$

где ν – число молей образовавшегося гелия. При каждом акте α-распада ядра атома полония образуется одна молекула гелия. Поэтому число молей образовавшегося гелия соответственно равно числу молей распавшегося полония, которое связано с числом распавшихся атомов ΔN известным соотношением

$$\nu = \frac{\Delta N}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро.

Используя формулу (18.9), получим

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = N_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2}\right).$$

Период полураспада полония ^{210}Po равен 138 суткам, что значительно превышает время эксперимента, т.е. выполняется условие $t \ll T_{1/2}$. Тогда из выражения для ΔN (используя приближенную формулу $e^{-x} \approx 1 - x$ при $x \to 0$) получим

$$\Delta N = N_0 \frac{t}{T_{1/2}} \ln 2 .$$

Число радиоактивных атомов полония N_0 определим по формуле

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A ,$$

где M – молярная масса полония $\left(M = 0{,}210 \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right)$.

Таким образом, искомое давление

$$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{RT \Delta N}{V N_A} = \frac{RTN_0 t \ln 2}{N_A V T_{1/2}} = \frac{mRTt \ln 2}{MVT_{1/2}} .$$

После подстановки значений величин и вычисления получим

$$P = 2{,}5 \ \text{кПа} .$$

8. Точечный радиоактивный источник ^{60}Co находится в центре свинцового контейнера с толщиной стенок $x = 1$ см и наружным радиусом $R = 20$ см. Определить максимальную активность источника, который можно хранить в контейнере, если допустимая плотность потока γ-квантов при выходе из контейнера равна $j = 8 \cdot 10^6 \ \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$. Учесть, что при каждом акте распада ядра ^{60}Co испускается два γ-кванта, средняя энергия которых $\langle E_\gamma \rangle = 1{,}25$ МэВ.

Решение. Так как при каждом акте распада испускается два γ-кванта, то полный поток излучения и активность связаны соотношением $\varPhi = 2A$. Плотность потока на расстоянии R от точечного источника излучения (без защитного слоя)

$$j_0 = \frac{\varPhi}{S} = \frac{\varPhi}{4\pi R^2} .$$

Эта величина связана с допустимой плотностью потока снаружи контейнера формулой (18.13)

$$j = j_0 e^{-\mu x}.$$

Тогда искомая величина максимальной активности источника равна

$$A_{\max} = \frac{\Phi}{2} = \frac{4\pi R^2 j_0}{2} = 2\pi R^2 j e^{\mu x}.$$

По графику (см. прил.) находим, что линейный коэффициент ослабления μ для γ-квантов с энергией 1,25 МэВ равен $0,64\ \text{см}^{-1}$. После вычисления получим $A_{\max} = 3,8\ \text{МБк}$.

9. При бомбардировке нейтронами ядер изотопа бора ^{10}B наблюдается испускание α-частиц. Какое получается остаточное ядро? Рассчитать энергию реакции.

Решение. Запишем уравнение реакции в виде

$$^{10}B + {}^1_0n \to ? + {}^4_2He.$$

Для нее баланс протонов $5 + 0 = Z + 2$, баланс нейтронов $5 + 1 = N + 2$. Очевидно, что $Z = 3$ и $N = 4$. Следовательно, остаточное ядро – это ${}^7_3Li$. Для вычисления энергии реакции сравним суммы масс ядра мишени и нейтрона с суммой масс образовавшихся ядер (в а.е.м.). Используя данные таблицы (см. прил.), получим

$$M\left({}^{10}B\right) + m\left({}^1n\right) = 10,01294 + 1,00867 = 11,02161;$$

$$M\left({}^7Li\right) + m\left({}^4He\right) = 7,01601 + 4,00260 = 11,01861.$$

Разность масс $\Delta m = 0,003\ \text{а.е.м.}$, что в пересчете соответствует высвобождаемой энергии

$$Q = 0,003 \cdot 931,5\ \text{МэВ} = 2,7945\ \text{МэВ}.$$

10. Определите зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции:

1) ${}_{3}^{7}Li + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{5}^{10}B + x$;

2) ${}_{3}^{6}Li + x \rightarrow {}_{1}^{3}H + {}_{2}^{4}He$;

3) ${}_{13}^{27}Al + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{14}^{30}Si + x$;

Решение. Для нахождения в записанных реакциях зарядового числа Z и массового числа A воспользуемся законом сохранения зарядовых и массовых чисел:

1) ${}_{3}^{7}Li + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{5}^{10}B + x$; $Z = 0$; $A = 1$; ${}_{0}^{1}n$ (нейтрон);

2) ${}_{3}^{6}Li + x \rightarrow {}_{1}^{3}H + {}_{2}^{4}He$; $Z = 0$; $A = 1$; ${}_{0}^{1}n$ (нейтрон);

3) ${}_{13}^{27}Al + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{14}^{30}Si + x$; $Z = 1$; $A = 1$; ${}_{1}^{1}p$ (протон).

11. При достаточно больших энергиях нейтронов (≈10 МэВ) на ядре урана ${}_{92}^{238}U$ идет ядерная реакция типа (n, $2n$), в результате которой образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^{-}-распад. Запишите указанные процессы.

Дано: ${}_{92}^{238}U$; (n, $2n$); β^{-}-распад.

Решение. Ядерная реакция (n, $2n$) на ядре ${}_{92}^{238}U$ запишется в виде:

$$ {}_{92}^{238}U + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{92}^{236}U + 2\,{}_{0}^{1}n, $$

Причем ядро ${}_{92}^{236}U$ претерпевает β^{-}-распад по схеме

$$ {}_{92}^{236}U \xrightarrow{\beta^{-}} {}_{93}^{236}Np + {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\nu_{e}. $$

18.3. Задачи для самостоятельного решения

18.1 – 18.24. Чему равно число различных квантовых состояний электрона в атоме водорода, которое удовлетворяет условиям, приведенным в табл. 18.1 согласно номеру задачи. Запишите квантовое состояние, в котором электрон будет иметь максимальный орбитальный момент импульса при таких условиях.

Таблица 18.1

Условия к задачам 18.1 – 18.24

Номер задачи	Информация о квантовых числах	Номер задачи	Информация о квантовых числах
18.1	$n<5$	18.13	$n=3$, $l\le 1$
18.2	$n\le 3$, $l=1$	18.14	$n=7$, $l>2$
18.3	$n=7$, $l=3$	18.15	$n=5$, $m=-3$
18.4	$n=4$, $m\le 2$	18.16	$n=6$, $m<-3$
18.5	$n<7$, $m=-4$	18.17	$n=7$, $m\le -2$
18.6	$n=6$, $l\ge 4$	18.18	$n=5$, $l=3$
18.7	$n=7$	18.19	$n<7$, $m>3$
18.8	$n=4$, $l\le 2$	18.20	$n\le 3$, $l>1$
18.9	$n=6$, $l=2$	18.21	$n=4$, $m\ge -3$
18.10	$n=6$, $l>2$	18.22	$n=6$, $l\le 2$
18.11	$n=7$, $l\le 4$	18.23	$n=5$, $m\ge 4$
18.12	$n\le 6$, $m=4$	18.24	$n\le 4$

18.25 – 18.48. Оцените плотность ядерного вещества и концентрацию нуклонов в ядре атома, указанного в таблице вариантов 18.2 согласно номеру задачи.

Таблица 18.2

Условия к задачам 18.25 — 18.48

Номер задачи	Ядра атома	Номер задачи	Ядра атома	Номер задачи	Ядра атома
18.25	${}^{40}_{20}Ca$	18.33	${}^{56}_{26}Fe$	18.41	${}^{48}_{22}Ti$
18.26	${}^{103}_{47}Ag$	18.34	${}^{127}_{50}Sn$	18.42	${}^{65}_{30}Zn$
18.27	${}^{50}_{23}V$	18.35	${}^{141}_{55}Cs$	18.43	${}^{82}_{35}Br$
18.28	${}^{200}_{80}Hg$	18.36	${}^{33}_{17}Cl$	18.44	${}^{88}_{38}Sr$
18.29	${}^{45}_{21}Sc$	18.37	${}^{55}_{25}Mn$	18.45	${}^{90}_{39}Y$
18.30	${}^{96}_{42}Mo$	18.38	${}^{53}_{27}Co$	18.46	${}^{195}_{79}Au$
18.31	${}^{33}_{16}S$	18.39	${}^{65}_{29}Cu$	18.47	${}^{51}_{23}V$
18.32	${}^{51}_{24}Cr$	18.40	${}^{58}_{28}Ni$	18.48	${}^{37}_{18}Ar$

18.49 – 18.72. Какие изотопы образуются в цепочке радиоактивных распадов ядер, приведенных в табл. 18.3 согласно номеру задачи?

Таблица 18.3

Условия к задачам 18.49 — 18.72

Номер задачи	Исходное ядро	Последовательность распада	Номер задачи	Исходное ядро	Последовательность распада
18.49	^{232}Th	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$	18.61	^{234}Th	$\beta \to \beta \to \alpha \to \alpha$
18.50	^{220}Rn	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \beta$	18.62	^{214}Bi	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
18.51	^{237}Np	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$	18.63	^{210}Tl	$\beta \to \beta \to \alpha \to \beta$
18.52	^{238}U	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$	18.64	^{233}Pa	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \beta$
18.53	^{226}Ra	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$	18.65	^{216}Po	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
18.54	^{235}U	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$	18.66	^{228}Ra	$\beta \to \beta \to \alpha \to \alpha$
18.55	^{227}Ac	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$	18.67	^{219}Rn	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$
18.56	^{215}Po	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$	18.68	^{214}Po	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$
18.57	^{217}At	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \beta$	18.69	^{223}Fr	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$
18.58	^{228}Ac	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \beta$	18.70	^{219}At	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
18.59	^{229}Th	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$	18.71	^{223}Ra	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$
18.60	^{234}Pa	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \alpha$	18.72	^{231}Th	$\beta \to \alpha \to \beta \to \alpha$

18.73 – 18.96. В табл. 18.4 приведены ядерные реакции, соответствующие номеру задачи. Определите недостающие в записи ядро или частицу и энергию реакции.

Таблица 18.4

Условия к задачам 18.73 — 18.96

Номер задачи	Ядерная реакция	Номер задачи	Ядерная реакция
18.73	$^{6}Li + ? \to {}^{8}Be + {}^{4}He$	18.85	$^{16}O + ? \to {}^{14}N + {}^{4}He$
18.74	$^{12}C + {}^{2}H \to ? + {}^{11}B$	18.86	$^{9}Be + {}^{6}Li \to ? + {}^{4}He$
18.75	$^{16}O + {}^{7}Li \to ? + {}^{3}H$	18.87	$^{15}N + {}^{7}Li \to ? + {}^{3}H$
18.76	$^{14}N + {}^{7}Li \to {}^{18}F + ?$	18.88	$^{12}C + {}^{7}Li \to {}^{4}He + ?$
18.77	$^{11}B + {}^{7}Li \to ? + {}^{3}H$	18.89	$^{11}B + {}^{7}Li \to ? + 2n$
18.78	$^{6}Li + ? \to {}^{8}Be + {}^{1}H$	18.90	$^{16}O + {}^{6}Li \to ? + {}^{4}He$
18.79	$^{10}B + {}^{6}Li \to ? + {}^{4}He$	18.91	$^{14}N + {}^{6}Li \to {}^{15}O + ? + n$
18.80	$^{17}O + {}^{1}H \to ? + {}^{4}He$	18.92	$^{11}B + {}^{3}He \to ? + {}^{6}Li$
18.81	$^{18}O + {}^{6}Li \to ? + {}^{4}He + n$	18.93	$^{12}C + {}^{6}Li \to {}^{16}O + ?$
18.82	$? + {}^{4}He \to {}^{14}N + n$	18.94	$^{10}B + {}^{6}Li \to {}^{13}N + ?$
18.83	$^{6}Li + ? \to {}^{9}Be + {}^{4}He$	18.95	$? + {}^{6}Li \to {}^{17}O + {}^{2}H$
18.84	$^{11}B + {}^{4}He \to ? + {}^{1}H$	18.96	$? + {}^{6}Li \to {}^{15}N + {}^{1}H$

Типовой расчет по теме «Колебания и волны»

Вариант 1

1. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = A \cos \omega(t + t_0)$, где $\omega = \pi$ с$^{-1}$; $t_0 = 0{,}2$ с. Определить период T и начальную фазу колебаний.

2. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в $n = 3$ раза. Определить коэффициент затухания β.

3. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду А= 0,2 мм и длину волны $\lambda = 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти смещение $\xi(x,t)$ в момент времени $t = 7$ мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Вариант 2

1. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях согласно уравнениям $x = A_1\cos\omega t$; и $y = A_2\sin\omega t$, где $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории точки.

2. Амплитуда колебаний маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ мин уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент затухания колебаний λ.

3. От источника колебаний распространяется плоская волна вдоль прямой линии, амплитуда колебаний $A = 10$ см. Найти смещение точки, удаленной от источника на расстояние $x = 0{,}75\lambda$ в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9\,T$. Начальную фазу считать равной нулю.

Вариант 3

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0) = 2$ см и $\dot{x}(0) < 0$.

2. Гиря массой $m = 500$ г подвешена к стальной пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания колебаний $\lambda = 0{,}004$. Найти число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 2$ раза. За какое время произойдет это уменьшение?

3. Две точки находятся на расстоянии x = 50 см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется плоская волна со скоростью υ = 50 м/с. Период колебаний T = 0,05 с. Найти разность фаз колебаний в этих точках.

Вариант 4

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0)$ = 2 см и $\dot{x}(0) < 0$.

2. Найти период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы T_0 = 1 с и логарифмический декремент затухания колебаний λ = 0,628.

3. Определить разность фаз колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и в точке этой среды, отстоящей на x = 2 м от источника. Частота колебаний ν = 5 Гц, волны распространяются со скоростью υ = 40 м/с.

Вариант 5

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0) = 2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$.

2. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в n = 2 раза. Логарифмический декремент затухания колебаний λ = 0,01.

3. Найти скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстоянии x = 10 см, равна $\Delta\varphi = \pi/3$. Частота колебаний ν = 25 Гц.

Вариант 6

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где А = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0)=+2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) < 0$.

2. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на l = 9,8 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания β, чтобы колебания прекратились через время t = 10 с (считать колебания прекратившимися, когда их амплитуда уменьшается до 1 % от начальной величины)?

3. Плоская звуковая волна имеет период T = 3 мс, амплитуду A = 0,2 мм и длину волны λ = 1,2 м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние x = 2 м, найти скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ точек среды для момента времени t = 7 мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Вариант 7

1. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик вместо медного того же радиуса?

2. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии S = 30 см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на l = 2 см под действием груза массой m = 1 кг. С какой скоростью катили коляску, если она от толчков на углублениях, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски m = 10 кг.

3. Смещение из положения равновесия точки, находящейся на расстоянии x = 4 см от источника колебаний, через промежуток времени $t = T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину волны.

Вариант 8

1. Точка совершает колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент t = 0 смещение $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ для момента времени, когда смещение x = 1 см и $\dot{x} > 0$.

2. Найти длину волны колебания, период которого $T = 10^{-14}$ с. Скорость распространения колебаний $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0,t) = 10\sin 0{,}5\pi t$, где ξ выражено в см, а t – в с. Найти уравнение волны $\xi(x,t)$, если скорость распространения колебаний υ = 30 м/с.

Вариант 9

1. Материальная точка массой m = 10 г колеблется по закону x = (0,05 м) $\sin[(0{,}6\pi c^{-1})t+0{,}8]$. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.

2. Звуковые колебания, имеющие частоту ν = 500 Гц и амплитуду A = 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны λ = 70 см. Найти скорость распространения колебаний.

3. В среде распространяется плоская волна. Точка среды в начале координат колеблется по закону $u(0,t)$ = (4 см) $\sin[(600\pi c^{-1})t]$. Найти смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии l = 75 см от начала координат, в момент времени t = 0,01 с. Скорость распространения колебаний υ = 300 м/с.

Вариант 10

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0) = -2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0) < 0$.

2. Математический маятник длиной l = 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) – на 4 см. Найти время релаксации, т.е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в е раз (е – основание натуральных логарифмов).

3. Звуковые колебания, имеющие частоту ν = 500 Гц и амплитуду A = 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны λ = 70 см. Найти максимальную скорость частиц воздуха.

Вариант 11

1. Точка совершает колебания по закону $x=A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A = 5 см, ω = 2 с$^{-1}$. Найти ускорение точки в момент времени, когда ее скорость равна 8 см/с.

2. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой ν = 1000 Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{рез}$= 998 Гц.

3. Электромагнитные волны распространяются в среде со скоростью $\upsilon = 2\cdot10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в этой среде, если их частота в вакууме ν = 1 МГц?

Вариант 12

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки x_{max}= 10 см, наибольшая скорость υ_{max}= 20 см/ с. Найти циклическую частоту ω колебаний.

2. Найти, насколько резонансная частота отличается от частоты ν_0 = 1 кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания β = 400 $с^{-1}$.

3. Найти разность фаз колебаний двух точек, находящихся на расстояниях l_1 = 10 м и l_2 = 16 м от начала координат. Период колебаний T = 0,04 с, скорость распространения плоской волны υ = 300 м/с, начальная фаза равна нулю.

Вариант 13

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$.

2. Найти логарифмический декремент затухания колебаний λ системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты ν_0 = 10 кГц на $\Delta\nu$ = 2 Гц.

3. Найти разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии l = 2 м, если длина волны λ = 1 м.

Вариант 14

1. Точка совершает колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент t = 0 смещение $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) < 0$. Определить фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ для момента времени, когда скорость υ = –6 см/с и смещение $x < 0$.

2. Период собственных колебаний пружинного маятника T_0 = 0,55 с. В вязкой среде период того же маятника стал равен T = 0,56 с. Найти резонансную частоту $\omega_{рез}$ колебаний.

3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0,t)$ = (1 см) $\sin[(2{,}5\pi c^{-1})t]$. Найти скорость точки, находящейся на расстоянии l = 20 м от источника колебаний для момента времени t = 1 с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний υ = 100 м /с.

Вариант 15

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ_0, если $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0) > 0$.

2. Пружинный маятник (жесткость пружины $k = 10$ Н/м, масса груза $m = 100$ г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Найти коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН.

3. Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \lambda/12$, для момента $t = T/6$. Амплитуда колебаний $A = 0{,}05$ м.

Вариант 16

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки $x_{max} = 10$ см, наибольшая скорость $\upsilon_{max} = 20$ см/с. Найти максимальное ускорение a_{max} точки.

2. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{рез} = 0{,}5$ см и частота собственных колебаний $\nu_0 = 10$ Гц.

3. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $x = 4$ см от начала координат, в момент $t = T/6$ положительно и равно половине амплитудного значения, скорость точки в этот момент положительна. Найти длину бегущей волны, если начальная фаза равна нулю.

Вариант 17

1. Колебания точки происходят по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение $x = 5$ см, скорость точки $\dot{x} = 20$ см/с, а ускорение $\ddot{x} = -80$ см/с. Найти амплитуду A, частоту ν и фазу φ колебаний в этот момент времени.

2. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за $t_1 = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за $t_2 = 3$ мин?

3. Уравнение незатухающих колебаний источника плоской волны дано в виде $\xi(0,t)$ = (1 см) cos [(2,5πс$^{-1}$)t]. Найти скорость точки, находящейся на расстоянии l = 25 м от источника колебаний, для момента времени t = 1,5 с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний υ = 100 м /с.

Вариант 18

1. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз этих колебаний.

2. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания λ = 0,2. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

3. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $\xi(x,t)$ = 60 cos (1800t – – 5,3x), где ξ дано в мкм, t – в секундах, x – в метрах. Найти отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны среды.

Вариант 19

1. Определить амплитуду A и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинаковых направлений и периодов: $x_1 = A_1\sin\omega t$ и $x_2 = A_2\sin\omega(t+ t_0)$, где $A_1= A_2$=1 см, ω = πс$^{-1}$, t_0 = 0,5 с. Найти уравнение результирующего колебания.

2. Колебательный контур имеет емкость 1,1 нФ и индуктивность 5 мГн. Логарифмический декремент затухания равен $5\cdot10^{-3}$. За какое время вследствие затухания потеряется 99 % энергии контура?

3. Электромагнитная волна с частотой ν = 3,0 МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью ε = 4. Найти приращение длины волны.

Вариант 20

1. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2$ = 1,5 с и амплитудами $A_1 = A_2$ = 2 см. Начальные фазы колебаний $\varphi_{0,1} = \pi/2$ и $\varphi_{0,2} = \pi/3$. Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать его уравнение.

2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 2,22 нФ и катушки, намотанной из медной проволоки длиной l = 20 см и диаметром d = 0,5 мм. Найти логарифмический декремент затухания колебаний.

3. Давление в плоской звуковой волне изменяется по закону $p = (1{,}5\ \text{Па})\sin\pi[(1\text{м}^{-1})x - (330\text{с}^{-1})t]$.

Найти: 1) амплитуду давления; 2) частоту; 3) длину волны; 4) скорость распространения волны.

Вариант 21

1. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, проходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = A_1\cos\omega t$ и $y = A_2\cos\omega(t + t_0)$, где A_1 = 4 см; A_2 = 8 см; $\omega = \pi\text{с}^{-1}$, t_0 = 1 с. Найти уравнение траектории точки.

2. Логарифмический декремент затухания математического маятника λ = 0,2. Найти, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника.

3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 80 пФ и катушки, индуктивность которой L = 2 мГн. На какую длину волны настроен контур? Сопротивлением контура пренебречь.

Вариант 22

1. Два одинаково направленных колебания с равными частотами имеют амплитуды A_1 = 20 см и A_2 = 50 см. Второе колебание опережает первое по фазе на $\Delta\varphi$ = 30°. Найти амплитуду этих колебаний, фазу колебания, полученного от сложения этих колебаний, если начальная фаза первого колебания $\varphi_{0,1}$= 0°.

2. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 10^{-2}$ Гн, емкости C = 0,405 мкФ и сопротивления R = 2 Ом. Найти, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода.

3. В колебательном контуре индуктивность катушки можно изменять от 50 до 500 Гн, а емкость конденсатора – от 10 до 1000 пФ. Какой диапазон частот можно получить при настройке такого контура?

Вариант 23

1. Маленький шарик подвешен на нити длиной l = 1 м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса L = 12,5 м.

2. Катушка, индуктивность которой L = $3 \cdot 10^{-5}$ Гц, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин S = 100 см и расстоянием между ними d = 0,1 мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на длину волны λ = 750 м?

3. Емкость переменного конденсатора контура приемника изменяется в пределах от C_1 до $C_2 = 9C_1$. Найти диапазон длин волн контура приемника, если емкости C_1 соответствует длина волны λ =3 м.

Вариант 24

1. Период колебания материальной точки T = 2,4 с, амплитуда A = 5 см, начальная фаза $\varphi_0=\pi/2$. Каковы смещение, скорость и ускорение точки через t = 0,4 с после начала колебаний?

2. За время t = 30 с система совершила n_0 = 1200 свободных незатухающих колебаний. В среде с сопротивлением за то же время система совершила n = 1110 колебаний. Найти резонансную частоту колебаний системы.

3. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем имеет вид: $I= -(0{,}02A)\ \sin\ [(400\pi \text{с}^{-1})t]$. Индуктивность контура L = 1 Гн. Найти: 1) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора; 2) максимальную энергию магнитного поля; 3) максимальную энергию электрического поля.

Вариант 25

1. Найти максимальную скорость и максимальное ускорение колеблющейся точки, если амплитуда колебаний A = 5 см, а период T = 4 с.

2. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ и катушки индуктивностью L = 5 мГн. Чему равно сопротивление контура, если разность потенциалов на обкладках конденсатора за время $t = 10^{-3}$ с уменьшается в n = 3 раза?

3. Точка колеблется по закону $x = A\sin\omega t$. Через какой минимальный промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебания T= 24 с?

Вариант 26

1. Амплитуда гармонического колебания материальной точки A = 2 см, полная энергия ее колебаний $E = 3 \cdot 10^{-3}$Дж. При каком смещении от положения равновесия на эту точку действует сила $\boldsymbol{F} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ Н?

2. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем имеет вид: $\boldsymbol{I} = -(0{,}02A) \sin [(400\pi с^{-1})\boldsymbol{t}]$. Индуктивность контура $\boldsymbol{L}$ = 1 Гн. Найти период колебаний и емкость контура.

3. Маятник состоит из шарика массой m = 100 г, подвешенного на нити длиной l = 50 см. Найти период колебаний маятника и энергию, которой он обладает, если наибольший угол его отклонения от положения равновесия α_{max}= 15°.

Вариант 27

1. Индуктивность колебательного контура $\boldsymbol{L}$ = 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны λ = 300 нм?

2. Длина линии электропередач l = 600 км. Чему равна разность фаз напряжения на этом расстоянии?

3. Радиолокатор работает на длине волны λ = 15 см и испускает импульсы с частотой ν = 40 кГц. Длительность каждого импульса τ = 2 мкс. Какова наибольшая дальность обнаружения цели? Сколько колебаний содержится в одном импульсе?

Типовой расчет по теме «Оптика. Тепловое излучение. Кванты света»

Вариант 1

1. Светильник в виде равномерно светящегося шара в 500 кд имеет диаметр 50 см. Определить: 1) полный световой поток, излучаемый светильником; 2) его светимость; 3) освещенность, светимость и яркость экрана, на который падает 20 % светового потока, излучаемого светильником. Площадь экрана S = 0,5 м^2, коэффициент отражения 0,7.

2. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке T = 2450 К. Отношение ее излучательной способности к излучательной способности абсолютно черного тела при данной температуре равно 0,3. Найти площадь S излучающей поверхности.

3. Лазер излучил в импульсе длительностью τ = 0,13 мс пучок света с энергией E = 10 Дж. Найти среднее давление такого светового импульса, если его сфокусировать в пятнышко диаметром d = 10 мкм на поверхность, перпендикулярную к пучку, с коэффициентом отражения 0,5.

Вариант 2

1. Дифракционная решетка длиной l = 5 мм может размещать в первом порядке две спектральные линии (λ_1= 589,0 нм и λ_2= 589,6 нм). Определить, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с λ_2= 600 нм, падающий на решетку нормально.

2. Рассмотрим Землю как теплопроводящий, абсолютно черный шар радиусом $R_з$ = 6400 км, удельной теплоемкостью c = 200 Дж/кг·К, средней плотностью ρ = 5,5 кг/см^3 и температурой T = 300 К. Определить время, в течение которого Земля остынет на 0,001 К.

3. Короткий импульс света с энергией E = 7,5 Дж в виде узкого, почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения 0,6. Угол падения φ = 30°. Определить с помощью корпускулярных представлений импульс, переданный пластинке.

Вариант 3

1. На тонкую планку с n = 1,3 под углом 45° падает монохроматический свет с λ = 500 нм. При какой минимальной толщине пленки отраженный свет будет: 1) максимально усилен; 2) максимально ослаблен?

2. Равновесная температура тела равна T_1 = 1000 К, площадь излучения S = 1 м^2, поглощательная способность – 0,5. Выделяемая в теле мощность увеличилась на величину ΔP = 10 кВт. Определить новую равновесную температуру T_2.

3. Фотон с энергией E = 1 МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию отдачи электрона T, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25 %.

Вариант 4

1. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр (λ = 500 нм) заменить красным (λ = 650 нм)?

2. На дифракционную решетку с периодом d = 20 мкм под углом φ = 30° падает монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. Определить угол дифракции, соответствующий второму главному максимуму.

3. Фотон с длиной волны λ = 6 пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию отдачи электрона и частоту рассеянного фотона.

Вариант 5

1. Световая волна λ = 550 нм падает нормально на прозрачную пластинку с n = 1,6. При какой толщине пластинки отраженная волна будет иметь: 1) максимальную интенсивность; 2) минимальную интенсивность?

2. Температура абсолютно черного тела увеличилась в 5 раз, в результате чего λ_{max} уменьшилась на 200 нм. Определить начальную и конечную температуры тела.

3. Показать с помощью законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

Вариант 6

1. Свет с длиной волны λ = 600 нм находящегося на Земле лазера фокусируется с помощью телескопа с диаметром линзы R = 2 м на поверхности Луны. Расстояние до Луны принять равным L = 400000 км. Оценить размер светового пятна на Луне, если влиянием атмосферы можно пренебречь.

2. Металлический шар радиусом R = 1 см и теплоемкостью C = 14 Дж/К, имеющий температуру T = 1200 К, выброшен в межпланетное пространство. Через какое время температура шара упадет в 2 раза, если коэффициент поглощения равен 0,4?

3. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами φ_1 = 60° и φ_2 = 120°, отличаются друг от друга в n = 2 раза ($n = \lambda_1/\lambda_2$). Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

Вариант 7

1. Над поверхностью круглого стола диаметром d = 1 м на высоте h = 2,5 м висит лампа с силой света 100 кд. Определить среднюю освещенность стола.

2. Точечный источник света с длиной волны λ = 0,4 мкм расположен на расстоянии 1,2 м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом r = 1 мм. Найти расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии m = 4.

3. На дифракционную решетку нормально падает поток света. Найти постоянную решетки, если в направлении φ = 45° совпадают максимумы линий λ_1= 656,3 нм и λ_2= 410,2 нм.

Вариант 8

1. Спираль электрической лампочки с силой света 1000 кд заключена в матовую сферическую колбу радиусом R = 20 см. Найти световой поток, светимость, яркость такого источника и светимость и яркость экрана, на который падает 10 % светового потока. Коэффициент отражения света 0,8, площадь экрана – 0,25 м^2.

2. Как изменяется интенсивность излучения абсолютно черного тела вблизи λ = 500 нм при изменении его температуры от T_1=1000 К до T_2=1100 К?

3. Оценить угол α, на который отклоняется фотон вследствие гравитационного взаимодействия, проходя у поверхности Солнца. (*Указание:* вследствие малости угла α считать, что $\alpha = \Delta P/P$, где P – импульс фотона; ΔP – изменение поперечной составляющей импульса фотона). Для нахождения ΔP проинтегрировать второй закон Ньютона $\vec{F} = d\vec{P}/dt$, где $\vec{F}$ – сила гравитационного взаимодействия. Масса Солнца $M_{\mathbf{e}} = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $R_{\mathbf{e}} = 7 \cdot 10^{8}$ м.

Вариант 9

1. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом длиной волны λ = 400 нм, расстояние между отверстиями 0,8 мм, расстояние от отверстия до экрана 2,5 м. Найти положения трех первых светлых полос.

2. Абсолютно черное тело поддерживается при температуре 1000 К. Площадь поверхности S = 250 см^2. Найти мощность излучения, энергетическую светимость, энергию излучения тела.

3. Позитрон e^+ с кинетической энергией W_k аннигилирует на мишени, содержащей практически покоящиеся электроны, в результате чего рождаются два одинаковых γ-кванта. Под каким углом разделятся γ-кванты? Чему равен этот угол в случае $W_k = 0$?

Вариант 10

1. В центре квадратной комнаты площадью 25 м^2 висит лампа. На какой высоте h от пола надо ее повесить, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

2. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в 2 раза длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательной способности, уменьшилась на $\Delta\lambda$ = 400 нм. Определить начальную T_1 и конечную T_2 температуры.

3. Фотон с энергией $E = 2m_eC^2$ при рассеянии на покоящемся электроне теряет половину своей энергии (m_e – масса электрона). Найти угол разлета между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

Вариант 11

1. Плоская световая волна падает на бизеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 3'$. Определить длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $D_x = 0{,}65$ мм.

2. Используя формулу Планка для плотности излучения абсолютно черного тела, вычислить постоянную в формуле Стефана – Больцмана.

3. Найти максимальный угол рассеяния γ-квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может породить электрон-позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон-позитронной пары возможно, если энергия γ-кванта превышает $2m_eC^2$.

Вариант 12

1. Вычислить радиусы первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности $a = 1$ м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м, длина волны $\lambda = 500$ нм.

2. Используя формулу Планка для плотности излучения абсолютно черного тела, вычислить постоянную в законе смещения Вина.

3. Определить длину волны рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние на покоящемся электроне на угол 90° удваивает длину волны.

Вариант 13

1. Экран находится на расстоянии $L = 4$ м от монохроматического источника света. Посередине между экраном и источником света помещен экран с круглым отверстием. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным? Длина волны света $\lambda=5\cdot10^{-4}$ мм.

2. При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательной способности, изменилась от λ_1= 690 нм до λ_2= 500 нм. Как и во сколько раз изменится при этом излучательная способность R_e и ее максимальная спектральная плотность?

3. Фотон (λ = 0,4 нм) рассеивается на электроне, движущемся навстречу ему, и после рассеяния движется в обратном направлении (рассеяние на 180°). С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы частота фотона при рассеянии не изменилась?

Вариант 14

1. Найти освещенность, яркость и светимость экрана площадью S = 10 м^2, если падающий на него световой поток Φ = 2 клм. Коэффициент отражения – 0,85.

2. Для каких значений λ, T расхождение между формулами Рэлея – Джинса и Планка не превосходит 1 %?

3. Фотон с энергией E = 0,75 МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи T и направление его движения, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25 %.

Вариант 15

1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости объекта соответствует длине волны λ = 650 нм. Принимая, что объект излучает как абсолютно черное тела, вычислить его температуру и значение спектральной плотности энергетической светимости для длины волны λ_1=λ/2.

2. Три николя расположены так, что углы между плоскостями их пропускания составляют 25°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении такой системы, если потери на отражение и поглощение света для каждого николя составляют 4 % от интенсивности падающего света?

3. Фотон с длиной волны λ = 6 пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи и частоту рассеянного фотона.

Вариант 16

1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости объекта соответствует длине волны λ = 500 нм. Принимая, что объект излучает как абсолютно черное тело, вычислить его температуру T и значение спектральной плотности энергетической светимости для температур $T_1 = T/2$ и $T_2 = 2T$.

2. Расстояние между двумя когерентными источниками монохроматического света с λ = 500 нм составляет 1,4 см и равно расстоянию между интерферентными полосами на экране в средней части интерференционной картины. Найти расстояние от источников до экрана.

3. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн λ_1 = 0,35 мкм и λ_2 = 0,54 мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в n = 2 раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

Вариант 17

1. Насколько надо изменить температуру T = 2000 К черного тела, чтобы спектральная плотность его энергетической светимости для λ=600 нм изменилась в 2 раза?

2. На дифракционную решетку с периодом d = 20 мкм под углом α = 30° падает монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. Определить угол φ_2 дифракции, соответствующий второму главному максимуму.

3. Плоская световая волна интенсивностью J = 0,2 Вт/см^2 падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения 0,8. Угол падения φ = 45°. Определить с помощью корпускулярных представлений значение нормального давления, которое оказывает свет на эту поверхность.

Вариант 18

1. Черное тело имеет температуру T = 1000 °С. Для какой длины волны спектральная плотность его энергетической светимости изменится в 2 раза по сравнению со значением для длины волны λ_1 = 500 нм?

2. В дифракционной решетке с периодом d = 5 мкм имеется N = 1000 щелей. Построить график распределения интенсивности света при фраунгоферовой дифракции и нормальном падении лучей от длины волны в видимом диапазоне.

3. Фотон с энергией E = 250 кэВ рассеялся под углом φ = 120° на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона.

Вариант 19

1. Плосковыпуклая линза с n = 1,6 выпуклой стороной прижата к стеклянной пластинке. Расстояние между первыми двумя кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 0,5 мм. Определить оптическую силу линзы, если используется свет с λ = 550 нм, падающий нормально.

2. Во сколько раз изменится спектральная плотность энергетической светимости черного тела, соответствующая температуре 5000 °С и λ = 700 нм, если его температура изменится на 5 %?

3. Найти длину волн рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{\max}$ = 0,19 МэВ.

Вариант 20

1. На мыльную пленку (n = 1,33) падает белый свет под углом α = 30°. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет (λ = 600 нм)?

2. Температура черного тела T = 1800 К. При какой температуре яркость излучения желтой линии этого тела увеличится в 2 раза?

3. Фотон с энергией E = 0,15 МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda$ = 3 пм. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

Вариант 21

1. Какой наименьшей разрешающей силой должна обладать дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было разрешить две спектральные линии λ_1 = 578 нм и λ_2 = 580 нм? Какое наименьшее число штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение было возможно в спектре третьего порядка?

2. Сфера радиусом R = 1 м с абсолютно отражающими стенками заполнена монохроматическим светом с λ = 500 нм так, что освещенность ее равна 5 лк. Сколько квантов надо удалить из сферы, чтобы освещенность уменьшилась в 2 раза?

3. Параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U = 25 В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми d = 50 мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии L = 100 см от щелей.

Вариант 22

1. Точечный источник света с λ = 550 нм помещен на расстоянии a = 1 м перед непрозрачным экраном с круглым отверстием радиусом R = 2 мм. Какое минимальное число открытых зон Френеля может наблюдаться при этих условиях? При каком расстоянии от экрана будет открыто минимально возможное число зон? При каком радиусе отверстия может быть открыта только одна центральная зона?

2. При нормальном падении света на дифракционную решетку обнаружено, что под углом дифракции φ = 35° совпадают максимумы линий с длинами волн λ_1 = 0,63 мкм и λ_2 = 0,42 мкм. Максимальный порядок для второй линии в спектре этой решетки k_{max}= 5. Определить период решетки.

3. Сфера радиусом R = 1 м с абсолютно отражающими стенками заполнена монохроматическим светом с λ = 500 нм так, что освещенность ее равна 5 лк. Определить давление, производимое светом на поверхности сферы.

Вариант 23

1. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если эта решетка может разрешить в первом порядке линии спектра калия λ_1 = 404,4 нм и λ_2 = 404,7 нм? Длина решетки l = 3 см.

2. Монохроматический свет с λ = 550 нм нормально падает на диафрагму с круглым отверстием радиусом r = 1,1 мм, за которой расположен экран. Расстояние от источника до диафрагмы L = 1,2 м. Определить расстояние от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывает три зоны Френеля.

3. Определить энергию γ-квантов, претерпевших комптоновское рассеяние назад (угол рассеяния θ = 180°), если известно, что вылетающий электрон ультрарелятивистский ($W_e >> m_e C^2$).

Вариант 24

1. Найти угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшилась в 4 раза.

2. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом d = 2,8 мкм, если угол между направлениями на фраунгоферовы максимумы 2-го и 3-го порядков равен 10°.

3. Определить кинетическую энергию электронов, которые в среде с показателем преломления n = 1,5 излучают свет под углом β = 30° к направлению своего движения.

Вариант 25

1. На пути одного из интерферирующих лучей поставлена стеклянная пластина с n = 1,6 толщиной 14 мм. Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина для света с длинной волны λ = 650 нм, падающего нормально на пластинку.

2. Сколько штрихов на 1 мм должна иметь дифракционная решетка, чтобы углу отклонения φ = 90° соответствовал максимум шестого порядка для света с длиной волны λ = 500 нм?

3. Найти наименьшие значения кинетической энергии электрона и протона, при которых возникает черенковское излучение в среде с показателем преломления n = 1,6.

Вариант 26

1. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для λ_1 = 0,55 мкм во втором порядке равен φ_2 = 35°. Найти угол дифракции φ_3 для линии λ_2 = 0,65 мкм в третьем порядке.

2. С поверхности площадью S = 2 см^2 при температуре T = 400 К за время t = 5 мин излучается энергия W = 83 Дж. Определить коэффициент черноты α поверхности.

3. Одна из спектральных линий атомарного водорода имеет длину волны λ_0 = 656,3 нм. Найти доплеровское смещение этой линии $\Delta\lambda$, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией T = 1 МэВ.

Вариант 27

1. На стеклянный (n = 1,5) клин с углом α = 20" падает нормально свет с λ = 582 нм. Какое число темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина?

2. На каком расстоянии от дифракционной решетки нужно поставить экран, чтобы расстояние между нулевым максимумом и спектром четвертого порядка было равно l = 50 мм для света с длиной волны λ = 500 нм? Постоянная дифракционной решетки d = 0,02 мм.

3. Найти длину волны рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов T_{max}= 0,19 МэВ.

Вариант 28

1. Излучающая в обе стороны пластинка площадью S = 1 м^2 имеет яркость B = 10 кд/м^2. Найти среднюю силу света, излучаемого пластинкой.

2. Дифракционная решетка освещается нормально падающим на нее монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум третьего порядка отклонен на угол φ = 10°. На какой угол будет отклонен максимум пятого порядка?

3. С какой скоростью удаляется от нас некоторая туманность, если линия водорода λ_0 = 434 нм (для неподвижного источника) в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda$ = 130 нм?

Вариант 29

1. Сколько штрихов на 1 мм должна иметь дифракционная решетка, чтобы углу φ = 90° соответствовал максимум пятого порядка для света с длиной волны λ = 500 нм?

2. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете. Они формируются в тонком воздушном слое между плоской и сферической (радиусом кривизны R = 50 см) поверхностями. Определить длину волны света, если радиус третьего светлого кольца r_3 = 0,09 см, а радиус двадцать третьего светлого кольца r_{23} = 0,25 см.

3. При наблюдении спектральной линии λ_0 = 0,59 мкм в пучках света, приходящих с противоположных концов экватора солнечного диска, обнаружили различие в длинах волн на $\Delta\lambda$ = 8 пм. Найти период вращения Солнца вокруг собственной оси. Радиус Солнца $R_{\mathbf{e}}$ = $7 \cdot 10^8$ м.

Вариант 30

1. Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре третьего порядка, совпадает с изображением линии λ = 4861 A^o в спектре четвертого порядка.

2. Показать, что из закона Вина следует закон Стефана – Больцмана.

3. Одна из спектральных линий, испускаемых возбужденными ионами He^+, имеет длину волны λ_0 = 410 нм. Найти доплеровское смещение этой линии, если ее наблюдать под углом α = 30° к пучку ионов, движущихся с кинетической энергией T = 10 МэВ. Масса иона гелия m_{He+}= 4 а.е.м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л. Г. Общая физика : сб. задач / Л. Г. Антошина, С. В. Павлов, Л. А. Скипетрова. – М. : ИНФРА, 2006. – 336 с.
2. Ветрова, В. Г. Сборник задач по физике / В. Г. Ветрова. – Минск : Выш. шк., 1991. – 386 с.
3. Гладской, В. М. Сборник задач по физике с решениями / В. М. Гладской, П. И. Самойленко. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с.
4. Демков, В. П. Физика / В. П. Демков, О. Н. Третьякова. – М. : Высш. шк., 2001. – 669 с.
5. Дмитриева, В. Ф. Основы физики / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. – М. : Высш. шк., 2001. – 527 с.
6. Иродов, Е. И. Задачи по общей физике / Е. И. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 236 с.
7. Калашников, Н. П. Основы физики. Упражнения и задачи / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. – М. : Дрофа, 2004. – 464 с.
8. Решение задач по физике / В. М. Кириллов [и др.]. – М. : КомКнига, 2006. – 248 с.
9. Курс физики / под ред. В. Н. Лозовского. – СПб : Лань, 2001. Т. 1. – 576 с., Т.2. – 592 с.
10. Макаренко, Г. М. Курс общей физики / Г. М. Макаренко. – Минск : Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
11. Наркевич, И. И. Физика : учеб. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобкос. – Минск : Новое знание, 2004 – 680 с.
12. Новодворская, Е. М. Сборник задач по физике для втузов / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М. : ОНИКС XXI век, 2005. – 368 с.
13. Новиков, С. М. Сборник заданий по общей физике / С. М. Новиков. – М. : ОНИКС XXI век, 2006. – 512 с.
14. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1990. – 478 с.
15. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики для втузов / Т. И. Трофимова. – М. : ОНИКС XXI век, 2003. – 384 с.
16. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения / Т. И. Трофимова , А. В. Фирсов. – М. : Академия, 2004. – 592 с.
17. Физика в средней школе / под ред. К. С. Фарино. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2004. – 720 с.
18. Физика : задания к практическим занятиям / под ред. Ж. П. Лагутиной. – Минск : Выш. шк., 1989. – 236 с.
19. Физика : метод. указания и контрольные задания / под ред. А. Г. Чертова. – М. : Высш. шк., 1987. – 208 с.
20. Физика : учеб.-метод. комплекс / под ред. В. А. Груздева. Ч. I. – Новополоцк : УО «ПГУ», 2005. – 232 с.
21. Чертов, А. Г. Задачи по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Физмат, 2003. – 640 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П1

Показатель преломления *n* некоторых жидкостей и твердых веществ для желтой линии натрия при $t = 20\ °C$.

Жидкость	*n*	Твердое вещество	*n*
Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Вода	1,33	Кварц	1,55
Глицерин	1,47	Корунд	1,77
Масло льняное	1,47	Каменная соль	1,54
Сероуглерод	1,63	Лед	1,31
Скипидар	1,48	Слюда	1,60
Толуол	1,49	Стекло	1,5 – 1,9

Таблица П2

Масса *m* и энергия E_o покоя некоторых элементарных частиц и легких ядер

Частицы	*m*		E_o	
	а.е.м	10^{27}, кг	МэВ	10^{10}, Дж
Электрон	$5{,}486 \cdot 10^{-4}$	0,00091	0,511	0,00082
Протон	1,00728	1,6726	938,28	1,50
Нейтрон	1,00867	1,675	939,57	1,51
Дейтрон	2,01355	3,3325	1876,5	3,00
a -частица	4,0015	6,6444	3726,2	5,96

Таблица П3

Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра

Цвет	нм	Цвет	нм
Фиолетовый	400 – 450	Желтый	560 – 590
Синий	450 – 480	Оранжевый	590 – 620
Голубой	480 – 500	Красный	620 – 760
Зеленый	500 – 560		

Примечание. Строгой границы не существует, соседние диапазоны частично «перекрывают» друг друга.

Таблица П4

Таблица изотопов

Атомный номер элемента	Химический элемент	Символ изотопа	Масса изотопа, *а.е.м.*
1	Водород	^{1}H ^{2}H ^{3}H	1,007825 2,014102 3,016040
2	Гелий	^{3}He ^{4}He	3,016049 4,002603
3	Литий	^{6}Li ^{7}Li	6,015125 7,016004
4	Бериллий	^{9}Be	9,012186
5	Бор	^{10}B	10,012939
6	Углерод	^{12}C ^{13}C ^{14}C	12,000000 13,003354 14,003240
7	Азот	^{13}N ^{14}N ^{15}N	13,005370 14,003074 15,000107
8	Кислород	^{16}O ^{17}O	15,994915 16,999139
11	Натрий	^{22}Na ^{23}Na	21,994430 22,989771
12	Магний	^{24}Mg ^{25}Mg ^{26}Mg	23,985042 24,985839 25,982539
13	Алюминий	^{24}Al ^{27}Al	23,999940 26,981539
15	Фосфор	^{30}P ^{31}P ^{32}P	29,978310 30,973765 31,973900
16	Сера	^{32}S ^{34}S ^{35}S ^{36}S	31,972074 33,967864 34,969030 35,967090
17	Хлор	^{35}Cl ^{37}Cl	34,968851 36,965898
20	Кальций	^{48}Ca	47,95236
26	Железо	^{54}Fe ^{56}Fe	53,939617 55,934936
29	Медь	^{63}Cu ^{65}Cu	62,929592 64,927786
30	Цинк	^{65}Zn	64,929230
42	Молибден	^{95}Mo	94,905854
43	Технеций	^{96}Tc	95,907830

Окончание табл. П4

Атомный номер элемента	Химический элемент	Символ изотопа	Масса изотопа, *а.е.м.*
47	Серебро	^{108}Ag	107,869
49	Индий	^{113}Jn ^{115}Jn	112,904089 114,903871
50	Олово	^{112}Sn ^{113}Sn ^{114}Sn	111,904835 112,905180 113,902773
74	Вольфрам	^{184}W	183,8500
88	Радий	^{226}Ra	226,0254
90	Торий	^{232}Th	232,038
92	Уран	^{238}U	238,0508

Таблица П5

Периоды полураспада

Элемент	Символ	Период полураспада	Элемент	Символ	Период полураспада
Нейтрон	n	11,7 мин	Иридий	^{192}Jr	75 сут
Углерод	^{14}C	5570 лет	Йод	^{131}J	8 сут
Натрий	^{24}Na	15 ч	Полоний	^{210}Po	138 дней
Магний	^{27}Mg	10 мин	Радий	^{226}Ra	1620 лет
Кобальт	^{60}CO	5,3 года	Радон	^{222}Rn	3,82 сут
Кальций	^{45}Ca	168 сут	Актиний	^{225}Ac	10 сут
Стронций	^{90}Sr	28 лет	Уран	^{238}U	$4{,}5 \cdot 10^9$ лет
Водород	^{3}H	12 лет			

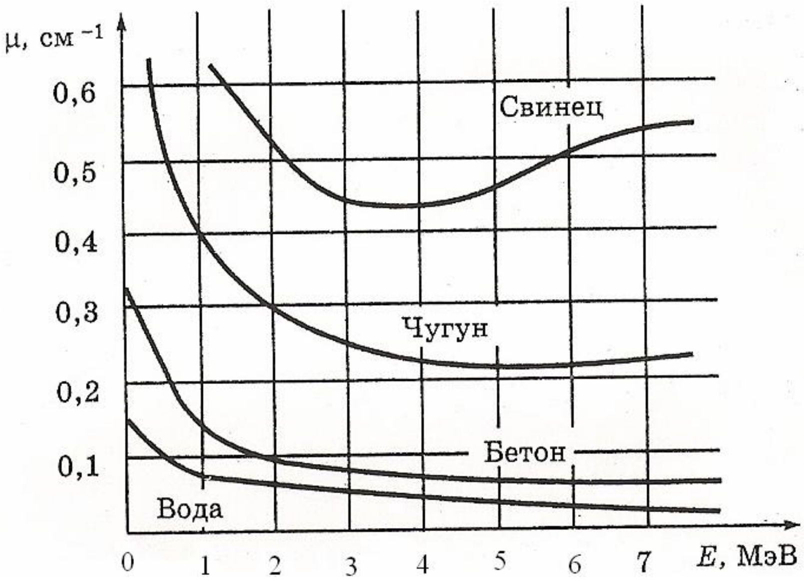


Рис. П1. Зависимость линейного коэффициента ослабления μ от энергии E g -излучения для различных веществ

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ОПТИКА
ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Сборник заданий

В трех частях

Часть 3

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 06.10.08 Формат 60x84/16 Бумага офсетная Гарнитура Таймс
Ризография Усл.-печ. л. 13,92 Уч.-изд. л. 13,5 Тираж 320 экз. Заказ 1622

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04
211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29