

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

В.И. Мицкевич,  
П.Ф. Парадня, В.Е. Плюта

# АЛГОРИТМЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

Пособие по дисциплине  
«Теория математической обработки геодезических измерений»  
для слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71  
«Прикладная геодезия и геодезическое обеспечение кадастра»

Новополоцк  
ПГУ  
2009

УДК 528.063(075.8)

ББК 26.12я73

М70

Рекомендовано к изданию методической комиссией геодезического факультета  
в качестве пособия (протокол № 42 от 18.12.2008)

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

канд. техн. наук, доц., декан геодезического факультета  
УО «ПГУ» И. П. ШЕВЕЛЕВ;

канд. техн. наук, доц. каф. прикладной геодезии и фотограмметрии  
УО «ПГУ» В. В. ЯЛТЫХОВ

**Мицкевич, В. И.**

M70 Пособие по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений» для слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71 «Прикладная геодезия и геодезическое обеспечение кадастра» / В. И. Мицкевич, П. Ф. Парадня, В. Е. Плюта. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – 144 с.  
ISBN 978-985-418-794-5.

Пособие написано для слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71 «Прикладная геодезия и геодезическое обеспечение кадастра» по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений», раздел «Уравнительные вычисления». Изложены основы уравнивания геодезических сетей.

Предназначено для студентов геодезических специальностей вузов и специалистов.

УДК 528.063(075.8)

ББК 26.12я73

ISBN 978-985-418-794-5

© Мицкевич В. И., Парадня П. Ф., Плюта В. Е., 2009  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2009

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. СУЩНОСТЬ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА.....	5
1.1. Основные положения и матричные формулы .....	5
1.2. Условные уравнения, возникающих в плановых геодезических сетях .....	8
1.3. Условные уравнения фигур.....	14
1.4. Условия горизонта .....	15
1.5. Условия сумм или разности углов .....	16
1.6. Условие дирекционных углов.....	17
1.7. Условие сторон (базисов) .....	18
1.8. Условные уравнения полюса .....	20
1.9. Условия координат в полигонометрии .....	28
1.10. Условия координат в триангуляции.....	30
1.11. Условное уравнение замыкающей для полигонометрического хода без примычных углов.....	32
1.12. Общий приём составления условных уравнений в трилатерации.	
Дифференциальная формула Бутлера .....	33
1.13. Допустимые величины свободных членов условных уравнений.....	34
2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ.....	36
2.1. Сущность параметрического способа уравнивания .....	36
2.2. Алгоритм параметрического способа уравнивания.....	36
2.3. Составление уравнения поправок для измеренного дирекционного угла.....	38
2.4. Составление уравнения поправок для измеренного направления и горизонтального угла.....	39
2.5. Составление уравнения поправок для измеренных расстояний.....	40
3. КОМБИНИРОВАННЫЕ КОРРЕЛАТНЫЕ СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ.....	41
3.1. Связь параметрического способа с коррелатным .....	41
3.2. Применение расширенной псевдообратной матрицы .....	45
3.3. Использование корреляционной матрицы поправок измерений.....	48
4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ.....	53
4.1. Применение метода Lp-оценок.....	53
4.2. Многокритериальная оптимизация геодезических измерений .....	62
4.3. Уравнивание с применением рекуррентного способа.....	103
4.4. Уравнивание нуль-свободных геодезических сетей.....	105
4.5. Уравнивание спутниковых геодезических сетей .....	107
5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ДЛЯ КОРРЕЛАТНОГО И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБОВ УРАВНИВАНИЯ.....	111
5.1. Предрасчет чисел обусловленности .....	111
5.2. Закономерности изменения чисел обусловленности в рядах и звеньях триангуляции .....	125
5.3. О неоднозначности результатов при коррелатном способе уравнивания.....	134
ЛИТЕРАТУРА .....	140

## В В Е Д Е Н И Е

Уравнительные вычисления играют главную роль в обработке результатов геодезических измерений. Условием и причиной возникновения задачи уравнивания является наличие избыточно измеренных величин и неизбежность малых ошибок измерений.

Основными способами уравнивания являются коррелатный и параметрический, изложенные в учебном пособии.

Рассмотрены нетрадиционные методы уравнивания геодезических сетей – метод L<sub>p</sub>-оценок и метод многокритериальной оптимизации на базе коррелатного способа уравнивания.

## 1. СУЩНОСТЬ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА

### 1.1. Основные положения и матричные формулы

Математическая обработка геодезических сетей состоит из следующих этапов:

- a. Предварительные вычисления.
- b. Уравнивание.
- c. Окончательные вычисления.

#### ЭТАП а

Цель предварительных вычислений:

1. Приведение результатов измерений к центрам пунктов, на поверхность относимости и на плоскость проекции Гаусса.
2. Контроль и отбраковка результатов измерений, а также оценка их точности.
3. Подготовка материалов полевых измерений к уравниванию

*Замечание к п. 2. В современных условиях контроль и отбраковка результатов измерений осуществляются вместе с уравниванием.*

#### ЭТАП б

1. Найти такие поправки в измеренные величины, которые ликвидируют невязки при соблюдении условия  $V^T P V = \min$ .
2. Повышение точности функций измеренных величин.

*Замечание. В.Д. Большаков писал: «Правильная математическая обработка равносильна повышению точности самих измерений».*

#### ЭТАП с

1. Оценка точности результатов уравнивания.
2. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин.

Условием и причиной возникновения задачи уравнивания являются наличие избыточно измеренных величин и неизбежность малых ошибок измерений.

Существуют два основных способа уравнивания: коррелатный, где решается задача на условный экстремум, и параметрический, в котором решается задача на абсолютный экстремум.

Рассмотрим коррелатный способ.

Пусть на объекте выполнено  $N$  измерений  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Причем известно, что для построения данной геодезической сети без единого контроля требуется  $t$  измерений (они называются *необходимыми*). При этом  $N \geq t$ . Разность  $r = N - t$  определяет число избыточных измерений. Это число также равно числу независимых условных уравнений, связывающих измеренные величины некоторыми функциональными зависимостями

$$\varphi_j(y_1, \dots, y_N) = W_j, \quad j = \overline{1, r} \quad (1.1)$$

Это условное уравнение связи, где  $y_1, y_2, \dots, y_N$  – измеренные величины.

Пусть найден вектор поправок  $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ , который ликвидирует невязки условных уравнений  $\varphi_j(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \dots, y_N + v_N) = 0$ , но данная задача неоднозначна, так как неизвестных поправок  $N$ , а уравнений  $r$ . При этом  $N > r$ . Поэтому отыскивают  $V$  под условием, например, если  $V^T P V = \min$ , то имеем условие МНК (метод наименьших квадратов).

Функция  $\varphi(y)$ , как правило, нелинейна, и ее приводят к линейному виду, используя частные производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$ , значения которых будут коэффициентами условных уравнений при поправках в измеренные величины.

Учитывая, что  $v_i$  – малые величины и обозначая их через  $dy_i$ , можно записать, используя ряд Тейлора

$$\varphi(y_1 + dy_1, \dots, y_N + dy_N) = \varphi(y_1, \dots, y_N) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) dy_i = 0$$

или

$$\varphi(y_1 + v_1, \dots, y_N + v_N) = \varphi(y_1, \dots, y_N) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) v_i = 0,$$

или

$$dW + W = 0, \quad (1.2)$$

где  $dW$  – дифференциал невязки  $W$

$$dW = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) dy_i = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) v_i$$

Таким образом, вместо нелинейного условного уравнения (1.1) имеем для одного условного уравнения в линейном виде

$$b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1N}v_N + W_1 = 0, \quad (1.3)$$

в котором  $b_{j,i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}$ , а для  $r$  условных уравнений имеем

$$\mathbf{B}_{r \times N} V_{\text{rel}} + W_{\text{rel}} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{B}_{r \times N} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rN} \end{pmatrix}$  – матрица коэффициентов условных уравнений;

$V_{\text{rel}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_N \end{pmatrix}$  – вектор поправок в измеряемые величины.

Это наши неизвестные, которые мы должны получить из  $r$  условных уравнений. Так как  $r < N$ , то система (1.2) или (1.4) недоопределенна (уравнений меньше, чем неизвестных). Следовательно, решений – множество. Из множества решений выбираем одно, которое обеспечивает  $V^T P V = \min$ .

$P_{N \times N} = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & P_N & \end{pmatrix}$  – диагональная матрица весов независимых измеренных величин;

$W_{\text{rel}} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_r \end{pmatrix}$  – вектор свободных членов условных уравнений.

Осуществляя обработку по МНК, перейдем к системе нормальных уравнений коррелат

$$\mathbf{B}_{r \times N} \cdot P_{N \times N}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{N \times r}^T \cdot K_{\text{rel}} + W_{\text{rel}} = 0, \quad (1.5)$$

в котором количество коррелат (или неопределенных множителей Лагранжа) будет равно  $r$ , т.е. столько же, сколько нормальных уравнений. Коррелаты вычисляют по формуле

$$K_{\text{rel}} = -N_{\text{rel}}^{-1} W_{\text{rel}}, \quad (1.6)$$

где  $N_{\text{rel}} = \mathbf{B}_{r \times N} \cdot P_{N \times N}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{N \times r}^T$ .

Зная  $K$ , можно получить поправки в результаты измерений по формуле

$$V_{\text{rel}} = P_{N \times N}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{N \times r}^T \cdot K_{\text{rel}}. \quad (1.7)$$

После нахождения уравненных значений результатов измерений находят уравненные координаты и выполняют оценку точности измеренных и уравненных величин по формулам

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \quad (1.8)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}, \quad \frac{1}{P_F} = N_B - N_f^T N_{rx}^{-1} N_f,$$

где  $N_B = f_{bxN} P_{NxN}^{-1} f_{Nx1}^T$ ,  $N_f = B_{rxN} P_{NxN}^{-1} f_{Nx1}^T$ , в которых используются коэффициенты весовой функции

$$\text{нелинейный вид} - F = \phi(y_1, \dots, y_N), \quad (1.9)$$

$$\text{линейный вид} - F = f_0 + f_1 v_1 + \dots + f_N v_N, \quad (1.10)$$

где  $f_{bxN} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{pmatrix}$ ;  $f_i = \frac{\partial \phi}{\partial y_i}$ .

Отсюда видно, что для оценки точности сторон, дирекционных углов и координат коэффициенты  $F$  будут соответствовать уравнению  $\phi(y)$  для условия сторон, условия дирекционных углов и условия координат.

Обратный вес функций можно получить и по формулам [8]

$$\frac{1}{P_F} = N_B - V_f^T P^{-1} V_f, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{P_F} = N_B + f V_f, \quad (1.12)$$

где в (1.11) и (1.12) используется вектор

$$V_f = -P_{NxN}^{-1} B_{rxN}^T N_{rx}^{-1} N_f, \quad (1.13)$$

## 1.2. Условные уравнения, возникающие в плановых геодезических сетях и подсчет их числа

В плановых геодезических сетях возникают следующие условные уравнения:

- фигур;
- горизонта;
- полюса;
- базиса;
- дирекционных углов;
- координат;
- замыкающих линий.

Обычно количество условных уравнений подсчитывают по специальным формулам. Эти формулы зависят от метода построения сети (триангуляция, трилатерация, полигонометрия). Ниже рассмотрим правила поиска условных уравнений по схеме сети, которые легко запоминаются и позволяют назвать до 80 % уравнений из их числа  $r$  (имеется в виду, что из правил есть исключения и не всегда удается применить эти правила к любым по построениям геодезическим сетям).

#### Правила поиска независимых условных уравнений по схеме сети

1. Число условий фигур равно количеству замкнутых фигур (треугольников, четырехугольников, многогранников) + число диагоналей. Под диагональю понимается такая сторона, которая пересекает другую.
2. Число условий горизонта равно количеству пунктов, на которых замкнут горизонт. При уравнивании по направлениям (может быть еще уравнивание по углам) это условие не возникает.
3. Число условий полюса равно количеству центральных систем + число диагональных направлений.
4. Число условий базиса равно количеству избыточных базисных сторон (в полигонометрии не возникает).
5. Число условий дирекционных углов равно количеству избыточных измеренных или жестких дирекционных углов.
6. Число условий координат равно удвоенному числу (по X и по Y) жестких избыточных изолированных координатных систем.
7. Условие замыкающих может возникнуть в триангуляции и полигонометрии, что ниже будет подтверждено соответствующим примером.

Поясним на примерах геодезических сетей все названные правила, начиная с 6. На рис. 1.1 предложена геодезическая сеть триангуляции.

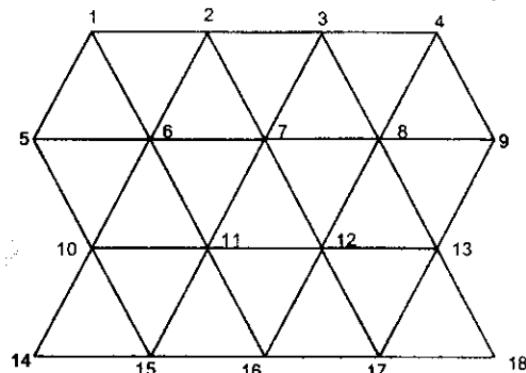


Рис. 1.1. Сеть триангуляции

Если исходные пункты 1 и 2 (см. рис. 1.1), условие координат не возникает, и так как этими двумя пунктами (как и любыми двумя другими пунктами) определяются однозначно ориентировка, масштаб и положение сети, то такое построение называют свободной геодезической сетью.

Если дополнительный исходный пункт, кроме 1 и 2, имеет номер 18, то сеть несвободная и в ней возникают два условия координат по X и Y. Столько же будет условий координат, если исходные пункты будут такими:

- а) 1, 2, 17, 18;      б) 1, 2, 16, 17, 18;      в) 1, 2, 3, 16, 17, 18.

Так как исходные пункты 1 и 2 определяют одну независимую координатную систему, то 1, 2, 3 – тоже одна координатная система, аналогично 1, 2, 5 или 1, 2, 5, 10, или 1, 2, 3, 5, 10. Если исходные пункты изолированы от первой координатной системы, то возникают избыточные координатные системы. Например, на рис. 1.1 исходные пункты 1, 2, 4, 18, 16, 14, то так как мы имеем 5 изолированных координатных систем, то согласно правилу возникнут 8 условий координат.

Приведем примеры:

- а) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 18, 16, 14 – 8 условий координат;  
б) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 17, 18, 16, 14 – 6 условий координат;  
в) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 13, 18, 16, 14 – 6 условий координат;  
г) исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 13, 18, 16, 14 – 4 условия координат;  
д) исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 17, 13, 16, 15, 14 – нет условий координат, и сеть называется несвободной.

Если исходные пункты 1, 2 и возникает «окно» в триангуляции или полигонометрии, например, на рис. 1.1 отсутствует сторона 7-12, то возникают дополнительно 2 условия координат.

На рисунке 1.2 приведена геодезическая сеть полигонометрии.

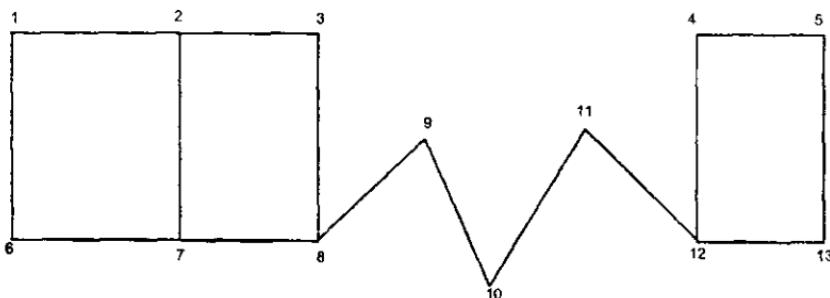


Рис. 1.2. Сеть полигонометрии

Чтобы сеть полигонометрии была свободной, необходимо знать координаты любых 2-х пунктов сети.

Рассмотрим подсчет числа условий координат в полигонометрии:

а) исходные пункты 1 и 2 – так как мы имеем три замкнутых полигона, то здесь 6 условий координат;

б) исходные пункты 1, 2, 5, 13 – так как остались три замкнутых полигона и появилась одна изолированная координатная система, то возникает 8 условий координат;

в) исходные пункты 1, 6, 3, 8, 10, 5, 13 – 12 условий координат (три полигона плюс три изолированные системы координат).

Поясним на примерах подсчет числа условий фигур. Количество условий фигур на рис. 1.1 равно 21, а на рис. 1.2 – равно 3.

Поясним условие горизонта для сети на рис. 1.1. Возникают 5 условий горизонта для пунктов с номерами 6, 7, 8, 11, 12. Если бы в сети на рис. 1.2 был бы измерен внешний угол  $\angle 987$ , замыкающий горизонт, то число условий горизонта равнялось бы 1.

Поясним условие полюса: на рис. 1.1 возникает 5 условий полюса на пунктах 6, 7, 8, 11, 12 и ни одного условия полюса на рис. 1.2.

На рис. 1.3 показан геодезический четырехугольник. В нем возникают 4 условных уравнения: 8 измеренных углов ( $N = 8$ ) и 2 определяемых пункта  $r = 4$ ;  $r = 4$ . Если временно убрать диагональ 2-4, то останутся 2 независимых условия фигур. Возникает условие фигур в треугольниках  $\Delta 123$  и  $\Delta 134$ . Диагональ 2-4 влечет еще одно независимое условное уравнение фигур или в треугольнике  $\Delta 124$ , или в треугольнике  $\Delta 234$ . Согласно правилу 3 диагональ влечет одно условие полюса. Следовательно, для сети на рис. 1.3 мы имеем четыре независимых условных уравнения: 3 – фигуры и 1 – полюса.

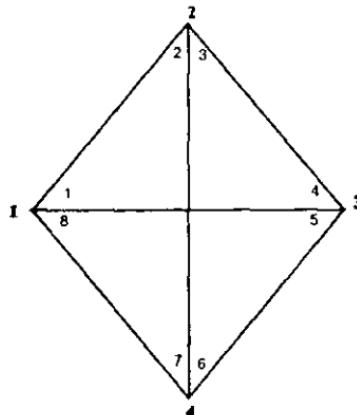


Рис. 1.3. Геодезический четырехугольник

Из этого простого примера следует простое правило: диагональ в геодезической сети влечет одно условие фигур и одно условие полюса.

Применим это правило для сети, показанной на рис. 1.4. В этой сети  $N = 15$ ,  $t = 6$  и возникает  $r = 9$  условий, в том числе 6 условий фигур и 3 условия полюса.

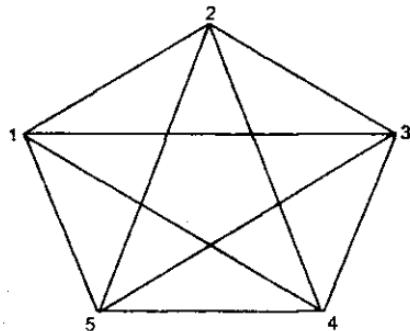


Рис. 1.4. Сеть пятиугольника

Подсчитать по правилам это можно следующим образом: зрительно уберем 3 диагонали 2-5, 2-4 и 3-5, в результате останутся 3 треугольника  $\Delta 123$ ;  $\Delta 134$ ;  $\Delta 145$ . К этим трем условиям фигур подключаются три условия фигур и три условия полюса по числу диагоналей.

На примере рис. 1.1 выполним поиск условий базиса и дирекционных углов:

- исходные пункты 1, 2, 17, 18 – одно условие базиса и одно условие дирекционного угла;
- исходные пункты 1, 2, 4, 8, 13 – два условия базиса и два условия дирекционного угла;
- исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 13, 17, 16, 15, 14 – восемь условий базиса и восемь условий дирекционного угла;
- исходные пункты 1, 2 и измеренные стороны 7-11, 8-12 – возникают два условия сторон, и нет условий дирекционных углов.

Аналогично ведется подсчет для числа измеренных азимутов (дирекционных углов).

Например, исходные пункты 1, 2 и измеренные три дирекционных угла (14-15, 15-16, 4-9) – три условия дирекционных углов.

В сети на рис. 1.2 с исходными пунктами 1, 2, 5, 13 возникают 12 независимых условных уравнений ( $N = 30 - 17$  углов и 13 сторон,  $t = 18$  при числе определяемых пунктов 9). В итоге имеем: три условия фигур (3 замкнутых полигона), одно условие дирекционных углов между двумя

исходными сторонами 1-2 и 5-13 и 8 условий координат (из них 6 условий координат в полигонах и два условия для изолированной координатной системы 5-13).

Закрепим эти правила, определяя независимые условные уравнения для рис. 1.5.

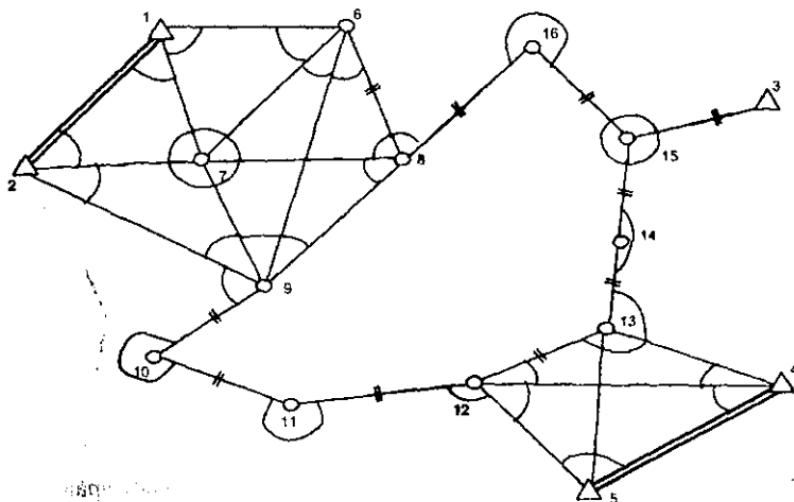


Рис. 1.5. Схема сети

36 углов;

10 сторон;

$N = 46$ ;

$t = 22$  (11 определяемых пунктов);

$r = 24$ ;

- число фигур – 10 ( $\Delta 1,6,7$ ;  $\Delta 1,7,2$ ;  $\Delta 6,7,8$ ;  $\Delta 7,8,9$ ;  $\Delta 2,7,9$ ;  $\Delta 6,7,9$ ;  $\Delta 12,13,4$ ;  $\Delta 12,5,4$ ;  $\Delta 12,13,5$  и полигон 8,16,15,14,13,12,11,10,9,8);
- число горизонта – 2 (на пунктах 7 и 15);
- число полюса – 3 (центральная система 7 и две диагонали 6-9 и 5-13);
- число условий сторон – 2 (для измеренных сторон 6-8 и 12-13);
- число условий дирекционных углов – 1 (исходный дирекционный угол 1-2, избыточный исходный дирекционный угол 4-5);
- число условий координат – 6 (2 изолированные избыточные координатные системы, исходный пункт 3 и исходные пункты 4, 5, а также «окно» 8, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8).

### 1.3. Условные уравнения фигур

В любой замкнутой фигуре на плоскости сумма измеренных углов должна быть равна  $180^\circ(n - 2)$ , где  $n$  – число вершин (сторон) в фигуре (рис. 1.6, а). Для рис. 1.6, б при использовании внешних углов имеем  $180^\circ(n + 2)$ .

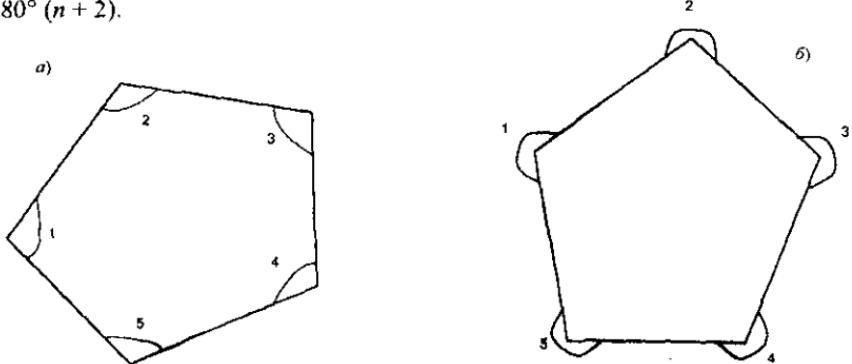


Рис. 1.6. Замкнутые фигуры

Для фигуры, показанной на рис. 1.6, а, мы имеем следующее уравнение связи

$$\phi(y) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 - 540^\circ$$

Переходя к условному уравнению фигур, согласно формуле (1.2) имеем

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w = 0$$

Аналогичным будет условие уравнения фигур для сети рис. 1.6, б.

Перейдем к геодезическому четырехугольнику, показанному на рис. 1.3. Для него можно составить следующие условные уравнения фигур:

- a)  $v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + w_1 = 0;$
  - b)  $v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0;$
  - c)  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_3 = 0;$
  - d)  $v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_4 = 0;$
  - e)  $v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + w_5 = 0;$
  - f)  $v_3 + v_4 - v_7 - v_8 + w_6 = 0;$
  - g)  $\sum_{j=1}^8 v_j + w_7 = 0.$
- (1.14)

Но в обработку берутся только три из перечисленных независимых условных уравнений. Приведем примеры: если в обработку приняты условные уравнения фигур а, б, с, то условия d-g будут зависимыми, так для d имеем  $d = a + b - c$ ; для e получим  $e = c - b$ ; для f получим  $f = b - d$ .

Если в обработку будут взяты зависимые условные уравнения, то матрица нормальных уравнений коррелат будет вырожденной, то есть ее определитель  $\det = 0$ .

Выше мы рассмотрели типовые фигуры с измеренными углами. Покажем, что условные уравнения фигур могут возникнуть в трилатерации. Например, если в четырехугольнике (см. рис. 1.3) будут измерены стороны 2-3, 2-4, 1-3, 3-4, то  $N = 5$ ,  $t = 4$ ,  $r = 1$ . Условное уравнение фигур можно записать так же, как (1.14а), но поправки в углы выражаются через поправки в измеренные стороны с помощью дифференциальной формулы Бутлера, которая будет рассмотрена ниже.

#### 1.4. Условия горизонта

Условия горизонта возникают на тех пунктах геодезической сети, где замкнут горизонт (рис. 1.7).

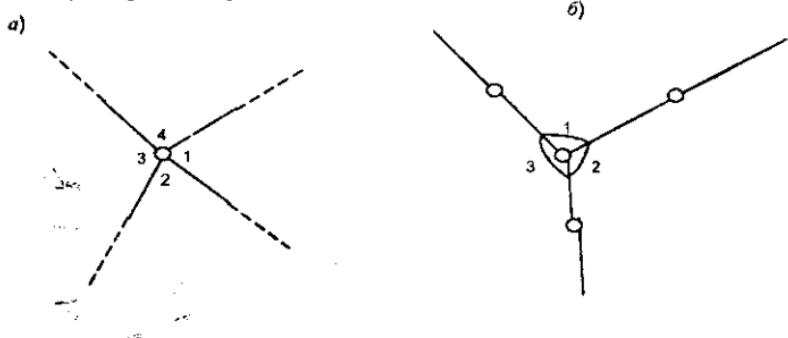


Рис. 1.7. Фрагменты геодезических сетей

Условные уравнения связи для фрагмента 1.7, а имеют вид

$$\phi(v) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 - 360^\circ,$$

а условное уравнение будет линейным

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w = 0$$

Для рис. 1.7, б имеем

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

На рис. 1.8 приведена сеть трилатерации.

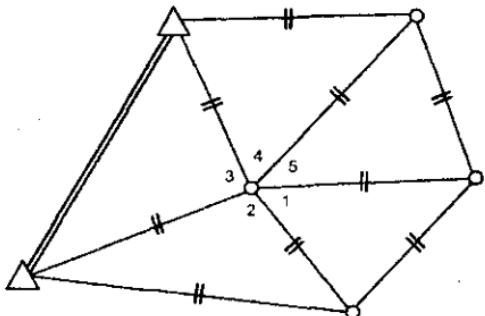


Рис. 1.8. Сеть трилатерации

Возьмем центральную систему трилатерации. Здесь измерено 9 сторон  $r = 9 - 8 = 1$  условное уравнение горизонта в виде

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w = 0, \quad (1.15)$$

где  $v$  – поправки в углы, полученные по трем сторонам в каждом треугольнике. При этом  $v_B$  выражается через  $v_S$  по формуле Бутлера.

### 1.5. Условия сумм или разности углов

На практике возникают случаи, когда два соседних угла составляют третий угол (рис. 1.9).



Рис. 1.9. Фрагменты геодезической сети

Уравнение связи для рис. 1.9, а будет таким

$$\varphi(v) = \angle 3 - \angle 2 - \angle 1$$

Линейное условное уравнение имеет вид

$$v_3 - v_1 - v_2 + w = 0,$$

где  $w = \angle 3 - \angle 1 - \angle 2$ .

На рис. 1.9, б показаны углы, измеренные между двумя жесткими сторонами. Свободный член условного уравнения примет вид

$$w = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 - (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Условное уравнение сумм углов будет таким

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0;$$

если  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  измерены гироэодолитом или из астрономических наблюдений с переходом от азимутов к дирекционным углам, то

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_{\alpha 2} - v_{\alpha 1} + w = 0.$$

## 1.6. Условие дирекционных углов

Данное условие может возникать во всех видах геодезических построений (триангуляции, полигонометрии, трилатерации). Рассмотрим его для примера триангуляции (рис. 1.10).

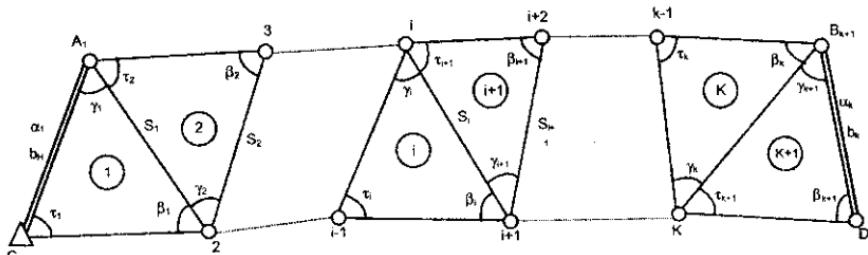


Рис. 1.10. Звено триангуляции

На рис. 1.10 углы  $\beta_i$ ,  $\tau_i$ , участвующие при передаче сторон по теореме синусов, называются связующими, а  $\gamma_i$  – промежуточными. С помощью последних можно записать уравнение

$$\phi(y) = \alpha_n - \gamma_1 + \gamma_2 - \dots - \gamma_{k+1} - \alpha_k, \quad (1.16)$$

дифференцируя которое получим условное уравнение дирекционного угла

$$v_{\alpha_n} - v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - \dots - v_{\gamma_{k+1}} - v_{\alpha_k} + W = 0$$

или, если  $\alpha_n$ ,  $\alpha_k$  жесткие,

$$-v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - \dots - v_{\gamma_{k+1}} + W = 0, \quad (1.17)$$

где  $W$  – свободный член условного уравнения, получаемый по (1.16).

Ошибки не произойдет, если вместо (1.17) записать

$$v_{r_1} + v_{\beta_1} - v_{r_2} + \dots + v_{r_{k+1}} + v_{\beta_{k+1}} + W_n = 0, \quad (1.18)$$

однако равенство (1.17) пропре (1.18).

Рассмотрим условие дирекционных углов для хода полигонометрии (рис. 1.11).

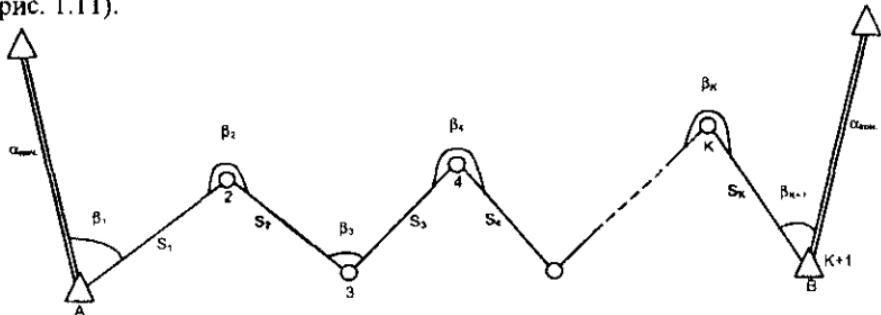


Рис. 1.11. Сеть полигонометрии

Уравнение связи для условия дирекционного угла будет таким

$$\varphi(\beta) = \sum_{i=1}^{K+1} -(\alpha_{кон.} - \alpha_{нач.} + K \cdot 180^\circ), \quad (1.19)$$

где  $K + 1$  – число измеренных углов.

Условное уравнение дирекционного угла, считая  $\alpha_{кон.}$  и  $\alpha_{нач.}$  твердыми, будет иметь вид

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{K+1} + w = 0,$$

если  $\alpha_{кон.}$  и  $\alpha_{нач.}$  – измеренные величины, то

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{K+1} + v_{\alpha_{нач.}} - v_{\alpha_{кон.}} + W_n = 0. \quad (1.20)$$

Если построено звено трилатерации, состоящее из  $K + 1$  треугольников (см. рис. 1.10), то  $N = 2K + 1$ , а  $t = 2K$ , следовательно,  $r = 1$ , и условие дирекционных углов примет вид (1.17), с применением формулы (1.16) для измеренных углов, вычисленных по трем сторонам треугольника трилатерации. О том, как перейти от  $v_r$  к  $v_s$ , будет сказано ниже.

### 1.7. Условие сторон (базисов)

Условие сторон возникает только в звене триангуляции (в звене полигонометрии его не существует, а в звене трилатерации заменяется на условие дирекционных углов, как наиболее простое).

Для звена, показанного на рис. 1.10, можно записать свободный член условия сторон

$$W_b = b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} - b_{\text{кон.}}^{\text{см.}} = \frac{b_{\text{H}}^{\text{смв.}} \sin \tau_1 \sin \tau_2 \dots \sin \tau_i \dots \sin \tau_{K+1}}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_i \dots \sin \beta_{K+1}} - b_{\text{кон.}}^{\text{см.}}, \quad (1.21)$$

полученный начиная с первого по К + 1 треугольник с использованием теоремы синусов. Для нахождения  $dW$  возьмем производные функции  $\phi(y)$  (см. формулу (1.21) по измеренным величинам

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_{\text{H}}} = \frac{\sin \tau_1 \dots \sin \tau_{K+1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{K+1}} \cdot \frac{b_{\text{H}}^{\text{смв.}}}{b_{\text{H}}^{\text{см.}}} = \frac{b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}}}{b_{\text{кон.}}^{\text{см.}}};$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_{\text{кон.}}} = -1;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau_i} = \frac{b_{\text{H}}^{\text{смв.}} \cos \tau_i \sin \tau_2 \dots \sin \tau_{K+1}}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_{K+1}} \cdot \frac{\sin \tau_i}{\sin \tau_i} = b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \frac{\cos \tau_i}{\sin \tau_i} = b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \operatorname{ctg} \tau_i;$$

без вывода по аналогии с предыдущим равенством получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau_i} = b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \operatorname{ctg} \tau_i;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_i} = \frac{b_{\text{H}}^{\text{смв.}} \cdot \sin \tau_1 \sin \tau_2 \dots \sin \tau_{K+1}}{\sin \beta_2 \dots \sin \beta_{K+1}} \cdot \frac{-\cos \beta_i}{\sin^2 \beta_i} = -b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \operatorname{ctg} \beta_i;$$

без вывода по аналогии с предыдущим равенством получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_i} = -b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \cdot \operatorname{ctg} \beta_i;$$

с учетом частных производных можно записать

$$dW = b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} \sum_{i=1}^{K+1} (\operatorname{ctg} \tau_i d\tau_i - \operatorname{ctg} \beta_i d\beta_i) + \frac{b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}}}{b_{\text{H}}^{\text{см.}}} db_{\text{H}} - db_{\text{кон.}};$$

переходя от дифференциалов к поправкам и умножая предыдущее равенство на  $\rho' / b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}}$ , аналогично запишем

$$\sum_{i=1}^{K+1} (\operatorname{ctg} \tau_i v_{\tau_i}' - \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i}') + \frac{\rho'}{b_{\text{H}}} v_{b_{\text{H}}}'' - \frac{\rho'}{b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}}} v_{b_{\text{кон.}}}'' + W_b'' = 0, \quad (1.22)$$

$$W_b'' = \frac{b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}} - b_{\text{кон.}}^{\text{см.}}}{b_{\text{кон.}}^{\text{смв.}}} \cdot \rho''. \quad (1.23)$$

Если  $b_{\text{кон.}}$  и  $b_{\text{кон.}}$  – базисы, то  $v_{b_{\text{H}}} = v_{b_{\text{кон.}}} = 0$ , условное уравнение базиса примет вид

$$\sum_{i=1}^{K+1} (\operatorname{ctg} \tau_i v_{\tau_i}' - \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i}') + W_b'' = 0 \quad (1.24)$$

## 1.8. Условные уравнения полюса

Данное условие возникает в центральных системах и в геодезических построениях, где имеются диагональные направления. На рис. 1.12 показана центральная система.

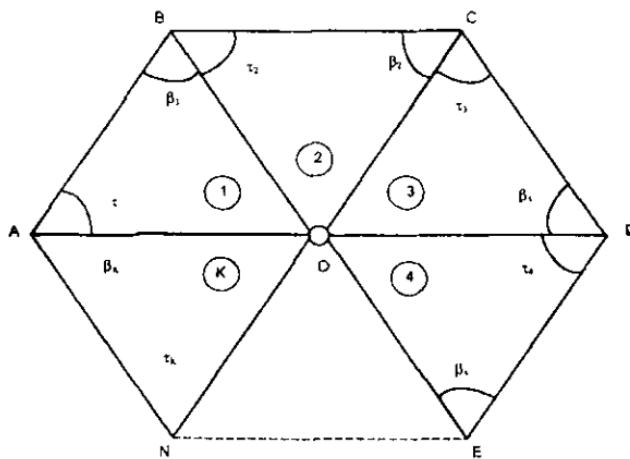


Рис. 1.12. Центральная система

В ней возникает условие полюса в точке О. На рис. 1.13 приведен геодезический четырехугольник, для которого можно записать 5 условий полюса в вершинах О, А, В, С, Д.

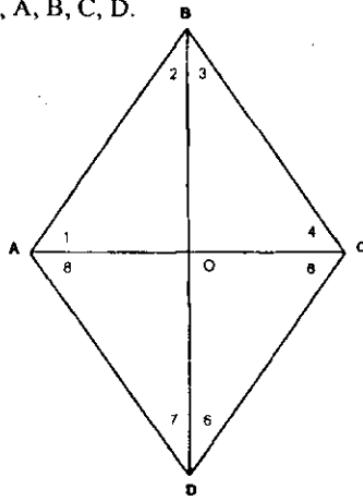


Рис. 1.13. Геодезический четырехугольник

На рис. 1.14 показан веер, для которого можно записать одно условие полюса (так как имеется одна диагональ) для вершины О.

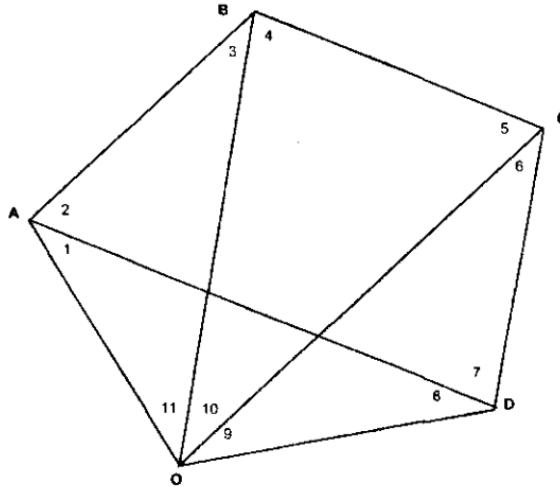


Рис. 1.14. Веер

На рис. 1.15 показана центральная система, для которой полюс можно записать в вершинах О, А, В, С.

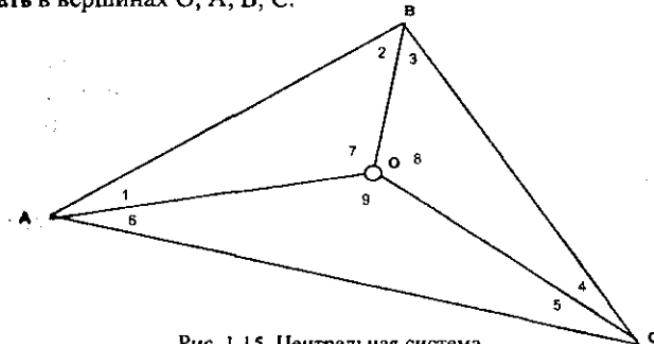


Рис. 1.15. Центральная система

Выведем условное уравнение полюса для центральной системы, показанной на рис. 1.12.

Для записи уравнения связи возьмем сторону S между пунктами О и А. Получим

$$W = S \frac{\sin \tau_1, \dots, \sin \tau_k}{\sin \beta_1, \dots, \sin \beta_k} - S = S \left( \frac{\sin \tau_1, \dots, \sin \tau_k}{\sin \beta_1, \dots, \sin \beta_k} - 1 \right). \quad (1.25)$$

Найдем  $dW$ , т.е.  $\partial\varphi/\partial\tau_1$ ,  $\partial\varphi/\partial\tau_k$ ,  $\partial\varphi/\partial\beta_1$ ,  $\partial\varphi/\partial\beta_k$ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = S \frac{\cos\tau_1 \sin\tau_2 \dots \sin\tau_k}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \dots \sin\beta_k} \cdot \frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_1} = S \cdot \operatorname{ctg}\tau_1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i} = S \cdot \operatorname{ctg}\tau_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} = S \frac{\sin\tau_1 \sin\tau_2 \dots \sin\tau_k}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \dots \sin\beta_k} \cdot \left( -\frac{\cos\beta_1}{\sin^2\beta_1} \right) = -S \cdot \operatorname{ctg}\beta_1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} = -S \cdot \operatorname{ctg}\beta_i;$$

$$dW = S \sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg}\tau_i d\tau_i - \operatorname{ctg}\beta_i d\beta_i). \quad (1.26)$$

Тогда  $dW + W = 0$  с переходом от дифференциалов к поправкам примет вид

$$S \sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg}\tau_i v_{\tau_i} - \operatorname{ctg}\beta_i v_{\beta_i}) + S \left( \frac{\sin\tau_1 \dots \sin\tau_k}{\sin\beta_1 \dots \sin\beta_k} - 1 \right) = 0.$$

Умножая это уравнение на  $\rho''/S$ , окончательно получим

$$\sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg}\tau_i v_{\tau_i}'' - \operatorname{ctg}\beta_i v_{\beta_i}'') + \rho'' \left( \frac{\sin\tau_1 \dots \sin\tau_k}{\sin\beta_1 \dots \sin\beta_k} - 1 \right) = 0 \quad (1.27)$$

Основной трудностью при записи условного уравнения полюса является правильное написание условного уравнения связи вида (1.25).

Запишем все четыре условных уравнения связи для центральной системы (см. рис. 1.15).

Полюс в точке О.

Углы  $\tau$  и  $\delta$  можно найти с помощью матрицы связи (рис. 1.16), для которой в верхней строке указываем названия вершин по ходу часовой стрелки.

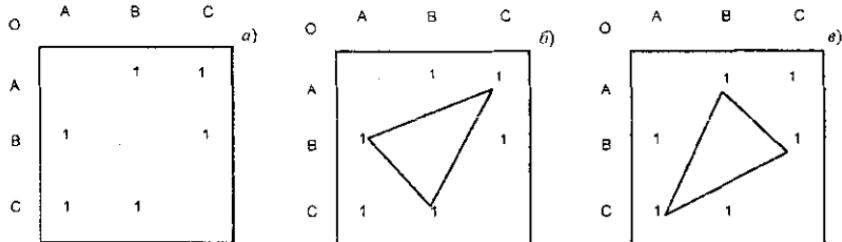


Рис. 1.16. Матрица связи

Заполняем левый первый столбец.

На рис. 1.16, б показан верхний треугольник для углов числителя, а на рис. 1.16, в показан нижний треугольник для углов знаменателя. Затем пишем заготовку

$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA \cdot OB \cdot OC}, \quad (1.28)$$

в которую вписываем вершину угла в соответствии со связью, указанной на рис. 1.16, б и 1.16, в. Например, для заготовки OA мы приписываем вершину C, так как единица находится в первой строке третьего столбца. В знаменателе для заготовки OA пишем В в соответствии с первой в первой строке 2-го столбца (см. рис. 1.16, в).

Аналогично, пользуясь рис. 1.16, б и 1.16, в, окончательно вместо (1.28) запишем

$$\frac{\angle OAC \cdot \angle OBA \cdot \angle OCB}{\angle OAB \cdot \angle OBC \cdot \angle OCA} = \frac{\angle 6 \cdot \angle 2 \cdot \angle 4}{\angle 1 \cdot \angle 3 \cdot \angle 5}. \quad (1.29)$$

Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W^* = \rho^* \left( \frac{\sin 6 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4}{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5} - 1 \right),$$

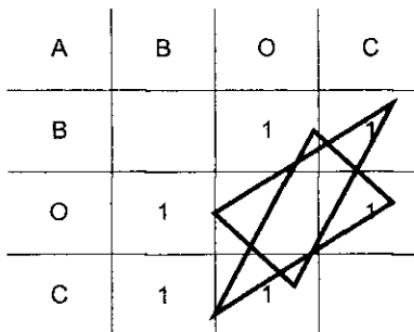
Условные уравнения полюса для точки О (см. рис. 1.15)

$$\operatorname{ctg} 6v_6 + \operatorname{ctg} 2v_2 + \operatorname{ctg} 4v_4 - \operatorname{ctg} 1v_1 - \operatorname{ctg} 3v_3 - \operatorname{ctg} 5v_5 + W = 0$$

Для последующих примеров будем приводить рис. 1.16, б, аналогичный 1.16, а, и углы числителя и знаменателя аналогично (1.29).

Для полюса в точке А (см. рис. 1.15)

заготовка



$$\frac{AB \cdot AO \cdot AC}{AB \cdot AO \cdot AC}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle ABC \cdot \angle AOB \cdot \angle ACO}{\angle ABO \cdot \angle AOC \cdot \angle ACB} = \frac{\angle (2+3) \cdot \angle 7 \cdot \angle 5}{\angle 2 \cdot \angle 9 \cdot \angle (5+4)},$$

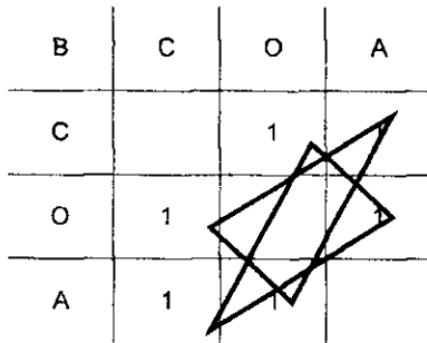
Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W'' = \rho'' \left( \frac{\sin \angle(2+3) \cdot \sin \angle 7 \cdot \sin \angle 5}{\sin \angle 2 \cdot \sin \angle 9 \cdot \sin \angle(5+4)} - 1 \right),$$

$$\operatorname{ctg}(2+3)v_1 + \operatorname{ctg}(2+3)v_3 + \operatorname{ctg} 7v_7 + \operatorname{ctg} 5v_5 - \operatorname{ctg} 2v_2 - \operatorname{ctg} 9v_9 - \operatorname{ctg}(5+4)v_5 - \operatorname{ctg}(5+4)v_4 + W = 0$$

Для полюса в точке В (см. рис. 1.15)

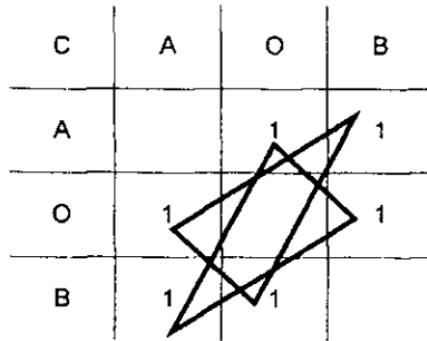
заготовка



$$\frac{BC \cdot BO \cdot BA}{BC \cdot BO \cdot BA}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle BCA \cdot \angle BOC \cdot \angle BAO}{\angle BCO \cdot \angle BOA \cdot \angle BAC} = \frac{\angle(4+5) \cdot \angle 8 \cdot \angle 1}{\angle 4 \cdot \angle 7 \cdot \angle(1+6)};$$

Для полюса в точке С (см. рис. 1.15)

заготовка

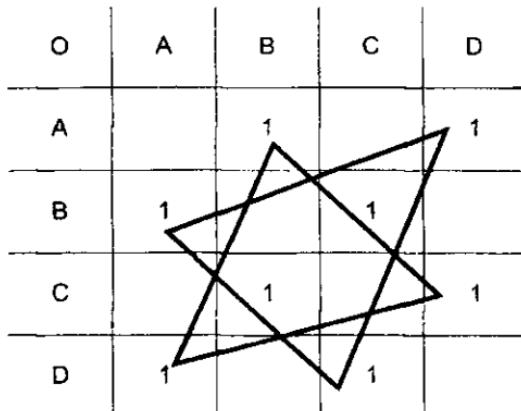


$$\frac{CA \cdot CO \cdot CB}{CA \cdot CO \cdot CB}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle CAB \cdot \angle COA \cdot \angle CBO}{\angle CAO \cdot \angle COB \cdot \angle CBA} = \frac{\angle(1+6) \cdot \angle 9 \cdot \angle 3}{\angle 6 \cdot \angle 8 \cdot \angle(2+3)};$$

Для геодезического четырехугольника (см. рис. 1.13) можно записать 5 условий полюса.

Для полюса в точке О (см. рис. 1.13)

заготовка



$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}; \text{ углы } \frac{\angle OAD \cdot \angle OBA \cdot \angle OCB \cdot \angle ODC}{\angle OAB \cdot \angle OBC \cdot \angle OCD \cdot \angle ODA} = \frac{\angle 8 \cdot \angle 2 \cdot \angle 4 \cdot \angle 6}{\angle 1 \cdot \angle 3 \cdot \angle 5 \cdot \angle 7};$$

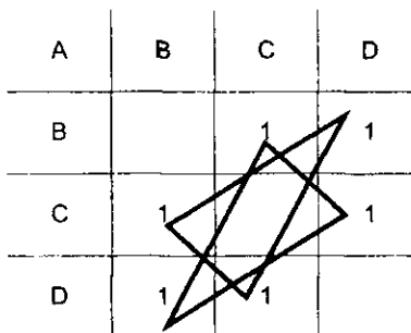
Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W'' = \rho'' \left( \frac{\sin \angle 8 \cdot \sin \angle 2 \cdot \sin \angle 4 \cdot \sin \angle 6}{\sin \angle 1 \cdot \sin \angle 3 \cdot \sin \angle 5 \cdot \sin \angle 7} - 1 \right),$$

$$\operatorname{ctg} 8v_4 + \operatorname{ctg} 2v_2 + \operatorname{ctg} 4v_4 + \operatorname{ctg} 6v_6 - \operatorname{ctg} 1v_1 - \operatorname{ctg} 3v_3 - \operatorname{ctg} 5v_5 - \operatorname{ctg} 7v_7 + W = 0$$

Для полюса в точке А (см. рис. 1.13)

заготовка



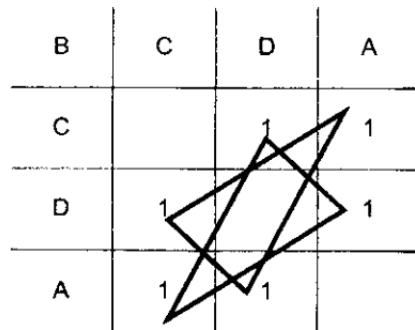
$$\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB \cdot AC \cdot AD}; \text{ углы } \frac{\angle ABD \cdot \angle ACB \cdot \angle ADC}{\angle ABC \cdot \angle ACD \cdot \angle ADB} = \frac{\angle 2 \cdot \angle 4 \cdot \angle (6+7)}{\angle (2+3) \cdot \angle 5 \cdot \angle 7};$$

$$W'' = \rho^* \left( \frac{\sin \angle 2 \cdot \sin \angle 4 \cdot \sin \angle (6+7)}{\sin \angle (2+3) \cdot \sin \angle 5 \cdot \sin \angle 7} - 1 \right),$$

$$\operatorname{ctg} 2v_2 + \operatorname{ctg} 4v_4 + \operatorname{ctg} (6+7)v_6 + \operatorname{ctg} (6+7)v_7 - \operatorname{ctg} (2+3)v_2 - \operatorname{ctg} (2+3)v_3 - \operatorname{ctg} 5v_5 - \operatorname{ctg} 7v_7 + W = 0$$

Для полюса в точке В (см. рис. 1.13)

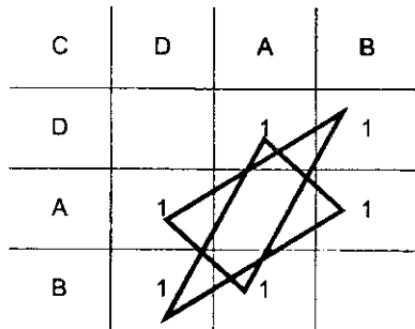
заготовка



$$\frac{BC \cdot BD \cdot BA}{BC \cdot BD \cdot BA}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle BCA \cdot \angle BDC \cdot \angle BAD}{\angle BCD \cdot \angle BDA \cdot \angle BAC} = \frac{\angle 4 \cdot \angle 6 \cdot \angle (1+8)}{\angle (4+5) \cdot \angle 7 \cdot \angle 1};$$

Для полюса в точке С (см. рис. 1.13)

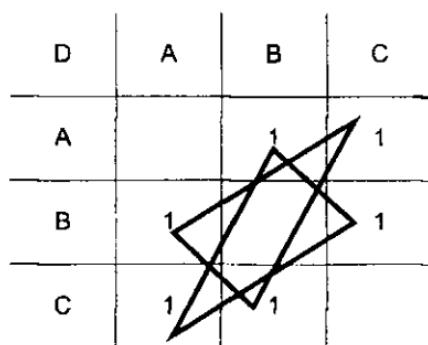
заготовка



$$\frac{CD \cdot CA \cdot CB}{CD \cdot CA \cdot CB}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle CDB \cdot \angle CAD \cdot \angle CBA}{\angle CDA \cdot \angle CAB \cdot \angle CBD} = \frac{\angle 6 \cdot \angle 8 \cdot \angle (2+3)}{\angle (6+7) \cdot \angle 1 \cdot \angle 3};$$

Для полюса в точке D (см. рис. 1.13)

заготовка

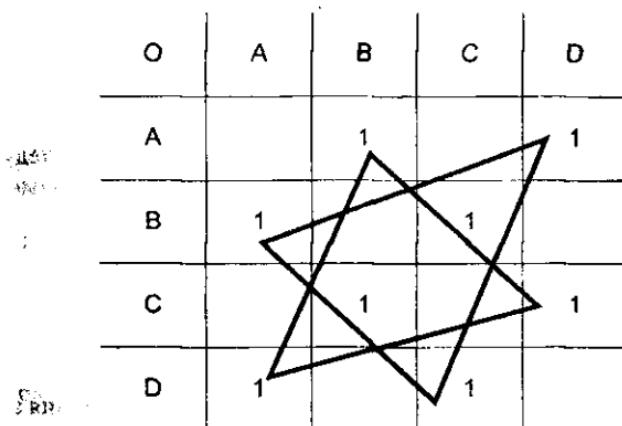


$$\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA \cdot DB \cdot DC}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle DAC \cdot \angle DBA \cdot \angle DCB}{\angle DAB \cdot \angle DBC \cdot \angle DCA} = \frac{\angle 8 \cdot \angle 2 \cdot \angle (4+5)}{\angle (1+8) \cdot \angle 3 \cdot \angle 5};$$

Для веера (см. рис. 1.14) возникает одно условие полюса.

Для полюса в точке О (см. рис. 1.14)

заготовка



$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}; \quad \text{углы} \quad \frac{\angle OAD \cdot \angle OBC \cdot \angle OCD \cdot \angle ODC}{\angle OAB \cdot \angle OBC \cdot \angle OCD \cdot \angle ODA} = \frac{\angle 1 \cdot \angle 3 \cdot \angle 5 \cdot \angle (7+8)}{\angle (1+2) \cdot \angle 4 \cdot \angle 6 \cdot \angle 8};$$

**Условное уравнение запишется в таком виде**

$$W' = \rho' \left( \frac{\sin \angle 1 \cdot \sin \angle 3 \cdot \sin \angle 5 \cdot \sin \angle (7+8)}{\sin \angle (1+2) \cdot \sin \angle 4 \cdot \sin \angle 6 \cdot \sin \angle 8} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg} v_1 + \operatorname{ctg} 3v_3 + \operatorname{ctg} 5v_5 + \operatorname{ctg} (7+8)v_7 + \operatorname{ctg} (7+8)v_8 - \\ & - \operatorname{ctg} (1+2)v_1 - \operatorname{ctg} (1+2)v_2 - \operatorname{ctg} 4v_4 - \operatorname{ctg} 6v_6 - \operatorname{ctg} 8v_8 + W = 0 \end{aligned}$$

### 1.9. Условия координат в полигонометрии

Для определения положения пунктов геодезической сети достаточно знать координаты двух пунктов, чтобы геодезическим способом передать координаты на все остальные пункты сети. При наличии в сети дополнительных исходных пунктов необходимо согласование всех измерений с координатами заданных пунктов. Математические выражения этих требований называются условиями координат, подразделяющимися на условия абсцисс и ординат.

Рассмотрим составления этих условных уравнений для сетей полигонометрии.

Для вывода формул обратимся к рис. 1.11.

Координаты исходного пункта В можно получить, передавая прращение координат от точки А.

$$X_B^{\text{inv}} = X_A^{\text{inv}} + \sum_{i=1}^K \Delta X_i = X_A^{\text{inv}} + \sum_{i=1}^K S_i \cos \alpha_i;$$

$$Y_B^{\text{inv}} = Y_A^{\text{inv}} + \sum_{i=1}^K \Delta Y_i = Y_A^{\text{inv}} + \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i;$$

Свободные члены условия координат вычисляются по следующим выражениям

$$W_x = X_B^{\text{inv}} - X_B^{\text{inv}}; \quad W_y = Y_B^{\text{inv}} - Y_B^{\text{inv}},$$

дифференцируя которые, найдем

$$dW_x = \sum_{i=1}^K d(S_i \cos \alpha_i) = \sum_{i=1}^K dS_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^K S_i (-\sin \alpha_i) d\alpha_i.$$

Переходя от дифференциалов к поправкам, получим условия абсцисс

$$\sum_{i=1}^K V_s \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i \frac{V'_s}{\rho'} + W_x = 0, \quad (1.30)$$

которое было бы окончательным, если бы в полигонометрии измерялись дирекционные углы.

Но так как  $\alpha_i = \alpha_{i\alpha} + \sum_{j=1}^l \beta_j - i \cdot 180^\circ$ , получим  $V_\alpha$  через  $V_\beta$  и подставим его в (1.30). Очевидно, что  $V_{\alpha_i} = V_{\beta_i}$ ;

$$V_{\alpha_i} = V_{\beta_i} + V_{\beta_i};$$

$$V_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k V_{\beta_i},$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} &= \Delta y_1 V_{\beta_1} + \Delta y_2 V_{\beta_2} + \dots + \Delta y_k V_{\beta_k} = \\ &= \Delta y_1 V_{\beta_1} + \\ &+ \Delta y_2 V_{\beta_2} + \Delta y_2 V_{\beta_2} + \\ &+ \Delta y_3 V_{\beta_3} + \Delta y_3 V_{\beta_3} + \Delta y_3 V_{\beta_3} + \\ &\dots \\ &+ \Delta y_k V_{\beta_k} + \Delta y_k V_{\beta_k} + \Delta y_k V_{\beta_k} + \dots + \Delta y_k V_{\beta_k} = \\ &= (y_{k+1} - y_1) V_{\beta_1} + (y_{k+1} - y_2) V_{\beta_2} + (y_{k+1} - y_3) V_{\beta_3} + \dots + (y_{k+1} - y_k) V_{\beta_k} \end{aligned}$$

так как

$$(y_{k+1} - y_1) = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_k$$

$$(y_{k+1} - y_2) = \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_k$$

$$(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_k.$$

Суммируя итоговое выражение, получим  $\sum_{i=1}^k S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k (y_{k+1} - y_i) \frac{V_{\beta_i}}{\rho}$ ,

подставляя которое в (1.30) окончательно для условия абсцисс запишем

$$\sum_{i=1}^k V_{S_i} \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^k (y_{k+1} - Y_i) \frac{V_{\beta_i}}{\rho} + W_x = 0.$$

Условие ординат по аналогии с условием абсцисс будет таким

$$\sum_{i=1}^k V_{S_i} \sin \alpha_i + \sum_{i=1}^k (X_{k+1} - X_i) \frac{V_{\beta_i}}{\rho} + W_y = 0.$$

## 1.10. Условия координат в триангуляции

На рис. 1.10 приведено звено триангуляции. Координаты исходных пунктов А, В, С, Д, дирекционные углы  $\alpha_{AC}$  и  $\alpha_{BD}$  и базисы  $b_{AC}$  и  $b_{BD}$  не подлежат уравниванию.

По аналогии с полигонометрией запишем

$$W_x = X_B^{new} - X_B^{old}; \quad W_y = Y_B^{new} - Y_B^{old}.$$

Наиболее простой путь передачи координат от точки А к точке В по ходовой линии, углами поворота которой являются промежуточные углы  $\gamma_i$

$$W_x = X_A^{new} + \sum_{i=1}^K S_i \cos \alpha_i - X_B^{old};$$

$$W_y = Y_A^{new} + \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i - Y_B^{old};$$

дифференцируя которые, найдем

$$\sum_{i=1}^K V_s \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} + W_x = 0, \quad (1.31)$$

$$\sum_{i=1}^K V_s \sin \alpha_i + \sum_{i=1}^K S_i \cos \alpha_i V_{\alpha_i} + W_y = 0. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.31), (1.32) были бы окончательными, если  $v_s$  заменить  $v_B$  и  $v_T$ , так как в триангуляции измеряют не стороны, а углы.

По аналогии  $v_\alpha$  заменим через  $v_\gamma$ , последнее приведено в табл. 1.1 для равенства

$$\sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} = \Delta y_1 V_{\alpha_1} + \Delta y_2 V_{\alpha_2} + \dots + \Delta y_K V_{\alpha_K},$$

и согласно колонке 4 табл. 1.1 запишем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} &= -(y_B - y_A) V_{\gamma_1} + (y_B - y_2) V_{\gamma_2} - (y_B - y_3) V_{\gamma_3} + \dots + (y_B - y_K) V_{\gamma_K} = \\ &= -(y_{K+1} - y_1) V_{\gamma_1} + (y_{K+1} - y_2) V_{\gamma_2} - (y_{K+1} - y_3) V_{\gamma_3} + \dots + (y_{K+1} - y_K) V_{\gamma_K} = \sum_{i=1}^K (-1)^i (y_{K+1} - y_i) v_\gamma_i \end{aligned}$$

В соответствии с колонкой 4 табл. 1.2 имеем

$$\begin{aligned} &(X_B - X_A) R_1 + (X_B - X_2) R_2 + (X_B - X_3) R_3 + \dots + (X_B - X_K) R_K = \\ &= (X_{K+1} - X_1) R_1 + (X_{K+1} - X_2) R_2 + (X_{K+1} - X_3) R_3 + \dots + (X_{K+1} - X_K) R_K = \\ &= \sum_{i=1}^K (X_{K+1} - X_i) R_i = \sum_{i=1}^K (X_{K+1} - X_i) (\operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i} - \operatorname{ctg} \tau_i v_{\tau_i}) \end{aligned}$$

Таблица 1.1

Преобразование по замене  $v_\alpha$  через  $v_\gamma$ 

№пп	Замена $\alpha$ через $\gamma$	Замена $v_\alpha$ через $v_\gamma$	Аналогичные преобразования
1	2	3	4
1	$\alpha_1 = \alpha_H - \gamma_1$	$v_{\alpha_1} = -v_{\gamma_1}$	$-\Delta y_1 v_{\gamma_1}$
2	$\alpha_2 = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2$	$v_{\alpha_2} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2}$	$-\Delta y_2 v_{\gamma_1} + \Delta y_2 v_{\gamma_2}$
3	$\alpha_3 = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$	$v_{\alpha_3} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - v_{\gamma_3}$	$-\Delta y_3 v_{\gamma_1} + \Delta y_1 v_{\gamma_2} - \Delta y_3 v_{\gamma_3}$
...	...	...	...
K	$\alpha_K = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \dots + \gamma_K$	$v_{\alpha_K} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - v_{\gamma_3} + \dots + v_{\gamma_K}$	$-\Delta y_K v_{\gamma_1} + \Delta y_1 v_{\gamma_2} - \Delta y_K v_{\gamma_K} + \dots + \Delta y_K$

Таблица 1.2

Преобразование по замене  $v_S$  через  $v_B$  и  $v_T$ 

№пп	Замена S через $\beta$ и $\tau$	Замена $v_S$ через $v_B$ и $v_T$	Аналогичные преобразования
1	2	3	4
1	$S_1 = \frac{b \sin \beta_1}{\sin \tau_1}$	$v_{S_1} = S_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 v_B - \operatorname{ctg} \tau_1 v_T)$	$R_1 = (\operatorname{ctg} \beta_1 v_B - \operatorname{ctg} \tau_1 v_T)$ $\Delta X_1 R_1$
2	$S_2 = \frac{b \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \tau_1 \sin \tau_2}$	$v_{S_2} = S_2 \sum_{i=1}^2 (\operatorname{ctg} \beta_i v_B - \operatorname{ctg} \tau_i v_T)$	$\Delta X_2 R_1 + \Delta X_2 R_2$
3	$S_3 = \frac{b \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}{\sin \tau_1 \sin \tau_2 \sin \tau_3}$	$v_{S_3} = S_3 \sum_{i=1}^3 (\operatorname{ctg} \beta_i v_B - \operatorname{ctg} \tau_i v_T)$	$\Delta X_3 R_1 + \Delta X_1 R_2 + \Delta X_3 R_3$
...	...	...	...
K	$S_K = \frac{b \prod_{i=1}^K \sin \beta_i}{\prod_{i=1}^K \sin \tau_i}$	$v_{S_K} = S_K \sum_{i=1}^K (\operatorname{ctg} \beta_i v_B - \operatorname{ctg} \tau_i v_T)$	$\Delta X_K R_1 + \Delta X_K R_2 + \Delta X_K R_3 + \dots + \Delta X_K R_K$

Подставляя в (1.31) полученные из табл. 1.1 и 1.2 суммы, окончательно запишем условие абсцисс

$$\sum_{i=1}^K - \left[ (X_{K+1} - X_i) \operatorname{ctg} \beta_i v_B'' - (X_{K+1} - X_i) \operatorname{ctg} \tau_i v_T'' + (-1)^{i+1} (y_{K+1} - y_i) v_Y'' \right] + W_X \rho'' = 0$$

Так как вывод для условия ординат (см. формулу (1.32) аналогичен, окончательно запишем

$$\sum_{i=1}^k \left[ (Y_{k+1} - Y_i) \operatorname{ctg} \beta_i V_\beta'' - (Y_{k+1} - Y_i) \operatorname{ctg} \tau_i V_\tau'' + (-1)^i (X_{k+1} - X_i) V_\gamma'' \right] + W_r \rho'' = 0$$

### 1.11. Условное уравнение замыкающей для полигонометрического хода без примычных углов

Если ход (см. рис. 1.11) проложен без примычных углов  $\beta_1$  и  $\beta_{k+1}$ , то получим координатную привязку, а свободный член условия замыкающей примет вид

$$W_s = S_{AB}^{new} - S_{AB}^{rec} = \sqrt{(X_{k+1}^{new} - X_1^{rec})^2 + (Y_{k+1}^{new} - Y_1^{rec})^2} - S_{AB}^{rec} = \\ = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^k S_i \cos \alpha_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^k S_i \sin \alpha_i \right)^2} - S_{AB}^{rec}. \quad (1.33)$$

Дифференцируя (1.33) по  $S$ , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{1}{2S_{AB}} \left( 2 \sum_{i=1}^k \Delta X_i \cos \alpha_i V_{S_i} + 2 \sum_{i=1}^k \Delta Y_i \sin \alpha_i V_{S_i} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{1}{2S_{AB}} \left( -2 \sum_{i=1}^k \Delta X_i S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} + 2 \sum_{i=1}^k \Delta Y_i S_i \cos \alpha_i V_{\alpha_i} \right),$$

так как измеряют  $\beta$ , а не  $\alpha$ , заменим в предыдущем равенстве  $V_\alpha$  через  $V_\beta$  по аналогии с п. 1.9

$$\sum_{i=1}^k \Delta X_i S_i \sin \alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=2}^k \Delta X_i (Y_{k+1} - Y_i) V_\beta,$$

где  $i = 2$  взято потому, что при любой функции  $f$   $V_\beta = f(V_\alpha) = 0$ .

$$\sum_{i=2}^k \Delta Y_i S_i \cos \alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=2}^k \Delta Y_i (X_{k+1} - X_i) V_\beta$$

тогда  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{1}{S_{AB}} \sum_{i=2}^k \left\{ [\Delta Y_i (X_{k+1} - X_i) - \Delta X_i (Y_{k+1} - Y_i)] \frac{V_\beta}{\rho''} \right\}$

Окончательно условное уравнение замыкающей примет вид

$$\sum_{i=1}^k \left[ \frac{\Delta X_i}{S_{AB}} \cos \alpha_i + \frac{\Delta Y_i}{S_{AB}} \sin \alpha_i \right] V_{S_i} + \sum_{i=2}^k \left\{ \left[ \frac{\Delta Y_i}{S_{AB}} (X_{k+1} - X_i) - \frac{\Delta X_i}{S_{AB}} (Y_{k+1} - Y_i) \right] \frac{V_\beta''}{\rho''} \right\} + W_s = 0.$$

## 1.12. Общий прием составления условных уравнений в трилатерации. Дифференциальная формула Бутлера

В трилатерации, как правило, число избыточных измерений ограничено. Например, в центральной системе и в геодезическом четырехугольнике избыточно измерена одна сторона. Здесь возникает одно условие. По аналогии с триангуляцией такое условие можно назвать условием фигуры.

Практически условное уравнение в трилатерации удобно записывать через углы, а затем поправки углов заменять поправками измеренных сторон. С этой целью рассмотрим дифференциальную зависимость изменения угла от изменения стороны треугольника (рис. 1.17).

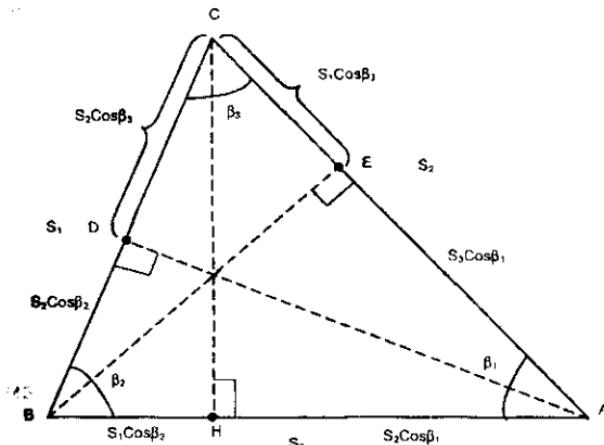


Рис. 1.17. Треугольник трилатерации

Для вывода формулы Бутлера воспользуемся теоремой косинусов

$$\begin{aligned} S_1^2 &= S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3 \cos \beta_1; \\ S_2^2 &= S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3 \cos \beta_2; \\ S_3^2 &= S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \beta_3. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Продифференцируем первое из трех уравнений по переменным  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $\beta_1$ . Сокращая в левой и правой части 2, получим

$$S_1 dS_1 = S_2 dS_2 + S_3 dS_3 - S_3 \cos \beta_1 dS_2 - S_2 \cos \beta_1 dS_3 + S_2 S_3 \sin \beta_1 d\beta_1$$

$$\text{отсюда } d\beta_1 = \frac{1}{S_2 S_3 \sin \beta_1} [dS_2 (S_3 \cos \beta_1 - S_2) + dS_3 (S_2 \cos \beta_1 - S_3) + S_1 dS_1].$$

Из рис. 1.17 видно, что  $S_3 \cos \beta_1 - S_2 = -S_1 \cos \beta_3$ ;  $S_2 \cos \beta_1 - S_3 = -S_1 \cos \beta_2$ .

Подставляя полученные равенства в предыдущее и переходя от дифференциалов к поправкам, окончательно получим

$$v_{\beta_1}'' = \frac{S_2 \rho''}{S_2 S_3 \sin \beta_1} (v_{s_1} - \cos \beta_3 v_{s_1} - \cos \beta_2 v_{s_1});$$

тогда для остальных двух уравнений (1.34) без вывода запишем

$$\begin{aligned} v_{\beta_2}'' &= \frac{S_2 \rho''}{S_1 S_3 \sin \beta_2} (v_{s_1} - \cos \beta_3 v_{s_1} - \cos \beta_1 v_{s_1}); \\ v_{\beta_3}'' &= \frac{S_3 \rho''}{S_1 S_2 \sin \beta_3} (v_{s_1} - \cos \beta_2 v_{s_1} - \cos \beta_1 v_{s_1}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Приведем пример. На рис. 1.18 показана центральная система трилатерации, для которой, как было указано выше, условие горизонта имеет вид

$$v_h'' + v_{r_1}'' + v_{r_2}'' + W'' = 0$$

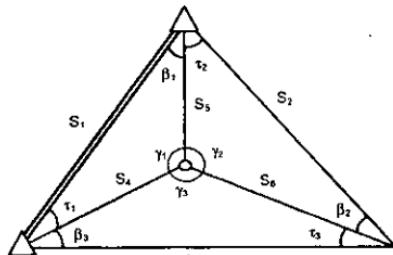


Рис. 1.18. Центральная система трилатерации

Пользуясь формулами (1.35), для углов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  запишем

$$v_{r_1}'' = \frac{S_4 \rho''}{S_4 S_5 \sin \gamma_1} (v_{s_1} - \cos \tau_1 v_{s_4} - \cos \beta_1 v_{s_1});$$

$$v_{r_2}'' = \frac{S_5 \rho''}{S_5 S_6 \sin \gamma_2} (v_{s_1} - \cos \tau_2 v_{s_5} - \cos \beta_2 v_{s_1});$$

$$v_{r_3}'' = \frac{S_6 \rho''}{S_4 S_6 \sin \gamma_3} (v_{s_1} - \cos \tau_3 v_{s_6} - \cos \beta_3 v_{s_1}).$$

### 1.13. Допустимые величины свободных членов условных уравнений

Из теории метода наименьших квадратов известна формула

$$W_{\text{don.}} = t \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_i^2}, \quad (1.36)$$

где  $t$  – вероятностный квантиль, принимаемый в зависимости от вероятности величины 2,0 или 2,5;  $b_i$  – коэффициенты условного уравнения (или

строка матрицы  $B_{n \times N}$ ;  $\sigma$  – стандарт измерений, участвующий при вычислении весов измерений.

Приведем формулы вычисления  $W_{\text{don}}$  для различных условных уравнений.

Для условия фигур

$$W_{\text{don}} = 2,5\sigma_\beta \sqrt{n}, \quad (1.37)$$

где  $n$  – число углов в фигуре.

Для условия дирекционных углов

$$W_{\text{don}} = 2,5\sqrt{\sigma_\beta^2 n + m_{\alpha_0}^2 + m_{\alpha_k}^2}, \quad (1.38)$$

где  $m_{\alpha_0}$ ,  $m_{\alpha_k}$  – средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов.

Для условия базиса

$$W_{\text{don}} = 2,5\sqrt{\sigma_\beta^2 \sum_{i=1}^N \operatorname{cig}^2 \beta_i + \left(\frac{m_b}{b} \rho^*\right)_{\text{нов.}}^2 + \left(\frac{m_b}{b} \rho^*\right)_{\text{кон.}}^2}, \quad (1.39)$$

где  $\frac{m_b}{b} \rho^*$  – ошибки базисных сторон.

Для условия координат

$$W_{x_{\text{don}}} = 2,5\sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta^*}{\rho^*}\right)^2 \sum_{i=1}^N b_x^2 + 2m_x^2}, \quad (1.40)$$

$$W_{y_{\text{don}}} = 2,5\sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta^*}{\rho^*}\right)^2 \sum_{i=1}^N b_y^2 + 2m_y^2}$$

где  $b_x$ ,  $b_y$  – коэффициенты условных уравнений;  $m_x$ ,  $m_y$  – погрешности в координатах исходных пунктов.

## 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

### 2.1. Сущность параметрического способа уравнивания

Выше рассмотрен коррелатный способ уравнивания, основанный на оптимизации условного экстремума. В параметрическом способе применяется абсолютный экстремум минимизации целевой функции

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X), \quad (2.1)$$

где

$$L(X) = f(X) - T \quad (2.2)$$

– вектор свободных членов параметрических уравнений, в котором  $f(X)$  – вычисленное по неизвестным  $X$  значение измеренной величины  $T$ .

Если минимум функции (2.1) найден, то

$$V = f(\hat{X}) - T, \quad (2.3)$$

где  $\hat{X}$  – оценки параметров (уравненные координаты пунктов);  $V$  – вектор поправок в результаты измерений;  $f(\hat{X})$  – значение уравненных измерений.

Таким образом,

$$\Phi(\hat{X}) = \sum_{i=1}^N P_i V_i^2 = \min. \quad (2.4)$$

### 2.2. Алгоритм параметрического способа уравнивания

Приведем алгоритм параметрического способа уравнивания в матричной форме записи, в которой система линейных параметрических уравнений имеет вид

$$V_{N \times 1} = A_{N \times d} \delta X_{d \times 1} + L_{N \times 1}, \quad (2.5)$$

где используются следующие векторы и матрицы

$$V_{N \times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}; \quad \delta X_{d \times 1} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_d \end{pmatrix}; \quad L_{N \times 1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix};$$

$$A_{N \times N} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}; \quad P_{N \times N} = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & P_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & P_N \end{pmatrix},$$

где  $P_{N \times N}$  – диагональная матрица весов, некоррелированных измерений, используемая при отыскании неизвестных  $\delta X_{\text{од}}$  под условием (2.4).

Поскольку число неизвестных  $\delta X_{\text{од}}$  меньше количества уравнений  $N$ , то система (2.5) называется переопределенной и для получения однозначного решения под условием МНК обычно переходят к нормальным уравнениям, которые можно получить, умножая левую часть (2.5) на  $A^T P$  [12]

$$A_{N \times N}^T P_{N \times N} V_{N \times 1} = A_{N \times N}^T P_{N \times N} A_{N \times N} \delta X_{\text{од}} + A_{N \times N}^T P_{N \times N} L_{N \times 1},$$

где в левой части получаем градиент целевой функции (2.1), а он в точке минимума равен нулю. Обозначим  $R = A^T P A$ ,  $B = A^T P L$  соответственно через матрицу коэффициентов нормальных уравнений  $R$  и вектор свободных членов нормальных уравнений. С учетом обозначений имеем

$$R_{\text{од}} \delta X_{\text{од}} + B_{\text{од}} = 0, \quad (2.6)$$

откуда

$$\delta X_{\text{од}} = -Q_{\text{од}} B_{\text{од}},$$

где  $Q_{\text{од}} = R_{\text{од}}^{-1}$  – обратная весовая матрица, используемая не только при уравнивании, но и при оценке точности функции по формуле (1.8) с применением равенства

$$\frac{1}{P_F} = f_{\text{од}} Q_{\text{од}} f_{\text{од}}^T,$$

где  $f$  – оцениваемая функция со строкой коэффициентов

$$f_{\text{од}} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

откуда видно, что коэффициенты весовой функции получаются по тем же правилам, что и коэффициенты линейных параметрических уравнений для различных измеренных величин.

Вопросам вычисления  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  для различных измеренных величин посвящены следующие подразделы.

### 2.3. Составление уравнения поправок для измеренного дирекционного угла

В геодезической практике обычно измеряют азимуты, которые редуцируют на плоскость проекций и получают дирекционные углы. Как отмечалось выше, свободный член нелинейного параметрического уравнения для дирекционного угла  $\alpha_{AB}$  можно вычислить по формуле

$$l(X_A, Y_A, X_B, Y_B) = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \alpha_{AB}. \quad (2.7)$$

Перейдем от этого нелинейного уравнения к формуле

$$\nu_a = \left( \frac{\partial f}{\partial X_A} \right) \delta X_A + \left( \frac{\partial f}{\partial Y_A} \right) \delta Y_A + \left( \frac{\partial f}{\partial X_B} \right) \delta X_B + \left( \frac{\partial f}{\partial Y_B} \right) \delta Y_B + \rho'' l. \quad (2.8)$$

Найдем частные производные, входящие в (2.8)

$$\frac{\partial f}{\partial X_A} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)^2} \cdot \left( -\frac{\Delta Y}{\Delta X^2} \right) \cdot (-1) = \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial X_B} = -\frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2};$$

далее получим

$$\frac{\partial f}{\partial Y_A} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)^2} \cdot \frac{1}{\Delta X} \cdot (-1) = -\frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial Y_B} = \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2}.$$

Подставляя частные производные в (2.8), предварительно умножив их на  $l$  и  $\rho''$ , получим следующие коэффициенты линейного параметрического уравнения

$$a_{AB} = \rho'' \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2} = \rho'' \frac{\sin \alpha_{AB}}{S_{AB}}; \quad a_{BA} = -a_{AB}; \quad (2.9)$$

$$b_{AB} = -\rho'' \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2} = -\rho'' \frac{\cos \alpha_{AB}}{S_{AB}}; \quad b_{BA} = -b_{AB}.$$

В общем виде имеем

$$\nu_{\alpha_{AB}} = a_{AB} \delta X_A + b_{AB} \delta Y_A + a_{BA} \delta X_B + b_{BA} \delta Y_B + l. \quad (2.10)$$

## 2.4. Составление уравнения поправок для измеренного направления и горизонтального угла

Пусть имеем на пункте пучок направлений  $M_A$ , после их предварительной обработки. Дирекционный угол любого направления вычисляют по формуле

$$\alpha_{AB} = Z_A + M_{AB},$$

где  $Z_A$  – ориентирный угол или дирекционный угол первого (начального) направления, для которого  $M_A = 0$ . Тогда свободный член направления  $AB$  будет таким

$$l_{AB} = \alpha_{AB}^{inv} - (Z_A^{inv} + M_{AB}),$$

где  $Z_A^{inv} = \frac{\sum (\alpha_{A_i}^{inv} - M_{A_i})}{n}$ , в котором  $n$  – число направлений на пункте  $A$ .

Частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_A}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y_A}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x_B}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y_B}$  аналогичны тем, которые приведены в п. 2.3. В этом случае вместо (2.9) запишем

$$v_{M_{AB}} = -\delta Z_A + a_{AB} \delta x_A + b_{AB} \delta y_A + a_{BA} \delta x_B + b_{BA} \delta y_B + l''_{AB}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\delta Z_A$  – поправка в ориентирный угол  $Z_A^{inv}$ , участвующая в уравнении как неизвестная, которую обычно исключают из обработки по первому правилу Шрейбера. Знак «минус» поставлен при  $\delta Z$  потому, что  $\frac{\partial f}{\partial Z_A} = -1$ .

Поправки в ориентирные углы отсутствуют при уравнивании триангуляции «по углам». Получим уравнение поправок для измеренного горизонтального угла  $\beta$  между двумя направлениями  $AB$  и  $AC$ . Свободный член нелинейного параметрического уравнения имеет вид

$$l_\beta = (\alpha_{AC}^{inv} - \alpha_{AB}^{inv}) - \beta^{inv}$$

Чтобы получить линейное параметрическое уравнение поправок, воспользуемся формулой (2.11)

$$v_B = v_{M_{AC}} - v_{M_{AB}} = (a_{AC} - a_{AB}) \delta x_A + (b_{AC} - b_{AB}) \delta y_A + a_{CA} \delta x_C + b_{CA} \delta y_C - a_{BA} \delta x_B - b_{BA} \delta y_B + l''_\beta,$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  вычисляются по формулам (2.9).

## 2.5. Составление уравнения поправок для измеренных расстояний

В геодезической практике применяют наклонные дальности, которые редуцируют на эллипсоид и плоскость некоторой проекции. Свободный член нелинейного параметрического уравнения для горизонтального расстояния имеет вид

$$l_{S_{AB}} = S_{AB}^{\text{смн}} - S_{AB}^{\text{нsm}} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} - S_{AB}^{\text{нsm}} . \quad (2.12)$$

Для перехода к линейному параметрическому уравнению воспользуемся (2.8) и найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial X_A} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot (\Delta X)}{2\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} = -\frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}} \approx -\cos \alpha_{AB} ;$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial X_B} = \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}} = +\cos \alpha_{AB} \approx -\cos \alpha_{BA} ;$$

далее получим

$$\frac{\partial f}{\partial Y_A} = \frac{-1(2\Delta Y)}{2\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} = -\frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}} \approx -\sin \alpha_{AB} ;$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial Y_B} = \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}} = \sin \alpha_{AB} = -\sin \alpha_{BA} .$$

Подставляя частные производные в (2.8), имеем

$$v_{S_{AB}} = -\cos \alpha_{AB} \delta x_A - \sin \alpha_{AB} \delta y_A - \cos \alpha_{BA} \delta x_B - \sin \alpha_{BA} \delta y_B + l_{S_{AB}} .$$

### 3. КОМБИНИРОВАННЫЕ КОРРЕЛАТНЫЕ СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ

#### 3.1. Связь параметрического способа с коррелатным

Как отмечалось в статье [33], «уже давно геодезисты стремятся создать единый алгоритм уравнивания, пригодный для обработки любых геодезических сетей» коррелатным способом. Фундамент для разработки коррелатно-параметрических способов заложен Ю.И. Маркузе [13], а затем применен М.Д. Герасименко [4, 7].

В настоящее время имеется опыт коррелатного уравнивания геодезических сетей на ЭВМ с применением следующих способов:

1) классический способ, заключающийся в нахождении матрицы коэффициентов условных уравнений  $B$  и вектора свободных членов условных уравнений  $W$ ;

2) численный способ З.М. Юршанского, автоматизирующий получение коэффициентов матрицы  $B$  [41];

3) коррелатно-параметрический способ Ю.И. Маркузе [13] и И.И. Монина [33];

4) коррелатно-параметрический с использованием расширенной псевдообратной матрицы [25];

5) коррелатно-параметрический с использованием корреляционной матрицы поправок [26].

При коррелатном способе уравнивания под условием

$$V^T PV = \min \quad (3.1)$$

решают систему условных уравнений

$$BV + W = 0, \quad (3.2)$$

где  $B_{rxN}$  – матрица коэффициентов условных уравнений;  $W_{rx1}$  – вектор свободных членов условных уравнений;  $V_{Nx1}$  – неизвестный вектор поправок в результаты измерений, вычисляемый по формуле

$$V = -P^{-1}B^T (BP^{-1}B^T)^{-1} W, \quad (3.3)$$

$P$  – диагональная матрица весов измерений.

Рассмотрим известные алгоритмы, автоматизирующие коррелатный способ уравнивания.

### *Алгоритм З.М. Юришанского*

Автоматизированный алгоритм З.М. Юришанского [41] предлагает лишь частичную автоматизацию вычисления коэффициентов условных уравнений по формуле

$$b_i = \frac{(W_i)_\varepsilon - W}{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

где  $W$  – свободный член условного уравнения;  $(W_i)_\varepsilon$  – значение свободного члена после искажения  $i$ -того измерения на малую величину  $\varepsilon$ .

Недостатком метода является то, что он предполагает программирование вычисления свободного члена с последующим численным дифференцированием. Как показали исследования С.Г. Шнитко, величина  $\varepsilon$  может быть вычислена по формуле

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{|x| + 10^{-\frac{n}{3}}}}{10^{\frac{n}{3}}}, \quad (3.5)$$

где  $x$  – аргумент функции (ордината или отметка);  $n$  – разрядная сетка ЭВМ.

Например, при  $x = 0$ , а  $n = 16$   $\varepsilon = 10^{-8}$ . т.е.  $\varepsilon = 10^{-\frac{n}{2}}$ .

### *Алгоритм М.Д. Герасименко*

В работах [4, 6, 7] разработана методика составления однозначных по форме условных уравнений для любых геодезических сетей, не зависящих от размерности пространства и числа определяемых пунктов.

Предполагается вычисление координат пунктов по необходимому числу измерений, для которых можно записать

$$C + V_c = \bar{C} + \bar{V}_c, \quad (3.6)$$

где  $C$  – вектор-столбец измеренных значений избыточных величин;  $\bar{C}$  – вектор-столбец вычисленных значений избыточных величин;  $V_c$  и  $\bar{V}_c$  – вектор-столбцы соответствующих поправок.

Вектор  $\bar{V}_c$  получается из выражения

$$\bar{V}_c = DV_x. \quad (3.7)$$

Здесь  $D$  – матрица частных производных от вектора  $\bar{C}$  по координатам;  $V_x$  – вектор-столбец поправок к вектору предварительных координат определяемых пунктов.

Учитывая, что полученные вышеописанным методом предварительные координаты пунктов сети зависят только от значений необходимых измеренных величин, можно представить

$$V_x = F V_s. \quad (3.8)$$

Матрица  $F$  состоит из частных производных от вектора предварительных координат по измеренным величинам, выбранным в качестве необходимых.

Вектор-столбец  $V_s$  состоит из поправок к необходимым измеренным величинам.

Вводя обозначения

$$\left. \begin{array}{l} G = DF \\ B = [G - E] \\ W = \bar{C} - C \\ V = \begin{bmatrix} V_s \\ V_c \end{bmatrix} \end{array} \right\}, \quad (3.9)$$

получаем систему условных уравнений в матричном виде (3.2).

Этот способ имеет ряд преимуществ:

1) коэффициенты условных уравнений вычисляются по формулам, не зависящим от формы и размера геодезической сети;

2) не требуется решать неоднозначной задачи по выбору необходимых и избыточных измерений, т. к. с помощью первых вычисляются предварительные координаты пунктов, а для каждого избыточного измерения составляются однотипные условные уравнения координат.

Недостаток способа заключается в сложности его реализации на ЭВМ.

### *Алгоритм И.И. Монина*

Все указанные выше способы обобщены на случай неравноточных измерений. При рассмотрении своего способа И.И. Монин пишет [33]: «веса измерений не вводятся и оценка точности уравненных величин не делается, так как эти вопросы хорошо известны». Действительно, при известных  $B$ , матрице весов  $P$  и векторе свободных членов  $W$  оценка точности во всех пяти способах одинакова, а алгоритмы получения матриц  $B$  и  $W$  разные.

Традиционно способ И.И. Монина, изложенный в [1, 33], записывается для равноточных измерений.

Обобщим данный способ на случай неравноточных измерений.

Сначала приведем основные формулы способа И.И. Монина.

Для всех необходимых измерений (углов или длин линий) составляют систему параметрических уравнений поправок

$$(V_1)_{t \times I} = (A_1)_{t \times t} \delta X_{t \times I} + (L_1)_{t \times I}, \quad (3.10)$$

а для оставшихся избыточных измерений записывают систему

$$(V_2)_{r \times I} = (A_2)_{r \times t} \delta X_{t \times I} + (L_2)_{r \times I}, \quad (3.11)$$

где  $t$  – число параметров;  $r$  – количество условных уравнений;  $L$  – свободные члены параметрических уравнений.

При этом количество измерений  $N = t + r$ , что составляет количество строк в системах (3.10) и (3.11) одновременно.

Запишем известную в коррелатном способе формулу для случая равноточных измерений

$$V_{N \times I} = -B_{N \times r}^T (B_{r \times N} B_{N \times r}^T)^{-1} W_{r \times I} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

где для третьего способа

$$B_{r \times N} = ((A_2)_{r \times t} (A_1)_{t \times t}^{-1} ; -E_{r \times r}) \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad (3.13)$$

$E$  – единичная матрица;

$$W_{r \times I} = -(A_2)_{r \times t} (A_1)_{t \times t}^{-1} (L_1)_{t \times I} + (L_2)_{r \times I}. \quad (3.14)$$

В случае неравноточных измерений для системы уравнений (3.10) имеем матрицу весов  $(P_1)_{t \times t}$ , а для системы (3.11) –  $(P_2)_{r \times r}$ . Чтобы воспользоваться формулами (3.12) – (3.14), необходимо подставить в формулы (3.13) – (3.14) следующие матрицы

$$(A_1)_{t \times t} = (P_1)_{t \times t}^{\frac{1}{2}} (A_1^{\text{для равноточных}})_{t \times t}, \quad (3.15)$$

$$(A_2)_{r \times t} = (P_2)_{r \times t}^{\frac{1}{2}} (A_2^{\text{для равноточных}})_{r \times t}, \quad (3.16)$$

$$(L_1)_{t \times I} = (P_1)_{t \times t}^{\frac{1}{2}} (L_1^{\text{для равноточных}})_{t \times I}, \quad (3.17)$$

$$(L_2)_{r \times I} = (P_2)_{r \times t}^{\frac{1}{2}} (L_2^{\text{для равноточных}})_{r \times I}. \quad (3.18)$$

Применяя без изменения формулы (3.12) – (3.14), необходимо откорректировать вектор  $(V)_{N \times 1}$  по формуле

$$V_{N \times 1} = \begin{bmatrix} (P_1)_{rxr}^{-\frac{1}{2}} (V_1)_{rx1} \\ (P_2)_{rxr}^{-\frac{1}{2}} (V_2)_{rx1} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Формулы (3.15) – (3.19) решают поставленную задачу.

Достоинством способа является автоматизация вычисления матрицы коэффициентов условных уравнений.

Как показали наши исследования, число обусловленности матрицы нормальных уравнений коррелат близко к числу обусловленности матрицы нормальных уравнений при параметрическом уравнивании, а это существенный недостаток способа, т. к. числа обусловленности в двух способах должны отличаться между собой.

### 3.2. Применение расширенной псевдообратной матрицы

Расширенная псевдообратная матрица

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P, \quad (3.20)$$

используемая при параметрическом способе уравнивания, в которой  $A_{N \times r}$  – матрица коэффициентов уравнений поправок,  $P_{N \times N}$  – матрица весов измерений, широко используется при уравнивании

$$dx_{rx} = -F_{rxN} L_{N \times 1}, \quad (3.21)$$

где  $L_{N \times 1}$  – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, и оценке точности

$$Q = F P^{-1} F^T \quad (3.22)$$

для вычисления обратной матрицы весов в традиционных и нетрадиционных методах уравнивания. При этом вектор поправок в результаты измерений

$$V = A dx + L, \quad (3.23)$$

а уравненные координаты получают по формуле

$$\hat{X} = X^0 + dx, \quad (3.24)$$

где  $X^0$  – вектор в общем случае произвольных, но близких к  $\hat{X}$ , предварительных координат определяемых пунктов.

Формулы (3.20) – (3.24) реализуют параметрический способ уравнивания.

При коррелатном способе уравнивания под условием  $V^T P V = \min$  решают систему условных уравнений

$$BV + W = 0, \quad (3.25)$$

где  $B_{r \times N}$  – матрица коэффициентов условных уравнений, а  $W_{r \times 1}$  – вектор свободных членов (невязок) этих уравнений, число которых равно  $r$ . Здесь вектор поправок в результаты измерений вычисляют по формуле [8]

$$V = -P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}W. \quad (3.26)$$

Оба способа уравнивания геодезических сетей равнозначны, но коррелатный способ реже используется на ЭВМ из-за трудностей составления коэффициентов матрицы  $B$ . Для автоматизации коррелатного способа уравнивания в 1972 году был предложен алгоритм, разработанный М.Д. Герасименко [7].

Далее мы предлагаем автоматизировать коррелатный способ уравнивания на основе применения матрицы  $F$ . Сущность нашего метода заключается в следующем:

1. Вычисляем координаты всех определяемых и исходных пунктов по необходимому количеству измерений, опираясь в плановых сетях на первые два исходных пункта. В этом случае будет получен вектор  $X^0$ . Такой вычислительный прием использован как в трудах М.Д. Герасименко [4, 7], так и в работах Ю.И. Маркузе [14] при рекуррентном уравнивании.

2. Вычисляем вектор свободных членов  $I_{N \times 1}$ , элементы которого будут отличны от нуля для избыточных измерений, и получим

$$\delta x = -FI, \quad (3.27)$$

а также вектор

$$V_1 = P^{-1}F^T(FP^{-1}F^T)^{-1}\delta x + I, \quad (3.28)$$

или, подставляя (3.20) в (3.28), найдем

$$V_1 = A\delta x + I. \quad (3.29)$$

Сравнивая (3.26) и (3.28), приходим к выводу, что  $B = F$ , следовательно,

$$\delta x_{\text{don.}} = 2,5 \sqrt{\sum_{i=1}^N F_i^2 \sigma_i^2}. \quad (3.30)$$

где  $\sigma_i$  – стандарты результатов измерений, используемые при вычислении весов измерений  $P_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ . С учетом (3.22) вместо (3.30) можно записать

$$(\delta x_{\text{don.}})_{\text{don.}} = 2,5 \sigma_0 \sqrt{Q_{\text{tot}}}. \quad (3.31)$$

Если кроме двух начальных исходных пунктов нет больше твердых пунктов, то  $V = V_1$ . Если дополнительные исходные пункты есть, то продолжают вычисления.

3. Вычислим для дополнительных  $K$  исходных пунктов свободные члены координат

$$W = \begin{pmatrix} W_{x_1} + \delta x_1 \\ W_{y_1} + \delta x_2 \\ \vdots \\ W_{x_k} + \delta x_{k-1} \\ W_{y_k} + \delta x_k \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

выделим из  $F_{m \times N}$  матрицу  $S_{2k \times N}$  и найдем

$$V_2 = -P^{-1}S^T \left( S P^{-1} S^T \right)^{-1} W, \quad (3.33)$$

используя при этом  $Q$  из формулы (3.22), получим

$$(W_{2k \times 1})_{don} = 2,5\sigma_0 \sqrt{Q_{2k,2k}}. \quad (3.34)$$

Вектор поправок в результаты измерений будет таким

$$V = V_1 + V_2. \quad (3.35)$$

Если в свободной геодезической сети нет избыточных измерений, то  $I = V_1 = \emptyset$ . Одновременно с этим, если исходных пунктов больше двух, то  $V = V_2$ .

Рассмотрим область практического использования формул (3.27) – (3.35):

1) если ранее вычислялись  $V_{don}$  [9] и  $I_{don}$  [14], то теперь можно получить  $\delta x_{don}$  и  $W_{don}$ , что облегчит контроль грубых ошибок измерений для любых геодезических построений, при этом надо знать матрицу  $Q = (A^T P A)^{-1}$ , а не матрицу  $F$ ;

2) стало легче уравнивать трилатерацию коррелатным способом;

3) можно автоматизировать составление условий координат и применять их при традиционном коррелятном уравнивании.

### 3.3. Использование корреляционной матрицы поправок измерений

Вопросам автоматизации коррелатного способа уравнивания посвящено много работ, но предлагаемые методы оказались сложнее алгоритмов параметрического способа и поэтому реже используются на производстве. Между тем, известные преимущества коррелатного способа уравнивания в анализе грубых ошибок в результатах измерений, уравнивании полигонометрии и обработке нуль-свободной триангуляции стимулируют разработку простых алгоритмов реализации этого метода на ЭВМ. Цель исследований заключается в разработке такого алгоритма, при котором, опираясь на имеющийся опыт в данном вопросе и применяя корреляционную матрицу поправок в результаты измерений, используемую в параметрическом способе уравнивания и имеющую вид [9, 10]

$$K_V = (E - AF) P^{-1}, \quad (3.36)$$

где  $E_{N \times N}$  – единичная матрица;  $A_{N \times r}$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $P_{N \times N}$  – матрица весов результатов измерений; при этом

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P. \quad (3.37)$$

В работе [7] впервые обнаружена взаимосвязь матрицы коэффициентов условных уравнений  $B$  с матрицей  $K_V$

$$B_{N \times N}^* = K_V P = E - AF, \quad (3.38)$$

где  $N$  – количество результатов измерений.

В теории коррелатного уравнивания используют матрицу  $B_{r \times N}$ , где  $r$  – количество избыточных измерений. Здесь решают систему условных уравнений

$$B V + W = 0, \quad (3.39)$$

где  $V_{N \times 1}$  – неизвестный вектор поправок в результаты измерений;  $W_{r \times 1}$  – вектор свободных членов независимых условных уравнений.

Чтобы перейти от  $B^*$  к  $B$  на ЭВМ, устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся  $r$  избыточных измерений *выделяют* по строкам из  $B_{N \times N}^*$  и записывают их в  $B_{r \times N}$ . При этом для  $r$  уравнений

$$W_{r \times 1} = (-V_{N \times 1})_{\text{выделенное}}. \quad (3.40)$$

$$V_{Nxi} = (E - AF) L_{Nxi}, \quad (3.41)$$

что позволяет в вычислениях не пользоваться другими выражениями и применять равенство

$$V_{Nxi} = B_{N \times N}^* L_{Nxi}, \quad (3.42)$$

где  $L$  – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, соответствующий произвольному по точности вектору  $X^0$ .

Если матрица  $B_{r \times N}$  каким-либо образом получена, то [8]

$$V_{Nxi} = -P_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T (B_{r \times N} P_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T)^{-1} W_{rxi}. \quad (3.43)$$

Поскольку обусловленность матриц  $A^T P A$  и  $B P^{-1} B^T$  разная, то не одинаковыми, но близкими в пределах 5 % будут компоненты векторов  $V$ , полученные по формулам (3.42) и (3.43).

Отметим, что матрица  $B_{r \times N}$  может выбираться не всегда для всех  $r$  строк из  $B_{N \times N}^*$ , входящих в (3.38). Для плановой геодезической сети можно составлять на ЭВМ наиболее простые условные уравнения фигур, горизонта и дирекционных углов, а остальные, дополняющие до  $r$  независимые уравнения, переписать из (3.38), с  $W$ , выбранными согласно (3.40), что приводит к автоматизированному коррелатно-параметрическому способу уравнивания. Например, при уравнивании геодезического четырехугольника триангуляции предлагаемым способом достаточно составить три условных уравнения фигур, а вместо одного из пяти возможных вариантов условия полюса выбрать из матриц  $B^*$  и  $V$  любую из восьми строк.

Универсальный метод составления матрицы  $B$  должен сочетаться и с автоматизированным способом оценки точности функций по формулам

$$\frac{1}{P_F} = f_K \left( P_{N \times N}^{-1} - P_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T (B_{r \times N} P_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T)^{-1} B_{r \times N} P_{N \times N}^{-1} \right) f_K^T, \quad (3.44)$$

$$f_K = f_P F_{r \times N}, \quad (3.45)$$

где  $f_P$  – вектор-строка оценочной функции в параметрическом способе.

Формула (3.45) справедлива и для классического коррелатного способа уравнивания, что позволяет вычислять функцию  $f_K$  для любой функции  $f_P$ . Также имеет место формула

$$f_P = f_K F^T (F F^T)^{-1} \quad (3.46)$$

для обратного перехода от составленной функции  $f_K$  к  $f_P$ .

Отметим, что при реализации параметрического способа уравнивания в некоторых случаях численно вычисляют матрицу  $F$

$$F_{rxi} = \frac{\hat{X}_{\delta} - \hat{X}}{\delta_i}, \quad (3.47)$$

где  $\delta$  – некоторое приращение в  $i$ -тое измерение с последующим вычислением уравненных координат  $\hat{X}$ . Теперь, чтобы воспользоваться формулой (3.38), можно применить выражение

$$A = P^{-1} F^T (FP^{-1} F^T)^{-1}, \quad (3.48)$$

а затем реализовать коррелатный способ уравнивания.

Впервые корреляционная матрица поправок встречается в [10]

$$K_v = \sigma_0^2 (P^{-1} - AN^{-1} A^T), \quad (3.49)$$

где  $\sigma_0$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $P$  – матрица весов измерений;  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $N$  – матрица коэффициентов нормальных уравнений.

В работе [26] записано

$$K_v = (E - AF)P^{-1}, \quad (3.50)$$

где  $P_i = 1/y_i^2$ ;  $E$  – единичная матрица

$$F = (A^T PA)^{-1} A^T P.$$

Выше введено следующее обозначение

$$B_{N \times N}^* = E_{N \times N} - A_{N \times r} F_{r \times N}.$$

В теории коррелатного уравнивания используют матрицу  $B_{r \times N}$ , где  $r$  – количество избыточных измерений. Здесь решают систему условных уравнений

$$BV + W = 0,$$

где  $V_{N \times 1}$  – неизвестный вектор поправок в результаты измерений;  $W_{r \times 1}$  – вектор свободных членов независимых условных уравнений.

Еще раз подчеркнем: чтобы перейти от  $B^*$  к  $B$  на ЭВМ, устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся  $r$  избыточных измерений *выделяют* по строкам из  $B_{N \times N}^*$  и записывают их в  $B_{r \times N}$ . При этом для  $r$  уравнений

$$W_{r \times 1} \approx (-V_{N \times 1})_{\text{выделенное}}. \quad (3.51)$$

Из теории метода наименьших квадратов известна формула

$$W_{\text{don}} = t \sqrt{\sum_{i=1}^N b_i^2 \sigma_i^2}, \quad (3.52)$$

где  $t$  – вероятностный квантиль, принимаемый в зависимости от вероятности величины 2,0 или 2,5;  $b_i$  – коэффициенты условного уравнения (или строка матрицы  $B_{r \times N}$ );  $\sigma_i$  – стандарт измерений, участвующий при вычислении весов измерений.

Известно [12], что матрицы  $AF$  и  $B^*$  идемпотентны, т. е.

$$B^* = B^* B^* L B^*. \quad (3.53)$$

Согласно (3.51) вместо (3.52) можно записать

$$V_{\text{don}} = t \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i^*)^2 \lambda_i^2 \sigma_i^2}, \quad (3.54)$$

но в силу (3.53) имеем

$$V_{\text{don}} = t \sqrt{B_{ii}^* \sigma_i^2} = t \sigma_i \sqrt{B_{ii}^*} = t \sqrt{B_{ii}^* / P_i}, \quad (3.55)$$

Как отмечалось в работах [9, 10], диагональные элементы матрицы  $K$ , есть дисперсии  $m_i^2$  соответствующих поправок. Поэтому допуск для  $i$ -той поправки определяется формулой

$$V_{\text{doni}} = t m_{v_i} = t \sqrt{K_{v_{ii}}}, \quad (3.56)$$

аналогичной (3.55).

Формула (3.37) справедлива и для зависимых измерений, если записать

$$F = (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1}. \quad (3.57)$$

Например, зная  $K$  для углов при уравнивании по направлениям [12], можно реализовать уравнивание по направлениям, составляя  $A$  для углов коррелатным или параметрическим способами. При этом вектор поправок в углы при уравнивании по направлениям будет таким

$$V_{\text{don}} = B_{N \times N}^* (L_{N \times 1})_{\text{для углов}}. \quad (3.58)$$

Умножим справа равенство (3.38) на матрицу  $A$ . В результате получим

$$B^* A = EA - AFA = EA - AE = 0,$$

Это равенство служит доказательством известного тождества  $BA = 0$ , где  $B_{N \times N}$  – матрица коэффициентов условных уравнений, которую можно найти путём выделения строк из матрицы  $B^*_{N \times N}$  для избыточных измерений.

Переходя к вопросам оценки точности функций измеренных и уравненных величин, запишем известные формулы

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{I}{P_F}}; \quad (3.59)$$

для параметрического способа

$$\frac{I}{P_F} = f_P Q f_P^T, \quad (3.60)$$

где  $f_P$  – параметрическая функция;  $Q = (A^T P A)^{-1}$ ;

для коррелатного способа

$$\frac{I}{P_F} = f_K P^{-1} f_K^T - f_K P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1} f_K^T, \quad (3.61)$$

где  $f_K$  – оценочная функция при коррелатном уравнивании.

Поскольку  $f_K$  во много раз труднее получить, чем  $f_P$ , то в коррелатно-параметрическом способе предлагается равенство

$$f_K = f_P F. \quad (3.62)$$

Следуя уравнению (3.61), получим

$$\frac{I}{P_F} = f_P F P^{-1} F^T f_P^T = f_P Q f_P^T. \quad (3.63)$$

На основании этого вместо (3.63) запишем

$$\frac{I}{P_F} = f_K P^{-1} f_K^T,$$

что справедливо, если  $f_K$  получать по формуле (3.62).

Сравнивая (3.64) и (3.62), найдем равенство

$$f_K P^{-1} (B^T B P^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1} f_K^T = 0, \quad (3.64)$$

которое легко доказать, так как согласно (3.64) и (3.62)

$$B P^{-1} f_K^T = B P^{-1} F^T f_K^T = B A (A^T P A)^{-1} f_P^T = 0, \quad (3.65)$$

из-за того, что  $BA = 0$ .

Отметим, что при применении (3.45) формулы (3.60) и (3.63) идентичны и могут использоваться при оценке точности в коррелатно-параметрическом способе уравнивания.

## 4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

### 4.1. Применение метода Lp-оценок

Первые результаты уравнивания коррелатным способом Lp-оценок опубликованы С.Д. Воложаниным [2]. Здесь сравнивались параметрический и коррелатный способы уравнивания на примере геодезического четырехугольника. Расхождение поправок в измеренные углы между двумя способами практически не превосходит  $\Delta V = 0.001''$  при  $V_{\max} = 1''$ .

Цель исследований – проанализировать расхождения  $\Delta V_{\max}$  при коррелатном и параметрическом способах уравнивания на тестовых примерах.

Алгоритм коррелатного метода Lp-оценок заимствован из [2] при  $1.0 \leq n < 2.0$  и остался неизменным при  $n > 2.0$ .

Для девяти тестовых примеров приведены рисунки и таблицы, в которых  $n$  – показатель степени;  $\mu$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $M$  – ошибка положения пункта в метрах;  $V_i$  – поправки в результаты измерений.

Правильность вычислений легко проверить соблюдением неравенств

$$\text{если } V_{n=1.5} \geq V_{n=2.0}, \quad \text{то} \quad V_{n=2.0} \geq V_{n=2.5};$$

или

$$\text{если } V_{n=1.5} \leq V_{n=2.0}, \quad \text{то} \quad V_{n=2.0} \leq V_{n=2.5},$$

приблизительно в 95 % случаев.

На рис. 4.1 показан геодезический четырехугольник из [33]. В табл. 4.1 представлены результаты вычислений.

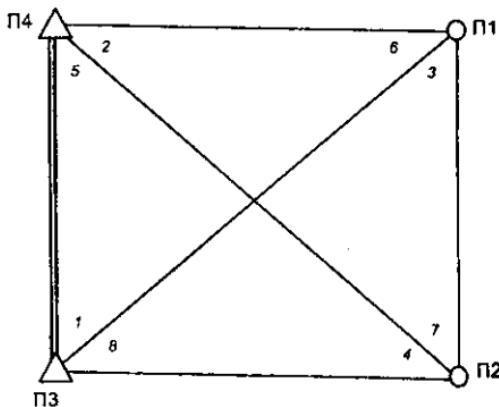


Рис. 4.1. Геодезический четырехугольник

Таблица 4.1

## Обработка геодезического четырехугольника

	Коррелятный способ			Параметрический способ		
n	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.909	0.894	0.907	0.996	0.895	0.820
M <sub>1</sub>	0.061	0.060	0.061	0.084	0.060	0.064
M <sub>2</sub>	0.065	0.064	0.065	0.084	0.064	0.068
V <sub>1</sub>	0.00"	-0.08"	-0.16"	0.00"	-0.09"	-0.14"
V <sub>2</sub>	0.04	0.10	0.22	0.05	0.11	0.18
V <sub>3</sub>	-1.28	-1.09	-0.96	-1.28	-1.09	-1.00
V <sub>4</sub>	-0.53	-0.63	-0.71	-0.53	-0.63	-0.68
V <sub>5</sub>	0.64	0.72	0.77	0.63	0.72	0.76
V <sub>6</sub>	0.91	0.85	0.77	0.92	0.86	0.81
V <sub>7</sub>	-0.40	-0.58	-0.75	-0.39	-0.58	-0.68
V <sub>8</sub>	0.00	0.10	0.21	0.00	0.10	0.17

На рис. 4.2 дана схема триангуляции из [37, с. 93]. В табл. 4.2 представлены результаты вычислений

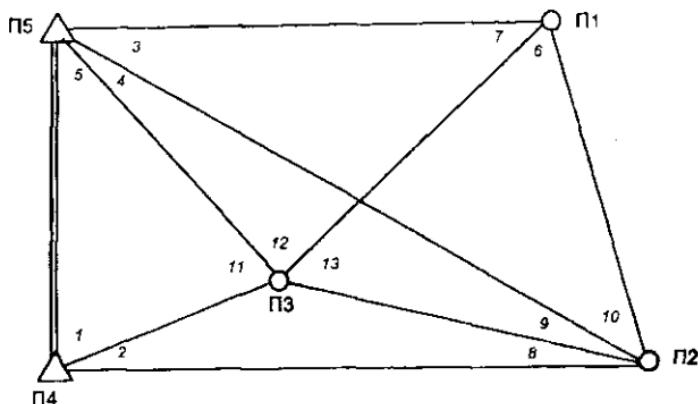


Рис. 4.2. Сеть триангуляции

Таблица 4.2

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
$n$	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.612	0.606	0.626	0.673	0.831	0.560
$M_1$	0.053	0.052	0.054	0.064	0.052	0.054
$M_2$	0.054	0.053	0.055	0.065	0.054	0.055
$M_3$	0.025	0.024	0.025	0.027	0.024	0.025
$V_1$	0.13"	0.14"	0.08"	0.12"	0.13"	0.12"
$V_2$	-0.57	-0.58	-0.62	-0.51	-0.57	-0.61
$V_3$	1.07	0.95	0.79	1.08	0.95	0.85
$V_4$	0.22	0.24	0.30	0.21	0.26	0.29
$V_5$	-0.40	-0.48	-0.60	-0.45	-0.50	-0.56
$V_6$	0.00	0.05	0.13	0.00	0.06	0.11
$V_7$	0.00	0.09	0.25	0.00	0.08	0.18
$V_8$	0.21	0.19	0.19	0.25	0.21	0.20
$V_9$	-0.01	0.07	0.22	0.00	0.10	0.19
$V_{10}$	-0.48	-0.50	-0.58	-0.48	-0.50	-0.56
$V_{11}$	0.01	0.07	0.25	0.00	0.05	0.12
$V_{12}$	0.80	0.80	0.74	0.81	0.81	0.77
$V_{13}$	-0.15	-0.25	-0.40	-0.10	-0.23	-0.32

На рис. 4.3 дана сеть триангуляции из [37, с. 129]. В табл. 4.3 представлены результаты вычислений.

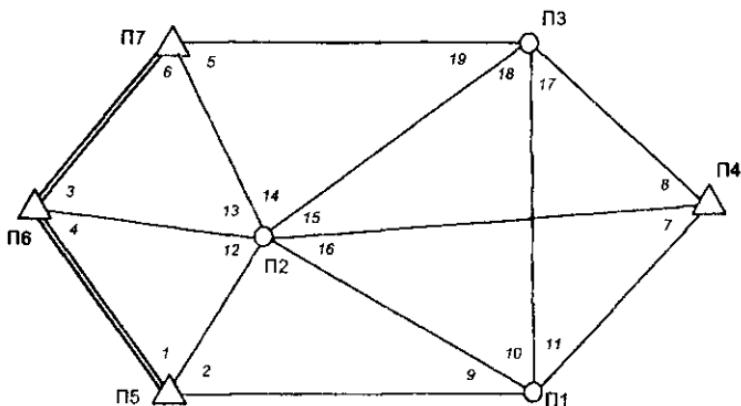


Рис. 4.3. Сеть триангуляции

Таблица 4.3

## Обработка триангуляции

n	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	1.126	1.119	1.162	1.261	1.139	1.056
$M_1$	0.047	0.047	0.048	0.054	0.048	0.050
$M_2$	0.029	0.029	0.030	0.042	0.029	0.032
$M_3$	0.038	0.038	0.039	0.073	0.039	0.041
$V_1$	-0.07"	-0.24"	-0.68"	0.01"	-0.24"	-0.54"
$V_2$	0.26	0.40	0.65	0.20	0.40	0.56
$V_3$	-0.07	-0.15	-0.50	-0.02	-0.15	-0.40
$V_4$	-0.16	-0.08	0.28	-0.21	-0.08	0.17
$V_5$	0.53	0.70	0.95	0.44	0.70	0.85
$V_6$	0.37	0.27	0.15	0.41	0.27	0.19
$V_7$	-0.66	-0.64	-0.62	-0.68	-0.64	-0.64
$V_8$	0.19	0.17	-0.15	0.18	0.15	-0.08
$V_9$	-0.11	-0.11	0.21	-0.11	-0.11	0.13
$V_{10}$	-1.04	-0.98	-1.04	-1.10	-1.00	-1.04
$V_{11}$	0.51	0.54	0.76	0.52	0.56	0.71
$V_{12}$	1.63	1.72	1.80	1.63	1.75	1.80
$V_{13}$	-2.83	-2.65	-2.17	-2.98	-2.71	-2.39
$V_{14}$	0.95	0.94	1.04	0.91	0.92	1.00
$V_{15}$	0.97	0.95	1.05	1.01	0.97	1.04
$V_{16}$	-0.65	-0.75	-0.92	-0.58	-0.75	-0.87
$V_{17}$	0.76	0.74	0.82	0.81	0.75	0.83
$V_{18}$	0.60	0.66	0.80	0.57	0.68	0.77
$V_{19}$	-0.48	-0.64	-0.99	-0.41	-0.69	-0.92

На рис. 4.4 дана сеть триангуляции из [37, с. 153]. В табл. 4.4 представлены результаты вычислений.

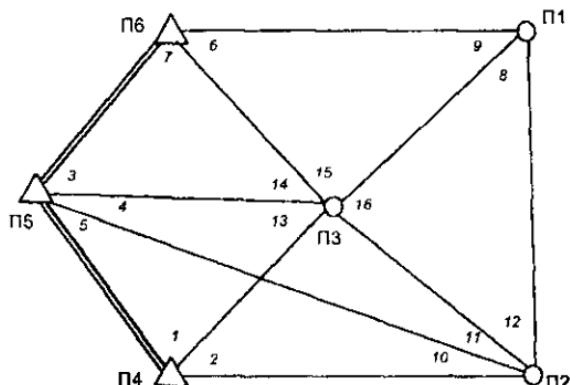


Рис. 4.4. Сеть триангуляции

Таблица 4.4

## Обработка триангуляции

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
$n$	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.820	0.812	0.814	0.923	0.831	0.762
$M_1$	0.042	0.041	0.042	0.053	0.042	0.045
$M_2$	0.043	0.043	0.043	0.056	0.044	0.047
$M_3$	0.020	0.020	0.020	0.024	0.021	0.023
$V_1$	0.16"	0.11"	0.08"	0.14"	0.07"	0.00"
$V_2$	0.66	0.74	0.76	0.64	0.78	0.84
$V_3$	0.95	0.98	1.00	0.96	0.98	0.99
$V_4$	0.16	0.26	0.31	0.12	0.26	0.34
$V_5$	0.82	0.69	0.62	0.86	0.69	0.60
$V_6$	-0.21	-0.36	-0.45	-0.14	-0.32	-0.42
$V_7$	-0.04	-0.11	-0.15	-0.05	-0.15	-0.23
$V_8$	-0.44	-0.52	-0.57	-0.44	-0.50	-0.53
$V_9$	0.00	0.04	0.09	0.00	0.02	0.08
$V_{10}$	0.67	0.76	0.84	0.80	0.92	1.00
$V_{11}$	-1.22	-1.07	-1.00	-1.27	-1.10	-1.02
$V_{12}$	-0.02	-0.04	-0.06	-0.06	-0.09	-0.12
$V_{13}$	-1.44	-1.36	-1.32	-1.52	-1.42	-1.34
$V_{14}$	0.63	0.68	0.70	0.48	0.55	0.62
$V_{15}$	0.07	0.19	0.23	0.05	0.20	0.23
$V_{16}$	0.01	0.11	0.17	0.00	0.09	0.15

На рис. 4.5 дана схема сети трилатерации из [37, с. 179]. В табл. 4.5 представлены результаты вычислений.

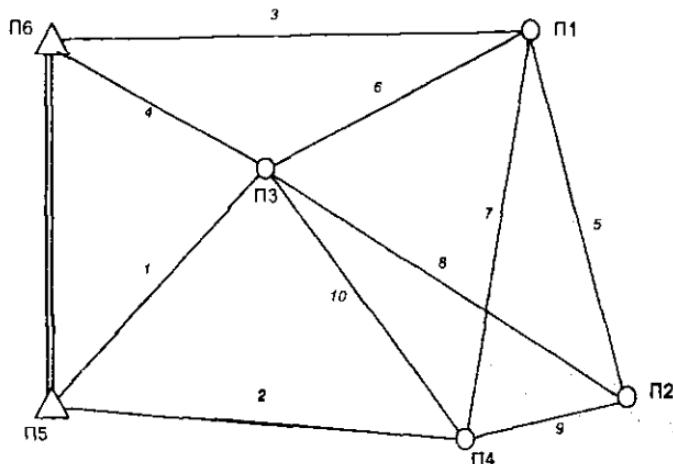


Рис. 4.5. Сеть трилатерации

## Обработка трилатерации

n	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.450	1.060	2.552	0.496	1.053	2.319
M <sub>1</sub>	0.061	0.060	0.060	0.062	0.060	0.060
M <sub>2</sub>	0.078	0.077	0.077	0.080	0.077	0.077
M <sub>3</sub>	0.040	0.039	0.039	0.041	0.039	0.040
M <sub>4</sub>	0.060	0.059	0.059	0.061	0.059	0.059
VS <sub>53</sub>	0.005 м	0.007 м	0.007 м	0.005 м	0.008 м	0.009 м
VS <sub>54</sub>	-0.002	-0.005	-0.006	-0.003	-0.005	-0.007
VS <sub>16</sub>	-0.002	-0.005	-0.006	-0.002	-0.006	-0.007
VS <sub>36</sub>	0.004	0.006	0.007	0.005	0.008	0.009
VS <sub>12</sub>	0.008	0.012	0.014	0.006	0.011	0.013
VS <sub>13</sub>	0.021	0.019	0.018	0.023	0.020	0.018
VS <sub>14</sub>	-0.26	-0.022	-0.021	-0.027	-0.022	-0.020
VS <sub>23</sub>	-0.016	-0.018	-0.018	-0.014	-0.017	-0.017
VS <sub>24</sub>	0.009	0.013	0.014	0.007	0.012	0.014
VS <sub>34</sub>	0.022	0.020	0.019	0.024	0.020	0.018

На рис. 4.6 дана схема трилатерации из [37, с. 202]. В табл. 4.6 представлены результаты вычислений.

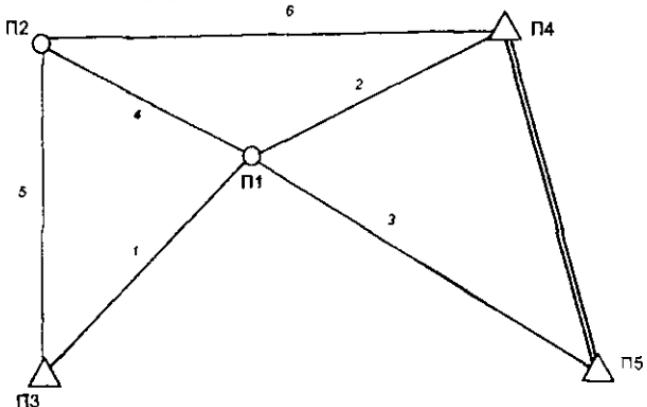


Рис. 4.6. Сеть трилатерации

Таблица 4.6

## Обработка трилатерации

	Коррелятный способ			Параметрический способ		
n	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.460	1.097	2.265	0.510	1.098	2.413
$M_1$	0.037	0.037	0.037	0.039	0.037	0.037
$M_2$	0.041	0.041	0.041	0.042	0.041	0.041
$VS_{13}$	0.028 м	0.026 м	0.023 м	0.031 м	0.026 м	0.024 м
$VS_{14}$	0.026	0.024	0.022	0.028	0.024	0.023
$VS_{15}$	0.011	0.015	0.018	0.008	0.015	0.017
$VS_{12}$	-0.016	-0.017	-0.017	-0.015	-0.017	-0.017
$VS_{23}$	0.012	0.014	0.016	0.011	0.014	0.015
$VS_{24}$	0.013	0.015	0.017	0.012	0.015	0.016

На рис. 4.7 дана линейно-угловая сеть из [37, с. 217]. В табл. 4.7 представлены результаты вычислений.

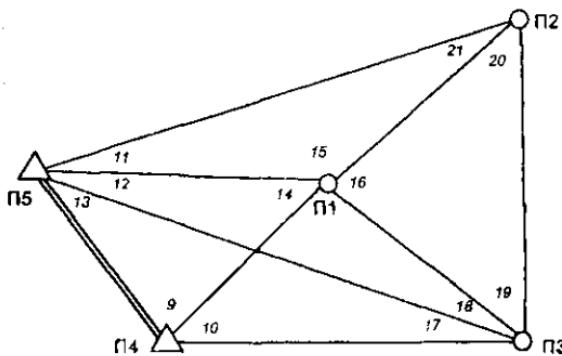


Рис. 4.7. Линейно-угловая сеть

Таблица 4.7

## Обработка линейно-угловой сети

	Коррелятный способ			Параметрический способ		
$n$	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	0.993	1.124	1.668	1.086	1.120	1.550
$M_1$	0.011	0.007	0.008	0.024	0.007	0.010
$M_2$	0.022	0.013	0.012	0.039	0.013	0.017
$M_3$	0.019	0.012	0.012	0.041	0.012	0.015
$VS_{14}$	0.000 м	0.001 м	0.001 м	0.000 м	0.001 м	0.001 м
$VS_{34}$	0.002	0.004	0.004	0.001	0.003	0.003
$VS_{25}$	-0.011	-0.009	-0.007	-0.012	-0.009	-0.007
$VS_{15}$	0.005	0.007	0.008	0.005	0.007	0.008
$VS_{35}$	-0.007	-0.007	-0.007	-0.008	-0.007	-0.008
$VS_{12}$	0.002	0.004	0.004	0.002	0.004	0.004
$VS_{13}$	0.000	-0.002	-0.003	0.000	-0.002	-0.004
$VS_{23}$	0.000	-0.001	-0.002	0.000	-0.001	-0.003
$V_9$	0.09"	0.20"	0.29"	0.05"	0.20"	0.32"
$V_{10}$	1.93	1.63	1.49	1.99	1.64	1.44
$V_{11}$	0.18	0.20	0.18	0.18	0.20	0.17
$V_{12}$	-0.53	-0.67	-0.75	-0.48	-0.65	-0.75
$V_{13}$	1.05	1.20	1.24	1.00	1.18	1.23
$V_{14}$	-0.18	-0.31	-0.36	-0.28	-0.42	-0.50
$V_{15}$	0.57	0.55	0.55	0.61	0.59	0.60
$V_{16}$	-0.37	-0.48	-0.56	-0.33	-0.47	-0.55
$V_{17}$	-0.89	-0.86	-0.85	-0.95	-0.92	-0.89
$V_{18}$	0.78	0.78	0.80	0.57	0.57	0.60
$V_{19}$	0.26	0.42	0.50	0.20	0.40	0.50
$V_{20}$	-0.76	-0.81	-0.82	-0.78	-0.84	-0.86
$V_{21}$	0.91	0.92	0.94	0.92	0.92	0.94

На рис. 4.8 показана сеть триангуляции из [38, с. 145]. В табл. 4.8 приведены результаты вычислений.

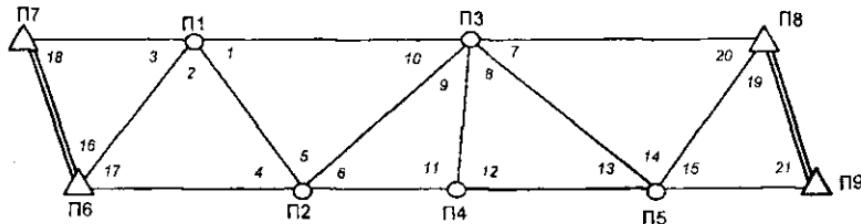


Рис. 4.8. Сеть триангуляции

## Обработка триангуляционной сети

	Коррелятный способ			Параметрический способ		
$n$	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	1.021	1.013	1.015	1.086	0.928	0.997
$M_1$	0.145	0.144	0.144	0.162	0.141	0.156
$M_2$	0.144	0.143	0.143	0.160	0.140	0.150
$M_3$	0.152	0.151	0.151	0.165	0.147	0.156
$M_4$	0.166	0.165	0.165	0.178	0.161	0.168
$M_5$	0.132	0.132	0.132	0.138	0.129	0.134
$V_1$	- 0.95"	- 0.96"	- 0.97"	- 0.93"	- 0.96"	- 1.01"
$V_2$	- 1.54	- 1.39	- 1.32	- 1.50	- 1.39	- 1.29
$V_3$	- 0.59	- 0.58	- 0.58	- 0.56	- 0.58	- 0.60
$V_4$	- 0.28	- 0.46	- 0.55	- 0.37	- 0.46	- 0.52
$V_5$	- 0.04	- 0.04	0.01	- 0.10	- 0.04	- 0.08
$V_6$	0.91	0.81	0.79	0.84	0.81	0.81
$V_7$	- 0.76	- 0.70	- 0.73	- 0.70	- 0.68	- 0.72
$V_8$	- 0.58	- 0.60	- 0.60	- 0.60	- 0.62	- 0.63
$V_9$	0.38	0.44	0.45	0.43	0.44	0.44
$V_{10}$	- 0.60	- 0.59	- 0.62	- 0.52	- 0.54	- 0.62
$V_{11}$	0.57	0.61	0.62	0.64	0.66	0.67
$V_{12}$	- 0.38	- 0.42	- 0.43	- 0.38	- 0.38	- 0.37
$V_{13}$	- 0.74	- 0.68	- 0.67	- 0.59	- 0.57	- 0.58
$V_{14}$	- 0.71	- 0.81	- 0.88	- 0.66	- 0.75	- 0.86
$V_{15}$	- 0.76	- 0.75	- 0.73	- 0.69	- 0.66	- 0.61
$V_{16}$	0.11	0.26	0.25	- 0.01	0.04	0.02
$V_{17}$	0.01	0.03	0.06	- 0.08	- 0.11	- 0.14
$V_{18}$	- 1.18	- 1.34	- 1.33	- 1.40	- 1.43	- 1.38
$V_{19}$	- 0.35	- 0.50	- 0.59	- 0.39	- 0.48	- 0.56
$V_{20}$	- 0.06	- 0.28	0.07	- 0.12	- 0.05	0.10
$V_{21}$	- 1.36	- 1.22	- 1.15	- 1.13	- 1.08	- 1.04

На рис. 4.9 показана сеть триангуляции из [38, с. 160]. В табл. 4.9 приведены результаты вычислений.

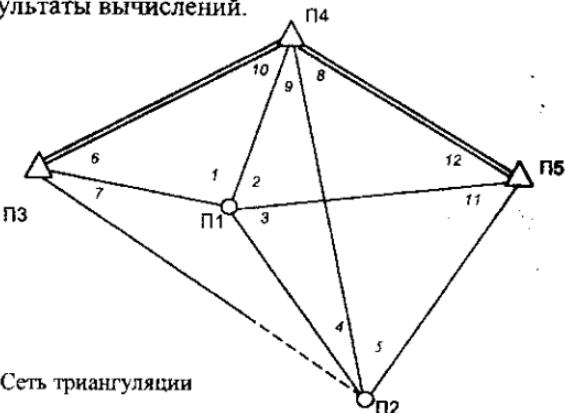


Рис. 4.9. Сеть триангуляции

Обработка триангуляционной сети

n	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	1.5	2.0	2.5	1.5	2.0	2.5
$\mu$	1.892	1.876	1.887	2.034	1.840	1.693
$M_1$	0.083	0.082	0.082	0.092	0.080	0.086
$M_2$	0.105	0.104	0.104	0.120	0.102	0.120
$V_1$	0.85"	1.14"	1.40"	0.79"	1.14"	1.43"
$V_2$	0.90	0.94	0.98	0.89	0.94	1.03
$V_3$	-0.27	-0.70	-1.02	-0.21	-0.67	-1.10
$V_4$	1.08	1.31	1.49	1.04	1.30	1.54
$V_5$	-3.27	-3.13	-2.99	-3.30	-3.12	-2.89
$V_6$	-0.04	0.15	0.30	-0.07	0.14	0.39
$V_7$	-0.38	-0.55	-0.70	-0.35	-0.55	-0.74
$V_8$	1.26	1.23	1.23	1.25	1.24	1.25
$V_9$	-3.60	-3.45	-3.34	-3.46	-3.30	-3.20
$V_{10}$	0.24	0.12	0.01	0.37	0.22	0.11
$V_{11}$	0.03	0.08	0.10	0.01	0.03	-0.01
$V_{12}$	0.67	0.50	0.35	0.68	0.48	0.28

#### 4.2. Многокритериальная оптимизация геодезических измерений

В работе [28] изложен новый метод математической обработки результатов геодезических измерений, названный многостепенным многокритериальным потому, что используются не только индивидуальные степени для измерений, но и две целевых функции

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_{n_i} |L_i(X)|^n, \quad (4.1)$$

$$\Phi_2(X, n) = \sum_{j=1}^K M_j^2, \quad (4.2)$$

где  $X$  – вектор координат определяемых пунктов, число которых равно  $K$ ;  $L_i(X)$  – свободный член нелинейного параметрического уравнения;  $M$  – ошибка положения пункта.

Сначала для всех измерений назначается степень  $n = 2.0$  и вычисляются средние квадратические ошибки измерений по формуле

$$m_i = \mu_{n=2.0} \sqrt{\frac{I}{P_{i,n=2.0}}} = \sqrt{\sigma_i^2} = \mu \cdot \sigma_i, \quad (4.3)$$

затем вычисляют веса измерений для индивидуальных  $n_i$  из выражения

$$P_{n_i} = \left( \frac{1}{m_i} \right)^{n_i}, \quad (4.4)$$

а не из ранее рекомендемых формул

$$P_n = \left( \frac{c}{\sigma_i} \right)^n, \quad c = \left[ \frac{n^{\frac{2}{n}} \Gamma \left( \frac{3}{n} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{n} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

При параметрическом способе уравнивания для многокритериальной оптимизации используют формулы

$$M = \mu' \sqrt{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1}}, \quad (4.6)$$

$$\mu' = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}}, \quad (4.7)$$

где  $r$  – количество избыточных измерений;

$$V = \phi(\hat{X}) - T = L(\hat{X}), \quad (4.8)$$

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \quad (4.9)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (4.10)$$

$A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок,  $C$  – диагональная матрица весов с элементами [30]

$$C_i = n_i (n_i - 1) P_n |L_i(X)|^n. \quad (4.11)$$

При коррелатном способе уравнивания для многокритериальной оптимизации сначала находят матрицу коэффициентов условных уравнений

$$B_{N \times N}^* = E_{N \times N} - A_{N \times r} F_{r \times N}^*, \quad (4.12)$$

выделяя из  $B^*$   $r$  строк для избыточных измерений, где

$$F^* = (A^T P_{n=2,0} A)^{-1} A^T P_{n=2,0}, \quad (4.13)$$

$$W_{r \times 1} = - (B_{N \times N}^* L_{N \times 1})_{\text{выделенное}}, \quad (4.14)$$

где  $L = L(X)_{n=2,0}$ .

Далее вычисляют вектор поправок в результаты измерений из  $j$ -той итерации

$$(V_{N \times 1})_j = - (P_{n_j}^{-1})_{N \times N} B_{N \times r}^T (K_{n_j})_{r \times 1}, \quad (4.15)$$

$$\text{где } K_{n_i} = -\left(BC_j^{-1}B^T\right)^{-1}W, \quad (4.16)$$

в которой

$$C_j = \text{diag}(C_i)_{N \times N}, \quad (4.17)$$

а  $C_i$  находят по формуле

$$C_i = n_i(n_i-1)\left(P_{n_i}\right)_j |V_i|_j^{n_i}, \quad (4.18)$$

аналогичной (4.11). Величину  $|V_i|_j$  получают из равенства (4.15) для  $K_{n_i}$  и для  $P_{n_i}$ , найденного по формуле (4.4).

Оценку точности в коррелатном способе выполняют по формулам

$$m_t = \mu' \sqrt{\left(\frac{l}{P_f}\right)_t}, \quad (4.19)$$

$$M_K = \sqrt{m_t^2 + m_{t+1}^2}, \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{l}{P_f}\right)_t = f_t P_{N \times N}^{-1} f_t^T, \quad (4.21)$$

а вектор-строку для функции получают так

$$f_t = F_{t \times N}^*. \quad (4.22)$$

В обоих способах степени  $n_i$  находят методом проб и ошибок с шагом 0,1 для  $N$  измерений, что составляет одно приближение. Количество итераций  $j \leq 20$ .

На рис. 4.1 показан геодезический четырехугольник из [33]. В табл. 4.10 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.10

Обработка геодезического четырехугольника

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	$n = 2,0$	степени	многокрит.	$n = 2,0$	степени	многокрит.
$\mu$	0.894		0.997	0.895		0.989
$M_1$	0.060		0.059	0.060		0.060
$M_2$	0.064		0.063	0.064		0.064
$V_1$	-0.08"	2.91	-0.10"	-0.09"	2.60	-0.12"
$V_2$	0.10	2.81	0.12	0.11	2.70	0.19
$V_3$	-1.09	1.93	-1.13	-1.09	1.80	-1.14
$V_4$	-0.63	2.01	-0.56	-0.63	1.70	-0.60
$V_5$	0.72	1.91	0.70	0.72	1.60	0.72
$V_6$	0.85	1.82	0.87	0.86	1.70	0.81
$V_7$	-0.58	2.01	-0.58	-0.58	1.70	-0.56
$V_8$	0.10	2.91	0.06	0.10	2.50	0.10

На рис. 4.2 дана схема триангуляции из [37, с. 93]. В табл. 4.11 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.11

Обработка триангуляции

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	n = 2,0	степени	многокрит.	n = 2,0	степени	многокрит.
$\mu$	0.606		0.931	0.831		0.971
$M_1$	0.052		0.046	0.052		0.047
$M_2$	0.053		0.045	0.054		0.046
$M_3$	0.024		0.020	0.024		0.021
$V_1$	0.14"	2.91	0.05"	0.13"	2.90	0.09"
$V_2$	- 0.58	1.42	- 0.73	- 0.57	2.60	- 0.45
$V_3$	0.95	1.41	1.06	0.95	1.50	1.05
$V_4$	0.24	2.91	0.23	0.26	3.70	0.27
$V_5$	- 0.48	2.91	- 0.16	- 0.50	1.60	- 0.52
$V_6$	0.05	2.71	0.09	0.06	2.50	0.03
$V_7$	0.09	2.91	- 0.03	0.08	2.50	- 0.04
$V_8$	0.19	2.91	0.25	0.21	3.50	0.22
$V_9$	0.07	2.91	- 0.07	0.10	2.40	0.03
$V_{10}$	- 0.50	1.31	- 0.53	- 0.50	1.40	- 0.46
$V_{11}$	0.07	2.01	- 0.16	0.05	3.00	0.11
$V_{12}$	0.80	1.41	0.83	0.81	1.60	0.81
$V_{13}$	- 0.25	1.11	- 0.13	- 0.23	2.60	- 0.18

На рис. 4.3 дана сеть триангуляции из [37, с. 129]. В табл. 4.12 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.12

Обработка триангуляции

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	n = 2,0	степени	многокрит.	n = 2,0	степени	многокрит.
$\mu$	1.119		0.995	1.139		1.015
$M_1$	0.047		0.045	0.048		0.047
$M_2$	0.029		0.028	0.029		0.029
$M_3$	0.038		0.038	0.039		0.038
$V_1$	- 0.24"	1.61	- 0.27"	- 0.24"	1.70	- 0.27"
$V_2$	0.40	1.11	0.39	0.40	1.80	0.39
$V_3$	- 0.15	1.31	- 0.17	- 0.15	1.50	- 0.17
$V_4$	- 0.08	1.11	- 0.06	- 0.08	1.90	- 0.06
$V_5$	0.70	2.51	0.69	0.70	2.00	0.71
$V_6$	0.27	1.11	0.26	0.27	1.90	0.26
$V_7$	- 0.64	1.91	- 0.64	- 0.64	2.00	- 0.65
$V_8$	0.17	1.11	0.11	0.15	1.90	0.13
$V_9$	- 0.11	1.11	- 0.09	- 0.11	1.90	- 0.08

$V_{10}$	- 0.98	2.16	- 1.00	- 1.00	2.00	- 1.00
$V_{11}$	0.54	2.03	0.58	0.56	1.90	0.58
$V_{12}$	1.72	2.41	1.72	1.75	2.10	1.76
$V_{13}$	- 2.65	2.05	- 2.62	- 2.71	2.10	- 2.68
$V_{14}$	0.94	2.91	0.94	0.92	2.00	0.93
$V_{15}$	0.95	2.30	0.97	0.97	2.00	0.98
$V_{16}$	- 0.75	1.51	- 0.78	- 0.75	1.90	- 0.78
$V_{17}$	0.74	1.21	0.76	0.75	2.00	0.76
$V_{18}$	0.66	1.94	0.69	0.68	2.00	0.69
$V_{19}$	- 0.64	1.11	- 0.63	- 0.69	2.00	- 0.71

На рис. 4.4 дана сеть триангуляции из [37, с. 153]. В табл. 4.13 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.13  
Обработка триангуляции

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	$n = 2,0$	степени	многокрит.	$n = 2,0$	степени	многокрит.
$\mu$	0.812		0.961	0.831		1.014
$M_1$	0.041		0.038	0.042		0.040
$M_2$	0.043		0.042	0.044		0.043
$M_3$	0.020		0.020	0.021		0.020
$V_1$	0.11"	2.91	0.10"	0.07"	2.60	0.11"
$V_2$	0.74	1.62	0.76	0.78	1.70	0.85
$V_3$	0.98	1.11	0.98	0.98	1.70	0.99
$V_4$	0.26	1.22	0.25	0.26	3.50	0.29
$V_5$	0.69	1.51	0.70	0.69	1.70	0.64
$V_6$	- 0.36	2.91	- 0.26	- 0.32	3.90	- 0.44
$V_7$	- 0.11	2.91	- 0.12	- 0.15	2.60	- 0.12
$V_8$	- 0.52	1.81	- 0.55	- 0.50	1.50	- 0.41
$V_9$	0.04	2.91	0.02	0.02	2.20	0.06
$V_{10}$	0.76	1.58	0.75	0.92	1.70	0.86
$V_{11}$	- 1.07	1.81	- 1.11	- 1.10	1.60	- 1.09
$V_{12}$	- 0.04	2.91	- 0.04	- 0.09	3.10	- 0.20
$V_{13}$	- 1.36	1.61	- 1.35	- 1.42	1.80	- 1.44
$V_{14}$	0.68	1.41	0.68	0.55	1.60	0.50
$V_{15}$	0.19	2.91	0.11	0.20	3.10	0.28
$V_{16}$	0.11	2.91	0.14	0.09	2.70	0.10

На рис. 4.5 дана схема сети трилатерации из [37, с. 179]. В табл. 4.14 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.14

## Обработка трилатерации

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	$\alpha = 2,0$	степени	многокрит.	$\pi = 2,0$	степени	многокрит.
$\mu$	1.060		0.478	1.053		0.515
$M_1$	0.060		0.033	0.060		0.041
$M_2$	0.077		0.029	0.077		0.053
$M_3$	0.039		0.014	0.039		0.022
$M_4$	0.059		0.034	0.059		0.041
$VS_{33}$	0.007 м	2.11	0.004 м	0.008 м	2.00	0.007 м
$VS_{54}$	-0.005	2.31	-0.003	-0.005	2.10	-0.006
$VS_{16}$	-0.005	2.31	-0.003	-0.006	2.10	-0.005
$VS_{36}$	0.006	2.31	0.004	0.008	2.00	0.006
$VS_{12}$	0.012	2.22	0.002	0.011	1.70	0.008
$VS_{13}$	0.019	2.01	0.006	0.020	1.70	0.016
$VS_{14}$	-0.022	1.11	-0.007	-0.022	1.20	-0.035
$VS_{23}$	-0.018	2.11	-0.003	-0.017	1.60	-0.013
$VS_{24}$	0.013	2.24	0.002	0.012	1.70	0.008
$VS_{34}$	0.020	2.11	0.006	0.020	1.70	0.017

На рис. 4.6 дана схема трилатерации из [37, с. 202]. В табл. 4.15 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.15

## Обработка трилатерации

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	$\alpha = 2,0$	степени	многокрит.	$\pi = 2,0$	степени	многокрит.
$\mu$	1.097		0.492	1.098		0.937
$M_1$	0.037		0.027	0.037		0.040
$M_2$	0.041		0.011	0.041		0.035
$VS_{13}$	0.026 м	1.11	0.069 м	0.026 м	1.90	0.026 м
$VS_{14}$	0.024	2.11	0.04	0.024	1.90	0.025
$VS_{15}$	0.015	2.43	-0.02	0.015	2.00	0.014
$VS_{12}$	-0.017	2.21	-0.08	-0.017	1.90	-0.016
$VS_{23}$	0.014	2.11	0.07	0.014	2.10	0.014
$VS_{24}$	0.015	2.11	0.08	0.015	2.10	0.015

На рис. 4.7 дана линейно-угловая сеть из [37, с. 217]. В табл. 4.16 представлены результаты вычислений.

Таблица 4.16

Обработка линейно-угловой сети

	Коррелятный способ			Параметрический способ		
	$n = 2,0$	степени	многокрит.	$n = 2,0$	степени	многокрит.
$\mu$	1.124		1.005	1.120		1.144
$M_1$	0.007		0.006	0.007		0.006
$M_2$	0.012		0.011	0.013		0.010
$M_3$	0.011		0.010	0.012		0.008
$VS_{14}$	0.001 м	2.91	0.000 м	0.001 м	2.50	0.001 м
$VS_{34}$	0.004	2.51	0.002	0.003	2.50	0.004
$VS_{25}$	-0.009	2.02	-0.008	-0.009	2.30	-0.008
$VS_{15}$	0.007	2.05	0.008	0.007	2.30	0.006
$VS_{35}$	-0.007	2.09	-0.006	-0.007	2.40	-0.006
$VS_{12}$	0.004	2.21	0.003	0.004	2.20	0.005
$VS_{13}$	-0.002	2.51	-0.001	-0.002	2.30	0.000
$VS_{23}$	-0.001	2.91	0.000	-0.001	2.50	-0.002
$V_9$	0.20"	2.91	0.39"	0.20"	3.90	0.18"
$V_{10}$	1.63	1.91	1.88	1.64	1.60	1.83
$V_{11}$	0.20	2.91	0.09	0.20	3.00	0.19
$V_{12}$	-0.67	2.21	-0.54	-0.65	1.30	-0.55
$V_{13}$	1.20	2.23	0.87	1.18	1.30	1.08
$V_{14}$	-0.31	2.91	-0.26	-0.42	1.20	-0.41
$V_{15}$	0.55	1.79	0.60	0.59	1.20	0.66
$V_{16}$	-0.48	1.91	-0.35	-0.47	1.20	-0.44
$V_{17}$	-0.86	2.06	-0.94	-0.92	1.40	-0.98
$V_{18}$	0.78	1.51	0.98	0.57	1.20	0.58
$V_{19}$	0.42	2.91	0.28	0.40	1.20	0.35
$V_{20}$	-0.81	1.92	-0.83	-0.84	1.40	-0.82
$V_{21}$	0.92	1.61	0.96	0.92	1.80	0.85

На рис. 4.8 показана сеть триангуляции из [38, с. 145]. В табл. 4.17 приведены результаты вычислений.

Таблица 4.17

## Обработка триангуляционной сети

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	n = 2,0	степени	многокрит.	n = 2,0	степени	многокрит.
$\mu$	1.013		1.000	0.928		0.928
M <sub>1</sub>	0.144		0.143	0.141		0.141
M <sub>2</sub>	0.143		0.142	0.140		0.140
M <sub>3</sub>	0.151		0.150	0.147		0.147
M <sub>4</sub>	0.165		0.165	0.161		0.161
M <sub>5</sub>	0.132		0.132	0.129		0.129
V <sub>1</sub>	- 0.96"	2.06	- 0.97"	- 0.96"	2.00	- 0.96"
V <sub>2</sub>	- 1.39	2.04	- 1.37	- 1.39	2.00	- 1.39
V <sub>3</sub>	- 0.58	2.13	- 0.59	- 0.58	2.00	- 0.58
V <sub>4</sub>	- 0.46	2.03	- 0.47	- 0.46	2.00	- 0.46
V <sub>5</sub>	- 0.04	1.15	- 0.05	- 0.04	2.00	- 0.04
V <sub>6</sub>	0.81	2.07	0.81	0.81	2.00	0.81
V <sub>7</sub>	- 0.70	2.01	- 0.72	- 0.68	2.00	- 0.68
V <sub>8</sub>	- 0.60	2.09	- 0.62	- 0.62	2.00	- 0.62
V <sub>9</sub>	0.44	1.99	0.44	0.44	2.00	0.44
V <sub>10</sub>	- 0.59	2.21	- 0.58	- 0.54	2.00	- 0.54
V <sub>11</sub>	0.61	2.10	0.62	0.66	2.00	0.66
V <sub>12</sub>	- 0.42	1.95	- 0.42	- 0.38	2.00	- 0.38
V <sub>13</sub>	- 0.68	2.01	- 0.66	- 0.57	2.00	- 0.57
V <sub>14</sub>	- 0.81	1.97	- 0.77	- 0.75	2.00	- 0.75
V <sub>15</sub>	- 0.75	1.91	- 0.70	- 0.66	2.00	- 0.66
V <sub>16</sub>	0.26	1.11	0.26	0.04	2.00	0.04
V <sub>17</sub>	0.03	1.11	0.02	- 0.11	2.00	- 0.11
V <sub>18</sub>	- 1.34	2.03	- 1.32	- 1.43	2.00	- 1.43
V <sub>19</sub>	- 0.50	2.02	- 0.46	- 0.48	2.00	- 0.48
V <sub>20</sub>	- 0.28	1.11	- 0.04	- 0.05	2.00	- 0.05
V <sub>21</sub>	- 1.22	1.98	- 1.31	- 1.08	2.00	- 1.08

На рис. 4.9 показана сеть триангуляции из [38, с. 160]. В табл. 4.18 приведены результаты вычислений.

## Обработка триангуляционной сети

	Коррелатный способ			Параметрический способ		
	n = 2,0	степени	многокрит.	n = 2,0	степени	многокрит.
$\mu$	1.876		0.916	1.840		0.925
$M_1$	0.082		0.070	0.080		0.072
$M_2$	0.104		0.085	0.102		0.085
$V_1$	1.14"	2.61	1.52"	1.14"	2.20	1.41"
$V_2$	0.94	1.61	1.01	0.94	2.00	0.82
$V_3$	- 0.70	1.91	- 1.24	- 0.67	1.90	- 0.69
$V_4$	1.31	2.61	1.52	1.30	2.30	1.34
$V_5$	- 3.13	2.31	- 3.08	- 3.12	2.20	- 3.11
$V_6$	0.15	1.21	0.33	0.14	1.20	0.04
$V_7$	- 0.55	2.22	- 0.77	- 0.55	2.00	- 0.64
$V_8$	1.23	1.90	1.12	1.24	2.00	1.33
$V_9$	- 3.45	2.51	- 3.18	- 3.30	2.20	- 3.20
$V_{10}$	0.12	1.11	- 0.04	0.22	1.30	0.03
$V_{11}$	0.08	1.11	0.37	0.03	1.50	0.00
$V_{12}$	0.50	1.11	0.28	0.48	1.70	0.41

Ниже рассмотрим линеаризованный вариант коррелатного много критериального способа, который включает минимизацию следующих целевых функций

$$\Phi_2(X, n) = \max M, \quad (4.23)$$

$$\Phi_3(X, n) = \sum_{j=1}^K M_j^2, \quad (4.24)$$

где  $X$  – вектор координат определяемых пунктов, число которых равно  $K$ ;  $L(X)$  – свободный член нелинейного параметрического уравнения;  $M$  – ошибка положения определяемого пункта;  $n$  – показатель степени, определяемый под условиями (4.23) или (4.24) для каждого измерения.

Две разные целевые функции  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  необходимы для того, чтобы выяснить, какая из них наилучшая. Результаты сравнения получим, используя 24 тестовых примера.

На основе данных из 24 таблиц можно сделать следующие выводы:

1. Условия (4.23), (4.24) по сравнению с МНК всегда приводят к меньшим величинам М. Исключение составляет пример 9.

2. Наибольший эффект уменьшения М достигается для линейно-угловых сетей и построений трилатерации. Уменьшение М по сравнению с МНК иногда составляет 1,5 раза.

3. Применение условий (4.23), (4.24) практически равноценно, но предпочтение отдаем функции (4.23).

Приведем сведения о тестовых примерах.

пример 1 (рис. 4.1) – геодезический четырехугольник триангуляции из статьи [33];

пример 2 (рис. 4.10) – ход полигонометрии;

пример 3 (рис. 4.2) – сеть триангуляции из статьи [37, с. 93];

пример 4 (рис. 4.3) – сеть триангуляции из статьи [37, с. 129];

пример 5 (рис. 4.4) – сеть триангуляции из статьи [37, с. 153];

пример 6 (рис. 4.5) – сеть трилатерации из статьи [37, с. 179];

пример 7 (рис. 4.6) – сеть трилатерации из статьи [37, с. 202];

пример 8 (рис. 4.7) – линейно-угловая триангуляция из статьи [37, с. 217];

пример 9 (рис. 4.8) – звено триангуляции из статьи [38, с. 145];

пример 10 (рис. 4.9) – триангуляция из статьи [38, с. 160];

примеры 11, 12, 13 (рис. 4.11) – триангуляция с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 14, 15, 16 (рис. 4.11) – трилатерация с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 17, 18, 19 (рис. 4.12) – полигонометрия с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 20, 21 (рис. 4.13) – полигонометрия с исходными пунктами (5, 6, 7; 4, 5, 6, 7);

примеры 22, 23, 24 (рис. 4.14) – полигонометрия с исходными пунктами (6, 7; 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7).

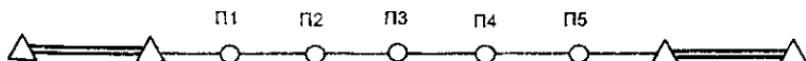


Рис. 4.10. Ход полигонометрии

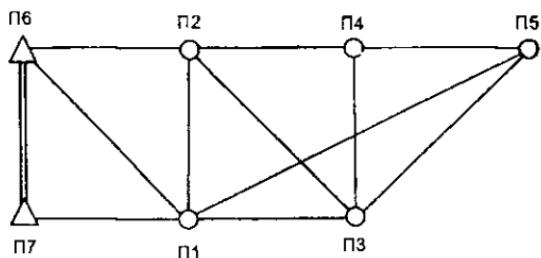


Рис. 4.11. Схема триангуляции и трилатерации

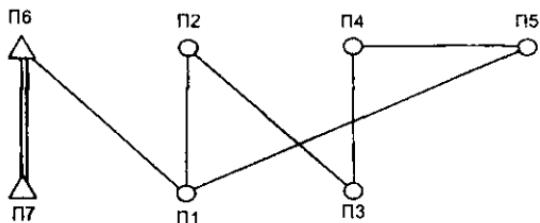


Рис. 4.12. Схема полигонометрии

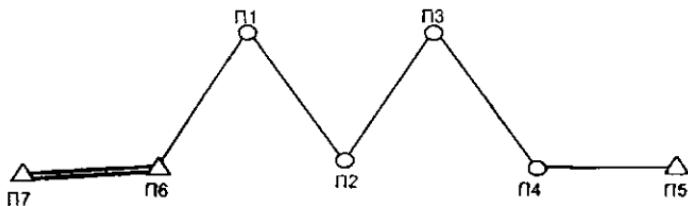


Рис. 4.13. Схема полигонометрии

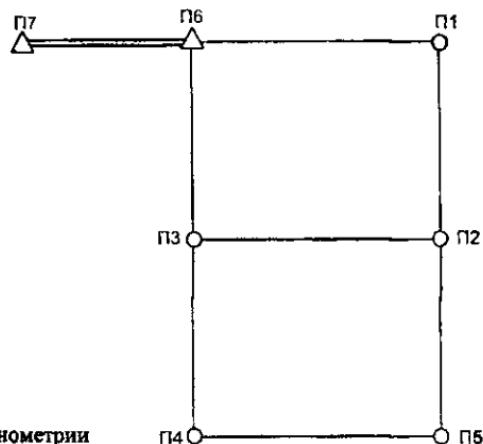


Рис. 4.14. Схема полигонометрии

Таблица 4.19

Обработка примера 1  
(геодезический четырехугольник из [33])

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$	
		степени	многокрит.	степени	Многокрит.
$\mu$	1.000		1.010		1.010
M1	0.060 м		0.059 м		0.059 м
M2	0.064		0.063		0.063
V1	- 0.08"	2.90	- 0.13"	2.90	- 0.13"
V2	0.10	2.90	0.13	2.90	0.13
V3	- 1.09	2.00	- 1.15	2.00	- 1.15
V4	- 0.63	2.90	- 0.48	2.90	- 0.48
V5	0.72	2.00	0.69	2.00	0.69
V6	0.85	1.90	0.90	1.90	0.90
V7	- 0.58	2.10	- 0.60	2.10	- 0.60
V8	0.10	2.90	0.02	2.90	0.02

Таблица 4.20

Обработка примера 2 (полигонометрия)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		1.088		1.036
M1	0.028 м		0.014 м		0.014 м
M2	0.038		0.013		0.013
M3	0.040		0.014		0.013
M4	0.038		0.014		0.005
M5	0.028		0.014		0.013
VS1	0.004	2.00	0.005	1.90	0.004
VS2	0.003	3.00	0.002	3.00	0.001
VS3	0.004	2.60	0.006	2.51	0.006
VS4	0.003	2.91	0.002	2.80	0.001
VS5	0.004	2.00	0.005	1.90	0.004
VS6	0.003	2.92	0.002	3.00	0.001
V7	- 1.07"	2.38	- 0.97"	3.00	- 0.86"
V8	- 1.00	2.84	- 0.83	2.92	- 0.78
V9	- 1.06	2.51	- 0.88	2.02	- 1.15
V10	- 1.00	1.92	- 1.30	1.90	- 1.26
V11	- 1.05	2.45	- 0.87	1.83	- 1.43
V12	- 1.01	2.28	- 1.02	2.49	- 0.89
V13	- 0.99	1.89	- 1.29	2.40	- 0.80

Таблица 4.21

Обработка примера 3 (триангуляция из [37], с. 93)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.955		0.926
M1	0.052 м		0.046 м		0.045 м
M2	0.053		0.044		0.044
M3	0.024		0.020		0.019
V1	0.14"	2.90	0.12"	2.90	0.11"
V2	- 0.58	1.60	- 0.67	1.40	- 0.70
V3	0.95	1.60	1.04	1.50	0.94
V4	0.24	2.90	0.22	2.90	0.20
V5	- 0.48	2.80	- 0.29	2.90	- 0.26
V6	0.05	2.50	0.06	2.90	0.06
V7	0.09	2.90	0.03	2.90	0.00
V8	0.19	2.90	0.22	2.90	0.24
V9	0.07	2.90	- 0.02	2.90	- 0.01
V10	- 0.50	1.50	- 0.55	1.40	- 0.42
V11	0.07	2.90	- 0.10	2.90	- 0.12
V12	0.80	1.60	0.79	1.40	0.94
V13	- 0.25	2.80	- 0.13	1.40	- 0.27

Таблица 4.22

Обработка примера 4 (триангуляция из [37], с. 129)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
1	2	3	4	5	6
$\mu$	1.000		0.990		0.996
M1	0.047 м		0.045 м		0.045 м
M2	0.029		0.028		0.028
M3	0.039		0.038		0.038
V1	- 0.24"	1.51	- 0.24"	1.80	- 0.29"
V2	0.40	1.11	0.34	1.11	0.35
V3	- 0.15	1.67	- 0.21	1.48	- 0.23
V4	- 0.08	1.11	- 0.02	1.11	0.00
V5	0.70	1.99	0.65	2.57	0.71
V6	0.27	3.00	0.33	1.11	0.30
V7	- 0.64	1.65	- 0.62	1.64	- 0.64
V8	0.17	2.92	0.12	1.11	0.10
V9	- 0.11	1.11	0.00	1.11	0.00
V10	- 0.98	1.87	- 1.02	2.12	- 1.01
V11	0.54	2.09	0.56	2.47	0.62
V12	1.72	2.79	1.65	2.49	1.68
V13	- 2.65	2.12	- 2.65	2.09	- 2.60

1	2	3	4	5	6
V14	0.94	3.00	1.03	2.90	0.96
V15	0.95	3.00	0.98	2.17	1.03
V16	-0.75	1.11	-0.76	1.33	-0.80
V17	0.74	1.11	0.74	1.11	0.72
V18	0.66	2.14	0.68	2.01	0.67
V19	-0.64	1.51	-0.68	1.11	-0.68

Таблица 4.23

Обработка примера 5 (триангуляция из [37], с. 153)

	n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M_i^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
1	2	3	4	5	6
$\mu$	1.002		1.005		0.974
M1	0.041 м		0.039 м		0.038 м
M2	0.043		0.041		0.041
M3	0.020		0.020		0.020
V1	0.10"	2.90	0.20"	2.90	0.10"
V2	0.74	2.20	0.79	1.80	0.74
V3	0.98	1.20	1.01	1.20	0.95
V4	0.26	2.90	0.21	1.20	0.27
V5	0.69	1.80	0.70	1.20	0.71
V6	-0.36	2.90	-0.34	2.90	-0.30
V7	-0.11	2.90	-0.03	2.90	-0.09
V8	-0.52	2.90	-0.43	1.80	-0.52
V9	0.04	2.90	0.05	2.90	0.01
V10	0.78	2.90	0.62	2.00	0.76
V11	-1.07	2.10	-1.18	2.00	-1.08
V12	-0.04	2.90	-0.12	2.90	-0.06
V13	-1.36	1.90	-1.42	1.80	-1.39
V14	0.68	1.20	0.56	1.40	0.69
V15	0.19	2.90	0.16	2.90	0.15
V16	0.11	2.90	0.09	2.90	0.13

Таблица 4.24

Обработка примера 6 (трилатерация из [37], с. 179)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	0.958		0.528		0.465
M1	0.060 м		0.033 м		0.031 м
M2	0.077		0.032		0.025
M3	0.039		0.014		0.012
M4	0.059		0.033		0.032
VS53	0.007	2.30	0.004	2.22	0.003
VS54	- 0.005	2.40	- 0.003	2.36	- 0.003
VS16	- 0.005	2.40	- 0.003	2.34	- 0.003
VS36	0.006	2.30	0.004	2.32	0.003
VS12	0.012	2.20	0.002	2.39	0.001
VS13	0.019	1.20	0.005	2.22	0.004
VS14	- 0.022	1.20	- 0.074	1.11	- 0.080
VS23	- 0.018	1.90	- 0.002	2.20	- 0.001
VS24	0.013	2.10	0.002	2.40	0.001
VS34	0.020	2.20	0.005	2.24	0.004

Таблица 4.25

Обработка примера 7 (трилатерация из [37], с. 202)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.596		0.537
M1	0.037 м		0.022 м		0.025 м
M2	0.040		0.023		0.015
VS13	0.026	1.30	0.062	1.20	0.070
VS14	0.024	2.40	0.007	2.20	0.004
VS15	0.015	2.30	0.000	2.40	- 0.003
VS12	- 0.017	2.00	- 0.009	2.20	- 0.008
VS23	0.014	2.00	0.008	2.10	0.006
VS24	0.015	2.00	0.008	2.10	0.007

Таблица 4.26

Обработка примера 8 (линейно-угловая сеть из [37], с. 217)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		1.057		1.058
M1	0.007 м		0.006 м		0.006 м
M2	0.012		0.010		0.010
M3	0.011		0.010		0.009
VS14	0.001	3.00	0.000	3.00	0.000
VS34	0.004	2.60	0.000	2.65	0.001
VS25	- 0.008	2.15	- 0.007	2.08	- 0.007
VS15	0.007	2.08	0.008	2.06	0.008
VS35	- 0.006	2.03	- 0.007	2.11	- 0.006
VS12	0.005	2.21	0.004	2.19	0.003
VS13	- 0.001	1.90	- 0.001	2.71	0.000
VS23	0.000	3.00	0.000	3.00	0.000
V9	0.25"	3.00	0.36"	3.00	0.41"
V10	1.72	1.78	1.95	1.89	1.99
V11	0.16	3.00	0.03	3.00	- 0.02
V12	- 0.64	1.30	- 0.47	1.73	- 0.46
V13	1.11	2.57	0.82	3.00	0.77
V14	- 0.20	2.98	- 0.18	3.00	- 0.20
V15	0.58	1.67	0.76	1.68	0.79
V16	- 0.60	1.58	- 0.46	1.50	- 0.46
V17	- 0.83	2.81	- 0.87	2.42	- 0.91
V18	1.00	1.11	1.16	1.11	1.17
V19	0.43	1.62	0.35	1.94	0.31
V20	- 0.77	1.81	- 0.82	1.90	- 0.78
V21	0.87	1.11	0.82	1.13	0.85

Таблица 4.27

Обработка примера 9 (триангуляция из [38], с. 145)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
1	2	3	4	5	6
$\mu$	1.000		1.001		1.000
M1	0.144 м		0.144 м		0.143 м
M2	0.143		0.143		0.142
M3	0.151		0.150		0.150
M4	0.165		0.165		0.165
M5	0.132		0.132		0.131
V1	- 0.96"	2.00	- 0.95"	2.09	- 0.96"
V2	- 1.39	2.00	- 1.36	2.07	- 1.38

1	2	3	4	5	6
V3	- 0.58	2.10	- 0.59	2.21	- 0.59
V4	- 0.46	2.10	- 0.44	2.16	- 0.44
V5	- 0.05	1.70	- 0.04	1.20	- 0.04
V6	0.81	2.00	0.81	2.11	0.82
V7	- 0.70	2.00	- 0.71	1.95	- 0.70
V8	- 0.60	2.00	- 0.62	2.15	- 0.60
V9	0.44	2.00	0.43	2.03	0.44
V10	- 0.59	2.00	- 0.60	2.13	- 0.60
V11	0.60	2.00	0.62	2.20	0.60
V12	- 0.42	2.00	- 0.42	1.94	- 0.42
V13	- 0.68	2.00	- 0.66	2.01	- 0.68
V14	- 0.81	2.00	- 0.76	1.98	- 0.81
V15	- 0.75	2.00	- 0.70	1.83	- 0.75
V16	0.26	1.50	0.27	1.11	0.27
V17	0.03	2.90	0.02	1.11	0.00
V18	- 1.34	2.00	- 1.33	2.12	- 1.34
V19	- 0.50	2.10	- 0.44	2.18	- 0.50
V20	- 0.03	1.20	- 0.06	1.11	- 0.02
V21	- 1.22	2.00	- 1.33	1.99	- 1.23

Таблица 4.28

Обработка примера 10 (триангуляция из [38], с. 160)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.890		0.899
M1	0.082 м		0.073 м		0.071 м
M2	0.104		0.086		0.087
V1	1.14"	2.60	1.51"	2.50	1.48"
V2	0.94	2.30	1.16	1.90	1.07
V3	- 0.70	1.80	- 1.19	2.20	- 1.19
V4	1.31	2.90	1.49	2.50	1.50
V5	- 3.13	2.50	- 2.84	2.40	- 2.98
V6	0.15	1.20	0.48	1.20	0.38
V7	- 0.55	2.70	- 0.83	2.50	- 0.77
V8	1.23	1.70	1.22	1.90	1.16
V9	- 3.45	2.50	- 3.35	2.50	- 3.27
V10	0.12	1.20	0.03	1.20	0.01
V11	0.08	1.20	0.10	1.20	0.24
V12	0.50	1.20	0.20	1.20	0.26

Таблица 4.29

Обработка примера 11 (триангуляция № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	0.958		1.144		1.135
M1	0.066 м		0.050 м		0.051 м
M2	0.066		0.080		0.068
M3	0.132		0.111		0.107
M4	0.132		0.120		0.110
M5	0.216		0.121		0.145
V1	- 5.00"	1.57	- 5.17"	1.59	- 5.10"
V2	- 5.00	1.56	- 5.35	1.60	- 4.95
V3	- 5.00	1.62	- 4.48	1.60	- 4.95
V4	- 5.00	1.68	- 6.03	2.60	- 3.62
V5	- 5.00	2.51	- 3.34	1.80	- 5.69
V6	- 5.00	1.71	- 5.62	1.80	- 5.69
V7	- 5.02	2.32	- 4.07	1.70	- 5.52
V8	- 5.00	2.10	- 4.65	1.84	- 4.76
V9	- 4.99	1.84	- 6.28	1.88	- 4.72
V10	- 6.33	2.19	- 6.58	2.00	- 6.79
V11	- 6.36	2.10	- 6.98	1.90	- 7.30
V12	- 6.32	2.53	- 5.44	2.50	- 4.91
V13	- 4.97	1.75	- 5.73	2.30	- 4.40
V14	- 4.99	1.75	- 5.44	1.93	- 5.48
V15	- 4.96	2.24	- 3.75	2.10	- 5.04
V16	- 0.05	1.11	0.29	2.70	1.24

Таблица 4.30

Обработка примера 12 (триангуляция № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
1	2	3	4	5	6
$\mu$	1.000		1.124		1.172
M1	0.044 м		0.032 м		0.023 м
M2	0.042		0.030		0.029
M3	0.050		0.033		0.034
M4	0.045		0.033		0.035
V1	- 4.68"	2.40	- 4.69"	2.20	- 4.39"
V2	- 4.85	1.90	- 4.88	1.90	- 4.76
V3	- 5.79	2.40	- 5.75	2.30	- 6.17
V4	- 4.42	1.70	- 5.03	1.50	- 6.00
V5	- 5.41	2.50	- 4.68	2.50	- 4.52
V6	- 4.84	1.70	- 4.97	1.80	- 4.14

1	2	3	4	5	6
V7	-4.76	2.20	-4.73	2.00	-4.79
V8	-4.91	1.90	-5.39	1.90	-5.15
V9	-5.56	2.50	-5.09	2.40	-5.28
V10	-6.16	1.80	-5.49	1.80	-5.41
V11	-6.78	1.80	-7.88	1.90	-7.23
V12	-6.23	1.70	-5.80	1.70	-6.54
V13	-4.74	1.70	-5.40	1.60	-4.97
V14	-5.44	1.80	-5.91	1.80	-6.38
V15	-4.82	1.80	-3.68	1.70	-3.64
V16	0.10	1.80	1.34	1.80	0.98

Таблица 4.31

Обработка примера 13 (триангуляция № 3)

n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^K M_i^2$	
	степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.894	
M1	0.034 м		0.025 м	
M2	0.032		0.016	
M3	0.031		0.025	
V1	-3.64"	2.75	-3.07"	2.60
V2	-4.00	3.00	-3.44	2.72
V3	-7.32	2.13	-8.44	1.94
V4	-5.67	2.34	-5.94	1.75
V5	-6.09	2.60	-4.99	2.40
V6	-3.28	1.84	-4.11	1.42
V7	-3.75	1.59	-4.62	1.40
V8	-6.36	2.45	-5.31	2.32
V9	-4.88	1.94	-5.07	1.70
V10	-8.80	2.28	-8.56	2.06
V11	-5.70	1.98	-5.70	1.87
V12	-4.50	1.93	-4.73	1.67
V13	-2.45	1.90	-2.58	1.78
V14	-4.11	1.82	-3.47	1.73
V15	-8.28	2.29	-8.79	2.16
V16	-1.61	1.83	-1.70	1.50

Таблица 4.32

## Обработка примера 14 (трилатерация № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.521		0.523
M1	0.143 м		0.023 м		0.023 м
M2	0.158		0.054		0.046
M3	0.239		0.146		0.125
M4	0.251		0.138		0.110
M5	0.362		0.185		0.186
VS16	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000
VS17	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000
VS26	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000
VS12	- 0.018	1.80	- 0.005	2.00	- 0.006
VS23	0.025	1.30	0.018	1.90	0.009
VS13	- 0.036	1.40	- 0.024	1.40	- 0.024
VS34	0.000	2.00	0.000	2.80	0.000
VS24	- 0.018	2.10	- 0.007	2.10	- 0.007
VS45	- 0.018	2.10	- 0.007	2.00	- 0.006
VS35	- 0.025	1.80	- 0.008	1.30	- 0.018
VS15	0.040	1.40	0.081	1.40	0.080

Таблица 4.33

## Обработка примера 15 (трилатерация № 2)

	n = 2,0	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.504		0.727
M1	0.068 м		0.041 м		0.046 м
M2	0.086		0.041		0.040
M3	0.082		0.036		0.013
M4	0.097		0.041		0.046
VS16	0.006	2.60	0.003	2.73	0.005
VS17	- 0.012	1.18	- 0.001	1.21	- 0.009
VS26	- 0.034	2.41	- 0.002	2.38	- 0.002
VS12	- 0.015	2.28	- 0.006	2.40	- 0.011
VS23	0.021	2.24	0.008	2.37	0.015
VS13	- 0.030	1.28	- 0.054	1.71	- 0.029
VS34	0.000	2.54	0.000	3.00	0.000
VS24	- 0.048	1.16	- 0.122	1.28	- 0.116
VS45	- 0.048	2.15	- 0.006	2.15	- 0.012
VS35	- 0.021	2.18	- 0.008	2.23	- 0.015
VS15	0.024	2.08	0.009	2.12	0.019

Таблица 4.34

## Обработка примера 16 (трилатерация № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.426		0.438
M1	0.056 м		0.030 м		0.027 м
M2	0.065		0.048		0.048
M3	0.053		0.038		0.028
VS16	0.016	2.36	0.004	2.44	0.004
VS17	-0.011	2.27	-0.004	2.32	-0.003
VS26	-0.033	2.60	-0.001	2.69	-0.001
VS12	-0.024	2.01	-0.007	2.02	-0.007
VS23	0.034	1.29	0.069	1.28	0.071
VS13	-0.025	1.76	-0.010	1.97	-0.009
VS34	-0.023	2.11	-0.004	2.21	-0.004
VS24	-0.057	1.22	-0.089	1.21	-0.089
VS45	-	-	-	-	-
VS35	-0.001	1.47	-0.003	2.12	-0.004
VS15	0.029	1.74	0.012	1.92	0.011

Таблица 4.35

## Обработка примера 17 (полигонометрия № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.435		0.371
M1	0.072 м		0.012 м		0.009 м
M2	0.084		0.052		0.018
M3	0.126		0.057		0.034
M4	0.127		0.053		0.036
M5	0.170		0.057		0.054
VS16	0.000	2.90	0.000	3.00	0.000
VS12	-0.013	1.20	-0.017	2.14	-0.004
VS23	-0.016	2.00	-0.004	2.28	-0.002
VS34	-0.013	1.90	-0.004	2.04	-0.004
VS45	-0.037	1.30	-0.068	1.18	-0.049
VS15	0.039	1.40	0.033	1.20	0.062
V7	0.00"	1.20	0.00"	1.11	0.00"
V8	0.00	1.20	0.00	1.11	0.00
V9	3.60	2.30	1.40	2.25	1.10
V10	-3.15	2.10	-0.84	1.44	-0.04
V11	1.80	2.70	1.10	1.72	0.31
V12	1.35	1.20	0.01	1.11	-0.17

Таблица 4.36

## Обработка примера 18 (полигонометрия № 2)

	n = 2.0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.840		0.927
M1	0.039 м		0.037 м		0.033 м
M2	0.049		0.038		0.037
M3	0.054		0.034		0.008
M4	0.046		0.038		0.059
VS16	- 0.006	2.00	- 0.013	2.00	- 0.007
VS12	- 0.010	2.40	- 0.008	2.20	- 0.010
VS23	- 0.019	2.00	- 0.017	2.00	- 0.016
VS34	- 0.010	1.90	- 0.008	2.10	- 0.009
VS45	- 0.038	2.00	- 0.032	1.90	- 0.039
VS15	0.042	1.60	0.054	1.90	0.044
V7	- 3.38"	1.90	- 2.04"	2.10	- 3.25"
V8	- 2.44	2.00	- 3.14	1.90	- 2.66
V9	2.83	2.10	2.04	2.00	2.58
V10	- 3.64	2.00	- 3.30	1.90	- 3.49
V11	1.42	2.00	1.06	2.00	1.29
V12	- 0.22	1.90	- 0.80	1.60	- 0.38

Таблица 4.37

## Обработка примера 19 (полигонометрия № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		1.037		0.980
M1	0.038 м		0.025 м		0.026 м
M2	0.045		0.026		0.019
M3	0.042		0.026		0.025
VS16	0.014	1.90	0.010	1.90	0.013
VS12	- 0.034	2.00	- 0.035	2.00	- 0.035
VS23	0.004	2.00	- 0.001	2.00	- 0.002
VS34	- 0.034	2.00	- 0.035	2.00	- 0.035
VS45	-	-	-	-	-
VS15	0.039	2.00	0.042	2.00	0.040
V7	- 2.88"	2.00	- 2.62"	2.00	- 2.75"
V8	- 4.04	2.10	- 4.10	2.10	- 4.02
V9	0.66	2.00	1.10	2.00	0.64
V10	- 7.71	2.20	- 6.42	2.10	- 7.21
V11	- 3.94	1.70	- 5.87	1.90	- 4.57
V12	- 0.93	2.30	- 0.88	2.70	- 1.02

Таблица 4.38

## Обработка примера 20 (полигонометрия № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	0.999		0.577		1.028
M1	0.062 м		0.060 м		0.057 м
M2	0.079		0.071		0.072
M3	0.084		0.072		0.080
M4	0.060		0.070		0.054
VS16	0.022	1.88	0.015	2.20	0.021
VS12	0.014	2.37	0.001	2.20	0.014
VS23	0.022	1.87	0.015	1.90	0.025
VS34	0.014	2.45	0.001	2.10	0.014
VS45	0.025	1.29	0.069	2.00	0.026
V6	- 3.65"	2.60	- 4.41"	2.00	- 3.92"
V7	- 6.33	3.00	- 4.61	2.20	- 5.51
V8	- 2.19	2.42	- 3.31	1.80	- 2.59
V9	- 4.87	2.24	- 3.51	2.00	- 5.12
V10	- 0.73	2.00	- 1.31	1.40	- 0.75

Таблица 4.39

## Обработка примера 21 (полигонометрия № 3)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		0.935		0.983
M1	0.091 м		0.089 м		0.064 м
M2	0.102		0.087		0.005
M3	0.091		0.087		0.088
VS16	- 0.005	2.50	- 0.004	2.29	- 0.006
VS12	0.034	1.90	0.043	2.10	0.036
VS23	- 0.005	2.50	- 0.004	1.40	- 0.002
VS34	0.034	2.00	0.039	2.11	0.036
VS45	-	-	-	-	-
V6	0.99"	1.90	0.66"	2.00	1.45"
V7	- 5.59	2.10	- 6.26	2.00	- 5.90
V8	- 6.49	2.00	- 7.11	1.90	- 7.54
V9	- 13.07	2.30	- 10.43	2.11	- 12.18
V10	- 13.96	2.10	- 14.99	2.06	- 13.95

Таблица 4.40

Обработка примера 22 (полигонометрия № 1)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
$\mu$	1.000		1.068		0.982
M1	0.055 м		0.060 м		0.016 м
M2	0.081		0.083		0.007
M3	0.065		0.054		0.041
M4	0.119		0.066		0.074
M5	0.127		0.083		0.037
VS16	0.010	2.10	0.013	2.33	0.014
VS12	- 0.004	2.00	- 0.003	2.09	- 0.002
VS23	- 0.011	1.80	- 0.012	1.88	- 0.011
VS36	0.004	2.00	0.003	2.00	0.002
VS25	- 0.002	2.00	- 0.006	2.90	- 0.004
VS45	0.002	2.00	- 0.002	2.07	- 0.004
VS34	0.002	1.80	0.005	2.31	0.002
V8	0.00"	1.90	0.00"	1.11	0.00"
V9	- 6.89	1.90	- 7.32	1.86	- 8.19
V10	- 8.20	2.00	- 8.14	2.06	- 7.86
V11	- 7.61	2.10	- 6.80	2.14	- 6.98
V12	- 6.30	1.90	- 6.74	2.05	- 5.97
V13	- 7.02	1.80	- 8.16	1.96	- 8.30
V14	- 7.28	2.00	- 6.70	2.09	- 7.09
V15	- 7.05	2.10	- 6.19	2.17	- 6.85
V16	- 6.79	2.00	- 7.09	2.36	- 5.90

Таблица 4.41

Обработка примера 23 (полигонометрия № 2)

	n = 2,0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{i=1}^k M^2$	
		степени	многокрит.	степени	многокрит.
1	2	3	4	5	6
$\mu$	1.001		1.049		1.036
M1	0.063 м		0.040 м		0.022 м
M2	0.057		0.037		0.071
M3	0.057		0.024		0.058
M4	0.069		0.058		0.080
VS16	- 0.019	2.00	- 0.014	1.90	- 0.019
VS12	- 0.062	2.00	- 0.055	2.00	- 0.059
VS23	- 0.033	2.00	- 0.035	2.00	- 0.033
VS36	- 0.078	2.00	- 0.076	2.00	- 0.072
VS25	- 0.080	1.90	- 0.085	1.90	- 0.085
VS45	- 0.027	2.00	- 0.024	2.00	- 0.024
VS34	- 0.061	2.00	- 0.059	2.00	- 0.060

1	2	3	4	5	6
V8	2.46"	1.90	2.10"	2.00	2.81"
V9	-11.30	1.80	-13.44	1.90	-11.97
V10	-8.73	2.00	-7.63	2.00	-7.68
V11	-8.54	2.00	-7.93	1.80	-9.53
V12	-0.42	1.50	-0.01	1.20	0.17
V13	-6.55	2.00	-6.66	2.00	-6.68
V14	-9.04	2.10	-7.73	2.10	-8.00
V15	-2.06	1.70	-1.90	1.80	-1.74
V16	-10.25	2.00	-11.60	2.00	-11.49

Таблица 4.42  
Обработка примера 24 (полигонометрия № 3)

n ≈ 2.0	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \sum_{t=1}^k M^2$	
	степени	многокрит.	степени	многокрит.
μ	1.000		1.049	
M1	0.060 м		0.025 м	
M2	0.053		0.028	
M3	0.049		0.031	
VS16	-0.019	2.10	-0.018	2.10
VS12	-0.062	2.00	-0.060	2.00
VS23	-0.055	1.90	-0.055	1.90
VS36	-0.084	2.00	-0.086	2.00
VS25	-0.061	2.00	-0.062	2.00
VS45	-	-	-	-
VS34	-0.086	2.00	-0.083	2.10
V8	-1.28"	2.00	-1.54"	2.00
V9	-12.00	1.90	-12.83	1.90
V10	-9.42	1.90	-9.69	1.80
V11	-2.83	1.80	-2.37	1.90
V12	-4.86	2.10	-4.23	1.90
V13	-8.70	1.80	-9.90	2.00
V14	-15.04	2.00	-13.98	2.00
V15	-5.02	1.90	-5.34	1.90
V16	0.77	2.10	1.44	1.90

Опыт работы показал, что лучшей по сравнению с (4.2) будет дополнительная целевая функция

$$\Phi_3(X, n) = \max M . \quad (4.25)$$

Замечено, что при использовании многокритериальной оптимизации наибольшая поправка в измерения там, где индивидуальный показатель

степени близок к единице. Как сказано в статье [18], чтобы дать ограничения на величину поправок в результаты измерений  $V = L(X)$ , вместо (4.25) можно применить целевую функцию

$$\Phi_3(X, n) = \max M \cdot \mu, \quad (4.26)$$

$$\text{где } \mu = \sqrt{\frac{V^T P_{n_j} V}{r}}.$$

Цель исследований – установить, как влияет функция (4.26) на величину поправок в измерения по сравнению с (4.25).

Таблица 4.43

Обработка примера 1 (геодезический четырехугольник из [33])

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		1.010		0.991		0.992	
M1	0.060 м		0.059 м		0.060 м		0.060 м	
M2	0.064		0.063		0.063		0.064	
V1	-0.08"	2.90	-0.13"	2.90	-0.73"	2.30	-0.09"	2.10
V2	0.10	2.90	0.13	2.90	0.054	2.46	0.12	2.00
V3	-1.09	2.00	-1.15	1.90	-1.063	1.84	-1.11	2.00
V4	-0.63	2.90	-0.48	1.80	-0.621	1.81	-0.62	2.00
V5	0.72	2.00	0.69	1.80	0.718	1.80	0.73	2.00
V6	0.85	1.90	0.90	1.70	0.889	1.83	0.85	2.10
V7	-0.58	2.10	-0.60	1.90	-0.607	1.80	-0.55	2.00
V8	0.10	2.90	0.02	2.90	0.082	2.30	0.09	2.00

Таблица 4.44

Обработка примера 2 (полигонометрия)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu$	1.000		1.088		0.981		1.096	
M1	0.028 м		0.014 м		0.015 м		0.017 м	
M2	0.038		0.013		0.013		0.017	
M3	0.040		0.014		0.015		0.021	
M4	0.038		0.014		0.015		0.017	
M5	0.028		0.014		0.014		0.016	
VS1	0.004	2.00	0.005	2.00	0.004	2.67	0.003	2.70
VS2	0.003	3.00	0.002	2.87	0.003	2.84	0.003	2.80

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VS3	0.004	2.60	0.006	2.63	0.005	2.68	0.003	2.66	0.004
VS4	0.003	2.91	0.002	2.74	0.002	2.70	0.003	2.69	0.004
VS5	0.004	2.00	0.005	2.00	0.004	2.81	0.004	2.80	0.004
VS6	0.003	2.92	0.002	2.74	0.002	2.71	0.003	2.64	0.004
V7	-1.07"	2.38	-0.92"	2.60	-1.035"	2.11	-1.08"	2.20	-0.939"
V8	-1.00	2.84	-0.83	3.00	-0.927	2.50	-0.86	2.00	-1.079
V9	-1.06	2.51	-0.88	2.98	-0.965	1.97	-1.26	2.10	-1.007
V10	-1.00	1.92	-1.30	2.35	-1.105	2.52	-0.85	2.00	-1.075
V11	-1.05	2.45	-0.87	2.78	-0.936	2.10	-1.08	2.20	-0.933
V12	-1.01	2.28	-1.02	2.72	-0.985	2.18	-1.01	2.00	-1.083
V13	-0.99	1.89	-1.29	2.18	-1.225	2.13	-1.04	2.00	-1.083

Таблица 4.45  
Обработка примера 3 (триангуляция из [37], с. 93)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ				
	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$ $\times \mu$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$ $\times \mu$		
	n	v	n	v	n	v	n	v	
$\mu$	1.000	0.955		0.883		0.975		0.976	
M1	0.052 м	0.046 м		0.045 м		0.046 м		0.048 м	
M2	0.053	0.044		0.045		0.046		0.049	
M3	0.024	0.020		0.021		0.020		0.022	
V1	0.14"	2.90	0.12"	2.96	0.17"	2.83	0.11"	3.00	0.18"
V2	-0.58	1.60	-0.67	1.37	-0.55	1.81	-0.52	1.69	-0.53
V3	0.95	1.60	1.04	1.45	0.95	1.46	1.14	1.99	0.81
V4	0.24	2.90	0.22	2.67	0.19	2.86	0.22	2.00	0.21
V5	-0.48	2.90	-0.29	1.36	-0.46	3.00	-0.30	1.60	-0.55
V6	0.05	2.50	0.06	2.21	0.04	2.73	0.04	2.40	0.21
V7	0.09	2.90	0.03	3.00	0.04	2.99	-0.15	3.00	0.22
V8	0.19	2.90	0.22	2.87	0.21	3.00	0.23	3.00	0.22
V9	0.07	2.90	-0.02	3.00	0.01	2.82	-0.11	2.64	0.10
V10	-0.50	1.50	-0.55	1.32	-0.45	1.57	-0.45	1.30	-0.65
V11	0.07	2.90	-0.10	3.00	0.03	2.97	-0.13	2.48	0.05
V12	0.80	1.60	0.79	1.37	0.89	1.52	0.89	1.70	0.87
V13	-0.25	2.80	-0.13	1.25	-0.24	2.86	-0.07	1.70	-0.24

Таблица 4.46

Обработка примера 4 (триангуляция из [37], с. 129)

v при n=20	Коррелатный способ				Параметрический способ				
	$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_1(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		
	n	v	n	v	n	v	n	v	
$\mu$	1.000		0.990		0.979		1.020		1.020
M1	0.047 м		0.045 м		0.045 м		0.046 м		0.047 м
M2	0.029		0.028		0.029		0.030		0.030
M3	0.039		0.038		0.039		0.040		0.039
V1	-0.24"	1.51	-0.24"	1.70	-0.25"	1.66	-0.26"	1.90	-0.38"
V2	0.40	1.11	0.34	1.11	0.35	1.48	0.41	1.70	0.51
V3	-0.15	1.67	-0.21	1.69	-0.17	1.58	-0.18	2.00	-0.26
V4	-0.08	1.11	-0.02	1.52	-0.06	1.11	-0.05	1.98	-0.03
V5	0.70	1.99	0.65	3.00	0.68	1.75	0.63	1.88	0.71
V6	0.27	3.00	0.33	3.00	0.28	1.78	0.28	1.90	0.24
V7	-0.64	1.65	-0.62	2.07	-0.65	1.59	-0.60	1.84	-0.58
V8	0.17	2.92	0.12	3.00	0.13	2.12	0.05	2.00	0.01
V9	-0.11	1.11	0.00	1.11	-0.07	1.14	-0.10	1.14	-0.06
V10	-0.98	1.87	-1.02	2.24	-0.98	1.67	-1.04	1.81	-1.02
V11	0.54	2.09	0.56	2.61	0.58	1.61	0.59	1.78	0.60
V12	1.72	2.79	1.65	2.70	1.71	2.28	1.74	2.15	1.77
V13	-2.65	2.12	-2.65	2.22	-2.64	1.98	-2.70	2.10	-2.56
V14	0.94	3.00	1.03	3.00	0.95	2.37	0.94	2.00	1.01
V15	0.95	3.00	0.98	3.00	0.97	2.35	0.99	2.22	0.96
V16	-0.75	1.11	-0.76	1.30	-0.80	1.62	-0.78	1.81	-0.84
V17	0.74	1.11	0.74	1.66	0.75	1.67	0.78	1.95	0.79
V18	0.66	2.14	0.68	2.94	0.69	1.62	0.74	1.82	0.80
V19	-0.64	1.51	-0.68	2.62	-0.64	1.76	-0.64	2.00	-0.79

Таблица 4.47

Обработка примера 5 (триангуляция из [37], с. 153)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.002		1.005		0.951		1.011	
M1	0.041 м		0.039 м		0.038 м		0.040 м	
M2	0.043		0.041		0.042		0.043	
M3	0.020		0.020		0.020		0.020	
V1	0.10"	2.90	0.20"	3.00	0.10"	2.40	0.06"	2.10
V2	0.74	2.20	0.79	1.42	0.73	1.80	0.79	2.00
V3	0.98	1.20	1.01	1.11	0.95	1.67	0.94	1.90
V4	0.26	2.90	0.21	1.44	0.24	2.97	0.23	2.10
V5	0.69	1.80	0.70	1.11	0.74	1.81	0.76	2.00
V6	- 0.36	2.90	- 0.34	3.00	- 0.26	3.00	- 0.28	2.00
V7	- 0.11	2.90	- 0.03	3.00	- 0.09	2.69	- 0.14	2.00
V8	- 0.52	2.90	- 0.43	1.50	- 0.51	3.00	- 0.36	2.90
V9	0.04	2.90	0.05	3.00	0.00	2.21	0.03	2.20
V10	0.78	2.90	0.62	1.60	0.74	1.77	0.84	2.00
V11	- 1.07	2.10	- 1.18	1.72	- 1.12	1.77	- 1.20	2.10
V12	- 0.04	2.90	- 0.12	3.00	- 0.03	2.33	- 0.14	2.00
V13	- 1.36	1.90	- 1.42	1.54	- 1.39	1.76	- 1.44	2.00
V14	0.68	1.20	0.56	1.23	0.69	1.55	0.57	2.00
V15	0.19	2.90	0.16	2.96	0.13	2.54	0.14	2.30
V16	0.11	2.90	0.09	3.00	0.08	1.98	- 0.01	2.10

Таблица 4.48

Обработка примера 6 (трилатерация из [37], с. 179)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	0.958		0.528		0.340		0.560	
M1	0.060 м		0.033 м		0.047 м		0.020 м	
M2	0.077		0.032		0.054		0.023	
M3	0.039		0.014		0.023		0.012	
M4	0.059		0.033		0.049		0.022	
VS53	0.007	2.30	0.004	1.80	0.001	2.34	0.004	2.33
VS54	- 0.005	2.40	- 0.003	2.00	- 0.001	2.50	- 0.004	2.47
VS16	- 0.005	2.40	- 0.003	2.00	- 0.001	2.48	- 0.004	2.47
VS36	0.006	2.30	0.004	1.90	0.001	2.39	0.004	2.33
VS12	0.012	2.00	0.002	1.90	0.002	2.59	- 0.001	2.60
VS13	0.019	2.20	0.005	1.30	0.009	2.35	0.004	2.31
VS14	- 0.022	1.20	- 0.074	1.30	- 0.013	1.11	- 0.080	1.17
VS23	- 0.018	1.90	- 0.002	1.20	- 0.024	2.40	0.001	2.40
VS24	0.013	2.10	0.002	1.90	0.002	2.40	0.000	2.58
VS34	0.020	2.20	0.005	1.30	0.052	2.20	0.004	2.28

Таблица 4.49

Обработка примера 7 (трилатерация из [37], с. 202)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		0.596		0.318		0.889	
M1	0.037 м		0.022 м		0.038 м		0.037 м	
M2	0.040		0.023		0.034		0.040	
VS13	0.026	1.30	0.062	1.26	0.036	1.90	0.027	1.90
VS14	0.024	2.40	0.007	2.26	0.030	1.90	0.025	1.90
VS15	0.015	2.30	0.000	1.80	0.002	2.10	0.013	2.10
VS12	-0.017	2.00	-0.009	1.20	-0.025	1.90	-0.016	1.90
VS23	0.014	2.00	0.008	1.43	0.002	2.00	0.013	2.00
VS24	0.015	2.00	0.008	1.54	0.002	2.00	0.014	2.00

Таблица 4.50

Обработка примера 8 (линейно-угловая сеть из [37], с. 217)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		1.057		0.977		1.371	
M1	0.007 м		0.006 м		0.006 м		0.006 м	
M2	0.012		0.010		0.011		0.009	
M3	0.011		0.010		0.011		0.008	
VS14	0.001	3.00	0.000	2.99	0.000	2.64	0.001	2.45
VS34	0.004	2.60	0.000	2.11	0.003	2.65	0.002	2.23
VS25	-0.008	2.15	-0.007	1.98	-0.008	2.46	-0.005	2.30
VS15	0.007	2.08	0.008	1.97	0.008	2.43	0.006	2.20
VS35	-0.006	2.03	-0.007	1.93	-0.006	2.40	-0.006	2.18
VS12	0.005	2.21	0.004	2.06	0.004	2.38	0.004	2.25
VS13	-0.001	1.90	-0.001	1.62	-0.001	2.15	-0.003	2.08
VS23	0.000	3.00	0.000	3.00	0.000	2.52	0.002	2.43
V9	0.25"	3.00	0.36"	3.00	0.38"	3.00	0.06"	3.00
V10	1.72	1.78	1.95	1.80	1.72	1.37	2.19	2.00
V11	0.16	3.00	0.03	3.00	0.22	3.00	-0.17	2.00
V12	-0.64	1.30	-0.47	1.39	-0.68	2.90	-0.25	1.70
V13	1.11	2.57	0.82	1.93	1.01	1.11	0.89	1.60
V14	-0.20	2.98	-0.18	2.49	-0.19	1.11	-0.40	1.50
V15	0.58	1.67	0.76	2.59	0.41	1.52	1.40	1.50
V16	-0.60	1.58	-0.46	1.56	-0.44	1.48	-0.77	1.40
V17	-0.83	2.81	-0.87	1.93	0.85	1.52	-1.04	1.88
V18	1.00	1.11	1.16	1.11	1.03	1.19	0.69	1.88
V19	0.43	1.62	0.35	1.11	0.37	1.53	0.40	1.60
V20	-0.77	1.81	-0.82	1.70	-0.87	1.13	-0.54	1.40
V21	0.87	1.11	0.82	1.11	0.99	2.70	0.48	1.75

Таблица 4.5.1

Обработка примера 9 (триангуляция из [38], с. 145)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		1.001		1.001		0.979	
M1	0.144 м		0.144 м		0.144 м		0.141 м	
M2	0.143		0.143		0.143		0.140	
M3	0.151		0.150		0.151		0.147	
M4	0.165		0.165		0.165		0.161	
M5	0.132		0.132		0.132		0.129	
V1	-0.96"	2.00	-0.95"	2.00	-0.96"	2.00	-0.96"	2.00
V2	-1.39	2.00	-1.36	2.00	-1.36	2.00	-1.37	2.00
V3	-0.58	2.10	-0.59	2.00	-0.60	2.00	-0.59	2.00
V4	-0.46	2.10	-0.44	2.00	-0.46	2.00	-0.46	2.10
V5	-0.05	1.70	-0.04	1.80	-0.04	2.00	-0.04	2.00
V6	0.81	2.00	0.81	2.00	0.81	2.00	0.81	2.00
V7	-0.70	2.00	-0.71	2.00	-0.72	2.00	-0.70	2.00
V8	-0.60	2.00	-0.62	2.00	-0.63	2.00	-0.64	2.00
V9	0.44	2.00	0.43	2.00	0.43	2.00	0.43	2.00
V10	-0.59	2.00	-0.60	2.00	-0.60	2.00	-0.54	2.00
V11	0.60	2.00	0.62	2.00	0.62	2.00	0.68	2.00
V12	-0.42	2.00	-0.42	2.00	-0.42	2.00	-0.39	2.00
V13	-0.68	2.00	-0.66	2.00	-0.65	2.00	-0.55	2.00
V14	-0.81	2.00	-0.76	2.00	-0.77	2.00	-0.72	2.00
V15	-0.75	2.00	-0.70	2.00	-0.69	2.00	-0.61	2.00
V16	0.26	1.50	0.27	1.60	0.26	2.00	0.04	2.00
V17	0.03	2.90	0.02	1.90	0.00	2.00	-0.13	2.00
V18	-1.34	2.00	-1.33	2.00	-1.32	2.00	-1.42	1.90
V19	-0.50	2.10	-0.44	2.10	-0.44	2.00	-0.43	1.90
V20	-0.03	1.20	-0.06	1.20	-0.05	2.00	-0.06	2.00
V21	-1.22	2.00	-1.33	2.00	-1.33	2.00	-1.17	2.00

Таблица 4.5.2

Обработка примера 10 (триангуляция из [38], с. 160)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu$	1.000		0.890		0.767		0.957	
M1	0.082 м		0.073 м		0.068 м		0.075 м	
M2	0.104		0.086		0.084		0.090	
V1	1.14"	2.60	1.51"	2.94	1.70"	2.08	1.30"	2.08
V2	0.94	2.30	1.16	2.96	1.20	1.95	0.92	1.80

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V3	-0.70	1.80	-1.19	2.73	-1.39	1.84	-0.72	1.80	-1.02
V4	1.31	2.90	1.49	3.00	1.55	2.28	1.29	2.00	1.54
V5	-3.13	2.50	-2.84	2.97	-2.81	2.06	-3.15	2.11	-3.05
V6	0.15	1.20	0.48	1.63	0.54	1.26	0.10	1.57	0.25
V7	-0.55	2.70	-0.83	3.00	-0.94	2.15	-0.62	2.00	-0.63
V8	1.23	1.70	1.22	3.00	1.19	1.81	1.25	1.86	1.21
V9	-3.45	2.50	-3.35	2.98	-3.25	2.15	-3.22	2.20	-3.15
V10	0.12	1.20	0.03	1.19	-0.05	1.40	0.13	2.00	0.10
V11	0.08	1.20	0.10	1.11	0.22	1.27	0.12	1.19	0.07
V12	0.50	1.20	0.20	1.11	0.08	1.59	0.41	1.60	0.40

Таблица 4.53  
Обработка примера 11 (триангуляция № 1)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ				
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		
	n	v	n	v	n	v	n	v	
$\mu$	0.958		1.144		0.344		0.906		0.876
M1	0.066 м		0.050 м		0.060 м		0.051 м		0.050 м
M2	0.066		0.080		0.063		0.054		0.054
M3	0.132		0.111		0.122		0.112		0.111
M4	0.132		0.120		0.123		0.121		0.121
M5	0.216		0.121		0.197		0.193		0.192
V1	-5.00"	1.57	-5.17"	2.90	-4.99"	1.80	-5.22"	1.82	-5.11"
V2	-5.00	1.56	-5.35	2.77	-5.14	1.80	-5.22	1.81	-5.18
V3	-5.00	1.62	-4.48	2.99	-4.87	1.90	-4.56	1.88	-4.71
V4	-5.00	1.68	-6.03	2.77	-5.14	2.00	-4.66	2.03	-4.73
V5	-5.00	2.51	-3.34	3.00	-4.85	1.90	-5.17	1.94	-5.16
V6	-5.00	1.71	-5.62	2.88	-5.02	1.90	-5.17	1.95	-5.11
V7	-5.02	2.32	-4.07	3.00	-5.00	2.00	-4.90	2.06	-4.90
V8	-5.00	2.10	-4.65	2.94	-5.05	2.00	-5.02	2.03	-5.13
V9	-4.99	1.84	-6.28	3.00	-4.95	2.00	-5.08	2.08	-4.97
V10	-6.33	2.19	-6.58	3.00	-6.32	2.40	-6.35	2.40	-6.51
V11	-6.36	2.10	-6.98	3.00	-6.36	2.40	-6.27	2.48	-6.16
V12	-6.32	2.53	-5.44	3.00	-6.32	2.40	-6.38	2.46	-6.32
V13	-4.97	1.75	-5.73	2.96	-4.98	2.10	-5.33	2.13	-5.25
V14	-4.99	1.75	-5.44	3.00	-5.01	2.10	-5.23	2.10	-5.29
V15	-4.96	2.24	-3.75	3.00	-4.93	2.50	-4.43	2.50	-4.46
V16	-0.05	1.11	0.29	1.11	0.03	1.20	0.02	1.15	0.01

Таблица 4.54

## Обработка примера 12 (триангуляция № 2)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		1.124		0.373		0.862	
M1	0.044 м		0.032 м		0.044 м		0.042 м	
M2	0.042		0.030		0.042		0.043	
M3	0.050		0.033		0.049		0.043	
M4	0.045		0.033		0.045		0.042	
V1	-4.68"	2.40	-4.69"	3.00	-4.69"	2.00	-4.68"	2.00
V2	-4.85	1.90	-4.88	3.00	-4.85	2.04	-4.68	2.06
V3	-5.79	2.40	-5.75	3.00	-5.78	2.13	-5.64	2.13
V4	-4.42	1.70	-5.03	3.00	-4.39	2.32	-4.23	2.33
V5	-5.41	2.50	-4.68	3.00	-5.43	2.24	-5.54	2.23
V6	-4.84	1.70	-4.97	3.00	-4.85	2.15	-5.22	2.21
V7	-4.76	2.20	-4.73	3.00	-4.76	2.28	-4.69	2.27
V8	-4.91	1.90	-5.39	3.00	-4.91	2.21	-5.07	2.19
V9	-5.56	2.50	-5.09	3.00	-5.55	2.36	-5.24	2.21
V10	-6.16	1.80	-5.49	3.00	-6.20	2.18	-6.15	2.15
V11	-6.78	1.80	-7.88	3.00	-6.73	2.26	-6.35	2.23
V12	-6.23	1.70	-5.80	2.98	-6.25	2.14	-6.49	2.09
V13	-4.74	1.70	-5.40	2.88	-4.75	1.93	-4.94	1.94
V14	-5.44	1.80	-5.91	3.00	-5.49	2.03	-5.52	2.05
V15	-4.82	1.80	-3.68	3.00	-4.76	2.03	-4.53	2.06
V16	0.10	1.80	1.34	2.59	0.09	1.11	0.03	1.11

Таблица 4.55

## Обработка примера 13 (триангуляция № 3)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu$	1.000		0.894		0.445		0.978	
M1	0.034 м		0.025 м		0.028 м		0.032 м	
M2	0.032		0.016		0.026		0.032	
M3	0.031		0.025		0.028		0.031	
V1	-3.64"	2.75	-3.07"	3.00	-3.73"	1.80	-3.68"	1.74
V2	-4.00	3.00	-3.44	3.00	-4.15	1.80	-3.70	1.71
V3	-7.32	2.13	-8.44	3.00	-7.07	2.00	-7.62	1.91
V4	-5.67	2.34	-5.94	3.00	-5.95	2.00	-6.31	1.93
V5	-6.09	2.60	-4.99	2.91	-6.30	2.00	-6.10	1.90
V6	-3.28	1.84	-4.11	2.29	-2.79	1.70	-2.59	1.60
V7	-3.75	1.59	-4.62	2.15	-3.10	1.80	-3.42	1.72

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V8	- 6.36	2.45	- 5.31	3.00	- 6.30	2.00	- 7.06	1.90	- 7.21
V9	- 4.88	1.94	- 5.07	2.56	- 5.60	2.00	- 4.52	1.89	- 4.34
V10	- 8.80	2.28	- 8.56	3.00	- 8.52	2.30	- 7.85	2.18	- 8.20
V11	- 5.70	1.98	- 5.70	2.87	- 5.52	2.00	- 6.09	1.98	- 5.79
V12	- 4.50	1.93	- 4.73	2.85	- 4.96	2.10	- 5.05	2.01	- 5.01
V13	- 2.45	1.90	- 2.58	2.46	- 2.75	1.80	- 2.56	1.81	- 2.74
V14	- 4.11	1.82	- 3.47	2.65	- 3.88	2.00	- 4.01	1.91	- 4.17
V15	- 8.28	2.29	- 8.79	3.00	- 8.22	2.20	- 8.43	2.16	- 8.09
V16	- 1.61	1.83	- 1.70	2.63	- 2.30	1.90	- 1.59	1.77	- 1.58

Таблица 4.56  
Обработка примера 14 (трилатерация № 1)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ				
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		
	n	v	n	v	n	v	n	v	
$\mu$	1.000		0.521		0.476		0.538		0.488
M1	0.143 м		0.023 м		0.021 м		0.020 м		0.022 м
M2	0.158		0.054		0.096		0.042		0.039
M3	0.239		0.146		0.151		0.127		0.135
M4	0.251		0.138		0.146		0.116		0.123
M5	0.362		0.185		0.190		0.127		0.126
VS16	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000	3.00	0.000	2.80	0.000
VS17	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000	3.00	0.000	3.00	0.000
VS26	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000	3.00	0.000	2.99	0.000
VS12	-0.018	1.80	-0.005	1.20	-0.016	2.04	-0.005	2.04	-0.006
VS23	0.025	1.30	0.018	1.30	0.017	1.18	0.046	1.20	0.040
VS13	-0.036	1.40	-0.024	1.40	-0.023	1.22	-0.084	1.25	-0.063
VS34	0.000	2.00	0.000	1.90	0.000	1.90	0.000	2.00	0.000
VS24	-0.018	2.10	-0.007	2.00	-0.006	2.21	-0.006	2.12	-0.006
VS45	-0.018	2.10	-0.007	2.00	-0.006	2.12	-0.006	2.12	-0.006
VS35	-0.025	1.80	-0.008	1.30	-0.017	1.70	-0.005	1.20	-0.040
VS15	0.040	1.40	0.081	1.40	0.073	2.12	0.012	2.00	0.012

Таблица 4.57

## Обработка примера 15 (трилатерация № 2)

$v$ при $n=2,0$	Коррелятный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	$n$	$v$	$n$	$v$	$n$	$v$	$n$	$v$
$\mu$	1.000		0.504		0.353		0.463	
M1	0.068 м		0.041 м		0.051 м		0.021 м	
M2	0.086		0.041		0.047		0.026	
M3	0.082		0.036		0.038		0.027	
M4	0.097		0.041		0.050		0.026	
VS16	0.006	2.60	0.003	2.16	0.002	2.37	0.000	2.30
VS17	-0.012	1.08	-0.001	1.11	-0.023	2.30	0.000	2.10
VS26	-0.034	2.41	-0.002	2.03	-0.004	2.50	-0.004	2.30
VS12	-0.015	2.28	-0.006	2.04	-0.003	2.50	-0.003	2.20
VS23	0.021	2.24	0.008	2.06	0.004	2.55	0.005	2.30
VS13	-0.030	1.28	-0.054	1.18	-0.031	1.11	-0.065	1.30
VS34	0.000	2.54	0.000	2.91	0.000	2.77	0.000	2.60
VS24	-0.048	1.16	-0.122	1.20	-0.063	1.11	-0.121	1.20
VS45	-0.048	2.15	-0.006	1.20	-0.063	2.20	-0.004	2.00
VS35	-0.021	2.18	-0.008	2.11	-0.004	2.52	-0.004	2.30
VS15	0.024	2.08	0.009	1.13	0.037	2.40	0.005	2.00

Таблица 4.58

## Обработка примера 16 (трилатерация № 3)

$v$ при $n=2,0$	Коррелятный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	$n$	$v$	$n$	$v$	$n$	$v$	$n$	$v$
$\mu$	1.000		0.426		0.307		0.431	
M1	0.056 м		0.030 м		0.044 м		0.015 м	
M2	0.065		0.048		0.053		0.020	
M3	0.053		0.038		0.049		0.020	
VS16	0.016	2.36	0.004	2.00	0.004	2.50	0.002	2.40
VS17	-0.011	2.27	-0.004	1.22	-0.014	2.29	-0.001	2.01
VS26	-0.033	2.60	-0.001	1.90	-0.001	2.53	-0.003	2.49
VS12	-0.024	2.01	-0.007	1.91	-0.004	2.52	-0.005	2.41
VS23	0.034	1.29	0.069	1.22	0.032	1.16	0.081	1.18
VS13	-0.025	1.76	-0.010	1.20	-0.025	2.05	-0.006	1.99
VS34	-0.023	2.11	-0.004	1.12	-0.025	2.40	-0.001	2.19
VS24	-0.057	1.22	-0.089	1.11	-0.091	1.16	-0.087	1.20
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-
VS35	-0.001	1.47	-0.003	1.69	-0.001	2.17	-0.005	2.20
VS15	0.029	1.74	0.012	1.12	0.025	2.41	0.008	2.31

Таблица 4.59

## Обработка примера 17 (полигонометрия № 1)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		0.435			0.403		0.355
M1	0.072 м		0.012 м			0.011 м		0.009 м
M2	0.084		0.052			0.038		0.018
M3	0.126		0.057			0.051		0.032
M4	0.127		0.053			0.050		0.035
M5	0.170		0.057			0.058		0.049
VS16	0.000	2.90	0.000	2.90	0.000	2.95	0.000	2.95
VS12	-0.013	1.20	-0.017	1.50	-0.003	2.00	-0.004	2.01
VS23	-0.016	2.00	-0.004	1.90	-0.003	2.01	0.000	1.70
VS34	-0.013	1.90	-0.004	1.80	-0.004	1.99	-0.004	1.92
VS45	-0.037	1.30	-0.068	1.30	-0.044	1.14	-0.058	1.17
VS15	0.039	1.40	0.033	1.30	0.061	1.18	0.052	1.21
V7	0.00"	1.20	0.00"	1.20	0.00"	1.19	0.00"	1.30
V8	0.00	1.20	0.00	1.20	0.00	1.11	0.00	1.11
V9	3.60	2.30	1.40	2.60	1.53	2.17	1.09	2.19
V10	-3.15	2.10	-0.84	2.40	-0.89	2.57	-0.15	2.51
V11	1.80	2.70	1.10	2.80	1.11	2.33	0.70	2.21
V12	1.35	1.20	0.01	1.20	0.00	1.18	-0.38	1.22

Таблица 4.60

## Обработка примера 18 (полигонометрия № 2)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu$	1.000		0.840		0.691		0.429	
M1	0.039 м		0.037 м		0.040 м		0.016 м	
M2	0.049		0.038		0.040		0.017	
M3	0.054		0.034		0.036		0.017	
M4	0.046		0.038		0.040		0.017	
VS16	-0.006	2.00	-0.013	2.00	-0.017	2.30	-0.007	2.30
VS12	-0.010	2.40	-0.008	2.30	-0.006	2.45	-0.002	2.34
VS23	-0.019	2.00	-0.017	2.00	-0.016	2.45	-0.002	2.31
VS34	-0.010	1.90	-0.008	1.90	-0.005	2.39	-0.002	2.30
VS45	-0.038	2.00	-0.032	1.90	-0.031	1.11	-0.068	1.26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VS15	0.042	1.60	0.054	1.30	0.062	1.11	0.050	1.26	0.050
V7	-3.58"	1.90	-2.04"	1.90	-1.02"	2.07	-2.26"	2.11	-2.30"
V8	-2.44	2.00	-3.14	2.10	-3.34	2.04	-1.97	2.22	-2.01
V9	2.83	2.10	2.04	2.30	1.44	1.13	0.37	1.38	0.57
V10	-3.64	2.00	-3.30	2.00	-2.96	1.11	0.00	1.47	-0.43
V11	1.42	2.00	1.06	2.20	0.80	1.11	0.00	1.18	0.13
V12	-0.22	1.90	-0.80	2.50	-1.45	2.14	-1.92	2.34	-1.79

Таблица 4.61

Обработка примера 19 (полигонометрия № 3)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	1.000		1.037			0.970		0.906
M1	0.038 м		0.025 м			0.024 м		0.027 м
M2	0.045		0.026			0.025		0.033
M3	0.042		0.026			0.026		0.033
VS16	0.014	1.90	0.010	1.90	0.012	2.45	0.005	2.30
VS12	-0.034	2.00	-0.035	2.00	-0.036	2.10	-0.028	2.10
VS23	0.004	2.00	-0.001	2.00	0.000	2.38	0.010	2.30
VS34	-0.034	2.00	-0.035	2.00	-0.036	2.12	-0.028	2.10
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-
VS15	0.039	2.00	0.042	2.00	0.041	1.11	0.060	1.20
V7	-2.88"	2.00	-2.62"	2.00	-2.61"	1.21	-0.02"	1.50
V8	-4.04	2.10	-4.10	2.10	-4.42	2.15	-4.89	2.10
V9	0.66	2.00	1.10	2.00	0.51	1.66	-1.26	1.90
V10	-7.71	2.20	-6.42	2.30	-6.38	2.13	-6.39	2.20
V11	-3.94	1.70	-5.87	1.90	-5.02	2.00	-5.44	2.10
V12	-0.93	2.30	-0.88	2.40	-0.70	1.80	-2.77	2.00

Таблица 4.62

Обработка примера 20 (полигонометрия № 2)

v при n=2,0	Коррелатный способ				Параметрический способ			
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
	n	v	n	v	n	v	n	v
$\mu$	0.999		0.577			0.434		0.978
M1	0.062 м		0.060 м			0.068 м		0.044 м
M2	0.079		0.071			0.075		0.058
M3	0.084		0.072			0.078		0.060
M4	0.060		0.070			0.062		0.057

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VS16	0.022	1.88	0.015	1.39	0.035	2.50	0.009	2.08	0.023
VS12	0.014	2.37	0.001	2.33	- 0.001	2.57	- 0.005	2.10	0.014
VS23	0.022	1.87	0.015	1.39	0.035	2.50	0.009	2.09	0.022
VS34	0.014	2.45	0.001	2.38	- 0.001	2.43	- 0.005	2.25	0.014
VS45	0.025	1.29	0.069	1.27	0.045	1.11	0.091	1.90	0.030
V6	-3.65"	2.60	- 4.41"	2.99	- 3.50"	1.94	- 5.30"	2.00	- 4.39"
V7	-6.33	3.00	- 4.61	3.00	- 4.79	2.00	- 4.46	2.38	- 5.19
V8	-2.19	2.42	- 3.31	2.82	- 2.85	1.80	- 3.42	1.89	- 2.78
V9	-4.87	2.24	- 3.51	2.59	- 2.87	1.70	- 2.96	2.00	- 5.38
V10	-0.73	2.00	- 1.31	2.54	- 1.46	1.43	- 0.89	2.00	- 0.87

Таблица 4.63

Обработка примера 21 (полигонометрия № 3)

v при n=2,0	Коррелатный способ					Параметрический способ				
	$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$			$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		
	n	v	n	v	n	n	v	n	v	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\mu$	1.000		0.935		0.854		1.010		0.952	
M1	0.091 м		0.089 м		0.085 м		0.074 м		0.077 м	
M2	0.102		0.087		0.084		0.085		0.088	
M3	0.091		0.087		0.081		0.084		0.087	
VS16	-0.005	2.50	- 0.004	2.20	- 0.010	2.60	- 0.004	2.10	- 0.006	
VS12	0.034	1.90	0.043	1.90	0.046	2.20	0.035	2.19	0.036	
VS23	-0.005	2.50	- 0.004	1.70	- 0.007	2.40	- 0.003	2.50	- 0.009	
VS34	0.034	2.00	0.039	2.10	0.038	2.20	0.035	2.07	0.038	
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
V6	0.99"	1.90	0.66"	2.00	1.15"	1.50	1.08"	1.86	1.44"	
V7	-5.59	2.10	- 6.26	2.10	- 6.25	2.10	- 5.84	1.97	- 6.30	
V8	-6.49	2.00	- 7.11	2.00	- 8.33	2.00	- 6.51	1.99	- 7.27	
V9	-13.07	2.30	- 10.43	2.30	- 11.30	2.10	- 12.31	2.13	- 12.47	
V10	-13.96	2.10	- 14.99	2.30	- 13.40	2.10	- 4.42	2.13	- 13.40	

## Обработка примера 22 (полигонометрия № 1)

v при n=2,0		Коррелятный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu$	1.000		1.068		0.937		0.554		1.006
M1	0.055 м		0.060 м		0.029 м		0.037 м		0.038 м
M2	0.081		0.083		0.020		0.045		0.053
M3	0.065		0.054		0.059		0.037		0.044
M4	0.115		0.066		0.070		0.073		0.083
M5	0.127		0.083		0.070		0.073		0.088
VS16	0.010	2.10	0.013	2.20	0.016	1.70	0.015	2.10	0.009
VS12	-0.004	2.00	-0.003	2.10	-0.003	2.17	-0.005	2.40	-0.005
VS23	-0.011	1.80	-0.012	1.70	-0.009	1.65	-0.012	2.10	-0.012
VS36	0.004	2.00	0.003	2.00	0.003	2.13	0.005	2.40	0.005
VS25	-0.002	2.00	-0.006	1.80	-0.004	2.32	-0.002	2.40	-0.005
VS45	0.002	2.00	-0.002	1.90	-0.008	1.90	-0.002	2.10	0.004
VS34	0.002	1.80	0.005	2.10	0.006	2.48	0.003	2.50	0.005
V8	0.00"	1.90	0.00"	1.70	0.00"	1.11	0.00"	1.20	0.00"
V9	-6.89	1.90	-7.32	1.90	-7.21	2.43	-7.32	2.00	-6.86
V10	-8.20	2.00	-8.14	2.00	-8.51	2.52	-7.56	2.00	-8.06
V11	-7.61	2.10	-6.80	2.20	-6.50	2.67	-6.80	2.00	-7.64
V12	-6.30	1.90	-6.74	1.90	-6.77	2.38	-7.32	2.00	-6.44
V13	-7.02	1.80	-8.16	2.00	-9.53	2.58	-7.37	2.00	-7.30
V14	-7.28	2.00	-6.70	2.30	-7.16	2.63	-7.23	2.20	-6.23
V15	-7.05	2.10	-6.19	2.80	-5.89	2.84	-6.65	2.10	-6.49
V16	-6.79	2.00	-7.09	2.90	-5.56	2.81	-6.75	2.00	-7.98

Таблица 4.65

## Обработка примера 23 (полигонометрия № 2)

v при n=20		Коррелатный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu$	1.001		1.049		1.054		0.884		0.905
M1	0.063 м		0.040 м		0.011 м		0.056 м		0.054 м
M2	0.057		0.037		0.042		0.056		0.055
M3	0.057		0.024		0.067		0.056		0.055
M4	0.069		0.058		0.084		0.056		0.055
VS16	-0.019	2.00	-0.014	2.00	-0.012	2.30	-0.017	2.30	-0.018
VS12	-0.062	2.00	-0.055	2.10	-0.052	1.80	-0.072	1.80	-0.075
VS23	-0.033	2.00	-0.035	2.00	-0.036	2.20	-0.030	2.21	-0.028
VS36	-0.078	2.00	-0.076	2.00	-0.076	1.80	-0.081	1.79	-0.085
VS25	-0.080	1.90	-0.085	1.90	-0.087	1.80	-0.080	1.80	-0.076
VS45	-0.027	2.00	-0.024	2.00	-0.025	2.20	-0.020	2.20	-0.022
VS34	-0.061	2.00	-0.059	2.00	-0.061	1.90	-0.060	2.01	-0.057
V8	2.46"	1.90	2.10"	2.00	1.72"	2.00	4.58"	1.92	4.33"
V9	-11.30	1.80	-13.44	1.80	-13.83	2.30	-9.65	2.30	-9.37
V10	-8.73	2.00	-7.63	2.00	-8.04	2.20	-9.04	2.10	-9.41
V11	-8.54	2.00	-7.93	2.20	-7.06	2.10	-8.38	2.01	-8.72
V12	-0.42	1.50	0.01	1.70	-0.07	1.80	-1.93	1.70	-1.50
V13	-6.55	2.10	-6.66	2.00	-6.70	2.00	-6.55	2.00	-6.88
V14	-9.04	2.10	-7.73	2.10	-7.60	2.10	-8.22	2.00	-8.69
V15	-2.06	1.70	-1.90	2.00	-1.88	1.80	-2.39	1.61	-2.35
V16	-10.25	2.00	-11.60	2.00	-11.71	2.00	-10.84	2.00	-10.08

Таблица 4.66

## Обработка примера 24 (полигонометрия № 3)

v при n=2,0		Коррелатный способ				Параметрический способ			
		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$		$\Phi_2(X, n) = \max M$		$\Phi_2(X, n) = \max M \times \mu$	
		n	v	n	v	n	v	n	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu$	1.000		1.049		1.033		0.721		0.835
M1	0.060 м		0.025 м		0.025 м		0.041 м		0.041 м
M2	0.053		0.028		0.028		0.041		0.041
M3	0.049		0.031		0.030		0.038		0.040
VS16	-0.019	2.10	-0.018	2.10	-0.019	2.24	-0.028	2.30	-0.028
VS12	-0.062	2.00	-0.060	2.00	-0.060	1.63	-0.114	2.54	-0.026
VS23	-0.055	1.90	-0.055	1.90	-0.057	1.52	-0.070	1.60	-0.068
VS36	-0.084	2.00	-0.086	2.00	-0.086	1.12	-0.129	2.38	-0.033
VS25	-0.061	2.00	-0.062	2.00	-0.061	2.48	-0.016	1.67	-0.105
VS45	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VS34	-0.086	2.00	-0.083	2.00	-0.084	1.97	-0.041	1.30	-0.137
V8	-1.28"	2.00	-1.54"	2.00	-1.72"	1.17	-0.03"	1.30	-0.04"
V9	-12.00	1.90	-12.83	1.90	-12.83	2.35	-10.62	2.12	-10.72
V10	-9.42	1.90	-9.69	1.90	-9.51	2.21	-9.40	2.08	-7.68
V11	-2.83	1.80	-2.37	1.80	-2.40	1.82	-2.15	1.95	-4.08
V12	-4.86	2.10	-4.23	2.10	-4.38	2.38	-6.83	2.34	-6.51
V13	-8.70	1.80	-9.90	1.90	-9.21	2.18	-8.26	2.17	-6.96
V14	-15.04	2.00	-13.89	2.00	-14.24	2.11	-12.74	2.05	-14.29
V15	-5.02	1.90	-5.34	1.90	-5.36	1.98	-7.20	1.93	-7.27
V16	0.77	2.10	1.14	2.10	0.80	1.31	0.21	1.75	0.52

### 4.3. Уравнивание с применением рекуррентного способа

Как известно, рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учёте некоррелированных измерений с уравнением поправок [14]

$$V_i = a_i \delta x_i + l_i, \quad (4.27)$$

позволяет решать многие задачи уравнительных вычислений с применением формул

$$Q_i = Q_{i-1} - \left( \frac{1}{q_i} \right) z_i^T z_i, \quad (4.28)$$

$$z_i^T = Q_{i-1} a_i^T, \quad (4.29)$$

$$q_i = \frac{1}{P_i} + a_i z_i^T, \quad (4.30)$$

где  $Q_{i-1}$  – обратная матрица весов  $i-1$  измерения;  $P_i$  – вес  $i$ -того измерения;  $a_i$  – коэффициент параметрических уравнений поправок  $i$ -того измерения.

Однако этот алгоритм основан на параметрическом рекуррентном уравнивании. Необходимо применить коррелатное рекуррентное уравнивание. В итоге получим

$$\left( Q_{i-1}^{-1} + B_{r \times N} P_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T \right)^{-1} = Q_{i-1}^{-1} - Q_{r \times r} B_{r \times N} G_{N \times N}^{-1} B_{N \times r}^T Q_{r \times r}, \quad (4.31)$$

$$G_{N \times N} = P_{N \times N} + B_{N \times r}^T Q_{r \times r} B_{r \times N}, \quad (4.32)$$

где  $Q_{i-1}$  – обратная матрица весов;  $P_{N \times N}$  – матрица весов;  $B_{r \times N}$  – матрица коэффициентов условных уравнений.

Основой формул (4.31) и (4.32) послужил коррелатный рекуррентный способ, приведенный в [6] М.Д. Герасименко. Однако в формуле (4.32) дан вес  $P_{N \times N}^{-1}$  вместо  $P_{N \times N}$

$$Z_i = Q_{i-1} b_i, \quad (4.33)$$

$$g_i = P_i + b_i^T Z_i, \quad (4.34)$$

$$Q_i = Q_{i-1} - \left( \frac{1}{g_i} \right) Z_i Z_i^T, \quad (4.35)$$

$$Q_0 = R_0^{-1} = E \cdot 10^m, \quad (4.36)$$

где  $B_{r \times N}$  – вектор-столбец матрицы условных уравнений.

В заключение отметим, что формулы (4.33) – (4.36) решают поставленную задачу по коррелатному уравниванию геодезических сетей рекуррентным способом.

Задача разделения измерений на необходимые и избыточные для целей коррелатного способа уравнивания не нова. Её решали для математической обработки измерений М.Д. Герасименко, З.М. Юршанский, И.И. Монин, Ю.И. Маркузе (в хронологическом порядке) и др.

Решение этой задачи не однозначно – любое измерение может оказаться и необходимым, и избыточным. Наиболее значима данная задача при разработке коррелатно-параметрического способа уравнивания [24], когда из матрицы

$$B^* = E - AF, \quad (4.37)$$

где  $E$  – единичная матрица;  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P = Q A^T P, \quad (4.38)$$

выделяют строки для избыточных измерений и записывают их в матрицу коэффициентов условных уравнений  $B$ . При этом эти строки должны быть линейно независимыми, иначе определитель матрицы  $B P^{-1} B^T$  окажется равным нулю и коррелаты невозможно найти.

При программировании неоднозначной задачи разделения измерений на необходимые и избыточные мы столкнулись со значительными трудностями. Алгоритмы прямого поиска оказывались не универсальными и громоздкими, пока не был найден универсальный автоматизированный метод, основанный на свойстве рекуррентного способа уравнивания. Здесь матрица  $Q$ , входящая в (4.38), определяется по формулам (4.28) – (4.30).

Если следовать предложению Ю.И. Маркузе, выбирая в качестве начальной матрицы [13]

$$Q_0 = E \cdot 10^m, \quad (4.39)$$

где  $m$  – половина числа разрядов сетки ЭВМ, то наибольшими по модулю значениями чисел  $q$ , входящих в (4.30), будут для необходимых измерений и, чтобы их найти, достаточно запомнить номера  $t$  необходимых измерений, для которых  $|q|$  максимальные. Остальные  $r = N - t$  из  $N$  измерений будут избыточными. Таким образом, находя матрицу  $F$ , входящую в (4.37), необходимо одновременно вычислять элементы обратной матрицы весов  $Q$  и определять номера необходимых измерений.

#### 4.4. Уравнивание нуль-свободных геодезических сетей

Под геодезическими сетями в нефиксированной системе координат в [3, 6] понимают нуль-свободные сети, исходные пункты которых используются для передачи координат от одной точки к другой, но при уравнивании параметрическим способом считаются определяемыми. Когда уравнивают геодезические сети коррелатным способом в нефиксированной системе координат, не используют условия координат между исходными пунктами из-за отсутствия последних.

При подсчете количества условных уравнений по формуле

$$r = N - t, \quad (4.40)$$

где  $N$  – количество результатов измерений;  $t$  – число необходимых измерений, здесь рассматривают свободные геодезические сети, для которых

$$t = i(K - i), \quad (4.41)$$

где  $K$  – количество всех пунктов геодезической сети;  $i$  – размерность пространства ( $i = 1$  – для нивелирных сетей;  $i = 2$  – для плановых сетей;  $i = 3$  – для пространственных построений). Так, в треугольнике ( $K = 3$ ) нивелирной сети  $N = 3$ ;  $t = (K - 1) = 2$ , следовательно,  $r = 1$  (одно условие фигур); в треугольнике на плоскости  $N = 3$ ;  $t = 2(K - 2)$ , т.е.  $r = 1$  (также одно условие фигур).

В работе [3] рассматриваются вопросы уравнивания нивелирных и GPS-сетей без исходных пунктов параметрическим способом с применением формул

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \mathbf{X}^{(0)} + \delta\mathbf{X}; \\ \delta\mathbf{X} &= -FL; \\ F &= Q\mathbf{A}^T P; \\ Q &= (\mathbf{A}^T P A + \text{ones}(K))^{-1} - \frac{1}{K^2} \text{ones}(K); \\ V &= \mathbf{A} \delta\mathbf{X} + L, \end{aligned} \right\}, \quad (4.42)$$

где  $\hat{\mathbf{X}}$  – уравненные координаты пунктов;  $L$  – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок;  $A_{K \times N}$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, составленная для всех  $K$  пунктов;  $P_{N \times N}$  – матрица весов результатов измерений;  $\text{ones}(K)$  – матрица размером ( $K \times K$ ), все элементы которой равны единице;  $V$  – вектор поправок в результаты измерений.

Формулы (4.42) справедливы и для плановых геодезических сетей, если обратную матрицу весов находить из выражения [5]

$$Q = (A^T P A + R^T R)^{-1} - R^T (R R^T R R^T)^{-1} R, \quad (4.43)$$

где матрица  $A_{2K \times N}$  и

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_K & Y_K \\ -Y_1 & X_1 & -Y_2 & X_2 & \dots & -Y_K & X_K \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

а  $X_i = x_i - x_{cp}$ ;  $Y_i = y_i - y_{cp}$ . ( $x_{cp}, y_{cp}$  – координаты средней точки сети).

Равенство (4.43) справедливо и для пространственных систем координат, если [6] матрица  $A_{3K \times N}$  и

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & \dots & 0 & Z_K & -Y_K \\ -Z_1 & 0 & X_1 & \dots & -Z_K & 0 & X_K \\ Y_1 & -X_1 & 0 & \dots & Y_K & -X_K & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & \dots & X_K & Y_K & Z_K \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Оценка точности функций при параметрическом уравнивании общизвестна

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}; \quad m_f = \mu \sqrt{\frac{I}{P_f}}; \quad \frac{1}{P_f} = f_p Q f_p^T,$$

где  $f_p$  – вектор-строка весовой функции размером  $1 \times K$ .

При поиске грубых ошибок в результатах измерений вычисляют значение допустимого значения для поправок

$$V_{don} = 2.5 \sqrt{K_{\nu_u}}, \quad (4.46)$$

где  $K_{\nu_u}$  – диагональные элементы корреляционной матрицы вектора поправок [5]

$$K_{\nu} = (E - AF) P^{-1} = B^* P^{-1}. \quad (4.47)$$

Здесь  $E_{N \times N}$  – единичная матрица, а  $F$  – расширенная псевдообратная матрица, вычисляемая согласно формулам (4.42).

Выше рассмотрены уравнивание и оценка точности нуль-свободных геодезических сетей параметрическим способом.

В коррелатном способе решают по методу наименьших квадратов систему независимых условных уравнений.

Если геодезическая сеть несложная и состоит из замкнутых фигур треугольников или других фигур, то алгоритм ее уравнивания для свободных и нуль-свободных сетей ничем не отличается. Если геодезическая сеть хотя и не содержит исходных пунктов, но является сложной по построению (пересекающиеся стороны, разомкнутые фигуры и др.), то автоматизировать процесс коррелатного уравнивания можно, привлекая параметрический способ и выделяя для избыточных измерений любые строки из матрицы  $B^* = E - AF$  [26]. Например, составлено из  $r = 100$  девяносто условий фигур, тогда из матрицы  $B^*$  выделяют из 100 десять строк и записывают их в матрицу  $B$  со своими свободными членами.

#### 4.5. Уравнивание спутниковых геодезических сетей

Актуальной проблемой необходимо признать разработку основных принципов совместного использования спутниковых и традиционных геодезических измерений в виде технологической схемы, включающей полный комплекс полевых и камеральных работ. Учитывая, что спутниковые измерения осуществляются с использованием пространственной прямоугольной (или геодезической) системы координат, а наземные измерения выполняются, как правило, с применением плоской прямоугольной системы координат, достаточно актуальными оказываются вопросы, связанные с взаимным преобразованием координат и их функций из системы в систему. В этом плане наиболее перспективным в настоящее время представляется метод GPS-определений, который применительно к рассматриваемому объекту работ является многоаспектным. При этом актуальными оказываются проблемы разработки оптимальной технологической схемы производства работ и математической обработки спутниковых сетей по методу наименьших квадратов параметрическим или коррелатным способом.

На основе известных положений линейной алгебры и аналитической геометрии многими авторами разработан математический аппарат анализа корреляционных матриц спутниковых измерений, в котором предусмотрено вычисление средней квадратической погрешности вектора базовой линии в заданном направлении; определена система координат, где экстремальные средние квадратические ошибки направлены коллинеарно координатным осям; найдена матрица перехода к данной системе координат; определены углы между старыми и новыми координатными осями.

Рассмотрение корреляционных матриц, полученных по внутренней сходимости результатов измерений в серии, показывает, что они не могут непосредственно служить в качестве определяющих матриц для назначения весовой матрицы, так как дают завышенную оценку точности. Это следует из сравнения корреляционных матриц, полученных по внутренней сходимости результатов измерений в серии, с корреляционной матрицей, полученной в результате статической обработки результатов девяти независимых серий измерений.

Известно, что при правильном выборе места установки спутникового приемника, т. е. при открытом небосводе, отмечена некоррелированность результатов измерений приращения координат. В этом случае можно производить уравнивание спутниковой сети раздельно для каждой горизонтальной и вертикальной составляющих (так же, как нивелирные сети) [27, 39].

В настоящее время GPS-измерения относительным методом спутниковой геодезии широко используются при развитии пространственных спутниковых геодезических сетей. Несмотря на то, что измерения выполняются с высокой точностью, существуют погрешности в измеренных приращениях  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , иногда достигающие 20 мм и более. В связи с этим при наличии избыточных измеренных величин возникает задача уравнивания. Ниже будем рассматривать уравнивание свободной сети GPS, опирающейся на один исходный пункт, коррелатным способом.

Как отмечалось в [27], для независимых GPS-измерений теоретически и практически доказано, что GPS-измерения можно уравнивать раздельно по приращениям  $\Delta X$ , или  $\Delta Y$ , или  $\Delta Z$  без нарушения строгости решения. В результате в три раза уменьшается количество неизвестных при уравнивании GPS-сети коррелатным способом. Утверждается, что для уравнивания GPS-измерений можно применять алгоритмы и программы по обработке нивелирных сетей, задавая в исходной информации вместо пре-вышений соответствующие приращения координат, измеренные спутниками методами. При этом несмотря на то, что измерения независимые, они могут быть неравноточными с весом  $P=1/\Delta_{km}$ .

На рисунке 4.15 показан ряд GPS-построения.

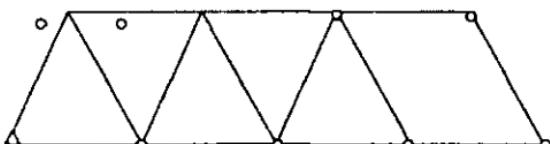


Рис. 4.15. Ряд спутниковых GPS-измерений

Для одной переменной величина  $N = 15$ ;  $t = 8$ ; следовательно,  $r = 7$ . Отсюда следует вывод: какой бы длинной цепочка ни была, число условных уравнений в ней равно числу треугольников (7 условий фигур). В триангуляции подобную цепочку легко уравнять, разбрасывая невязку в каждом треугольнике поровну в каждый угол. Это возможно потому, что условные уравнения фигур не имеют общих поправок. В GPS-построениях такая методика неприменима, так как есть общие поправки  $v_\Delta$  для связующих сторон. Только для построения, показанного на рис. 4.16, возможно уравнивание простым разбрасыванием поправок  $v_\Delta$  в каждую сторону.

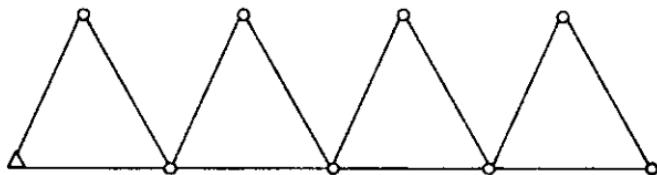


Рис. 4.16. GPS-измерения без общих поправок  $v_\Delta$

Таким образом, чтобы уравнять построения на рис. 4.15, можно применить двухгрупповой способ, включая в первую группу четыре условия фигур, показанные на рис. 4.16, и три условия фигур поместить во вторую группу.

К сожалению, двухгрупповой способ Урмаева, предназначенный для уравнивания триангуляции, здесь неприемлем, так как мы имеем не поправки в углы, а поправки в приращения  $v_\Delta$ .

Приведем формулы двухгруппового уравнивания свободной GPS-сети [1, с. 240]. Систему условных уравнений  $BV + W = 0$  делят на две группы

$$B_1 V + W_1 = 0; \quad (4.48)$$

$$B_2 V + W_2 = 0 \quad (4.49)$$

с числом  $r_1$  и  $r_2$  уравнений в каждой ( $r_1 + r_2 = r$ ). Затем систему второй группы преобразуют таким образом, чтобы преобразованная система и системы (4.48) и (4.49) привели к одному и тому же вектору  $V$ , а систему нормальных уравнений можно было бы разделить на две, не связанные общими поправками. В случае неравноточных измерений получим:

$$N = \bar{N}_{12} = \bar{B}_2 P^{-1} \bar{B}_2^T, \text{ где } \bar{B}_2 = B_2 P^{-1}; P = B_2 U;$$

$$U = E - P^{-1} B_1^T N_{11}^{-1} B_1; N_{11} = B_1 P^{-1} B_1^T.$$

Для сложных GPS-сетей независимые условные уравнения, принадлежащие к первой группе, показаны на рис. 4.17.

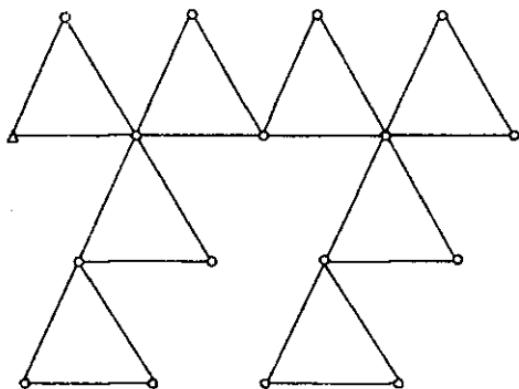


Рис. 4.17. Условные уравнения фигур для первой группы сплошной GPS-сети

Согласно рис. 4.17 можно сделать вывод, что сплошные сети GPS следует уравнивать не двухгрупповым коррелатным способом (что сложно), а параметрическим. Когда GPS-сеть несвободна (имеется более одного исходного пункта), то лучше применять коррелатный способ, так как это значительно упрощает алгоритм уравнивания. Еще более простым является алгоритм коррелатного уравнивания нуль-свободных (без исходных пунктов) геодезических сетей коррелатным способом, так как в процессе вычислений нет разницы, имеется или отсутствует один свободный пункт, так как возникают только условия фигур.

Поскольку условные уравнения для GPS-построений линейны, достаточно составить условные уравнения фигур, не имея условных уравнений координат, так как несвободные GPS-сети применять нецелесообразно.

**Отметим:**

- 1) многогрупповой способ уравнивания спутниковых GPS-сетей применять нецелесообразно из-за сложности алгоритма разделения условных уравнений на группы;
- 2) формулы, реализующие коррелатный способ, рекомендуется применять в тех случаях, когда известна матрица коэффициентов условных уравнений  $B$ ;
- 3) на практике рекомендуем применять автоматизированный алгоритм получения матрицы  $B$ , опубликованный в [25].

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ДЛЯ КОРРЕЛАТНОГО И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБОВ УРАВНИВАНИЯ

### 5.1. Предрасчет чисел обусловленности

Наши исследования показали, что недостатком изложенного выше автоматизированного коррелатного способа является трудность в выборе независимых измерений, соответствующих строкам матрицы  $B'$ . Установлено, что для сетей триплетерации и сплошной линейно-угловой триангуляции необходимые измерения выбрать легко, а для полигонометрии и триангуляции – сложно. Контролем правильности выбора  $r$  строк из матрицы  $B'$  является хорошая обусловленность матрицы  $N$ . Если в матрицу  $B$  вписаны из  $B'$  зависимые строки, то обусловленность матрицы  $N$  равна  $\infty$ .

По программе OZKOR2 обрабатываются сети триплетерации и линейно-угловой триангуляции, а программа OZKOR4 позволяет обрабатывать полигонометрию и триангуляцию.

Для подсчета чисел обусловленности при параметрическом уравнивании использовалась формула [32, 40]

$$C_p = \|R\| \cdot \|Q\|, \quad (5.1)$$

где  $R$  – матрица параметрических нормальных уравнений, а  $Q = R^T$ . Здесь  $\|R\|$  равна корню квадратному из суммы квадратов всех элементов квадратной матрицы  $R$ .

Аналогично (5.1) имеем

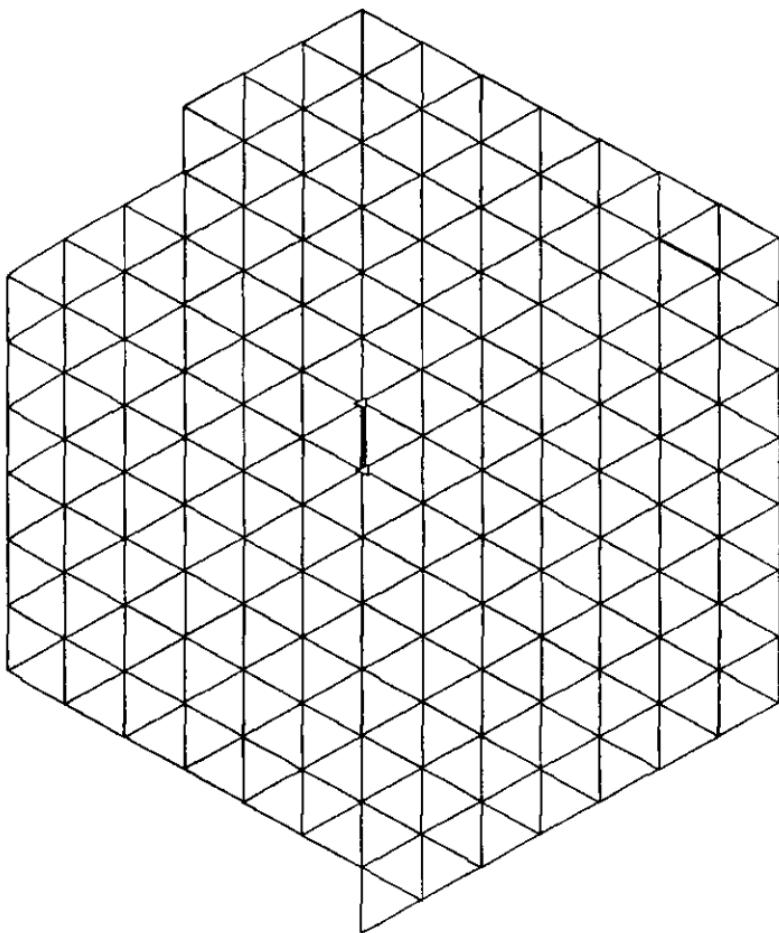
$$C_t = \|N\| \cdot \|N^{-1}\|. \quad (5.2)$$

При использовании параметрического способа уравнивания в нефиксированной системе координат (отсутствуют исходные пункты) можно применять следующие известные формулы [13]:

$$\left. \begin{aligned} X &= X^{(0)} + \delta X; \\ \delta X &= -FL; \\ F &= QA^TP; \\ Q &= (A^TPA + G^TG)^{-1} - G^T(GG^T)^{-1}G; \\ G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_k & Y_k \\ -Y_1 & X_1 & -Y_2 & X_2 & \dots & -Y_k & X_k \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где  $X_i = x_i - x_{cp}$ ;  $Y_i = y_i - y_{cp}$  ( $x_{cp}, y_{cp}$  – координаты средней точки сети).

Рис. 5.1. Схема сетки



Однако формулы (5.3) для коррелатного способа применять нецелесообразно при использовании равенства (5.2) для свободных сетей, опирающихся на необходимое количество исходных пунктов. Отметим: чтобы получить  $C_K$ , надо применить алгоритм перехода от матрицы  $B^*$  к  $B$ , что не является сложной задачей.

Целью исследований является получение формул предрасчета числа обусловленности по формуле (5.2) для симметричной геодезической сети (рис. 5.1).

В таблице 5.1 приведены значения числа обусловленности, вычисленного по формуле (5.2) для различных по методу построения сетей при изменении числа определяемых пунктов  $K$ .

Таблица 5.1

Числа обусловленности для различных методов геодезических построений

№ пп	K	Трилатерация		Триангуляция		Линейно-угловая триангуляция	
		r	$C_K$	r	$C_K$	r	$C_K$
1	5	1	1,00	14	71,4	25	$0,368 \cdot 10^6$
2	17	7	62,9	50	15000	91	$7,70 \cdot 10^6$
3	35	19	342	110	$0,27 \cdot 10^6$	199	$29,0 \cdot 10^6$
4	59	37	1300	194	$5,30 \cdot 10^6$	349	$93,0 \cdot 10^6$
5	89	61	3100	299	$27,0 \cdot 10^6$	538	$204 \cdot 10^6$
6	125	91	9300	432	$373 \cdot 10^6$	773	$568 \cdot 10^6$
7	150	111	12200	521	$1800 \cdot 10^6$	932	$727 \cdot 10^6$

Поставим задачу аппроксимировать число обусловленности  $C_K$  с целью его предрасчета по числу избыточных измерений с помощью функции [1]

$$C_K = \alpha \cdot r^\beta \quad (5.4)$$

где  $\alpha, \beta$  – некоторые постоянные коэффициенты;  $r$  – число избыточных измерений сети, в которой два центральных исходных пункта окружены кольцевыми построенными.

В результате последовательного расширения геодезической сети получим таблицу чисел

$$\begin{aligned} C_{K_1}, & r_1 \\ C_{K_2}, & r_2, \\ \dots & \dots \\ C_{K_n}, & r_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $n$  – число колец сети.

Для любой из  $n$  пары чисел вычислим приближенные значения  $\alpha_0, \beta_0$  по формулам [20]

$$\beta_0 = \frac{\lg \left( \frac{C_{K_1}}{C_{K_2}} \right)}{\lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} ; \quad \alpha_0 = \frac{C_{K_2}}{r_2^{\beta_0}}.$$

Поскольку  $n > 2$ , то выполним поиск  $\alpha_0, \beta_0$  по методу наименьших квадратов, составляя и решая систему  $n$  линейных уравнений поправок

$$V_1 = r_1^{\beta_0} \delta\alpha + \alpha_0 r_1^{\beta_0} \ln r_1 \delta\beta + l_1;$$

.....

$$V_n = r_n^{\beta_0} \delta\alpha + \alpha_0 r_n^{\beta_0} \ln r_n \delta\beta + l_n,$$

где свободные члены  $l_j = C_{K_j}^{j_0} - C_{K_j}$ , а  $C_{K_j} = \alpha_0 r_j^{\beta_0}$ .

Составляя два нормальных уравнения для каждого  $i$  и решая их, получим итеративный процесс уточнения  $\alpha_0, \beta_0$  по формулам

$$\alpha_i = \alpha_0 + \delta\alpha;$$

$$\beta_i = \beta_0 + \delta\beta.$$

По данным табл. 5.1 для трилатерации по формуле (5.4) получено  $\alpha = 1, \beta = 2$ . Кроме того, по методике, изложенной выше, получено

$$K = 2.82 \cdot r^{0.83}. \quad (5.6)$$

Для триангуляции после удаления аномальных чисел из табл. 5.1 с номерами 1, 6 и 7, получено  $\alpha = 1,3 \cdot 10^{-5}, \beta = 5$ . С учетом всех строк таблицы для  $K$  и  $r$  получено

$$K = 0.300 \cdot r. \quad (5.7)$$

Для линейно-угловой триангуляции получено  $\alpha = 700, \beta = 2$ .

$$K = 0.26 \cdot r^{0.928}. \quad (5.8)$$

При этом можно сделать следующие выводы:

1) для симметричных сплошных геодезических сетей обнаружена следующая закономерность: с возрастанием количества определяемых пунктов  $K$  увеличиваются  $r$  и  $C_K$ ;

2) при одинаковом  $K$  значение  $C_K$  увеличивается по-разному: наименьшая скорость увеличения у трилатерации, затем следует линейно-угловая триангуляция и сплошная сеть триангуляции;

3) дополнительные исследования показали, что сплошная сеть полигонометрии имеет такие характеристики, как и линейно-угловая триангуляция.

Если в многократной геодезической засечке имеется одно избыточное измерение, то, как нетрудно доказать, число обусловленности для коррелиатного способа

$$C_k = \|N\| \cdot \|N^{-1}\| \quad (5.9)$$

матрицы

$$N = BP^{-1}B^T, \quad (5.10)$$

будет равно 1. Если число избыточных измерений  $r > 1$ , то при  $r_i > r_{i+1}$   $(C_k)_i > (C_k)_{i+1}$ . Сравним для геодезических засечек значения  $C_k$  и  $C_p$ , вычисляемые по формуле

$$C_p = \|R\| \cdot \|Q\|, \quad (5.11)$$

матрицы

$$R = A^T P A, \quad (5.12)$$

для параметрического способа уравнивания. При этом евклидова норма матриц  $N$ ,  $R$ ,  $Q$  вычислялась по формуле

$$\|N\| = \sqrt{\sum_{i=1}^r N_i^2}. \quad (5.13)$$

Целью исследований является анализ закономерности изменения  $C_k$  и  $C_p$  от величины  $r$  при количестве определяемых пунктов, равном 1, с исходными пунктами, показанными на рис. 5.2.

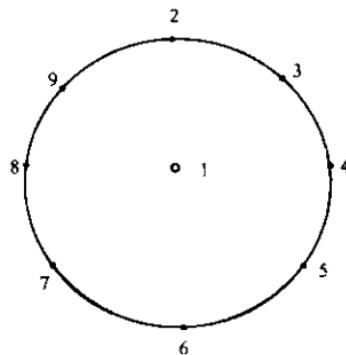


Рис. 5.2. Схема расположения пунктов для засечек

Рассмотрим следующие засечки:

- 1) обратная засечка с определяемым пунктом в точке 1 (табл. 5.2);
- 2) прямая засечка с исходных пунктов 2 – 9 на определяемый пункт 1 (табл. 5.3);
- 3) линейная засечка (табл. 5.4);
- 4) угловая комбинированная прямая-обратная засечка (табл. 5.5);
- 5) линейная прямая комбинированная засечка (табл. 5.6);
- 6) прямая-обратная линейная засечка (табл. 5.7);
- 7) обратная засечка плохого качества с определяемым пунктом в точке 6 и направлениями на исходные пункты 7, 8, 9, 2, 3, 4, 5 (табл. 5.8).

Если число обратных направлений больше 2, то берется условие горизонта.

Таблица 5.2

Результаты решения обратной засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	3	1	1,00	17,5
2	4	2	5,49	7,96
3	5	3	22,9	4,64
4	6	4	37,2	2,99
5	7	5	35,3	2,20
6	8	6	28,7	2,00

Таблица 5.3

Результаты решения прямой засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	3	1	1,00	2,50
2	4	2	6,00	2,00
3	5	3	9,00	2,17
4	6	4	12,3	2,23
5	7	5	20,0	2,18
6	8	6	28,7	2,00

Таблица 5.4

## Результаты решения линейной засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	3	1	1,00	2,50
2	4	2	6,00	2,00
3	5	3	9,00	2,17
4	6	4	12,3	2,23
5	7	5	20,0	2,18
6	8	6	28,7	2,00

Таблица 5.5

Результаты решения угловой комбинированной  
прямой-обратной засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	3	4	19,2	2,38
2	4	6	40,4	2,94
3	5	8	85,4	2,96
4	6	10	129	2,53
5	7	12	137	2,12
6	8	14	131	2,00

Таблица 5.6

## Результаты решения линейной прямой комбинированной засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	2	2	$5,00 \cdot 10^3$	2,95
2	3	4	$42,2 \cdot 10^3$	2,18
3	4	6	$99,7 \cdot 10^3$	2,00
4	5	8	$134 \cdot 10^3$	2,06
5	6	10	$167 \cdot 10^3$	2,09
6	7	12	$251 \cdot 10^3$	2,03
7	8	14	$345 \cdot 10^3$	2,00

Таблица 5.7

Результаты решения прямой-обратной линейной засечки

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	2	3	27,0	2,11
2	3	7	$0,080 \cdot 10^3$	2,40
3	4	10	$0,170 \cdot 10^3$	2,74
4	5	13	$0,216 \cdot 10^3$	2,68
5	6	16	$0,261 \cdot 10^3$	2,35
6	7	19	$0,386 \cdot 10^3$	2,08
7	8	22	$0,524 \cdot 10^3$	2,00

Таблица 5.8

Результаты решения обратной засечки плохого качества

№ пп	Количество исходных пунктов	$r$	$C_k$	$C_p$
1	3	1	1,00	$47,4 \cdot 10^6$
2	4	2	89,3	$12,2 \cdot 10^6$
3	5	3	896	$2,30 \cdot 10^6$
4	6	4	1240	$1,60 \cdot 10^6$
5	7	5	1520	$1,60 \cdot 10^6$

По таблицам 5.2 – 5.8 можно сделать следующие выводы:

1. За исключением примера из табл. 5.8  $C_k > C_p$ .
2. При возрастании  $r$  увеличивается  $C_k$ .
3. Для примеров из табл. 5.3 и 5.4  $C_k$  совпадают, что заслуживает внимания.
4. Какого бы плохого качества ни была засечка при  $r = 1$ ;  $C_k = 1$ , однако если в примере из табл. 5.8 выполнить оценку точности положения пункта коррелатным способом, то, как нетрудно доказать, она совпадет с параметрическим способом и будет в данном примере достаточно большой.
5. Чтобы судить о качестве построений геодезических сетей, уравниваемых коррелатным способом, необходимо считать не только  $C_k$ , но и ошибку положения определяемых пунктов  $M$ .

Вопросами сравнения чисел обусловленности необходимо заниматься при сравнении систем нормальных уравнений для различных способов уравнивания: параметрического, коррелатного и коррелатно-параметрического. Теория этого вопроса была изложена выше.

Ниже будем анализировать следующие числа обусловленности:

$$C_1 = \|R\|_E \|Q\|_E, \quad (5.14)$$

где  $R = A^T P A$  в параметрическом способе;  $R = B P^{-1} B^T$  в коррелатном способе;  $R = B^* P^{-1} (B^T)^*$  в коррелатно-параметрическом способе, где  $B^* = (E - AF)$ , выделенное по строкам для избыточных измерений;  $Q = R^{-1}$ .

Другое число обусловленности

$$C_2 = \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|, \quad (5.15)$$

с использованием собственных значений матриц  $R$  или  $Q$ .

$$C_3 = \|R\|_E \|Q\|_E \quad (5.16)$$

– вспомогательное число обусловленности для всех способов уравнивания, при котором берутся горизонтальные углы, замыкающие горизонт, что близко к уравниванию для направлений при составлении линейных уравнений для углов. Величины  $\|R\|_E$  и  $\|Q\|_E$  вычисляют по известной формуле

$$\|R\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^t r_{ij}^2}.$$

Число обусловленности  $C_3$  вычислялось по программе OZKOR5 с определением избыточных измерений рекуррентным способом [34].

Из вышеизложенного следует, что мы должны анализировать системы нормальных уравнений не только для параметрического и коррелатно-параметрического способов, но и для классического коррелатного способа. Это составляет определенные трудности при обработке сложных по построению геодезических сетей. Поэтому сравним числа обусловленности для четырех простых по построению сетей триангуляции, трилатерации и полигонометрии.

### Пример 5.1. Триангуляция.

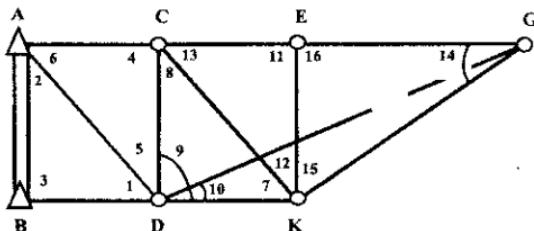


Рис. 5.3. Триангуляция

В таблице 5.9 приведены координаты пунктов.

Таблица 5.9  
Координаты пунктов

Названия пунктов	X, м	Y, м
A	1100	100
B	100	100
C	1100	1100
D	100	1100
E	1100	2100
K	100	2100
G	1100	3100

В таблице 5.10 приняты следующие обозначения чисел обусловленности:

$\left. \begin{matrix} (C_1)_P \\ (C_2)_P \\ (C_3)_P \end{matrix} \right\}$  – для параметрического способа;

$\left. \begin{matrix} (C_1)_{KL} \\ (C_2)_{KL} \\ (C_3)_{KL} \end{matrix} \right\}$  – для коррелатного способа;

$\left. \begin{matrix} (C_1)_{KP} \\ (C_2)_{KP} \\ (C_3)_{KP} \end{matrix} \right\}$  – для коррелатно-параметрического способа.

Таблица 5.10

Результаты вычислений при  $\sigma_p = 5.0''$ 

Числа обусловленности	Названия исходных пунктов		
	A, B	A, B, G	A, B, E, G
$(C_1)_P$	55,75	53,30	44,37
$(C_2)_P$	341,4	32,53	11,61
$(C_3)_P$	533	71,0	23,0
$(C_1)_{KL}$	12,62	43,0	182,0
$(C_2)_{KL}$	5,16	25,7	74,6
$(C_3)_{KL}$	-	-	-
$(C_1)_{KP}$	7,78	72,0	182,0
$(C_2)_{KP}$	3,17	38,8	74,6
$(C_3)_{KP}$	214,6	202,0	138,2

По данным табл. 5.10 можно сделать следующие выводы:

1. Для сети триангуляции  $(C_i)_{KL}$  и  $(C_i)_{KP}$  практически совпадают.
2.  $(C_i)_P$  с увеличением числа исходных пунктов уменьшается,  $C_i)_{KL}$  и  $(C_i)_{KP}$  возрастают.

### Пример 5.2. Трилатерация.

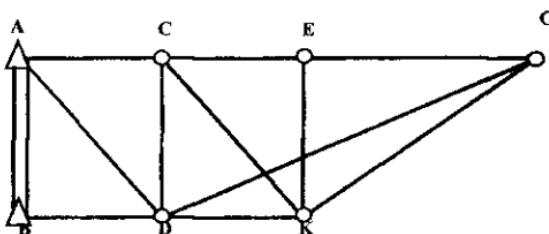


Рис. 5.4. Трилатерация (11 сторон)

Координаты всех пунктов соответствуют табл. 5.9.

В таблице 5.11 приняты обозначения аналогично табл. 5.10 только для трилатерации.

Таблица 5.11

Результаты вычислений при  $\sigma_s = 30$  мм

Числа обусловленности	Названия исходных пунктов		
	A , B	A , B , G	A , B , E , G
1	2	3	4
$(C_1)_P$	352	37,0	17,0
$(C_2)_P$	193	20,0	10,2
$(C_3)_P$	352	37,0	17,0
$(C_1)_{KL}$	1	141	221,6
$(C_2)_{KL}$	1	140	200,4
$(C_3)_{KL}$	--	--	--
$(C_1)_{KP}$	1	8,28	24,8
$(C_2)_{KP}$	1	6,82	17,6
$(C_3)_{KP}$	1	6,36	17,4

По данным табл. 5.11 можно сделать следующие выводы:

- Если при уравнивании геодезической сети возникает одно условное уравнение, то независимо от его вида  $(C_1)_K = 1$ .
- С увеличением числа исходных пунктов  $(C_1)_P$  убывает, а  $(C_1)_K$  возрастает.

### Пример 5.3. Полигонометрия.

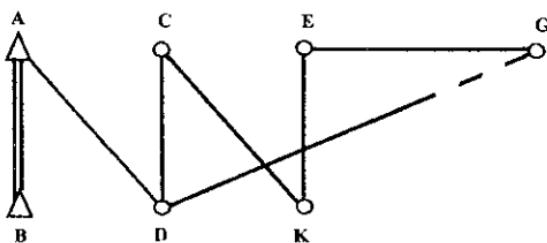


Рис. 5.5. Полигонометрия (6 сторон, 6 углов)

Координаты всех пунктов соответствуют табл. 5.9.

В таблице 5.12 приняты обозначения аналогично табл. 5.10 только для полигонометрии.

Таблица 5.12

Результаты вычислений при  $\sigma_\beta = 5.0''$ ,  $\sigma_s = 30$  мм

Числа обусловленности	Названия исходных пунктов		
	A, B	A, B, G	A, B, E, G
$(C_1)_P$	308	43,08	17,14
$(C_2)_P$	196	25,26	11,48
$(C_3)_P$	260	40,9	16,4
$(C_1)_{KL}$	29 683	56 270	824 740
$(C_2)_{KL}$	29 683	56 139	821 140
$(C_3)_{KL}$	-	-	-
$(C_1)_{KP}$	29 688	58 077	191 390
$(C_2)_{KP}$	29 688	47 994	160 810
$(C_3)_{KP}$	7,14	21,3	28,2

По данным таблицы 5.12 можно сделать следующие выводы [34]:

1. Тенденция изменения  $(C_1)_{KL}$  и  $(C_1)_{KP}$  одинакова, что говорит о возможности анализа чисел обусловленности в коррелятно-параметрическом способе.

2.  $(C_3)_{KP}$  оказалось заниженным по той причине, что выбраны особые (для углов) избыточные измерения. Исследования показали, что если в состав избыточных измерений включается сторона, то  $(C_3)_{KP}$  примерно равно  $(C_1)_{KP}$ .

Пример 5.4. Полигонометрия.

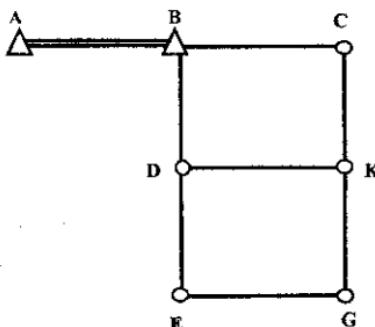


Рис. 5.6. Полигонометрия (7 сторон, 9 углов)

Координаты всех пунктов приведены в таблице 5.13.

Таблица 5.13

## Координаты пунктов

Названия пунктов	X,м	Y,м
A	3000	0
B	3000	1000
C	3000	2000
D	2000	1000
E	1000	1000
K	2000	2000
G	1000	2000

Результаты вычислений представлены в табл. 5.14.

Таблица 5.14

Результаты вычислений при  $\sigma_\beta = 5.0''$ ,  $\sigma_s = 30$  мм

Числа обусловленности	Названия исходных пунктов		
	A , B	A , B , G	A , B , E , G
(C <sub>1</sub> ) <sub>P</sub>	312	30,45	17,23
(C <sub>2</sub> ) <sub>P</sub>	194	14,94	8,91
(C <sub>3</sub> ) <sub>P</sub>	206	36,6	22,8
1	2	3	4
(C <sub>1</sub> ) <sub>KL</sub>	133 810	303 150	729 560
(C <sub>2</sub> ) <sub>KL</sub>	67 225	192 200	511 850
(C <sub>3</sub> ) <sub>KL</sub>	-	-	-
(C <sub>1</sub> ) <sub>KP</sub>	119 300	190 890	144 170
(C <sub>2</sub> ) <sub>KP</sub>	59 624	110 860	70 708
(C <sub>3</sub> ) <sub>KP</sub>	78,0	222,3	144 196

Выводы к табл. 5.14 аналогичны выводам к табл. 5.12.

Отметим:

1. Числа обусловленности в параметрическом и коррелатном способах изменяются по-разному при увеличении числа исходных пунктов.

2. Числа обусловленности для классического коррелатного способа могут быть заменены коррелатно-параметрическим, т.к. в дальнейшем будем оценивать не величину чисел обусловленности, а тенденцию их изменения.

## 5.2. Закономерности изменения чисел обусловленности в рядах и звеньях триангуляции

С появлением быстродействующих ЭВМ удалось создать универсальный коррелятно-параметрический способ уравнивания, заключающийся в следующем:

1. Применяют параметрический способ уравнивания и вычисляют вспомогательную матрицу

$$B^* = E - AF,$$

где  $E$  – единичная матрица;  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $F$  – расширенная псевдообратная матрица, определяющаяся выражением

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P,$$

где  $P$  – матрица весов измерений.

2. Поскольку число строк матрицы  $B^*$  равно числу измерений  $n$ , а в матрице условных уравнений  $B$  – числу избыточных измерений, то, как показано в статье, для получения  $B$  переписывают  $r$  строк из матрицы  $B^*$ . Эти строки должны быть линейно независимыми, иначе определитель матрицы

$$N = BP^{-1}B^T$$

будет равен нулю.

На рис. 5.7 показана удвоенная цепочка трилатерации.

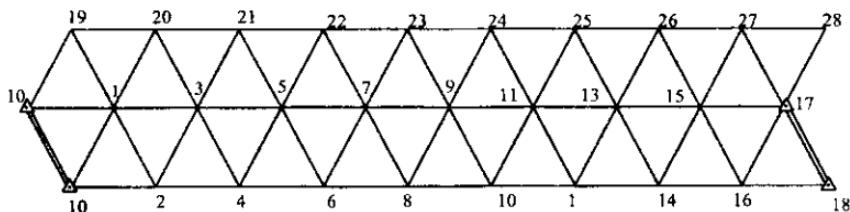


Рис. 5.7. Цепочка трилатерации

По программе OZKOR2 получено  $K = 28$ ;  $r = r' = 8$ ;  $C_P = 60\ 904$ ;  $C_K = 70,4$  (исходные пункты 101, 102, 17, 18). Рассмотрим звено триангуляции, показанное на рис. 5.8 [35].

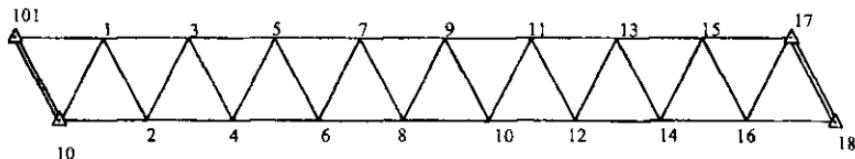


Рис. 5.8. Звено триангуляции

Будем изменять положение исходного по счету пятого и шестого пунктов и записывать результаты в табл. 5.15.

Обработка звена триангуляции

Таблица 5.15

№ пп	Номера дополнительных исходных пунктов к п. 101, 102, 17, 18	K	r	r'	C <sub>K</sub>	C <sub>P</sub>
1	15,16	16	40	38	4647	2426
2	13,14	14	44	42	2409	783
3	11,12	14	44	42	1475	441
4	9,10	14	44	42	1230	254
5	7,8	14	44	42	2148	254
6	5,6	14	44	42	3930	440
7	3,4	14	44	42	6774	783

Выполним исследования по определению зависимости  $C_K$ ,  $C_P$  от величины связующих углов в звене триангуляции.

Обработка звена триангуляции с разными связующими углами

Таблица 5.16

№ пп	Координаты верхних точек X, м	Связующие углы, °	K	r	r'	C <sub>K</sub>	C <sub>P</sub>
1	71	8,0	16	40	38	59 141	880 000
2	771	57,0	16	40	38	4 647	2 426
3	5 771	85,0	16	40	38	406	9 718
4	17 771	88,4	16	40	38	440	91 300
5	97 771	89,7	16	40	38	445	$2,7 \cdot 10^6$

Рассмотрим ряд и звено линейно-угловой триангуляции, показанной на рис. 5.8. В таблице 5.17 приведены значения  $C_K$ ,  $C_P$  в ряду этой триангуляции.

Таблица 5.17

## Обработка ряда линейно-угловой триангуляции

№ пп	Координаты верхних точек $X, м$	Связующие углы, °	$K$	$r$	$r'$	$C_K$	$C_P$
1	71	8,0	18	72	72	$0,028 \cdot 10^6$	116 000
2	771	57,0	18	72	72	$0,106 \cdot 10^6$	33 000
3	5 771	85,0	18	72	72	$0,609 \cdot 10^6$	18 000
4	17 771	88,4	18	72	72	$5,49 \cdot 10^6$	12 700
5	97 771	89,7	18	72	72	$166 \cdot 10^6$	12 000

В таблице 5.18 даны значения  $C_K$ ,  $C_P$  в звене линейно-угловой триангуляции.

Таблица 5.18

## Обработка звена линейно-угловой триангуляции

№ пп	Координаты верхних точек $X, м$	Связующие углы, °	$K$	$r$	$r'$	$C_K$	$C_P$
1	71	8,0	16	75	75	$174 \cdot 10^6$	6 180
2	771	57,0	16	75	75	$31 \cdot 10^6$	1 107
3	5 771	85,0	16	75	75	$3,9 \cdot 10^6$	1 746
4	17 771	88,4	16	75	75	$12,6 \cdot 10^6$	2 241
5	97 771	89,7	16	75	75	$337 \cdot 10^6$	2 710

В таблице 5.19 рассмотрено звено сдвоенной цепочки трилатерации (рис. 5.7) с изменением координаты  $X$  верхних пунктов с номиналом 1541 м.

Таблица 5.19

## Обработка звена трилатерации

№ пп	Координаты верхних точек $X, м$	Связующие углы, °	$K$	$r$	$r'$	$C_K$	$C_P$
1	841	59,2	28	8	8	230	$0,123 \cdot 10^6$
2	2541	78,9	28	8	8	57,9	$0,050 \cdot 10^6$
3	6541	85,6	28	8	8	49,7	$0,067 \cdot 10^6$
4	48541	88,4	28	8	8	47,6	$0,234 \cdot 10^6$
5	98541	89,7	28	8	8	46,8	$5,65 \cdot 10^6$

Рассмотрим влияние изломанности сети на величину  $C_K$ ,  $C_P$  (табл. 5.20).

Таблица 5.20

## Обработка сетей различных видов

№ цп	№ рисунка	K	r	r'	C <sub>K</sub>	C <sub>P</sub>
1	Рис. 5.3	18	44	42	293	3 360
2	Рис. 5.4	18	40	45	137	1 783
3	Рис. 5.5	18	4	2	4 543	3 836
4	Рис. 5.6	18	4	2	7 722	11 969
5	Рис. 5.7	9	4	2	12 944	659
6	Рис. 5.8	9	4	2	8 273	1 107
7	Рис. 5.9 (трианг.)	18	43	41	2 986	3 502
8	Рис. 5.10	18	83	72	$1,0 \cdot 10^6$	1 584
9	Рис. 5.11 (полиг.)	18	82	75	$0,79 \cdot 10^6$	1 713

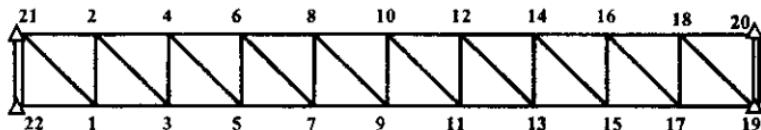


Рис. 5.9. Сеть триангуляции

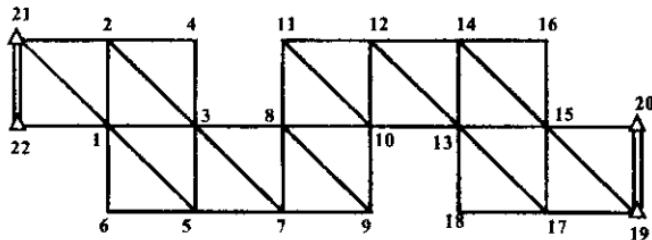


Рис. 5.10. Изломанный ряд триангуляции

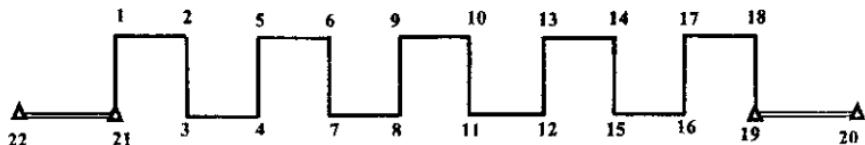


Рис. 5.11. Изломанный ход полигонометрии

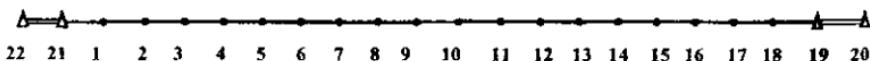


Рис. 5.12. Вытянутый ход полигонометрии

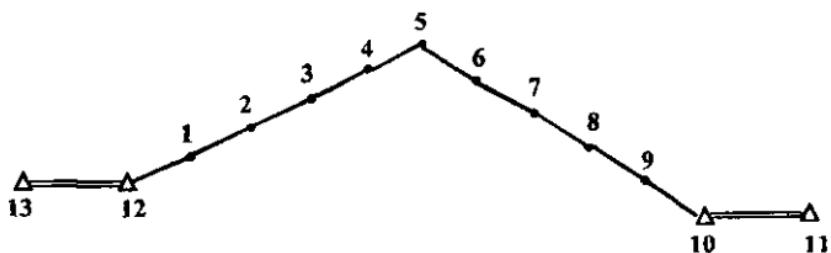


Рис. 5.13. Изломанный ход полигонометрии

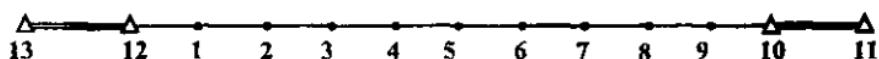


Рис. 5.14. Вытянутый ход полигонометрии

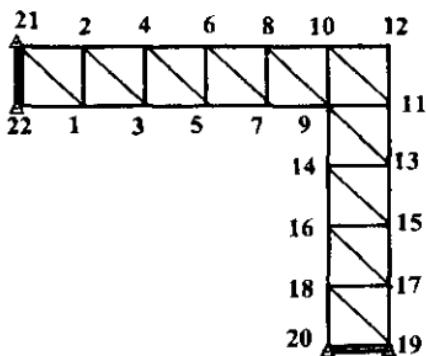


Рис. 5.15. Изломанная цепочка квадратов

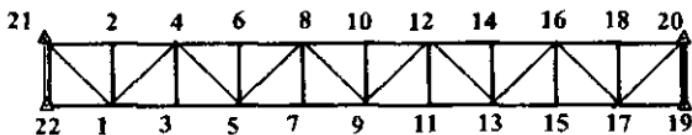


Рис. 5.16. Сеть полигонометрии

Выявим зависимость  $C_k$ ,  $C_p$  для линейно-угловых сетей с различным сочетанием точности линейных измерений при  $\sigma_\beta = 2.0''$  (табл. 5.21).

Таблица 5.21

Значения  $C_k$ ,  $C_p$  при изменении значения  $\sigma_s$   
для различных сетей

№ ип	$\sigma_s$ , мм	$C_k$	$C_p$
1	2	3	4
<b>Изломанный ход полигонометрии (рис. 5.11)</b>			
1	10	30 607	2 532
2	20	4 543	3 836
3	30	1 584	6 465
4	40	743	10 221
5	50	410	15 073
6	60	253	21 012
<b>Вытянутый ход полигонометрии (рис. 5.12)</b>			
1	10	30 887	11 748
2	20	7 722	11 969
3	30	3 432	14 378
4	40	1 930	19 465
5	50	1 235	27 240
6	60	858	37 449
<b>Изломанный ход полигонометрии (рис. 5.13)</b>			
1	10	57 788	307
2	20	12 944	659
3	30	4 935	1 161
4	40	2 340	1 651
5	50	1 264	2 094
6	60	749	2 500
<b>Вытянутый ход полигонометрии (рис. 5.14)</b>			
1	10	33 091	776
2	20	8 273	1 107
3	30	3 677	2 025
4	40	2 068	3 442
5	50	1 324	5 308
6	60	919	7 607
<b>Линейно-угловая триангуляция – 1 цепочка (рис. 5.8)</b>			
1	10	15 699 633	33,2
2	20	3 889 977	38,2
3	30	1 738 817	39,6
4	40	995 755	40,2
5	50	661 436	40,5
6	60	490 016	40,6

1	2	3	4
<b>Линейно-угловая триангуляция – 9 цепочек</b>			
1	10	262 669 866	5 767
2	20	64 508 358	9 320
3	30	28 798 665	12 760
4	40	16 524 087	15 643
5	50	11 35 748	17 911
6	60	8 252 566	19 641
<b>Полигонометрия – 1 цепочка</b>			
1	10	17 750 756	26 067
2	20	1 153 935	27 168
3	30	243 238	29 568
4	40	83 893	34 760
5	50	38 079	43 618
6	60	20587	56 218
1	2	3	4
<b>Полигонометрия – 9 цепочек</b>			
1	10	571 863 278	33 177
2	20	37 344 122	48 314
3	30	7 952 290	67 097
4	40	2 789 077	92 448
5	50	1 294 636	126 730
6	60	718 138	170 402

В заключение можно сделать следующие выводы [35]:

1. В звене триангуляции назначение дополнительных исходных пунктов приводит к незначительным увеличениям  $C_K$  и  $C_P$ .
2. В звене триангуляции с разными связующими углами  $C_K$  резко возрастает при  $\beta < 57^\circ$  и не изменяется при  $\beta > 57^\circ$ . Скорость изменения  $C_P$  гораздо выше, чем  $C_K$ .
3. В линейно-угловом ряде триангуляции наблюдается для  $C_K$  такая же тенденция с изменением  $\beta$ , но  $C_K \gg C_P$ . Аналогичная закономерность и для звена линейно-угловой триангуляции.
4. В звене трилатерации  $C_K$  не зависит от  $\beta$  при  $\beta > 57^\circ$  и незначительно увеличивается при  $\beta < 57^\circ$ . Однако во всех случаях  $C_P \gg C_K$ .
5. В изломанных ходах всюду выполняется правило

$$(C_K; C_P)_{\text{прямolini}} > (C_K; C_P)_{\text{излом.}}$$

6. Замечено, что в линейно-угловых построениях при  $(\sigma_s)_i > (\sigma_s)_{i+1}$ ;  $(C_K)_i < (C_K)_{i-1}$ ;  $(C_P)_i > (C_K)_i$ , что практически позволяет применить любое  $\sigma_s$  при поиске оптимального  $C_K$ .

Для ряда триангуляции с произвольным количеством определяемых пунктов, любым числом треугольников с различными значениями связующих углов число обусловленности  $C_K = 1$ . Тот же результат получим для любых геодезических сетей при числе избыточных измерений  $r = 1$ . Однако для симметричных свободных сетей ситуация резко изменяется, т.к. в них возникают все виды условных уравнений, включая и координатные, если в них имеются «окна».

Целью исследований является анализ изменения числа обусловленности для коррелатного способа  $C_K$  и параметрического  $C_P$  для несвободных геодезических сетей с наращиванием, начиная с одной и заканчивая 8-ю цепочками (см. рис. 5.1) со связующими углами  $57^\circ$  (рис. 5.17).

В таблице 5.22 приведены значения числа определяемых пунктов ( $K$ ), число условных уравнений ( $r, r'$ ) для следующих вариантов:

- 1) обработка цепочек трилатерации с исходными пунктами 1 – 11;
- 2) обработка цепочек триангуляции с исходными пунктами 1 – 11;
- 3) обработка линейно-угловой триангуляции с исходными пунктами 1 – 11 ( $\delta_\beta = 2.0'$ ,  $\delta_s = 20$  мм,  $S = 1000$  м);
- 4) обработка цепочек полигонометрии с исходными пунктами 1 – 11 ( $\delta_\beta = 2.0'$ ,  $\delta_s = 20$  мм,  $S = 1000$  м).

Значения  $C_K$  и  $C_P$  для вариантов 1 и 3 получены по программе OZKOR2, для вариантов 2 и 4 – по программе OZKOR4.

По данным табл. 5.22 можно сделать следующие выводы [21]:

1. С увеличением  $K$  в сплошных геодезических сетях возрастают  $r, r', C_K$  и  $C_P$ .
2. Для сетей триангуляции  $C_K$  является наихудшим, затем следуют сети линейно-угловой триангуляции, полигонометрии, лучшими являются сети трилатерации.
3. С наихудшим  $C_P$  являются сети полигонометрии, затем триангуляции, линейно-угловой триангуляции и трилатерации.
4. Для сетей полигонометрии  $C_K > C_P$ , следовательно, данные сети нужно уравнивать параметрическим способом, несмотря на то, что количество нормальных уравнений в этом способе в 2 – 3 раза больше, чем в коррелатном.

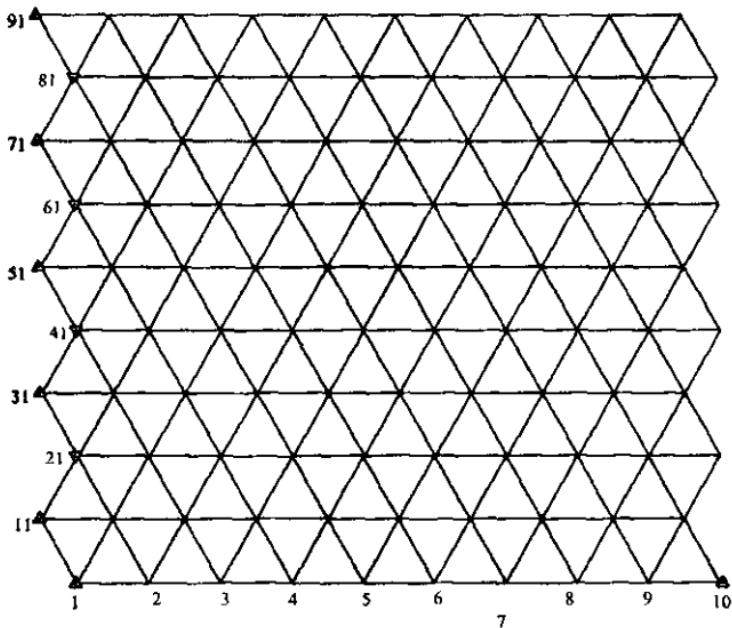


Рис. 5.17. Схема сети

Таблица 5.22

Обработка цепочек

№ пп	Кол-во дополнительных исходных пунктов	K		$r'$		$C_K$	$C_P$
		3	4	5	6		
<b>Вариант 1</b>							
1	0	9	10	10	1321	30,0	
2	0	19	18	18	1661	154	
3	0	29	26	26	2128	341	
4	0	39	34	34	2807	644	
5	0	49	42	42	3647	1080	
6	0	59	50	50	4691	1700	
7	0	69	58	58	5894	2580	
8	0	79	66	66	7299	3780	
9	0	89	74	74	8859	5400	
<b>Вариант 2</b>							
1	0	9	54	54	293	41,0	
2	0	19	90	90	4000	233	
3	0	29	126	124	52000	606	
4	1	39	164	163	$0,650 \cdot 10^6$	885	
5	0	49	198	195	$7,86 \cdot 10^6$	2940	
6	1	59	236	234	$98,8 \cdot 10^6$	3050	
7	0	69	270	266	$1,12 \cdot 10^9$	9760	
8	1	79	308	305	$26,5 \cdot 10^9$	7580	
9	0	89	342	337	$132 \cdot 10^9$	26400	

1	2	3	4	5	6	7
<b>Вариант 3</b>						
1	0	9	81	81	$3,89 \cdot 10^6$	38,2
2	0	19	145	145	$6,15 \cdot 10^6$	187
3	0	29	209	209	$9,21 \cdot 10^6$	460
4	0	39	273	273	$13,2 \cdot 10^6$	974
5	0	49	337	337	$19,9 \cdot 10^6$	1720
6	0	59	401	401	$27,0 \cdot 10^6$	2800
7	0	69	465	465	$37,9 \cdot 10^6$	4280
8	0	79	529	529	$48,5 \cdot 10^6$	6380
9	0	89	593	593	$64,5 \cdot 10^6$	9320
<b>Вариант 4</b>						
1	0	18	3	3	$1,15 \cdot 10^6$	$2,72 \cdot 10^4$
2	1	27	9	7	$0,489 \cdot 10^6$	$3,23 \cdot 10^4$
3	2	36	15	11	$4,96 \cdot 10^6$	$3,58 \cdot 10^4$
4	3	45	21	15	$7,56 \cdot 10^6$	$3,90 \cdot 10^4$
5	4	54	27	19	$11,1 \cdot 10^6$	$4,11 \cdot 10^4$
6	5	63	33	23	$15,5 \cdot 10^6$	$4,33 \cdot 10^4$
7	6	72	39	27	$21,5 \cdot 10^6$	$4,49 \cdot 10^4$
8	7	81	45	31	$28,5 \cdot 10^6$	$4,68 \cdot 10^4$
9	8	90	51	35	$37,3 \cdot 10^6$	$4,83 \cdot 10^4$

### 5.3. О неоднозначности результатов при коррелатном способе уравнивания

В связи с наличием в геодезических сетях избыточных измерений координаты пунктов и величины их функции без уравнивания определяются неоднозначно. Задача уравнивания заключается в том, чтобы, используя все результаты уравнивания, получить однозначно все неизвестные. Кроме того, наличие избыточных измерений позволяет выполнять оценку их точности, надежно проконтролировать и повысить точность искомых величин. Обычно уравнивание выполняется по методу наименьших квадратов параметрическим или коррелатным способом. При использовании первого из них решение заключается в непосредственном получении неизвестных параметров. В коррелатном способе решается задача на условный экстремум для системы условных уравнений, которые составляют исходя из геометрических связей, возникающих в сети. Эти системы уравнений могут составляться неоднозначно и, следовательно, приводить к разным значениям результатов уравнивания. Это противоречит незыблемым кано-

нам, согласно которым два способа уравнивания приводят к одинаковым результатам, отличающимся на небольшую величину из-за ошибок округления. На реальном примере уравнивания геодезического четырехугольника показано, что разные результаты уравнивания получаются, в основном, не из-за ошибок округления, а из-за различной обусловленности систем нормальных уравнений.

Ниже на примере реального геодезического четырехугольника доказывается, что основной причиной флюктуации конечных результатов уравнивания коррелатным способом являются не только ошибки округления, но и плохая обусловленность матрицы нормальных уравнений коррелат [32].

На примере геодезического четырехугольника (рис. 5.18 [17]) поясним случай большой флюктуации  $C_p$ .

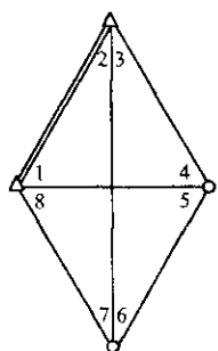


Рис. 5.18. Геодезический четырехугольник

Имеем:  $K = 2$ ;  $C_p = 15$ , которое вычислено по матрицам  $A$  и  $R = A^T A$ .

Матрица  $A$  коэффициентов параметрических уравнений поправок имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -179,37 & 23,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11,92 & 132,0 \\ 239,51 & 162,38 & 11,92 & -132,0 \\ -60,14 & -186,19 & 0 & 0 \\ -98,22 & -104,04 & -81,15 & 127,84 \\ -81,15 & 127,84 & 69,22 & 4,16 \\ 0 & 0 & 83,04 & 45,81 \\ 179,35 & -23,81 & -71,12 & -177,81 \end{bmatrix}$$

В параметрическом способе уравнивания матрица  $A$  характеризует геометрию сети, и поэтому число обусловленности  $C_p$  может быть вычислено в двух вариантах: при уравнивании триангуляции по углам или по направлениям. По-другому обстоит дело в коррелатном способе. В табл. 5.23 приведена матрица коэффициентов условных уравнений  $B$  для геодезического четырехугольника:

- строки 1 – 4 и 7 – коэффициенты всех возможных условных уравнений фигур;
- строки 5 и 6 – коэффициенты линейных уравнений;
- строки 8 – 12 – коэффициенты всех возможных условных уравнений полюса.

Таблица 5.23

Коэффициенты всех возможных условных  
уравнений для геодезического четырехугольника

№ пп	Номера измеренных углов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	0	0	1	1
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	1	1	0	0	-1	-1	0	0
6	0	0	1	1	0	0	-1	-1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	-1,2812	1,2214	-0,5537	1,1226	-0,8381	1,9421	-1,9659	0,2539
9	0	1,4038	0,1824	1,1226	-0,8381	0,7211	-1,2448	0
10	-1,7207	0	0	1,5227	0,0301	1,9421	-1,9659	-0,4395
11	-1,2812	-0,1824	-0,7361	0	0	1,2210	-0,7211	0,2539
12	0,4395	1,2214	-0,5537	-0,0301	-0,8682	0	0	0,6934

В геодезической литературе при уравнивании геодезического четырехугольника коррелатным способом брались в обработку три условия фигур и одно условное уравнение полюса. Легко проверить, что при наличии четырех избыточных измерений нельзя включать в обработку сразу 4 линейных условия или 4 синусных условия.

Подсчитаем число возможных вариантов для четырех независимых уравнений в следующем порядке:

1) три линейных условия и одно условие полюса (число сочетаний из

$$n = 7, \text{ но } m = 3; C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = 35$$

и для пяти условных уравнений полюса окончательно имеем  $35 \times 5 = 175$  вариантов);

2) два линейных условия и два синусных условия (число  $C_n^m = C_7^2 = 21$  вариантов линейных уравнений и  $C_n^m = C_5^2 = 10$  вариантов полюсных условий; окончательно имеем  $21 \times 10 = 210$  вариантов);

3) одно линейное условие и три синусных условия, ( $N_7^1 = 7$  вариантов линейных уравнений;  $C_5^3 = 10$  вариантов для условий полюса, окончательно имеем  $7 \times 10 = 70$ ).

В итоге имеем:  $175 + 210 + 70 = 455$  вариантов.

Выберем из табл. 5.23 такие четыре строки из двенадцати, чтобы они были независимы, и найдем  $C_{K1}$  из 455 вариантов. Некоторые полярные значения  $C_{K1}$  показаны в табл. 5.24.

Таблица 5.24

Результаты вычислений, выбранные из 455 вариантов

№ пп	Номера строк для независимых четырех уравнений из табл. 5.23				Числа обусловленности, найденные по формуле (5.16) для коррелатного способа ( $C_K$ )
1	1	4	9	11	6,41
2	6	7	11	12	3,98
3	1	7	8	12	412,0
4	1	7	10	11	47,4
5	1	2	10	11	50 600
6	2	6	10	11	36 800

По данным табл. 5.24 просматриваются серьезные изменения  $C_K$ , для одного и того же геодезического четырехугольника в зависимости от выбранных четырех условных уравнений из табл. 5.23.

Рассмотрим  $C_{KP}$  для коррелатно-параметрического способа уравнивания [32]. В табл. 5.25 приведены коэффициенты матрицы  $B^*$ , из которой можно выбрать любые независимые 4 строки (63 варианта).

Таблица 5.25

Коэффициенты матрицы  $B^* = E - A(A^T A)^{-1} A^T$ 

№ пп	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,4584	0,2449	0,2198	0,0768	-0,0297	-0,2669	0,2430	0,0536
2	0,2449	0,5778	-0,0228	0,2001	-0,2735	0,0962	-0,0590	0,2363
3	0,2198	-0,0228	0,4828	0,3202	0,2333	-0,0363	0,0091	-0,2061
4	0,0768	0,2001	0,3202	0,4028	0,0700	0,2070	-0,1931	-0,0838
5	-0,0297	-0,2735	0,2333	0,0700	0,4838	0,2129	0,2598	0,0435
6	-0,2669	0,0962	-0,0363	0,2070	0,2129	0,6164	-0,0757	0,2464
7	0,2430	-0,0590	0,0091	-0,1931	0,2598	-0,0757	0,5419	0,2741
8	0,0536	0,2363	-0,2061	-0,0838	0,0435	0,2464	0,2741	0,4360

Выберем из табл. 5.25 четыре строки из восьми, соответствующие избыточным измерениям. Полярные значения  $C_{KP}$  для чисел Тодда помещены в табл. 5.26.

Таблица 5.26

## Результаты вычислений, выбранные из 63 вариантов

№ пп	Номера строк из $B^*$ для четырех избыточных измерений				Числа обусловленности $C_{KP2}$
1	1	4	5	8	2,10
2	2	4	6	7	5,22
3	1	2	3	5	6,51
4	1	4	6	7	147
5	2	3	5	6	187
6	1	3	5	7	535

По данным табл. 5.24 и 5.26 видно, что для классического коррелатного способа уравнивания целесообразно вычислять числа обусловленности, т.к. их значения могут отличаться более чем на  $4 \cdot 10^4$  в зависимости от случайно выбранного варианта коэффициентов условных уравнений.

Чтобы определить, как влияет плохая обусловленность матриц нормальных уравнений на результаты уравнивания, обратимся к табл. 5.27, где в колонках 2, 3, 4 приведены поправки в измерения из уравнивания коррелатным и параметрическим способом при различной обусловленности.

Таблица 5.27

Результаты уравнивания  
геодезического четырехугольника из статьи [17]

Обозначения	Коррелатный способ ( $C = 12,7$ )	Коррелатный способ ( $C = 50608$ )	Параметрический способ ( $C = 18,1$ )
1	2	3	4
$V_1$	-8,42	-8,71	-8,67
$V_2$	12,17	11,70	12,25
$V_3$	-13,95	-13,33	-13,80
$V_4$	0,202	0,343	0,219
$V_5$	-1,36	-0,395	-1,31
$V_6$	22,11	22,28	21,89
$V_7$	0,252	0,950	0,450
$V_8$	19,00	19,06	18,97
$\Sigma V^2$	12,66	1252	1256
$\mu$	17,8	17,7	17,7

В заключение по результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Параметрический способ уравнивания позволяет достаточно точно и однозначно вычислить числа обусловленности.
2. Коррелатный способ уравнивания дает неоднозначные значения  $C_k$  для геодезического четырехугольника и трехвершинной центральной системы, что является безусловно новым результатом.
3. Результаты уравнивания полигонометрии коррелатным способом не будут многовариантными.
4. При уравнивании геодезической сети коррелатным способом рекомендуется вычислять числа обусловленности матрицы нормальных уравнений, т.к. при их наименьшем значении результаты уравнивания будут близки к расчетам при параметрическом способе обработки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие // В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
2. Воложанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Воложанин // Респ. межвед. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка». – 1984. – Вып. 40. – С. 20 – 23.
3. Гармаза, В.М. Уравнивание разностей высот с применением псевдообратных матриц, полученных без использования сингулярного разложения / В.М. Гармаза // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.11.2002. – № 794. – гд.02.
4. Герасименко, М.Д. Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений / М.Д. Герасименко // Тр. НИИГАиК, – Новосибирск. – 1975. – Т. 34. – С. 66 – 73.
5. Герасименко, М.Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1983.
6. Герасименко, М.Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1994. – 73 с.
7. Герасименко, М.Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений / М.Д. Герасименко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 3. – С. 43 – 46.
8. Дегтярева, Е.В. К вопросу применения матричной алгебры в уравнительных вычислениях / Е.В. Дегтярева, В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 2001. – № 11. – С. 25 – 26.
9. Коугия, В.А. Сравнение методов обнаружения и идентификации ошибок измерений / В.А. Коугия // Геодезия и картография. – 1998. – № 5. – С. 23 – 27.
10. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – М.: Физматиздат, 1962. – 352 с.
11. Мазмишвили, А.И. Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968.
12. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
13. Маркузе, Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1972.
14. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.

15. Машимов, М.М. Уравнивание геодезических сетей / М.М. Машимов. – М.: Недра, 1989.
16. Мицкевич, В.И. Исследование взаимосвязи чисел обусловленности / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1995. – № 1. – С. 8 – 11.
17. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24 – 26.
18. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 9 с. Деп в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99 № 681-гд. – 99 деп.
19. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Стержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
20. Некоторые вопросы применения чисел обусловленности в геодезии / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2005. – № 4. – С. 75 – 78.
21. Мицкевич, В.И. Исследование закономерностей изменения чисел обусловленности в рядах и звеньях геодезических сетей при их уравнивании параметрическим и коррелатным способами / В.И. Мицкевич, П.Ф. Парадня, Л.А. Черкас // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2004. – № 11. – С. 46 – 52.
22. Мицкевич, В.И. Использование чисел обусловленности при реализации коррелатного способа уравнивания на ЭВМ / В.И. Мицкевич, П.Ф. Парадня, Л.А. Черкас // Земля Беларуси. – 2006. – № 2.
23. Мицкевич, В.И. Формулы по предрасчету чисел обусловленности при уравнивании коррелатным способом сплошных симметричных геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.Ф. Парадня, Л.А. Черкас // Информационное и геодезическое обеспечение кадастров: сб. науч. тр. – Горки: Бел. гос. с/х академия, 2005. – С. 11 – 13.
24. Мицкевич, В.И. Коррелатно-параметрическое уравнивание геодезических сетей с применением корреляционной матрицы поправок измерений / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 89 – 91.
25. Мицкевич, В.И. Коррелатное уравнивание геодезических сетей с применением расширенной псевдообратной матрицы / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004 – 5 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.06.2004 № 847-гд. – 04 деп.

26. Об автоматизации коррелатного способа уравнивания с помощью корреляционной матрицы поправок результатов измерений / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2004 – 5 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.06.2004 № 849-гд. – 04 деп.
27. Мицкевич, В.И. Раздельное уравнивание GPS-измерений / В.И. Мицкевич, А.П. Присяжнюк, В.Г. Стержанов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000 № 720-гд. – 00 деп.
28. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
29. Мицкевич, В.И. Особенности уравнительных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002 № 776-гд. – 02 деп.
30. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации / В.И. Мицкевич [и др.] // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 1.09.2003 № 806-гд. – 03 деп.
31. Мицкевич, В.И. Анализ качества построения плановых геодезических сетей, характеризующихся плохо обусловленной матрицей нормальных уравнений / В.И. Мицкевич, Л.А. Черкас // Землеустройство: прошлое, настоящее и будущее: Материалы науч.-производ. конф., Горки, 7 – 9 октября 1999 г. / Гос. комитет по зем. ресурсам, геодезии и картографии Респ. Беларусь, Мин-во с/х и продовольствия Респ. Беларусь, Бел. с/х академия. – Горки, 1999. – С. 242 – 244.
32. О неоднозначности результатов уравнивания и чисел обусловленности при использовании коррелатного способа уравнивания / В.И. Мицкевич [и др.] // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2007. – № 12.
33. Монин, И.И. Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях / И.И. Монин // Респ. межвед. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка». – 1982. – Вып. 35. – С. 75 – 84.
34. Парадня, П.Ф. Сравнение чисел обусловленности при различных способах уравнивания / П.Ф. Парадня // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 3.
35. Парадня, П.Ф. Определение зависимости величины чисел обусловленности от количества пунктов сплошных геодезических сетей при уравнивании их коррелатным и параметрическим способами / П.Ф. Парадня, Л.А.

Черкас // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2005. – № 9.

36. Плюта, В.Е. Коррелатное уравнивание трилатерации четырьмя способами / В.Е. Плюта // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2004. – Вып. 3. – С. 12 – 16.
37. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
38. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии / Б.Н. Рабинович. – М.: Геодезиздат, 1961. – 339 с.
39. Усов, Д.В. Методы уравнивания нивелирных сетей без исходных пунктов / Д.В. Усов // Вестник Полоцкого гос. ун-та. – Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 105 – 113.
40. Черкас, Л.А. Сравнительный анализ чисел обусловленности для различных по методу развития симметричных геодезических сетей / Л.А. Черкас // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 8.04.2002 № 756-гд. – 02 деп.
41. Юршанский, З.М. Обобщение задачи оценки точности функций без их предварительной линеаризации / З.М. Юршанский // Совершенствование программы и схемы построения опорных геодезических сетей на территории городов. Материалы Всесоюзной науч.-техн. конф. Ч. II. – Новосибирск, НИИГАиК. – 1980. – С. 16 – 25.
42. Яковлев, Н.В. Высшая геодезия / Н.В. Яковлев. – М.: Недра, 1990. – 445 с.

*Учебное издание*

МИЦКЕВИЧ Валерий Иванович  
ПАРАДНЯ Петр Федорович  
ПЛЮТА Владимир Евгеньевич

**АЛГОРИТМЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ  
КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ**

Пособие по дисциплине  
«Теория математической обработки геодезических измерений»  
для слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-56 02 71  
«Прикладная геодезия и геодезическое обеспечение кадастра»

*Редактор Г.А. Тарасова*

*Дизайн обложки В.А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 30.01.09. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.  
Ризография. Усл. печ. л. 8,35. Уч.-изд. л. 8,13. Тираж 20 экз. Заказ 137.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.2004 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.2004

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29