Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть 2

Г. М. Макаренко
Н. В. Вабищевич

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
ОПТИКА
ФИЗИКА АТОМОВ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования по техническим специальностям*

Новополоцк
ПГУ
2012

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
О28

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра физики Белорусского национального технического университета
(П. Г. КУЖИР – канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф.);
д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. физики УО «Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого» П. А. ХИЛО

О28 **Общая физика. Практикум** : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2. Электромагнетизм. Оптика. Физика атомов / Г. М. Макаренко, Н. В. Вабищевич. – Новополоцк : ПГУ, 2012. – 364 с.

ISBN 978-985-531-338-1.

Приведены решения 293 задач, используемых при изучении разделов «Электричество, магнетизм и электромагнитные волны», «Оптика. Квантовая физика», «Физика атома». Задачи объединены в разделы, разделенные по темам.

Предназначен для студентов учреждений высшего образования технических специальностей.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-338-1 (Ч. 2)

ISBN 978-985-531-339-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум разработан в соответствии с программой курса общей физики для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

Это пособие призвано помочь студентам технических вузов (особенно обучающимся без отрыва от производства) самостоятельно научиться решать задачи по физике, поскольку в нем подробно рассмотрены решения задач по данному разделу.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения: знание теории приобретается одновременно с ее использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин (эта абстрактность и является главным «камнем преткновения» при изучении физики) в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (т.е. при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории. Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает умение решать задачи». Другими словами, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.

Основная цель пособия – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ; ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач; привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В пособии рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Задачи объединены в разделы, разделенные по темам. В начале каждой темы приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые для решения задач.

Решения задач выполнены по одной схеме: составлены необходимые уравнения, приведено решение их в общем виде, подставлены числовые данные, выписан ответ.

Предлагаемый практикум предназначен для студентов вузов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной.

Методические указания к решению задач

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите по учебникам (список рекомендуемой литературы – на с. 361) теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.
2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц.

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т.д.
4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.
5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т.е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде расчетной формулы, отвечающей на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей: размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.
8. Подставьте в полученную формулу числовые значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.
9. Получив численный ответ, оцените его достоверность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В пособии не проводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых размерность очевидна.

Для уменьшения объема книги подстановка численных значений в некоторых заданиях не проводится.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО, МАГНЕТИЗМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Электростатическое поле в вакууме и средах

Основные формулы

Закон сохранения электрического заряда

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \mathrm{const},$$

где k – число зарядов.

В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной.

Закон Кулона

$$|F| = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = $9\cdot10^9$ (Н·м^2)/Кл^2; $\vec{F}$ – сила взаимодействия неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме, r – расстояние между зарядами, ε_0 = $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м (или Кл^2/(Н·м^2)) – электрическая постоянная.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся в однородном безграничном диэлектрике,

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

Напряженность электрического поля в данной точке (т.е. в той точке, в которой на пробный заряд q действует со стороны поля сила $\vec{F}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Принцип суперпозиции электрических полей: напряженность поля $\vec{E}$, создаваемая в данной точке системой, состоящей из K точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в этой точке отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_K .$$

Напряженность электростатического поля равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциала:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi .$$

Проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстроте убывания потенциала поля на единицу длины в этом направлении:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl} .$$

Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV},$$

где dq – заряд, приходящийся соответственно на единицу длины, площади и объема; dl – длина физически бесконечно малого отрезка нити; dS – физически бесконечно малый участок поверхности; dV – малый элемент объема.

Напряженность поля точечного заряда или заряженной сферы (вне сферы) в вакууме

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от центра сферы до точки.

Напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом или заряженной сферой (вне сферы),

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} .$$

Напряженность поля бесконечно длинной заряженной нити или цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r \varepsilon} .$$

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Напряженность поля, образованного двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, полностью заполняющего объем между плоскостями.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому контуру L.

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2,

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad A_{12} = q_0U, \quad \text{или}$$

$$A_{12} = q_0\int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = q_0\int_1^2 E\cos\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)dl,$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле.

Разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где A_{12} – работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2; E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$ (интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения).

Разность потенциалов между точками, находящимися в вакууме на расстоянии x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости,

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{x_1}^{x_2} E dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x_2-x_1\right),$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Разность потенциалов между бесконечными разноименными заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d,

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_0^d E dx=\int_0^d\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d.$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом q, причем $r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$,

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2} E dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра заряженного шара радиусом R с общим зарядом q, причем $r_1<R$, $r_2<R$, $r_2>r_1$,

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2} E dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}dr=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2-r_1^2\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, причем $r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$,

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2} E dr=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P}=\frac{\vec{P}_V}{V}=\frac{\sum_i \vec{P}_i}{V},$$

где V – объем диэлектрика; $\vec{P}_V=\sum_i \vec{P}_i$ – дипольный момент диэлектрика, $\vec{P}_i$ – дипольный момент i-й молекулы.

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля можно выразить формулой

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества; ε_0 – электрическая постоянная.

Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ можно выразить формулой

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля можно записать следующим образом:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где P – поляризованность; ε – диэлектрическая проницаемость.

Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \oint_S E_n dS,$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали к элементу площади поверхности dS.

Теорема Гаусса: полный поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля через произвольную замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0},$$

где N – число зарядов.

Вектор электрического смещения (электрической индукции) для изотропной однородной диэлектрической среды

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$: поток электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{K} q_i \,.$$

Сторонними называются заряды, которые находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул.

Потенциал в какой-либо точке электрического поля в вакууме равен отношению потенциальной энергии заряда W_n к величине пробного заряда q_0:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0}.$$

Потенциальная энергия заряда в поле другого точечного заряда

$$W_n = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой с радиусом R и с зарядом q, на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E = 0$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

б) если $r = R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

в) если $r > R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Электроемкость удлиненного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение между пластинами.

Для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь одной пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между пластинами.

Электроемкость удлиненной металлической сферы радиусом R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R.$$

Электроемкость сферического конденсатора (две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}.$$

Электроемкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра с длиной образующей l и радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}.$$

Электроемкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$;

если C_i одинаковы, то $C = nC_i$;

б) при последовательном соединении $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$;

если C_i одинаковы, то $C = \frac{C_i}{n}$.

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме i-го.

Энергия электрического поля в объеме V

$$W = \int_V \omega dV,$$

где $\omega = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ – объемная плотность энергии; dV – бесконечно малый объем.

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Связь между поверхностной плотностью σ' связанного заряда в однородном диэлектрике с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 3.1

Три одинаковых положительных заряда $q_1 = q_2 = q_3$ = 1 нКл расположены по вершинам равностороннего треугольника (см. рис.). Какой отрицательный заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Дано:
$q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-9}$ Кл
$q_4 - ?$

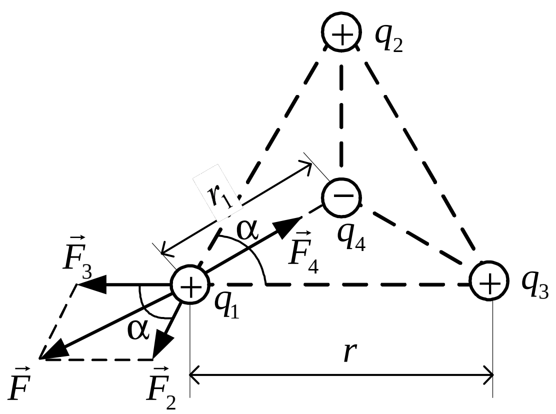
Решение

Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например, q_1 находился в равновесии.

В соответствии с принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил будет равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – силы, с которыми действуют на заряд q_1 соответственно заряды q_2, q_3 и q_4; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.



Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_4$ направлены по одной прямой (см. рис.), то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

$$F - F_4 = 0 \quad \text{или} \quad F_4 = F.$$

Учитывая, что $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, а $F_3 = F_2$, получаем по теореме косинусов

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применив закон Кулона и учитывая, что $q_2 = q_3 = q_1$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{\varepsilon r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

откуда

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}\,. \qquad (2)$$

В равностороннем треугольнике $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$, с учетом этого формула (2) примет вид

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}; \quad q_4 = \frac{1\cdot 10^{-9}}{1{,}73} \approx 0{,}58 \text{ нКл.}$$

Ответ: $q_4 = 0{,}58$ нКл.

ЗАДАЧА 3.2

Два тонких длинных проводника равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau|$ = 200 мкКл/м и расположены параллельно друг другу. Расстояние между проводниками d = 10 см. Какова напряженность E поля в точке, удаленной от первого проводника на расстояние r_1 = 15 см, а от второго – на r_2 = 16 см?

Дано:

d = 0,1 м

$\tau = 2\cdot 10^{-4}$ Кл/м

r_1 = 0,15 м

r_2 = 0,16 м

E – ?

Решение

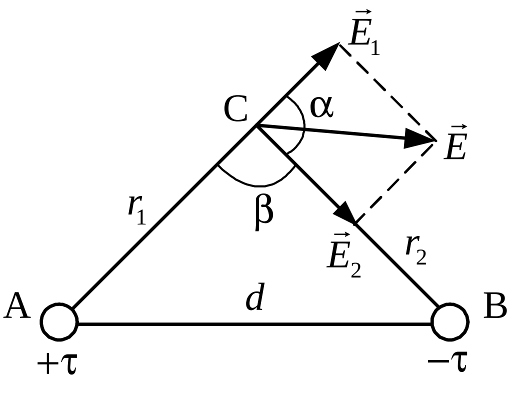
На рисунке показаны сечения проводников A и B. Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряженность в точке C

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,.$$

Модули напряженностей электрического поля первого и второго проводников вычисляем по формуле

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}:$$

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1}; \quad E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\,.$$



Направление результирующего вектора $\vec{E}$ находим по правилу параллелограмма, а модуль вектора $\vec{E}$ определяем по теореме косинусов

$$E=\sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Из рисунка видно, что угол $\alpha=180°-\beta$, а $\cos\alpha=\cos(180°-\beta)=-\cos\beta$.

Тогда расчетная формула примет вид

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}-\frac{2}{r_1r_2}\cos\beta}.$$

Из треугольника ABC также по теореме косинусов запишем:

$$d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\beta.$$

Отсюда найдем

$$\cos\beta=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2};$$

$$\cos\beta=\frac{0{,}1^2-0{,}15^2-0{,}16^2}{2\cdot0{,}15\cdot0{,}16}=0{,}8.$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\Phi\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

$$E=\frac{2\cdot10^{-4}}{2\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\sqrt{\frac{1}{0{,}15^2}+\frac{1}{0{,}16^2}-\frac{2}{0{,}15\cdot0{,}16}\cos0{,}8}=14\cdot10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}=14\ \frac{\text{МВ}}{\text{м}}.$$

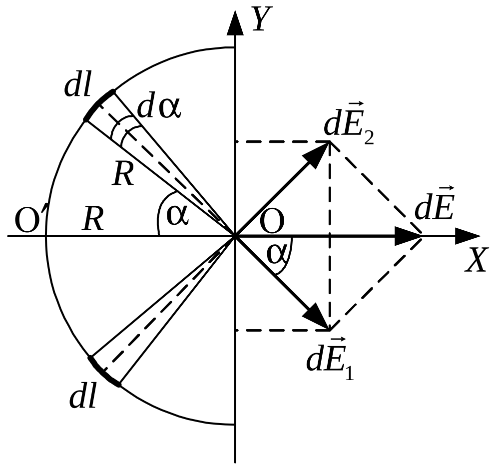
Ответ: $E=14\ \frac{\text{МВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.3

Найти напряженность E и потенциал φ в центре полукольца радиусом R = 5 см, по которому равномерно распределен заряд q = $3\cdot10^{-9}$ Кл.

Дано:	**Решение**
R = 0,05 м q = $3\cdot10^{-9}$ Кл	Для определения напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ в центре полукольца воспользуемся принципом суперпозиции. Разделим полукольцо на малые элементы дуги dl так, чтобы заряд $dq=\tau dl=\frac{q}{\pi R}dl$
E, φ – ?	

каждой точки дуги можно было считать точечным. Выберем два произвольных симметрично расположенных относительно OO′ элемента дуги (см. рис.).



Напряженности электрического поля в точке O, создаваемые выбранными элементами, $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$. Согласно принципу суперпозиции $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$.

Из соображений симметрии следует, что алгебраическая сумма проекций напряженностей поля выбранных элементов на ось OY равна нулю. Результирующее поле направлено вдоль оси OX :

$$dE = dE_X = dE_1 \cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha = \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^3}dl.$$

Так как $dl = Rd\alpha$, то $dE = \dfrac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\alpha$.

Положение точечного заряда dq на полукольце определяется углом α. Поэтому угол α выбираем в качестве переменной интегрирования;

$$E = E_X = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2};$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\Phi\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E = \frac{3\cdot 10^{-9}}{2\cdot(3{,}14)^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(0{,}05)^2} = 6{,}88\cdot 10^3\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Потенциал φ в центре полукольца определяется алгебраической суммой потенциалов электрического поля $d\varphi$ элементарных зарядов (согласно принципу суперпозиции).

Учитывая, что $d\varphi$ точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{qdl}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2},$$

где $dq = \dfrac{qdl}{\pi R}$,

определяем φ:

$$\varphi = \int_0^{\pi R} d\varphi = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \int_0^{\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$[\varphi] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{В};$$

$$\varphi = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}05} = 5{,}39 \cdot 10^2 \text{ В}.$$

Ответ: $E = 6{,}88 \cdot 10^3 \ \frac{\text{В}}{\text{м}}$; $\varphi = 5{,}39 \cdot 10^2$ В.

ЗАДАЧА 3.4

Тонкий стержень длиной l = 15 см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 6 \ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Найти напряженность E, создаваемую этим зарядом, в точке, расположенной на оси стержня и удаленной от ближайшего конца стержня на расстояние r = 10 см.

Дано:

l = 0,15 м

$\tau = 6 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$

r = 0,1 м

E – ?

Решение

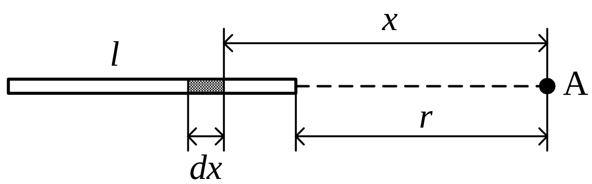
Заряд, равномерно распределенный по тонкому стержню, не является точечным, поэтому непосредственно вычислить напряженность поля по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1)$$

невозможно.

Выделим на стержне бесконечно малый элемент длины dx (см. рис.). Заряд $dq = \tau dx$, находящийся на выделенном элементе, можно считать точечным, и, используя, формулу (1), найдем напряженность в точке A, создаваемую зарядом dq:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$



где x – расстояние от dx до точки А.

Применяя принцип суперпозиции, определим напряженность поля в точке A, создаваемую заряженным стержнем:

$$E = \int_l dE = \int_r^{r+l} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^{r+l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right);$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\Phi\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E = \frac{6\cdot10^{-6}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}1+0{,}15}\right) = 324\cdot10^3\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 324\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 324\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.5

На отрезке тонкого прямого провода длиной $l = 10$ см равномерно распределен заряд $q = 4\cdot10^{-8}$ Кл. Вычислить напряженность E в точке, расположенной на перпендикуляре к проводу, проведенном через один из его концов, на расстоянии $r_0 = 0{,}08$ м.

Дано:
$l = 0{,}1$ м
$q = 4\cdot10^{-8}$ Кл
$r_0 = 0{,}08$ м

$E - ?$

Решение

Заряд, равномерно распределенный по тонкому проводу AB (см. рис.), не является точечным. Однако если выделить на стержне малый участок длиной dx, то находящийся на нем заряд dq можно рассматривать как точечный.

Введем линейную плотность электрического заряда $\tau = \dfrac{dq}{dl}$ и $dq = \tau dx$.

Тогда напряженность dE, создаваемая точечным зарядом в точке C,

$$dE = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

Вектор $d\vec{E}$ можно разложить по координатным осям:

$$dE_x = dE\sin\alpha \quad \text{и} \quad dE_y = dE\cos\alpha. \qquad (2)$$

Рассчитаем dE.

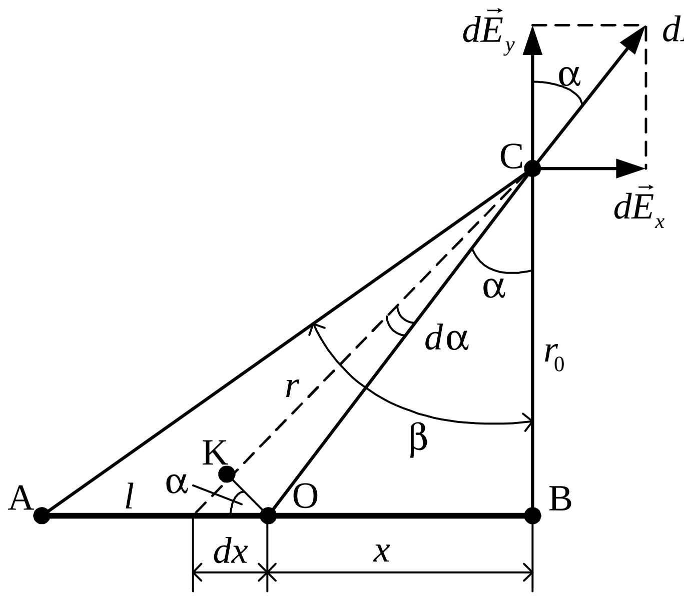
Из рисунка следует, что

$$dx = \frac{\text{KO}}{\cos\alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}; \quad (3)$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + x^2},$$

где

$$x = r_0 \text{tg}\alpha. \qquad (4)$$



Таким образом, используя выражения (1) – (4), получим:

$$dE = \frac{\tau r d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r_0^2 + r_0^2 \text{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\tau d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r_0 \sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \frac{\tau \cos\alpha d\alpha}{\cos\alpha 4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}. \qquad (5)$$

Вычислим E_x и E_y.

Используя выражения (2) и (5), запишем:

$$E_x = \int_0^\beta dE \sin\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cos\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}(1 - \cos\beta);$$

$$E_y = \int_0^\beta dE \cos\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta.$$

Здесь коэффициент $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$; $\text{tg}\beta = \frac{l}{r_0}$; $\beta = 51{,}34°$.

По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$, или по модулю

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sqrt{2(1 - \cos\beta)};$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\Phi\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E=\frac{4\cdot10^{-8}\cdot9\cdot10^9}{0{,}1\cdot0{,}08}\sqrt{2\left(1-\cos51{,}34°\right)}=39\cdot10^3\,\frac{\text{В}}{\text{м}}=39\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E=39\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.6

Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 = 6 см и R_2 = 10 см несут соответственно заряды q_1 = 1 нКл и q_2 = – 0,5 нКл (см. рис.). Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1 = 5 см, r_2 = 9 см, r_3 = 15 см. Построить график E (r).

Дано:

$R_1 = 6\cdot10^{-2}$ м

$R_2 = 10\cdot10^{-2}$ м

$q_1 = 10^{-9}$ Кл

$q_2 = -\,0{,}5\cdot10^{-9}$ Кл

$r_1 = 5\cdot10^{-2}$ м

$r_2 = 9\cdot10^{-2}$ м

$r_3 = 15\cdot10^{-2}$ м

$E_1, E_2, E_3 - ?\;\; E(r) - ?$

Решение

Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях: в области I ($r_1 < R_1$), области II ($R_1 < r_2 < R_2$), области III ($r_3 > R_3$).

1. Для определения напряженности E_1 в области I выберем сферу S_1 радиусом r_1 («гауссову» поверхность) и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint\limits_{S_1} E_n dS = 0$$

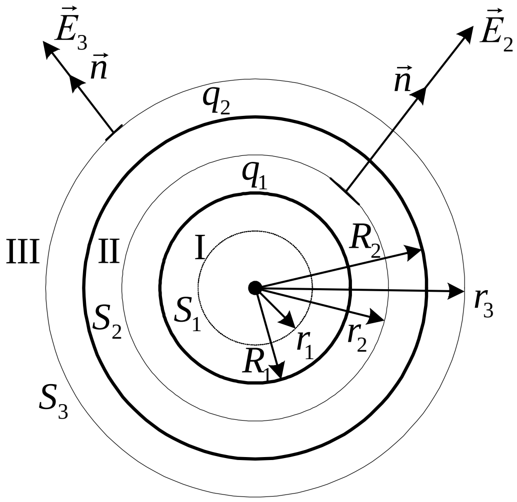
(так как суммарный заряд, находящийся внутри «гауссовой» поверхности, равен нулю).

Из соображений симметрии $E_n = E_1$ = const. Следовательно, $E_1\oint\limits_{S_1} dS = 0$, поэтому E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, равна нулю: $E_1 = 0$.

2. В области II «гауссову» поверхность выберем радиусом r_2. В этом случае $\oint\limits_{S_2} E_n dS = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$, так как $\varepsilon \simeq 1$ для воздуха, или $ES_2 = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$.

Обозначив напряженность E для области II через E_2, получим

$$E_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_2},$$



где $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площадь «гауссовой» поверхности.

Тогда

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2};$$

$$[E] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{10^{-9}}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)(0{,}09)^2}\,\text{В/м} = 1{,}11\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3. В области III «гауссова» поверхность проводится радиусом r_3. Обозначим напряженность E области III через E_3 и учтем, что в этом случае «гауссова» поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд внутри нее равен $q_1 + q_2$.

Тогда

$$E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}.$$

Учитывая, что q_2 имеет отрицательный заряд, это выражение перепишем в виде

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0{,}5) \cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2}\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 200\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

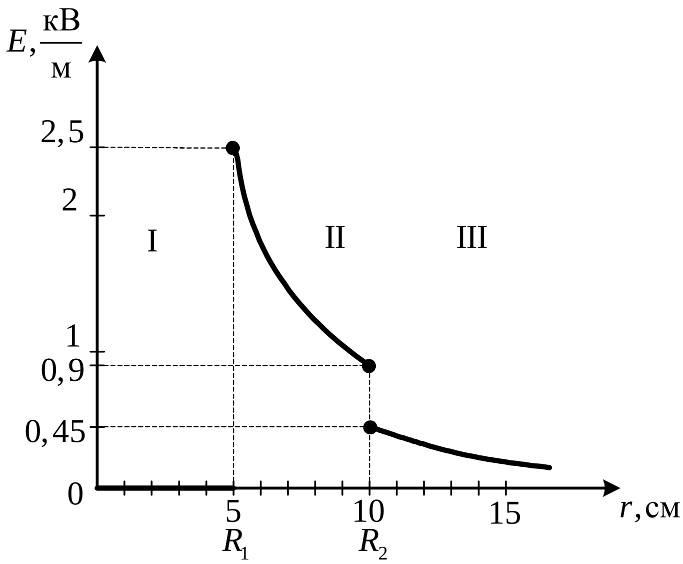
Построим график $E(r)$ (см. рис.).

В области I ($r_1 < R_1$) $E = 0$.

В области II ($R_1 \le r < R_2$) $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$.

В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2{,}5\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}.$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0{,}9\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}.$



В области III ($r > R_2$) E_3 (r) изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{(q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 0,45\frac{кВ}{м}.$$

Таким образом, функция E (r) в точках $r = R_1$, $r = R_2$ терпит разрыв.

Ответ: $E_1 = 0$ В/м; $E_2 = 1{,}11\frac{кВ}{м}$; $E_3 = 200$ В/м; согласно зависимости E (r) в областях I, II, III напряженность принимает значения $E_1 = 0$; $2,5\ \frac{кВ}{м} > E_2 > 0,9\ \frac{кВ}{м}$; $0,45\ \frac{кВ}{м} > E_3 > 0$.

ЗАДАЧА 3.7

Электрическое поле создано двумя одинаковыми параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая. Пластины расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд q_1 = –50 нКл, на другой – заряд q_2 = +150 нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.

Дано:

S = 0,015 м^2

q_1 = –5·10^{-8} Кл

q_2 = 15·10^{-8} Кл

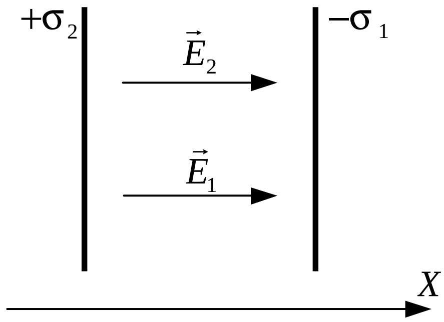
E – ?

Решение

Поскольку по условию задачи расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров, то пластины можно считать бесконечно протяженными и равномерно заряженными. Поверхностные плотности зарядов на них соответственно равны $\sigma_1 = \frac{q_1}{S}$ и $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$.

Напряженность поля, создаваемую каждой пластиной, определим по формуле

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$



Тогда

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

На рисунке показаны направления силовых линий поля с учетом знака зарядов на пластинах. По принципу суперпозиции результирующая напряженность между пластинами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

В проекции на ось X

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(q_1 + q_2\right);$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E = \frac{1}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}015}\left(5\cdot 10^{-8} + 15\cdot 10^{-8}\right) = 75\cdot 10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 750\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 750\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.8

Определить напряженность поля между двумя бесконечными пластинами и вне их, если площадь каждой пластины S, их заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Рассмотреть также случай, когда заряд второй пластины отрицательный.

Дано:	**Решение**
S	В любой точке пространства (между пластинами и вне их), согласно принципу суперпозиции,
q_1	$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i.$$
$q_2 < q_1$	
$-q_2$	Поэтому
E – ?	$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$; $\vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$; $\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности полей первой и второй пластины (рис. 1).

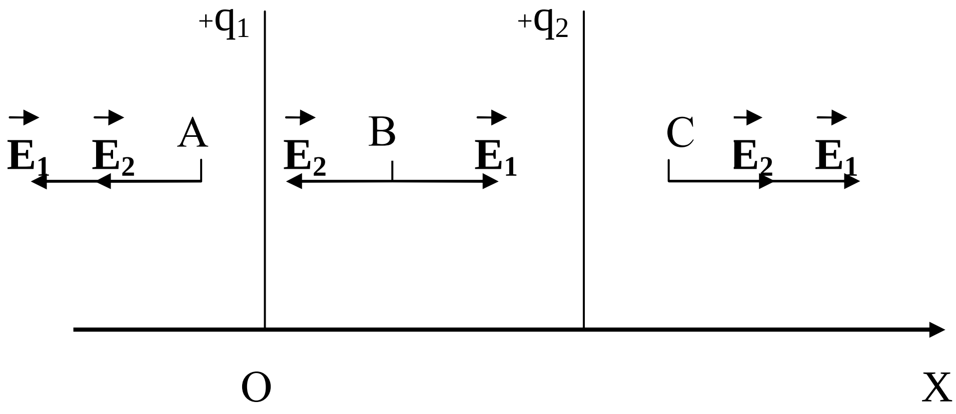


Рис. 1

Направим координатную ось OX перпендикулярно к пластинам. Проецируя векторы напряженности на эту ось, получим:

$$E_A = -(E_1 + E_2),\quad E_B = E_1 - E_2,\quad E_C = E_1 + E_2.$$

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями до рассматриваемых точек, то

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S};$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Следовательно, для первого случая

$$E_A = \frac{-(q_1 + q_2)}{2\varepsilon_0\varepsilon S};\quad E_B = \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S};\quad E_C = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Построим график изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин (рис. 2).

Когда заряд второй пластины отрицательный $\sigma_2 < 0$ (рис. 3), напряженность поля между пластинами $E_B = \dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$, вне пластин $E = \pm\dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$.

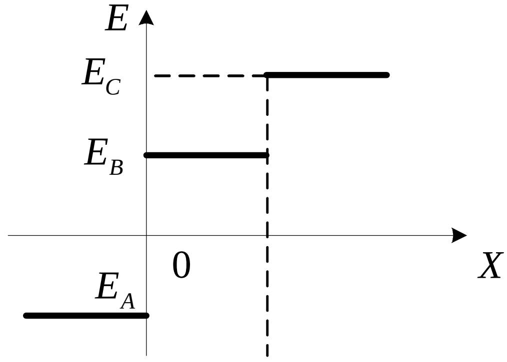


Рис. 2

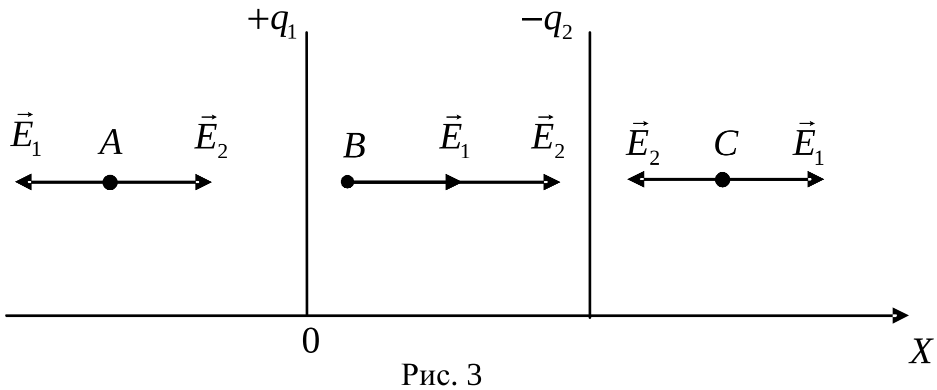


Рис. 3

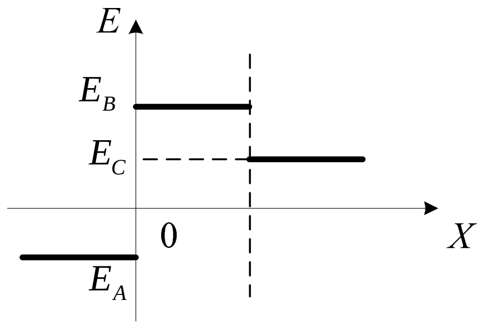


Рис. 4. График изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин

ЗАДАЧА 3.9

Две круглые параллельные пластины находятся на малом (по сравнению с радиусом) расстоянии друг от друга. Пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ_1 = 10 нКл/м^2 и σ_2 = –30 нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 2 м^2.

Дано:	Решение
$\sigma_1 = 10^{-8}$ Кл/м^2 $\sigma_2 = -3 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2 $S = 2$ м^2 F – ?	Так как расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами самих пластин, то их можно принять за бесконечно протяженные плоскости. Напряженность E такой плоскости определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

В нашем случае $\varepsilon = 1$ (воздух). Пусть плоскость с поверхностной плотностью σ_1 создает поле напряженностью $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$. В это поле помещаем вторую пластину с поверхностной плотностью $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$. Тогда на вторую пластину действует сила Кулона (с учетом знаков это будет сила притяжения)

$$F = q_2 E_1,$$

где $q_2 = \sigma_2 S$.

Подставив E_1 и q_2, получим

$$F = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\sigma_2 S = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\varepsilon_0}S;$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} =$$

$$= \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 2}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 33{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{Н} = 33{,}8\ \text{мкН}.$$

Ответ: $F = 33{,}8$ мкН.

ЗАДАЧА 3.10

Металлическое кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q, при котором натяжение проволоки, из которой сделано кольцо, равно T. Какой заряд Q нужно поместить в центр кольца, чтобы оно разорвалось? Проволока выдерживает максимальное натяжение T_0.

Дано:	**Решение**
R q T T_0	Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной Δl. Полагая, что электрический заряд кольца q распределен по всей его длине равномерно, найдем заряд Δq на выделенном элементе кольца.
Q – ?	Так как на единицу длины приходится заряд

$$\tau = \frac{q}{2\pi R},$$

то на элементе кольца длиной Δl будет находиться заряд

$$\Delta q = \tau \Delta l = \frac{q \Delta l}{2\pi R},$$

поскольку по определению $\tau = \dfrac{dq}{dl} = \dfrac{\Delta q}{\Delta l}$.

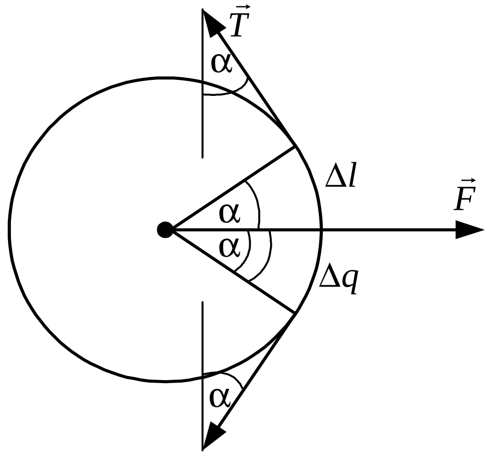


Рис. 1

Если длину Δl выразить через радиус кольца R и центральный угол α (рис. 1), т.е. $\Delta l = 2R\alpha$, то заряд Δq можно представить в виде

$$\Delta q = \frac{q\alpha}{\pi}.$$

На заряд Δq со стороны остальных зарядов кольца будет действовать кулоновская сила $\vec{F}$, направленная по радиусу и стремящаяся разорвать кольцо. Кроме силы $\vec{F}$ на элемент кольца будут действовать со стороны соседних участков силы натяжения $\vec{T}$. Очевидно, что при этом выполняется равенство

$$F = 2T \sin\alpha.$$

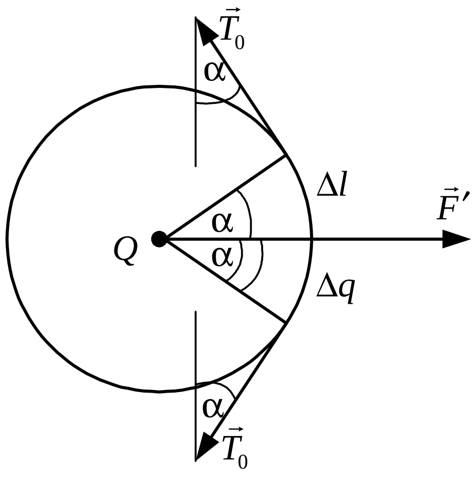


Рис. 2

Если в центр кольца поместить заряд Q, то на выделенный элемент кольца будет действовать сила (рис. 2)

$$\vec{F}' = \vec{F} + \Delta\vec{F},$$

где $\Delta F = \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ – сила электростатического взаимодействия Δq, Q и силы натяжения $\vec{T}_0$.

При этом для того, чтобы кольцо разорвалось, должно выполняться неравенство $2T_0 \sin\alpha < F'$, где $F' = F + \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ или $F' = 2T\sin\alpha + \dfrac{\Delta q Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Так как угол α мал, то можно предположить, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

Следовательно, с учетом выражения для Δq

$$2T_0\alpha < 2T\alpha + \frac{qQ\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$Q > \frac{8\pi^2\varepsilon_0\left(T_0 - T\right)R^2}{q}.$$

Ответ: $Q > \dfrac{8\pi^2\varepsilon_0\left(T_0 - T\right)R^2}{q}$.

ЗАДАЧА 3.11

Эбонитовый полый шар равномерно заряжен по объему с плотностью ρ = 100 нКл/м^3. Внутренний радиус R_1 шара равен 5 см, а наружный R_2 = 10 см. Вычислить напряженность $\vec{E}$ и смещение $\vec{D}$ электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояниях r_1 = 3 см, r_2 = 6 см, r_3 = 12 см. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

Дано:

ρ = 10^{-7} Кл/м^3

R_1 = 0,05 м

R_2 = 0,1 м

r_1 = 0,03 м

r_2 = 0,06 м

r_3 = 0,12 м

ε_1 = 1

ε_2 = 3

ε_3 = 1

D_1 – ? D_2 – ? D_3 – ?

E_1 – ? E_2 – ? E_3 – ?

Решение

Разобьем объем полого шара на три области (см. рис.) и рассчитаем для каждой из них D и E. Для расчета используем теорему Гаусса в интегральной форме

$$\oint_S D_n dS = \sum q_i \qquad (1)$$

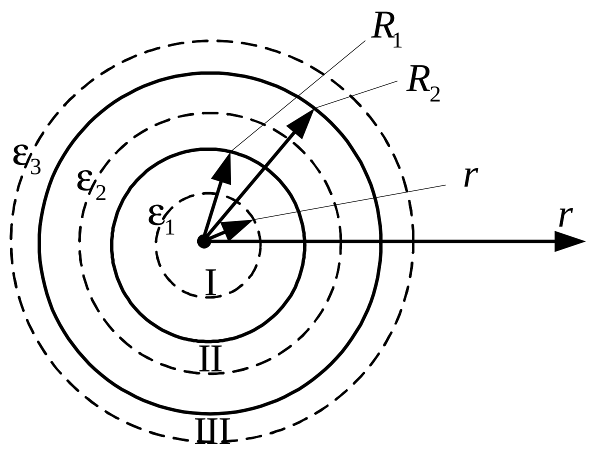
и связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

Область I (ε_1 = 1): суммарный заряд $\sum q_i$ в этой области равен нулю, т.к. шар полый ($r < R_1$). Поэтому $D_1 = 0$ и $E_1 = 0$.

Область II (ε_2 = 3): проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса r (r – текущая координата), $R_2 > r > R_1$, и вычислим по формуле (1) поток вектора $\vec{D}_2$ сквозь эту поверхность:

$$\oint\limits_S D_n dS = \int\limits_V \rho dV ,$$

где $\rho = \dfrac{q}{V}$.



В итоге получим:

$$D_2 4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right);$$

$$D_2 = \rho\frac{1}{3r^2}\left(r^3 - R_1^3\right) = \frac{\rho r}{3}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^3\right].$$

Тогда

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^3\right].$$

Подставив $r = r_2 = 0{,}06$ м, вычислим E_2 и D_2:

$$D_2 = \frac{10^{-7}\cdot 0{,}06}{3}\left[1 - \left(\frac{0{,}05}{0{,}06}\right)^3\right] = 840\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_2 = \frac{10^{-7}\cdot 0{,}06}{3\cdot 3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left[1 - \left(\frac{0{,}05}{0{,}06}\right)^3\right] = 31{,}6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Область III (ε_3 = 1): проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса $r > R_2$ и воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oint\limits_S D_n dS = \rho\left(V_2 - V_1\right);$$

$$D_3 4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right);$$

$$D = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{4\pi r^2} = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2};$$

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2 \varepsilon_3}.$$

Вычислим D_3 и E_3 при $r = r_3 = 0{,}12$ м:

$$D_3 = \frac{10^{-7}\left(0{,}1^3 - 0{,}05^3\right)}{3 \cdot 0{,}12^2} = 2{,}02 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 2{,}02\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^2};$$

$$E_3 = \frac{10^{-7}\left(0{,}1^3 - 0{,}05^3\right)}{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}12^2 \cdot 1} = 228\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

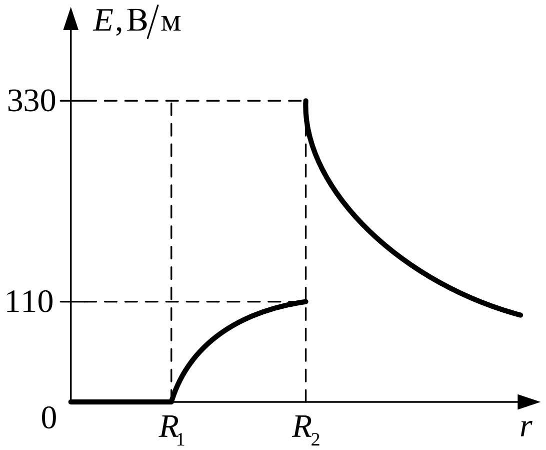
Для построения графиков подсчитаем D_2, E_2 и E_3 на границе $r = R_2$:

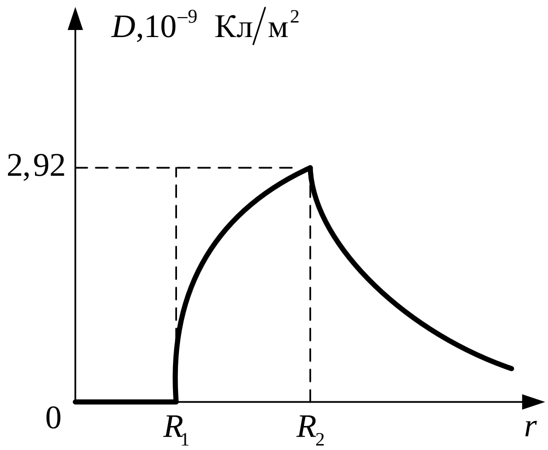
$$E_2 = \frac{\rho R_2}{3\varepsilon_0\varepsilon_2}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]; \quad [E_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \text{м} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad E_2 = 110\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$D_2 = \frac{\rho R_2}{3}\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]; \quad [D_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\text{м} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad D_2 = 2{,}92 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 R_2^2}; \quad [E_3] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{м}^2 \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad E_3 = 330\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

На рисунках представлены графики зависимости напряженности и смещения электрического поля заряженного шара от величины r.





Ответ: $D_1 = 0$; $E_1 = 0$; $D_2 = 840 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $E_2 = 31{,}6\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$; $D_3 = 2{,}02 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $E_3 = 228\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.12

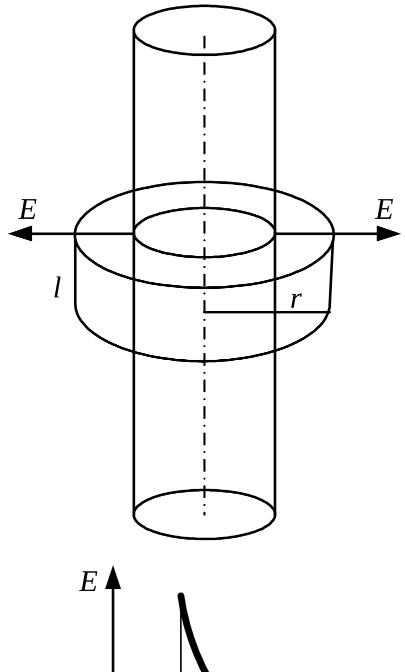
Электростатическое поле создается бесконечно длинным цилиндром R = 7 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью τ = 15 нКл/м. Определить: 1) напряженность E поля в точках, лежащих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 = 5$ мм, $r_2 = 1$ см; 2) разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях $r_3 = 1$ см и $r_4 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано:	**Решение**
$R = 7\cdot10^{-3}$ м $\tau = 15\cdot10^{-9}$ Кл/м $r_1 = 5\cdot10^{-2}$ м $r_2 = 10^{-2}$ м $r_3 = 10^{-2}$ м $r_4 = 2\cdot10^{-2}$ м	Воспользуемся теоремой Гаусса $$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i .$$
1) E_1, E_2 – ? 2) $(\varphi_3 - \varphi_4)$ – ?	Возьмем в качестве замкнутой поверхности коаксиальный заряженный цилиндр радиусом r и высотой l (см. рис.). Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$. Следовательно, для r_1: $E_1 = 0$.

Поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны вектору напряженности).

Поток через боковую поверхность

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2\pi r l E ,$$



а по теореме Гаусса $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tau l$,

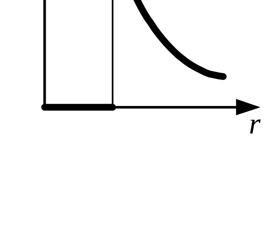
откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}; \quad E_2 = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_2} .$$

Следовательно,

$$[E_2] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{15\cdot10^{-9}\cdot 2\cdot 9\cdot10^{9}}{10^{-2}} = 27\cdot10^{3}\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 27\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}} .$$



Так как $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, то для поля с осевой симметрией можно записать:

$$d\varphi = -E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром, получаем:

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{R+r_3}^{R+r_4} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_4}{R+r_3};$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_4}{R+r_3};$$

$$[\varphi_3 - \varphi_4] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В};$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = 2\cdot 15\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{9}\ln\frac{2,7}{1,7} = 125\ \text{В}.$$

Ответ: 1) $E_1 = 0$; $E_2 = 27\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 125\ \text{В}$.

ЗАДАЧА 3.13

Точечный заряд q = 100 нКл находится на малом расстоянии от большой металлической пластины напротив ее середины. Найти силу F, действующую на заряд со стороны пластины. Пластина несет равномерно распределенный по поверхности заряд σ = 10 нКл/м^2.

Дано:
$q = 10^{-7}$ Кл
$\sigma = 10^{-8}$ Кл/м^2
F – ?

Решение

По условию задачи пластина большая и находится на малом расстоянии от заряда. Поэтому ее можно принять за бесконечно протяженную плоскость, для которой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon = 1).$$

Сила, действующая на заряд,

$$F = Eq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} q;$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8}\cdot 10^{-7}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 56{,}5\cdot 10^{-6} H = 56{,}5\ \text{мкН}.$$

Ответ: $F = 56{,}5$ мкН.

ЗАДАЧА 3.14

Тонкая, бесконечно длинная нить с равномерно распределенным по длине зарядом плотностью τ = 0,2 мкКл/м параллельна безграничной проводящей плоскости с поверхностной плотностью заряда σ = 2 нКл/см^2. С какой силой электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на каждый метр заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле?

Дано:	Решение
$\tau = 0{,}2\cdot 10^{-6}$ Кл/м $\sigma = 2\cdot 10^{-5}$ Кл/м^2	Напряженность электрического поля, созданного бесконечной плоскостью,
$\frac{F}{l}$ – ?	$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon = 1$ – диэлектрическая проницаемость среды.

Сила, с которой плоскость действует на нить,

$$F = Fq_H,$$

где $q_H = \tau l$ – заряд нити, l – длина нити.

Следовательно, сила, действующая на каждый метр длины заряженной бесконечно длинной нити,

$$\frac{F}{l} = \frac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0};$$

$$\left[\frac{F}{l}\right] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^2\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\frac{F}{l} = \frac{2\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 226\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 226\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\frac{F}{l} = 226\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.15

Электрическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью τ = 1 нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния r_1 = 1,5 см до r_2 = 1 см?

Дано:

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$\tau = 10^{-7}$ Кл/м
$\upsilon_1 = 0$
$r_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 10^{-2}$ м

υ_2 – ?

Решение

Элементарная работа по перемещению заряда в электрическом поле

$$dA = Fdr,$$

где F – сила, действующая на заряд; dr – перемещение заряда вдоль силовой линии.

Силу, действующую на заряд, можно определить через напряженность поля:

$$F = Eq,$$

где E – напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью;

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Следовательно, $dA = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$ и, интегрируя, получим

$$A = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С другой стороны, работа приводит к изменению кинетической энергии:

$$A = E_{K_2} - E_{K_1}.$$

Так как начальная скорость была равна нулю, то

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2e\tau}{2\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{r_2}{r_1}};$$

$$[\upsilon_2] = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\Phi\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{кг}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-7}\ln\dfrac{10^{-2}}{1{,}5\cdot 10^{-2}}}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{1{,}6\ln 1{,}5}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 9{,}1}\cdot 10^{17}} = 16\cdot 10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon_2 = 16\cdot 10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.16

Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определить числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии r = 10 см от заряда потенциал в точке A φ_A = 100 В.

Дано:	**Решение**
r = 0,1 м φ_A = 100 В	Связь напряженности и градиента потенциала:
$\mathrm{grad}\,\varphi$ – ?	$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$.

Знак «–» говорит о том, что $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала (от заряда).

Потенциал и напряженность точечного заряда в точке A

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r};\quad E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2};\quad E_A = \frac{\varphi_A}{r};$$

$$\left|\mathrm{grad}\,\varphi\right| = \frac{\varphi_A}{r};\quad \left[\mathrm{grad}\,\varphi\right] = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

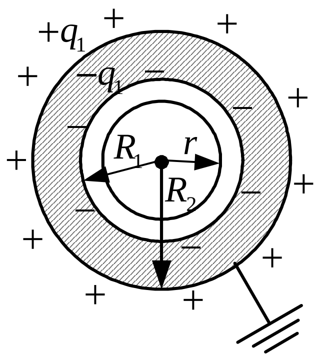
Ответ: $\left|\mathrm{grad}\,\varphi\right| = \frac{100}{0{,}1} = 10^{3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}} = 1\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$ и направлен к заряду.

ЗАДАЧА 3.17

Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центре незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2 (см. рис.). Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если: 1) слой изготовлен из металла; 2) металлический слой заземлен; 3) слой изготовлен из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε.

Дано:	**Решение**
r	
q	
R_1	
R_2	
$E, \varphi - ?$	

1. При помещении проводника в электрическое поле на поверхности проводника появляются индуцированные заряды, распределенные таким образом, что результирующее поле внутри проводника равно нулю. На внутренней поверхности металлического слоя появится индуцированный заряд $-q_1$, на внешней поверхности возникнет такой же заряд противоположного знака $+q_1$. В результате получаются три концентрические заряженные сферы, радиусы которых r, R_1 и R_2, с зарядами $q, -q_1$ и $+q_1$ соответственно.



В пространстве между второй и третьей сферой напряженность электрического поля равна нулю, поэтому при $R_1 \le x \le R_2$

$$k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда

$$q_1 = q.$$

Здесь учтено, что вторая сфера создает снаружи такое поле, как если бы ее заряд находился в центре, а поле третьей сферы в ее внутренней области отсутствует.

Тогда внутри шарика ($0 \le x \le r$)

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{R_1} + k\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Между шариком и слоем $(r \le x \le R_1)$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{R_1} + k\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Внутри шарового слоя $(R_1 \le x \le R_2)$

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} + k\frac{q}{R_2} = k\frac{q}{R_2}.$$

За пределами слоя $(R_2 \le x < \infty)$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

2. У заземленного проводника потенциал равен нулю и заряды на поверхностях сферического слоя неодинаковые: $-q_1$ и $+q_2$. Соотношение между зарядами можно определить из условия, что результирующий потенциал на поверхности слоя ($x = R_2$) будет равен

$$\varphi = k\frac{q}{R_2} - k\frac{q_1}{R_2} + k\frac{q_2}{R_2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$q_1 - q_2 = q. \tag{1}$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то

$$E = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0.$$

Откуда

$$q_1 = q_2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $q_2 = 0$, т.е. на внешней поверхности заземленного слоя заряда нет, а на внутренней поверхности находится заряд $q_1 = -q$.

Таким образом, задача свелась к нахождению поля двух заряженных концентрических сфер радиусами r и R_1, на которых находятся заряды $+q$ и $-q$. При расчете поля этой системы можно воспользоваться результатами расчетов п. 1, при условии, что во всех полученных формулах заряд третьей сферы равен нулю.

Получаем:

внутри шарика ($0 \le x \le r$)

$$E = 0; \quad \varphi = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right);$$

между шариком и слоем $\left(r \le x \le R_1\right)$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right);$$

при $R_1 \le x < \infty$ поле отсутствует.

3. Если сферический слой сделан из диэлектрика, то при внесении его в поле заряженного шарика произойдет поляризация слоя и на внутренней и внешней поверхностях появятся связанные заряды $-q_{св}$ и $+q_{св}$. Электрическое поле в диэлектрике ослаблено в ε раз, поэтому напряженность электрического поля внутри сферического слоя в точке, удаленной от центра шарика на расстояние x, с одной стороны, будет равна $E = k\dfrac{q}{\varepsilon x^2}$, а с другой, ее можно найти как результат наложения поля шарика и поля связанных зарядов внутренней поверхности оболочки: $E = k\dfrac{q}{x^2} - k\dfrac{q_{св}}{x^2}$.

Приравнивая оба выражения для E, найдем модуль связанных зарядов на поверхности диэлектрика:

$$q_{св} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$$

После этого задача сводится к нахождению поля трех концентрических сфер радиусами r, R_1 и R_2, на которых находятся заряды q, $-\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$, и $+\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$.

Аналогично результатам п. 1 находим:

внутри шарика ($0 \le x \le r$):

$$E = 0; \quad \varphi = kq\left[\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

между шариком и слоем $(r \le x \le R_1)$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

при $R_1 \le x \le R_2$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\right];$$

при $R_2 \le x < \infty$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

Ответ:

1) $E=0$; $\varphi=kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$; $(0\le x\le r)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

$E=0$; $\varphi=k\frac{q}{R_2}$; $\left(R_1\le x\le R_2\right)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=k\frac{q}{x}$; $\left(R_2\le x<\infty\right)$;

2) $E=0$; $\varphi=kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)$; $(0\le x\le r)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

при $R_1\le x<\infty$ поле отсутствует;

3) $E=0$; $\varphi=kq\left[\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $(0\le x\le r)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $\left(r\le x\le R_1\right)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$; $\left(R_1\le x\le R_2\right)$;

$E=k\frac{q}{x^2}$; $\varphi=k\frac{q}{x}$; $\left(R_2\le x\le\infty\right)$.

ЗАДАЧА 3.18

Электрическое поле создано бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью σ = 400 нКл/м^2, и бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью τ = 100 нКл/м. На расстоянии r = 10 см от нити находится точечный заряд q = 10 нКл. Определить силу, действующую на заряд, и ее направление, если заряд и нить лежат в плоскости, параллельной заряженной плоскости.

Дано:	**Решение**
$\sigma = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2 $\tau = 10^{-7}$ Кл/м $r = 0{,}1$ м $q = 10^{-8}$ Кл	Сила, действующая на заряд, помещенный в поле, $$F = Eq, \qquad (1)$$
F – ? α – ?	где E – напряженность поля в точке, в которой находится заряд q.

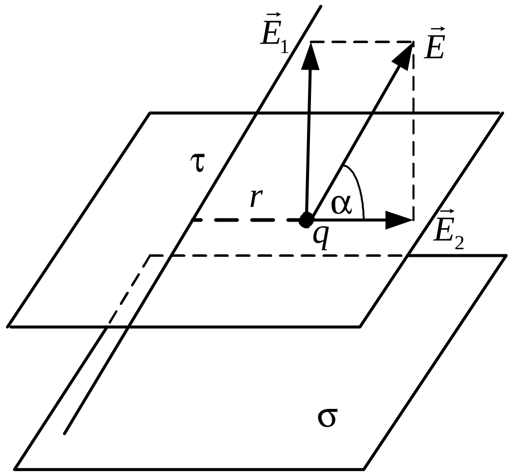
Определим напряженность E поля, создаваемого, по условию задачи, бесконечной заряженной плоскостью и бесконечной заряженной нитью.

Поле, создаваемое бесконечной заряженной плоскостью, однородно, и его напряженность в любой точке

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Поле, создаваемое бесконечной заряженной линией, неоднородно. Его напряженность зависит от расстояния и определяется по формуле

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3)$$



Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряженность поля в точке, где находится заряд q, равна векторной сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ (см. рис.):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Так как векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Подставив выражения E_1 и E_2 по формулам (2) и (3) в это равенство, получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Теперь найдем силу F, действующую на заряд, подставив выражение E в формулу (1):

$$F = Eq = \frac{q}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}};$$

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4} + \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2} =$$

$$= \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н};$$

$$F = \frac{10^{-8}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\left(4\cdot 10^{-7}\right)^2 + \frac{\left(10^{-7}\right)^2}{(3{,}14)^2(0{,}1)^2}} = 289\cdot 10^{-6} H = 289\ \text{мкН}.$$

Направление силы F, действующей на положительный заряд q, совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}$ поля. Направление вектора $\vec{E}$ задается углом α к заряженной плоскости.

Из рисунка следует, что

$$\text{tg}\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \pi r\frac{\sigma}{\tau}.$$

Откуда

$$\alpha = \text{arctg}\left(\pi r\frac{\sigma}{\tau}\right);$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(3{,}14\cdot 0{,}1\frac{4\cdot 10^{-7}}{10^{-7}}\right);$$

$$\alpha = 31{,}5°.$$

Ответ: $F = 289$ мкН, $\alpha = 31{,}5°$.

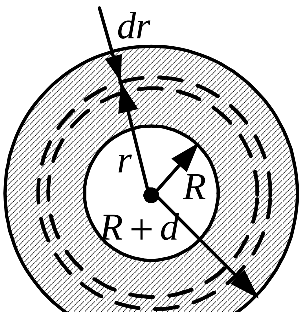
ЗАДАЧА 3.19

Металлический шар радиусом R = 5 см с общим зарядом q = 10 нКл окружен слоем эбонита толщиной d = 3 см. Определить энергию W электростатического поля, заключенного в слое диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость эбонита $\varepsilon = 3$.

Дано:	**Решение**
$R = 5\cdot10^{-2}$ м $q = 10^{-8}$ Кл $d = 3\cdot10^{-2}$ м $\varepsilon = 3$	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара. Энергия в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом dV (см. рис.)
W – ?	

$$dW = \omega dV, \qquad (1)$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ (r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина); $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ – объемная плотность энергии (E – напряженность электростатического поля).



Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$dW = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr.$$

Энергия, заключенная в слое диэлектрика,

$$W = \int dW = \int\limits_R^{R+d} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right);$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Ф}}\left(\frac{1}{\text{м}} - \frac{1}{\text{м}}\right) = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \text{Кл}\cdot\text{В} = \text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{\left(10^{-8}\right)^2}{8\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot3}\left(\frac{1}{5\cdot10^{-2}} - \frac{1}{5\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-2}}\right) = 1{,}12\cdot10^{-6}\ \text{Дж} = 1{,}12\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $W = 1{,}12$ мкДж.

ЗАДАЧА 3.20

Сплошной эбонитовый шар $(\varepsilon = 3)$ радиусом R = 5 см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ = 5 нКл/м^3. Определить величину энергии электростатического поля, заключенной внутри шара.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 3$ $R = 5\cdot 10^{-2}$ м $\rho = 5\cdot 10^{-9}$ Кл/м^3	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.
W – ?	

В качестве элементарного объема выберем сферический слой внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ (см. рис.). Его объем $dV = 4\pi r^2 dr$.

Энергия в этом сферическом слое

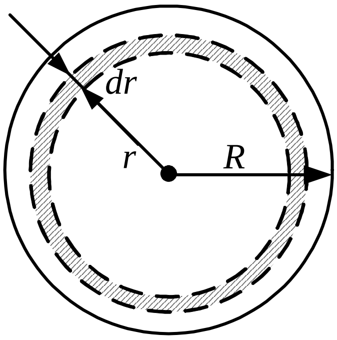
$$dW = \omega dV, \qquad (1)$$

где $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ – объемная плотность энергии (E – напряженность электростатического поля).

Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара) найдем согласно теореме Гаусса для поля в диэлектрике.

В данном случае внутрь поверхности радиусом r попадает заряд

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$



Тогда

$$D \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \text{откуда} \quad D = \frac{\rho r}{3}.$$

Поскольку $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, напряженность поля

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$dW = \frac{4\pi \rho^2}{18\varepsilon_0 \varepsilon} r^4 dr.$$

Тогда искомая энергия, заключенная внутри шара,

$$W = \int dW = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0\varepsilon} R^5;$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^5}{\text{м}^6 \cdot \Phi} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}^6 \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^6} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \left(5 \cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^5}{45 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = 4{,}11 \cdot 10^{-14}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $W = 4{,}11 \cdot 10^{-14}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.21

Сплошной шар из диэлектрика радиусом R = 5 см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ = 5 нКл/м^3. Определить величину энергии электростатического поля, заключенной в окружающем шар пространстве.

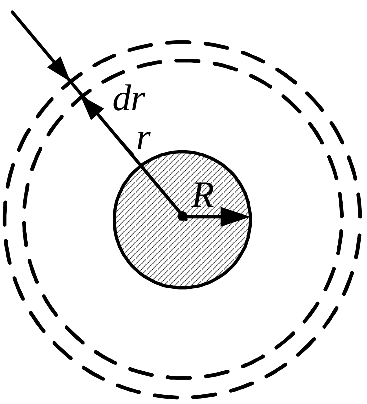
Дано:	Решение
$R = 5 \cdot 10^{-2}$ м $\rho = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^3	Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.
W – ?	

Энергия в элементарном сферическом слое (он выбран за пределами диэлектрика, где следует определить энергию) объемом dV (см. рис.)

$$dW = \omega dV, \qquad (1)$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ (r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина); $\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ ($\varepsilon = 1$ – поле в вакууме; E – напряженность электростатического поля).

Напряженность E найдем по теореме Гаусса для поля в вакууме, причем в качестве замкнутой поверхности мысленно выберем сферу радиусом r (см. рис.).



В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд шара, создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Подставив найденное выражение в формулу (1), получим

$$dW = \frac{2\pi}{9} \frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0 r^2} dr.$$

Энергия, заключенная в окружающем шар пространстве,

$$W=\int dW=\int_R^{\infty}\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2R^6}{\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2R^6}{\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^5;$$

$$[W]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}^5}{\text{м}^3\cdot\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{2\cdot 3{,}14}{9}\frac{\left(5\cdot10^{-9}\right)^2}{8{,}85\cdot10^{-12}}\left(5\cdot10^{-2}\right)^5=6{,}16\cdot10^{-13}\text{Дж}.$$

Ответ: $W=6{,}16\cdot10^{-13}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.22

На пластины плоского конденсатора с диэлектриком, расстояние между которыми d = 4 мм, подана разность потенциалов U_1 = 600 В. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то напряжение на пластинах возрастет в три раза. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость χ диэлектрика.

Дано:
d = $4\cdot10^{-3}$ м
U_1 = 600 В
U_2/U_1 = 3

$\sigma_{св}$, χ – ?

Решение

Напряженность поля в конденсаторе первоначально была (при наличии диэлектрика)

$$E_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике.

С другой стороны,

$$E_1=\frac{U_1}{d}.$$

Тогда

$$U_1=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

По формуле

$$\sigma_{св}=-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon - 1 \right)}.$$

После отключения источника и удаления диэлектрика разность потенциалов на пластинах изменилась (по условию возросла):

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U_2}{d}.$$

Отсюда

$$U_2 = \frac{\sigma_{св}\varepsilon}{\varepsilon - 1}\frac{d}{\varepsilon_0}.$$

Отношение

$$\frac{U_2}{U_1} = \varepsilon = 3.$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем через напряжение U_1:

$$\sigma_{св} = \frac{\varepsilon_0 U_1 \left(\varepsilon - 1 \right)}{d};$$

$$\left[\sigma_{св} \right] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{св} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 600 \left(3 - 1 \right)}{4 \cdot 10^{-3}} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Диэлектрическая восприимчивость χ диэлектрика связана с $\sigma_{св}$ формулой

$$\sigma_{св} = \varepsilon_0 \chi E_1 = \varepsilon_0 \chi \frac{U_1}{d},$$

откуда

$$\chi = \frac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0 U_1};$$

$$\left[\chi \right] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{В}} = 1;$$

$$\chi = \frac{2{,}65 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 600} = 2.$$

Ответ: $\sigma_{св} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\chi = 2$.

ЗАДАЧА 3.23

Пластины плоского конденсатора площадью S = 200 см^2 притягиваются с силой F_1 = 9,84 мН. Между пластинами конденсатора находится точечный заряд q = 30 мКл. Определить, с какой силой F_2 поле конденсатора действует на заряд.

Дано:
S = 0,02 м^2
F_1 = 9,84·10^{-3} Н
q = 3·10^{-2} Кл
F_2 – ?

Решение

Сила F_1, с которой притягиваются пластины,

$$F_1 = E_1 q_2,$$

где $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ – напряженность поля одной из пластин, а $q_2 = \sigma S$ – заряд второй пластины.

Тогда

$$F_1 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}. \quad (1)$$

Отсюда можно определить поверхностную плотность заряда σ на пластине конденсатора:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 F_1}{S}}. \quad (2)$$

Сила F_2, с которой поле конденсатора действует на заряд q,

$$F_2 = Eq = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q, \quad (3)$$

где E – напряженность поля конденсатора, определяемая по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (\varepsilon = 1).$$

Подставляя выражение (2) в (3), получим

$$F_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q = q\sqrt{\frac{2F_1}{\varepsilon_0 S}};$$

$$[F] = Кл\sqrt{\frac{Н \cdot м}{Ф \cdot м^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{В}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{В}}{\text{м}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\text{Н}^2} = \text{Н};$$

$$F_2 = 3 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}84 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}02}} = 10^{-4}\ \text{Н} = 10\ \text{мН}.$$

Ответ: $F_2 = 10$ мН.

ЗАДАЧА 3.24

Емкость конденсатора C_1 = 0,4 мкФ, когда он заполнен воздухом. Конденсатор заряжается до разности потенциалов U = 500 В. Определить изменение энергии конденсатора ΔW и работу сил электрического поля при заполнении конденсатора трансформаторным маслом ($\varepsilon = 2{,}5$) для случаев: 1) конденсатор отключен от источника; 2) конденсатор соединен с источником.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 2{,}5$ C_1 = 0,4·10^{-6} Ф U = 500 В	Работу сил электрического поля можно определить, используя закон сохранения энергии:
ΔW_1, ΔW_2 – ? A_1, A_2 – ?	

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -A + A_u, \quad (1)$$

где W_1, W_2 – энергии конденсатора до и после заполнения его диэлектриком; A – работа сил поля; A_u – работа, совершаемая источником.

При заполнении конденсатора маслом силы поля совершают в обоих рассматриваемых случаях положительную работу: поляризуют диэлектрик и втягивают его в поле с большей напряженностью, т.е. работа сил поля $A > 0$. Поэтому энергия конденсатора уменьшается, если он отключен от источника. При включенном источнике напряжение на пластинах конденсатора не изменяется и при заполнении маслом заряд конденсатора возрастет, т.е. источник, заряжая конденсатор, совершает положительную работу.

В первом случае при $q = \text{const}$ изменение энергии

$$\Delta W_1 = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon C_1} - \frac{1}{C_1}\right) = -A_1, \ \text{т.к.} \ A_u = 0.$$

Поскольку $q = C_1 U$, то $\Delta W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$;

$$[\Delta W] = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В}} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$\Delta W_1 = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2}{2}\left(\frac{1}{2,5} - 1\right) = -3,6 \cdot 10^{-2} \text{ Дж};$$

$$A_1 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Во втором случае, когда конденсатор соединен с источником, $U = \text{const}$ и изменение энергии

$$\Delta W = \frac{U^2}{2}(C_2 - C_1) = \frac{C_1 U^2}{2}(\varepsilon - 1), \tag{2}$$

где $C_2 = \varepsilon C_1$;

$$\Delta W_2 = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2}{2}(2,5 - 1) = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Работа сил поля A_2, согласно уравнению (1),

$$A_2 = A_u - \Delta W_2, \tag{3}$$

где

$$A_u = \Delta q U = U^2 (C_2 - C_1). \tag{4}$$

Из уравнений (2) – (4) получим:

$$A_2 = C_1 U^2 \frac{(\varepsilon - 1)}{2};$$

$$A_2 = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 \frac{(2,5 - 1)}{2} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta W_1 = -3,6 \cdot 10^{-2}$ Дж; $A_1 = 3,6 \cdot 10^{-2}$ Дж; $\Delta W_2 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ Дж; $A_2 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.25

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполняется диэлектриком ($\varepsilon = 7$). При присоединении пластин к источнику напряжения напряженность электрического поля в конденсаторе E = 0,4·10^6 В/м. Найти: 1) давление пластин на диэлектрик; 2) электрическую индукцию в диэлектрике; 3) поверхностную плотность связанных зарядов; 4) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 5) объемную плотность энергии электрического поля в диэлектрике.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 7$	1. Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора определяется по формуле
E = 0,4·10^6 В/м	
$P, D, \sigma_{св}, \sigma_D, \omega$ – ?	

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Тогда давление пластин на диэлектрик

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (1)$$

Выразив из формулы для напряженности поля, образованного двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями, $\left(E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}\right)$ поверхностную плотность зарядов σ и подставив в уравнение (1), получим

$$P = \frac{E^2 \varepsilon_0 \varepsilon}{2};$$

$$[P] = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Ф}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^3} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{\left(0,4 \cdot 10^6\right)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7}{2} = 5 \text{ Па}.$$

2. Электрическую индукцию D вычислим по формуле

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E;$$

$$[D] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad D = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 0,4 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

3. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ в однородном диэлектрике связана с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника равенством

$$\sigma_{св} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma.$$

Тогда

$$\sigma_{св} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E;$$

$$\sigma_{св} = (7-1)\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}4\cdot 10^{6} = 21{,}2\cdot 10^{6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

4. Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора

$$\sigma_D = D; \quad \sigma_D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

5. Объемная плотность энергии электрического поля в диэлектрике согласно формуле энергии электрического поля в объеме V $\left(W = \int\limits_V \omega dV\right)$ равна

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{ED}{2}; \quad [\omega] = \frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega = \frac{0{,}4\cdot 10^{6}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}}{2} = 5\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $P = 5$ Па; $D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\sigma_{св} = 21{,}2\cdot 10^{6}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\sigma_D = 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\omega = 5\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

ЗАДАЧА 3.26

Определить объемную плотность энергии ω электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в точке, находящейся: 1) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом R = 1 см; 2) на расстоянии $x = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре σ = 16,7 мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити τ = 167 нКл/м.

Дано	**Решение**
$R = 0{,}01$ м $\varepsilon = 2$ $x = 0{,}02$ м $\sigma = 16{,}7\cdot10^{-6}$ Кл/м^2 $\tau = 167\cdot10^{-9}$ Кл/м	1. Электрическое поле, создаваемое заряженным шаром, подобно полю точечного заряда, который поместили в центр шара:
$\omega_ш$, ω – ?	$$E_ш = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_ш}{(x+R)^2},$$ где $q_ш = \sigma S_ш = \sigma 4\pi R^2$.

Таким образом,

$$E_ш = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x+R)^2}.$$

Электрическое смещение (индукция)

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E.$$

Объемная плотность энергии выражается так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\omega_ш = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon_0\varepsilon(x+R)^4};$$

$$[\omega_ш] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{м}}{\text{м}^4\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}^4} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^3\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^3} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega_ш = \frac{\left(16{,}7\cdot10^{-6}\right)^2\cdot(0{,}01)^4}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2(0{,}02+0{,}01)^4} = 9{,}73\cdot10^{-2}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

2. Напряженность поля в диэлектрике, создаваемую бесконечно длинной заряженной нитью, определим по формуле $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r\varepsilon}$, получим:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x\varepsilon}.$$

Тогда объемная плотность энергии электрического поля

$$\omega = \frac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon x^2};$$

$$[\omega]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^3\cdot\text{Кл}}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega=\frac{\left(167\cdot 10^{-9}\right)^2}{8\left(3{,}14\right)^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot\left(0{,}02\right)^2}=0{,}049\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\omega_ш=9{,}73\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};\ \ \omega=0{,}049\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

ЗАДАЧА 3.27

Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора меняют от d_1 = 2 мм до d_2 = 20 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U = 0,1 кВ. Площадь пластины S = 0,01 м^2. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) не отключается; 2) отключается.

Дано:
$d_1 = 2\cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 2\cdot 10^{-2}$ м
U = 100 В
S = 0,01 м^2
W_1, W_2 – ?

Решение

1. Если пластины конденсатора остаются подключенными к источнику, то разность их потенциалов остается неизменной: $\left(U=\text{const}\right)$.

Энергию конденсатора удобно считать по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}=\frac{qU}{2}.$$

Применим выражение $W=\frac{CU^2}{2}$.

Емкость плоского конденсатора с увеличением расстояния d будет уменьшаться, т.к.

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Таким образом,

$$W_1=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}\quad\text{и}\quad W_2=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_2};$$

$$[W]=\frac{\Phi\cdot\text{м}^2\cdot\text{В}^2}{\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Вт}\cdot\text{с}=\text{Дж};$$

$$W_1=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-3}}=2{,}2\cdot10^{-7}\,\text{Дж}.$$

3. Систему двух заряженных и отключенных от источника пластин можно рассматривать как изолированную систему. Энергию в данном случае удобно выразить через заряд q на пластинах, т.к. заряд пластин, отключенных от источника, при их раздвижении не изменяется:

$$W_1=\frac{q^2}{2C_1},$$

где $q=C_1U$;

$$W_1=\frac{C_1U^2}{2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d_1};$$

$$W_2=\frac{q_2}{2C_2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d_2};$$

$$[W]=\frac{\Phi\cdot\text{м}^2\cdot\text{В}^2}{\text{м}\cdot\text{м}}=\Phi\cdot\text{В}^2=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Вт}\cdot\text{с}=\text{Дж};$$

$$W_1=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-3}}=2{,}2\cdot10^{-7}\text{ Дж};$$

$$W_2=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01\cdot100^2}{2\cdot2\cdot10^{-2}}=22{,}1\cdot10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Ответ: 1) $W_1=2{,}2\cdot10^{-7}$ Дж; $W_2=2{,}2\cdot10^{-8}$ Дж;
2) $W_1=2{,}2\cdot10^{-7}$ Дж; $W_2=22{,}1\cdot10^{-7}$ Дж.

ЗАДАЧА 3.28

На пластинах плоского воздушного конденсатора находится заряд 4,95 нКл. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС, равной 280 В. Площадь пластины конденсатора S = 0,01 м^2. Найти: 1) напряженность поля E внутри конденсатора; 2) расстояние d между пластинами; 3) скорость υ, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; 4) энергию W конденсатора; 5) силу притяжения пластин F.

Дано:	**Решение**
q = 4,95·10^{-9} Кл U = 280 В S = 0,01 м^2 ε = 1	1. Напряженность поля E, созданного двумя пластинами, $$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$
E, d, υ, W, F – ?	где $\sigma=\dfrac{q}{S}$.

Тогда

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S};$$

$$[E]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}}=\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E=\frac{4{,}95\cdot10^{-9}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01}=56\cdot10^3\ \frac{\text{В}}{\text{м}}=56\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2. Разность потенциалов пластин U и напряженность E поля внутри конденсатора связаны соотношением $E=\dfrac{U}{d}$.

Отсюда

$$d=\frac{U}{E};$$

$$[d]=\frac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{В}}=\text{м};\quad d=\frac{280}{56\cdot10^3}=5\cdot10^{-3}\text{м}.$$

3. По закону сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=q_eU,$$

где m – масса электрона ($m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг); q_e – заряд электрона ($q_e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

Отсюда находим скорость электрона:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2q_eU}{m}};$$

$$[\upsilon]=\sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}}=\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot280}{9{,}1\cdot10^{-31}}}=10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Энергию конденсатора рассчитаем по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2d}{2\varepsilon_0S};\quad \left(C=\frac{\varepsilon_0S}{d}\right);$$

$$[W]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Вт}\cdot\text{с}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{\left(4{,}95\cdot10^{-9}\right)^2\cdot5\cdot10^{-3}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01}=6{,}9\cdot10^{-7}\ \text{Дж}.$$

5. Сила притяжения пластин F в плоском конденсаторе

$$F=\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$[F]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}}=\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}}=\text{Н};$$

$$F=\frac{\left(4{,}95\cdot10^{-9}\right)^2}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}01}=0{,}14\cdot10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $E=56\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$; $d=5\cdot10^{-3}$ м; $\upsilon=10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $W=6{,}9\cdot10^{-7}$ Дж; $F=0{,}14\cdot10^{-3}$ Н.

ЗАДАЧА 3.29

Напряженность E электрического поля на расстоянии x = 5 см от центра сфер воздушного сферического конденсатора равна 44,5 кВ/м. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно равны: r = 2 см, R = 8 см. Найти разность потенциалов U, приложенную между сферическими поверхностями.

Дано:

$E = 44{,}5\cdot10^3$ В/м

x = 0,05 м

r = 0,02 м

R = 0,08 м

$\varepsilon=1$

U – ?

Решение

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами r и R, пространство между которыми заполнено диэлектриком) определяется по формуле

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R-r}. \tag{1}$$

С другой стороны, емкость конденсатора

$$C=\frac{q}{U}, \tag{2}$$

где U – разность потенциалов между сферами конденсатора.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R-r}=\frac{q}{U},$$

откуда

$$U=\frac{q\left(R-r\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}.$$

Заряд на сфере q найдем через напряженность поля конденсатора E. Согласно формуле напряженности поля точечного заряда или заряженной сферы (вне среды) $\left(E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$ имеем:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.$$

Отсюда

$$q=4\pi\varepsilon_0 Ex^2.$$

Разность потенциалов U между сферами

$$U=\frac{\left(R-r\right)Ex^2}{rR};$$

$$\left[U\right]=\frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=\text{В};$$

$$U=\frac{\left(0,08-0,02\right)\cdot 44,5\cdot 10^3\cdot 0,05^2}{0,05\cdot 0,08}=4,2\cdot 10^3\ \text{В}=4,2\ \text{кВ}.$$

Ответ: $U=4,2$ кВ.

ЗАДАЧА 3.30

Емкость шара, погруженного в масло ($\varepsilon=5$), равна 0,39 пФ, заряд на шаре 1,76 нКл. Каковы потенциал шара φ, радиус шара R, поверхностная плотность заряда σ и энергия шара W?

Дано:

C = 0,39·10^{-12} Ф

ε = 5

q = 1,76·10^{-9} Кл

φ, R, σ, W – ?

Решение

Емкость уединенного проводника выражается формулой

$$C=\frac{q}{\varphi}.$$

Отсюда определим потенциал шара:

$$\varphi=\frac{q}{C};$$

$$[\varphi]=\frac{\text{Кл}}{\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{В}; \quad \varphi=\frac{1,76\cdot10^{-9}}{0,39\cdot10^{-12}}=4,5\cdot10^{3}\ \text{В}=4,5\ \text{кВ}.$$

С другой стороны, емкость шара

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R=\frac{\varepsilon R}{k},$$

где $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = 9·10^9 (Н·м^2)/Кл^2.

Таким образом, радиус шара

$$R=\frac{kC}{\varepsilon};$$

$$[R]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Ф}}{\text{Кл}^2}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}=\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\text{м};$$

$$R=\frac{9\cdot10^{9}\cdot0,39\cdot10^{-12}}{5}=0,7\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

Поверхностная плотность заряда на шаре

$$\sigma=\frac{q}{4\pi R^2};$$

$$\sigma=\frac{1,76\cdot10^{-9}}{4\cdot3,14\cdot\left(0,7\cdot10^{-3}\right)^2}=286\cdot10^{-3}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}=286\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Энергию шара определим по формуле

$$W=\frac{q^2}{2C};$$

$$[W]=\frac{\text{Кл}^2}{\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{\left(1,76\cdot10^{-9}\right)^2}{2\cdot0,39\cdot10^{-12}}=3,97\cdot10^{-6}\ \text{Дж}=3,97\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $\varphi=4,5\ \text{кВ}$; $R=0,7\cdot10^{-3}\ \text{м}$; $\sigma=286\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$; $W=3,97\ \text{мкДж}$.

ЗАДАЧА 3.31

Два металлических шарика радиусами R_1 = 6 см и R_2 = 4 см соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. До соединения заряд на первом шарике был q_1 = 10 нКл, а потенциал второго шарика φ_2 = 9 кВ. Найти: 1) потенциал φ_1 первого шарика до соединения; 2) заряд q_2 второго шарика до соединения; 3) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до соединения; 4) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после соединения; 5) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после соединения; 6) энергию W соединенных проводником шариков.

Дано:

R_1 = 0,06 м

R_2 = 0,04 м

$q_1 = 10^{-8}$ Кл

φ_2 = 9000 В

φ_1, q_2, W_1, W_2, q_1', φ_1', q_2', φ_2', W – ?

Решение

Емкость шарика

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R = \frac{\varepsilon R}{k},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ (Н·м^2)/Кл^2.

С другой стороны, емкость уединенного проводника по определению

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

1. Потенциал первого шарика до соединения

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1 k}{R_1};$$

$$[\varphi_1] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}; \quad \varphi_1 = \frac{10^{-8}\cdot 9\cdot 10^9}{0,06} = 1500\ \text{В}.$$

2. Заряд второго шарика до соединения

$$q_2 = C_2\varphi_2 = \frac{R_2}{k}\varphi_2;$$

$$[q_2] = \frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{Кл}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{Кл}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}} = \text{Кл}; \quad q_2 = \frac{0,04\cdot 9000}{9\cdot 10^9} = 40\cdot 10^{-9}\ \text{Кл} = 40\ \text{нКл}.$$

3. Энергия шариков до соединения определяется формулой

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Тогда

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{q_1^2 k}{2R_1}; \quad W_2 = \frac{q_2^2 k}{2R_2};$$

$$W_1=\frac{\left(10^{-8}\right)^2\cdot 9\cdot 10^9}{2\cdot 0{,}06}=0{,}75\cdot 10^{-5}\text{ Дж};\; W_2=\frac{\left(40\cdot 10^{-9}\right)^2\cdot 9\cdot 10^9}{2\cdot 0{,}04}=18\cdot 10^{-5}\text{ Дж}.$$

4. Так как потенциалы шариков $\varphi_1\neq\varphi_2$, то после соединения шариков по проволочке потечет ток. Заряды будут перетекать к шарику с меньшим потенциалом (к первому). Перетекание зарядов будет происходить до тех пор, пока потенциалы шаров не сравняются $\left(\varphi_1'=\varphi_2'\right)$. По закону сохранения электрического заряда в изолированной системе (когда нет притока и оттока зарядов извне)

$$q_1+q_2=q_1'+q_2' \quad \text{или} \quad q_1+q_2=C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'=\varphi_1'\left(C_1+C_2\right),\text{ т.к. } \varphi_1'=\varphi_2'.$$

Найдем общий потенциал шаров после соединения:

$$\varphi_1'=\frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}=\frac{k\left(q_1+q_2\right)}{R_1+R_2};$$

$$\varphi_1'=\varphi_2'=\frac{9\cdot 10^9\left(10^{-8}+40\cdot 10^{-9}\right)}{0{,}06+0{,}04}=4500\text{ В}.$$

Тогда заряд

$$q_1'=C_1\varphi_1'=\frac{R_1}{k}\varphi_1';\quad q_1'=\frac{0{,}06\cdot 4500}{9\cdot 10^9}=30\text{ нКл}.$$

5. Заряд на втором шарике после соединения

$$q_2'=q_1+q_2-q_1';$$

$$q_2'=10^{-8}+40\cdot 10^{-9}-30\cdot 10^{-9}=20\cdot 10^{-9}\text{ Кл}=20\text{ нКл}.$$

6. Энергия W соединенных проводником шариков

$$W=\frac{\left(C_1+C_2\right)\varphi_1'^2}{2}=\frac{\left(R_1+R_2\right)\varphi_1'^2}{2k};$$

$$[W]=\frac{\text{м}\cdot\text{В}^2\cdot\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^2}{\text{Дж}}=\frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}}=\text{Дж};$$

$$W=\frac{\left(0{,}06+0{,}04\right)\cdot\left(4500\right)^2}{2\cdot 9\cdot 10^9}=112{,}5\cdot 10^{-6}\text{ Дж}.$$

Ответ: $\varphi_1=1500$ В; $q_2=40$ нКл; $W_1=0{,}75\cdot 10^{-5}$ Дж; $W_2=18\cdot 10^{-5}$ Дж, $\varphi_1'=\varphi_2'=4500$ В, $q_1'=30$ нКл, $q_2'=20$ нКл, $W=112{,}5\cdot 10^{-6}$ Дж.

3.2. Постоянный электрический ток

Основные формулы

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время dt.

Плотность электрического тока определяется отношением силы тока dI к площади dS поперечного сечения проводника, перпендикулярной к направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Плотность тока пропорциональна средней скорости $\langle \upsilon \rangle$ направленного движения носителей заряда и их концентрации n:

$$\vec{j} = en\langle \vec{\upsilon} \rangle,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Сила тока I через любую поверхность S

$$I = \int_S j_n dS,$$

где j_n – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к поверхности.

Сопротивление R однородного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Зависимость от температуры:

– *удельного сопротивления проводника*

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

– *сопротивления проводника*

$$R = R_0 (1 + \alpha t),$$

где ρ_0, R_0 – удельное сопротивление и сопротивление проводника при температуре $t = 0$ °C, α – температурный коэффициент сопротивления, t – температура.

Общее сопротивление проводников, соединенных
последовательно

$$R=\sum_{i=1}^{n}R_i \text{, при } R=R_1=R_2=\ldots=R_n \text{ сопротивление } R=nR_1;$$

параллельно

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}\text{, при } \frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}=\ldots=\frac{1}{R_n} \text{ сопротивление } R=\frac{R_1}{n}.$$

Здесь R_i – сопротивление i-го проводника, n – число проводников.

Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда q_0, называется электродвижущей силой (ЭДС) ε, действующей в цепи,

$$\varepsilon=\frac{A}{q_0}.$$

Силы неэлектрического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются сторонними.

Напряжением U на участке 1-2 цепи называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2+\varepsilon_{12}.$$

Напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если на этом участке не действует ЭДС, т.е. сторонние силы отсутствуют:

$$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2\text{, если } \varepsilon_{12}=0.$$

Закон Ома для участка цепи, не содержащей ЭДС:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R};\quad I=\frac{U}{R},$$

где $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка (напряжение), R – его сопротивление.

Закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащей ЭДС:

$$I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\sum\varepsilon_i}{\sum R};\quad I=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\varepsilon_{12}}{R+r},$$

где $\sum\varepsilon_i$ – алгебраическая сумма всех электродвижущих сил (ЭДС), имеющихся на данном участке; $\sum R$ – сумма всех сопротивлений участка.

Закон Ома для замкнутой цепи $(\varphi_1 = \varphi_2)$:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{R + r},$$

где R – внешнее сопротивление цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E},$$

где σ – удельная проводимость; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Правила Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю (токи, подходящие к узлу, берутся со знаком «плюс», отходящие от узла – со знаком «минус»):

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников, включенных в контур:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{\kappa} \varepsilon_i,$$

где n – число участков, содержащих сопротивление R, κ – число ЭДС, действующих в контуре.

Работа, совершаемая электрическим полем и сторонними силами на участке цепи постоянного тока за время t,

$$A = qU = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t.$$

Мощность электрического тока (тепловая) на участке цепи – работа, совершаемая в единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Работа и мощность, развиваемая источником тока с ЭДС ε,

$$A = I\varepsilon t; \quad P = I\varepsilon.$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$dQ = I^2 R dt = IU dt,$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся на участке электрической цепи за время dt, U – напряжение, приложенное к концам участка цепи, I – сила тока в цепи, R – сопротивление участка.

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = jE = \sigma E^2,$$

где ω – удельная тепловая мощность тока, j – плотность тока, E – напряженность электростатического поля, σ – удельная электрическая проводимость вещества.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 3.32

К источнику с ЭДС, равной ε, и внутренним сопротивлением r_1 присоединили сопротивление R = 0,1 Ом. При этом амперметр показал силу тока I_1 = 0,5 А. Если же к источнику присоединить последовательно еще один источник с такой же ЭДС, но с внутренним сопротивлением r_2 = 4,5 Ом, то сила тока I_2 в том же сопротивлении окажется равной 0,4 А. Определить внутреннее сопротивление r_1 и ЭДС источника ε.

Дано:
R = 0,1 Ом
I_1 = 0,5 А
I_2 = 0,4 А
r_2 = 4,5 Ом

ε, r_1 – ?

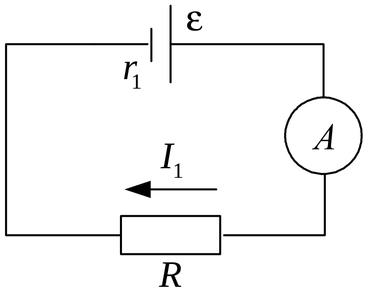


Рис. 1

Решение

Запишем закон Ома для замкнутой цепи в первом случае (рис. 1):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r_1},$$

где r_1 – внутреннее сопротивление первого источника.

Во втором случае при последовательном соединении проводников (рис. 2)

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i, \quad \text{а} \quad r = \sum_i r_i.$$

При этом следует иметь в виду, что ЭДС суммируются алгебраически, а сопротивления – арифметически.

В этом случае закон Ома будет иметь вид:

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2}.$$

Найдем сопротивление r_1 для первого источника, разделив одно уравнение на другое и подставив значения I_1 и I_2:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R + r_1 + r_2}{2(R + r_1)} = \frac{5}{4}.$$

Тогда

$$r_1 = \frac{2}{3} r_2 - R; \quad r_1 = \frac{2}{3} 4{,}5 - 0{,}1 = 2{,}9 \text{ Ом}.$$

Источник имеет ЭДС $\varepsilon = I_1 (R + r_1)$;

$$[\varepsilon] = \text{А} \cdot \text{Ом} = \text{В}; \quad \varepsilon = 0{,}5(0{,}1 + 2{,}9) = 1{,}5 \text{ В}.$$

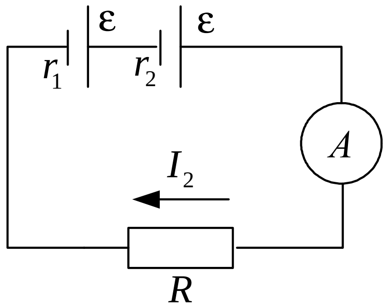
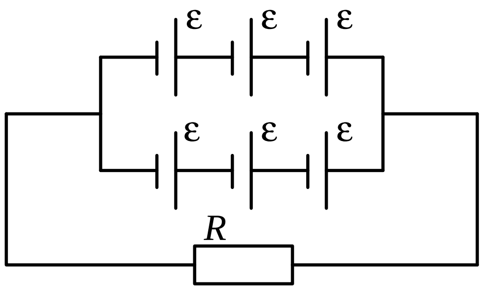


Рис. 2

Ответ: $r_1 = 2{,}9$ Ом; $\varepsilon = 1{,}5$ В.

ЗАДАЧА 3.33

В схеме, представленной на рис., ЭДС каждого элемента ε = 1,2 В, внутреннее сопротивление r = 0,2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R и дает во внешнюю цепь ток I = 2 А. Найти сопротивление R.



Дано:
ε = 1,2 В
r = 0,2 Ом
I = 2 А
R – ?

Решение

Батарея имеет смешанное соединение элементов: две параллельно соединенные ветви с тремя последовательно соединенными элементами (см. рис.).

По закону Ома для замкнутой цепи $\left(I = \dfrac{\varepsilon}{R + r} \right)$.

Следует учитывать, что при параллельном соединении одинаковых источников тока суммарная ЭДС равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление уменьшается в *n* раз (*n* – количество источников тока).

Найдем внешнее сопротивление цепи:

$$R = \frac{3\varepsilon}{I} - r_{об}.$$

При этом учтено, что суммарная ЭДС равна 3ε. Найдем $r_{об}$.

Внутреннее сопротивление элементов в одной ветви $r_в = 3r$, так как элементы соединены последовательно. Две такие ветви, соединенные параллельно, образуют цепь с общим внутренним сопротивлением элементов, определяемым по формуле

$$\frac{1}{r_{об}} = \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r} = \frac{2}{3r}, \quad \text{откуда} \quad r_{об} = \frac{3}{2}r.$$

Тогда

$$R = \frac{3\varepsilon}{I} - \frac{3r}{2}; \quad R = \frac{3\cdot 1{,}2}{2} - \frac{3\cdot 0{,}2}{2} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 1{,}5$ Ом.

ЗАДАЧА 3.34

Два одинаковых резистора сопротивлением R_1 = 10 Ом и резистор сопротивлением R_2 = 20 Ом подключены к источнику ЭДС (см. рис.). К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью C = 0,1 мкФ. Заряд q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определить ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.

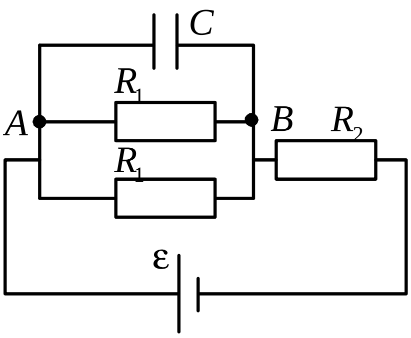
Дано:
R_1 = 10 Ом
R_2 = 20 Ом
C = 10^{-7} Ф
q = $2\cdot10^{-6}$ Кл
ε – ?

Решение

ЭДС источника

$$\varepsilon = U_1 + U_2, \tag{1}$$

где U_1 – напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 – падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2.



Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{q}{C}, \tag{2}$$

где I – сила тока в общей цепи, имеем:

$$I = \frac{2q}{CR_1} \tag{3}$$

Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2qR_2}{CR_1}. \qquad (4)$$

Учли формулу (3).

Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{2qR_2}{CR_1} = \frac{q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right);$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}; \qquad \varepsilon = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-7}}\left(1 + \frac{2 \cdot 20}{10}\right) = 100\,\text{В}.$$

Ответ: $\varepsilon = 100\,\text{В}$.

ЗАДАЧА 3.35

Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора в схеме, приведенной на рисунке. ЭДС источника $\varepsilon = 20\,\text{В}$, сопротивления всех резисторов равны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:

$\varepsilon = 20\,\text{В}$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$

U – ?

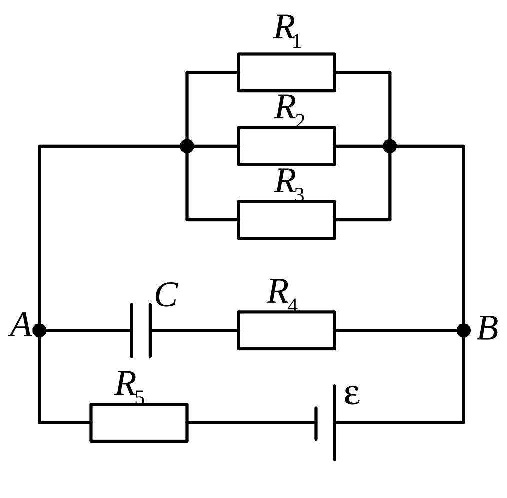
Решение

Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, поэтому через резистор сопротивлением R_4 ток протекать не будет.

Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется падением напряжения на участке AB, состоящем из трех параллельно включенных резисторов сопротивлением R_1, R_2 и R_3

$$U = IR, \qquad (1)$$

где R – результирующее сопротивление трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3.



Ток в общей цепи, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{\varepsilon}{R_5 + R}, \qquad (2)$$

где $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R_1}$, так как $R_1 = R_2 = R_3$.

Откуда

$$R = \frac{R_1}{3}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая (3), найдем искомую разность потенциалов на обкладках конденсатора:

$$U = \frac{\varepsilon}{R_5 + R} R = \frac{\varepsilon}{R_5 + R_1/3} \frac{R_1}{3} = \frac{\varepsilon}{4};$$

$$U = \frac{20}{4} = 5\,\text{В}.$$

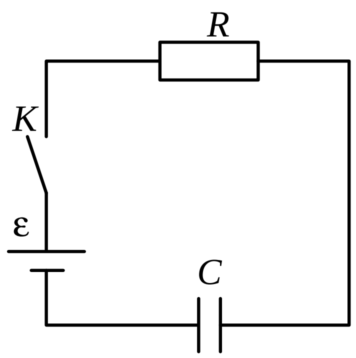
Ответ: $U = 5\,\text{В}$.

ЗАДАЧА 3.36

Конденсатор емкостью C = 0,2 мкФ подключен последовательно с резистором R = 10 МОм к источнику с электродвижущей силой ε = 10 В (см. рис.). Найти закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора. Определить работу, совершаемую источником при зарядке конденсатора, и количество теплоты, выделяющейся при этом в цепи. Определить время, в течение которого заряд увеличивается в e раз.

Дано:
$C = 2\cdot10^{-7}$ Ф
$R = 10^{7}$ Ом
ε = 10 В

$q = f(t)$, $A_{ист}$, Q, τ – ?



Решение

Процесс зарядки начинается при замыкании ключа $(t = 0)$ и длится до тех пор, пока напряжение на обкладках конденсатора не достигнет своего наибольшего значения $q = C\varepsilon$.

Во время зарядки сила тока в цепи

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что работа источника тока $A_{ист}$ равна сумме количества теплоты Q и электрической энергии заряженного конденсатора W. Записав уравнение по закону сохранения энергии для произвольного промежутка времени dt, можно получить дифференциальное уравнение относительно искомой функции:

$$dA_{ист} = dQ + dW,$$

где dW – приращение энергии заряженного конденсатора за время dt.

$$dA_{ист} = I\varepsilon dt; \qquad dQ = I^2 R dt; \qquad dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{qdq}{C}.$$

Тогда уравнение закона сохранения энергии будет:

$$I\varepsilon dt = I^2 R dt + \frac{q}{C}dq; \qquad \varepsilon\frac{dq}{dt}dt = \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 R dt + \frac{q}{C}dq;$$

$$\varepsilon = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}; \qquad \varepsilon C = \frac{RC}{dt}dq + q; \qquad \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}.$$

При изменении времени от $t = 0$ до некоторого момента t заряд меняется от $q = 0$ до q. Проинтегрируем в указанных пределах

$$\frac{t}{CR} = -\ln\frac{\varepsilon C - q}{\varepsilon C},$$

и получим: $q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$.

Время, в течение которого заряд на конденсаторе увеличивается в e раз:

$$\tau = CR;$$

$$[\tau] = \text{Ф}\cdot\text{Ом} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{В}\cdot\text{А}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{А}} = \text{с};$$

$$\tau = 2\cdot 10^{-7}\cdot 10^{7} = 2\ \text{с}.$$

Видно, что заряд приближается к своему наибольшему значению, равному $C\varepsilon$, асимптотически.

Работа, совершаемая источником за все время зарядки конденсатора:

$$A_{ист} = \int_0^{\infty} \varepsilon I dt.$$

Учитывая, что $Idt = dq$ – заряд, проходящий через источник за время dt, и что за время всего процесса заряд, прошедший через источник, равен $q = C\varepsilon$, получим

$$A_{ист} = \varepsilon\int_0^{q} dq = \varepsilon^2 C;$$

$$[A_{ист}] = \text{В}^2\cdot\text{Ф} = \frac{\text{В}^2\cdot\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Кл}\cdot\text{В} = \text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В} = \text{Дж};$$

$$A_{ист} = 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-5} \text{Дж} = 20 \text{ мкДж}.$$

Количество теплоты, выделившееся за время зарядки на сопротивлении R, найдем из закона сохранения энергии:

$$Q = A_{ист} - W,$$

где $W = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{C\varepsilon^2}{2}$ – энергия заряженного конденсатора.

$$W = \frac{C\varepsilon^2}{2};$$

$$[W] = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{В}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж};$$

$$W = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2}{2} = 10^{-5} \text{Дж} = 10 \text{ мкДж}.$$

Тогда $Q = A_{ист} - W$; $Q = 20 \text{ мкДж} - 10 \text{ мкДж} = 10 \text{ мкДж}$.

Ответ: $\tau = 2$ с; $A_{ист} = 20$ мкДж; $Q = 10$ мкДж.

ЗАДАЧА 3.37

Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи от батареи аккумуляторов? ЭДС батареи $\varepsilon = 12\,\text{В}$. Ток короткого замыкания 6 А.

Дано	**Решение**
$\varepsilon = 12\,В$ $I_{кз} = 6$ А	Мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна $P = I^2R$, где, согласно закону Ома для полной цепи, $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$.
$P_{\max}$ – ?	Отсюда $P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$.

По условию задачи необходимо найти наибольшую мощность $P_{\max}$. Выясним, при каком сопротивлении R внешней цепи это возможно. Найдем производную $\dfrac{dP}{dR}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2 (R+r)^2 - 2(R+r)\varepsilon^2 R}{(R+r)^4} = 0.$$

Если $R = r$, то $\frac{dP}{dR} = 0$.

При $R = r$ можно получить во внешней цепи наибольшую мощность:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2 r}{(2r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Зная ток короткого замыкания, выразим внутреннее сопротивление батареи:

$$r = \frac{\varepsilon}{I_{кз}}.$$

Тогда $P_{\max} = \frac{\varepsilon I_{кз}}{4}$; $[P_{\max}] = \text{В} \cdot \text{А} = \text{Вт}$;

$$P_{\max} = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_{\max} = 18$ Вт.

ЗАДАЧА 3.38

Определить ЭДС ε и внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А – мощность 8 Вт.

Дано:	**Решение**
$I_1 = 4$ А $P_1 = 10$ Вт $I_2 = 2$ А $P_2 = 8$ Вт	Полная мощность источника тока $P = I\varepsilon$.
ε, r – ?	

Полная мощность источника тока

$$P = I\varepsilon.$$

Полезная мощность меньше полной мощности на мощность, выделяемую на внутреннем участке цепи:

$$P_1 = I_1\varepsilon - I_1^2 r; \qquad r = \frac{I_1\varepsilon - P_1}{I_1^2} \tag{1}$$

$$P_2 = I_2\varepsilon - I_2^2 r; \qquad r = \frac{I_2\varepsilon - P_2}{I_2^2} \tag{2}$$

Приравнивая (1) и (2), получим:

$$\frac{I_1\varepsilon - P_1}{I_1^2} = \frac{I_2\varepsilon - P_2}{I_2^2}; \qquad I_1 I_2^2 \varepsilon - I_2^2 P_1 = I_2 I_1^2 \varepsilon - I_1^2 P_2. \tag{3}$$

Из (3) определим ЭДС ε:

$$\varepsilon = \frac{I_2^2 P_1 - I_1^2 P_2}{I_1 I_2^2 - I_2 I_1^2}; \qquad [\varepsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Вт}}{\text{А} \cdot \text{А}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}} = \text{В};$$

$$\varepsilon = \frac{2^2 \cdot 10 - 4^2 \cdot 8}{4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 4^2} = 5{,}5\,\text{В}.$$

Подставив полученное значение ЭДС в равенство (1), найдем внутреннее сопротивление r: $r = \dfrac{I_1 \varepsilon - P_1}{I_1^2}$;

$$[r] = \frac{\text{А} \cdot \text{В} - \text{Вт}}{\text{А}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}^2} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}.$$

$$r = \frac{4 \cdot 5{,}5 - 10}{4^4} = 0{,}75\ \text{Ом}.$$

Ответ: $\varepsilon = 5{,}5\,\text{В}$; $r = 0{,}75\ \text{Ом}$.

ЗАДАЧА 3.39

Батарея состоит из двух последовательно соединенных элементов с одинаковыми ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\,\text{В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1\,\text{Ом}$ и $r_2 = 1{,}5\ \text{Ом}$. Разность потенциалов на зажимах второго элемента U_2 = 0. При каком внешнем сопротивлении R это возможно?

Дано:
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\,\text{В}$
$r_1 = 1\,\text{Ом}$
$r_2 = 1{,}5\ \text{Ом}$
$U_2 = 0$

R – ?

Решение

Разность потенциалов на зажимах второго элемента

$$U_2 = \varepsilon_2 - I r_2.$$

Исходя из условия, что $U_2 = 0$, найдем силу тока:

$$I = \frac{\varepsilon_2}{r_2}: \qquad I = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}33\,\text{А}.$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении элементов сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2}.$$

Отсюда находим внешнее сопротивление R:

$$R = \frac{2\varepsilon}{I} - r_1 - r_2;$$

$$[R]=\frac{B}{A}-\text{Ом}=\text{Ом}; \quad R=\frac{2\cdot 2}{1,33}-1-1,5=0,5\text{ Ом}.$$

Ответ: $R=0,5$ Ом.

ЗАДАЧА 3.40

Батарея аккумуляторов с ЭДС $\varepsilon=12$В и внутренним сопротивлением r = 2,4 Ом замкнута на внешнее сопротивление R = 9 Ом. Найти падение напряжения U во внешней цепи и падение напряжения U_r внутри батареи. С каким кпд η работает батарея?

Дано:
$\varepsilon=12$В
r = 2,4 Ом
R = 9 Ом

U, U_r, η – ?

Решение

По закону Ома для полной цепи определим силу тока $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$. Тогда падение напряжения U во внешней цепи, согласно закону Ома для однородного участка цепи,

$$U=IR=\frac{\varepsilon R}{R+r}; \qquad U=\frac{12\cdot 9}{9+2,4}=9,5\text{ В}.$$

Падение напряжения U_r внутри батареи

$$U_r=Ir=\frac{\varepsilon r}{R+r}; \qquad U_r=\frac{12\cdot 2,4}{9+2,4}=2,53\text{В}.$$

Коэффициент полезного действия источника тока равен отношению мощности P_1, выделяемой внешним участком цепи (полезная мощность), к полной мощности P, развиваемой источником:

$$\eta=\frac{P_1}{P}, \text{ где } P_1=I^2R; \; P=I\varepsilon.$$

Тогда кпд источника

$$\eta=\frac{IR}{\varepsilon}=\frac{R}{R+r}; \qquad \eta=\frac{9}{9+2,4}=0,79.$$

Ответ: $U=9,5$ В; $U_r=2,53$В; $\eta=0,79$.

ЗАДАЧА 3.41

Определить ток короткого замыкания для батареи, если при силе тока $I_1=3A$ во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1 = 18 Вт, при силе тока I_2 = 1 А, соответственно, P_2 = 10 Вт.

Дано:	**Решение**
$I_1 = 3A$	Ток короткого замыкания $$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}.$$
P_1 = 18 Вт	Следовательно, задача сводится к нахождению ЭДС батареи ε и ее внутреннего сопротивления r.
I_2 = 1 А	
P_2 = 10 Вт	
$I_{кз}$ – ?	

Используем закон Ома для полной цепи для двух случаев:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}. \tag{1}$$

Сопротивления внешней цепи R_1 и R_2 определим через значения мощности $\left(P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R \right)$

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}; \qquad R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}. \tag{2}$$

Подставим значения сопротивлений (2) в уравнения (1):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{\frac{P_1}{I_1^2} + r}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{P_2}{I_2^2} + r}. \tag{3}$$

Разделив I_1 на I_2 в уравнениях (3), получим:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_2}{I_2^2} + r}{\frac{P_1}{I_1^2} + r}; \qquad \frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r. \tag{4}$$

Из уравнения (4) найдем значение внутреннего сопротивления:

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1}, \qquad r = \frac{\frac{18}{3} - \frac{10}{1}}{1 - 3} = 2 \text{ Ом}.$$

Выразим ЭДС батареи аккумуляторов из уравнения (3):

$$\varepsilon = I_1 \left(\frac{P_1}{I_1^2} + r \right) = \frac{P_1}{I_1} + I_1 r;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} + \text{А} \cdot \text{Ом} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{А}} + \text{В} = \text{В};$$

$$\varepsilon = \frac{18}{3} + 3 \cdot 2 = 12 \text{ В}.$$

Ток короткого замыкания

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}, \qquad I_{кз} = \frac{12}{2} = 6 \text{ А}.$$

Ответ: $I_{кз} = 6$ А.

ЗАДАЧА 3.42

Источник ЭДС вначале замыкают на резистор сопротивлением R_1, а затем – на резистор сопротивлением R_2, при этом в обоих случаях выделяется одинаковое количество теплоты. Определить внутреннее сопротивление r источника ЭДС.

Дано:
R_1, R_2,
$Q_1 = Q_2$

r – ?

Решение

Согласно закону Джоуля – Ленца за время t в резисторе сопротивлением R_1 выделяется теплота

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = \frac{\varepsilon^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2}. \qquad (1)$$

Учли, что согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}$, где ε – ЭДС источника.

Аналогично

$$Q_2 = I_2^2 R_2 t = \frac{\varepsilon^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2}. \qquad (2)$$

Согласно условию задачи $Q_1 = Q_2$, т.е., приравняв (1) и (2), получаем

$$\frac{\varepsilon^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2}, \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

Откуда искомое внутреннее сопротивление

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

ЗАДАЧА 3.43

Определить количество теплоты Q, выделившееся в проводнике сопротивлением R = 50 Ом при пропускании по нему электрического тока. Сила тока в проводнике равномерно нарастает с I_0 = 0 до I = 10 А в течение времени τ = 30 с.

Дано:	**Решение**
R = 50 Ом	Нарастание силы тока в проводнике происходит по закону $I = b + Kt$. Найдем коэффициенты b и K, используя начальные условия.
I_0 = 0	При $t = 0$ $\quad I = I_0, \quad b = I_0 = 0$.
I = 10 А	При $t = \tau$ $\quad I = I_{\max}, \quad K = \dfrac{I_{\max}}{\tau}; \quad K = 0{,}33\dfrac{A}{c}$.
τ = 30 с	
Q – ?	

Таким образом,

$$I = Kt.$$

По закону Джоуля – Ленца количество теплоты

$$Q = \int_0^\tau I^2 R dt = \int_0^\tau K^2 t^2 R dt, \qquad Q = K^2 R \frac{\tau^3}{3};$$

$$[Q] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2} = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж};$$

$$Q = 0{,}33^2 \cdot 50 \cdot \frac{10^3}{3} = 5 \cdot 10^4 \text{Дж} = 50 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q = 50$ кДж.

ЗАДАЧА 3.44

По проводнику сопротивлением R = 3 Ом течет равномерно возрастающий ток. Количество теплоты, выделившееся в проводнике за время τ = 8 с, равно Q = 200 Дж. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В начальный момент сила тока в проводнике была равна нулю.

Дано:	**Решение**
R = 3 Ом	По условию задачи сила тока нарастала по линейному закону, т.е. $I = Kt$. Количество теплоты, выделяющееся за элементарно малое время dt, выражается формулой $dQ = I^2 R dt$.
τ = 8 с	
Q = 200 Дж	
q – ?	

Тогда количество теплоты Q, выделяющееся за все время τ, будет

$$Q = \int_0^\tau I^2(t) R dt = \int_0^\tau (Kt)^2 R dt = K^2 R \int_0^\tau t^2 dt = \frac{K^2 R}{3} t^3 \Big|_0^\tau = \frac{K^2 R \tau^3}{3}.$$

Отсюда можно определить скорость нарастания тока с течением времени, т.е. $K = \left(\dfrac{3Q}{R\tau^3}\right)^{1/2}$.

Элементарный заряд, протекающий по проводнику за промежуток времени dt, равен $dq = Idt$. Тогда полный заряд q, протекший по проводнику за все время τ, можно определить:

$$q = \int_0^\tau I(t)\,dt = \int_0^\tau Ktdt = \left.\frac{K\tau^2}{2}\right|_0^\tau = \frac{K\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q}{R\tau^3}}\frac{\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q\tau}{4R}};$$

$$[q] = \sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{Ом}}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{В}}} = \sqrt{\text{А}^2\cdot\text{с}^2} = \text{А}\cdot\text{с} = \text{Кл};$$

$$q = \sqrt{\frac{3\cdot 200\cdot 8}{4\cdot 3}} = 20\ \text{Кл}.$$

Ответ: $q = 20$ Кл.

ЗАДАЧА 3.45

В проводнике в течение времени τ = 10 с равномерно убывает сила тока от I_0 = 5 А до $I = 0$. При этом в проводнике выделяется количество теплоты Q = 1 кДж. Каково сопротивление R проводника?

Дано

τ = 10 с

I_0 = 5 А

$I = 0$

Q = 10^3 Дж

R – ?

Решение

Сила тока в проводнике убывает равномерно по линейному закону $I = b - Kt$. Коэффициенты b и K найдем из начальных условий. При $t = 0$ $I = I_0$, $b = I_0$, а при $t = \tau$ $I = 0$ и $K = \frac{I_0}{\tau}$, $K = \frac{5}{10} = 0{,}5\frac{A}{c}$.

Окончательно закон убывания тока примет вид

$$I = I_0 - Kt.$$

Согласно закону Джоуля – Ленца количество теплоты, выделившееся в проводнике за бесконечно малый промежуток времени,

$$dQ = I^2Rdt = \left(I_0 - Kt\right)^2 Rdt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$Q = \int_0^\tau \left(I_0 - Kt\right)^2 Rdt; \qquad Q = R\left[I_0^2\tau - 2K\frac{\tau^2}{2}I_0 + K^2\frac{\tau^3}{3}\right].$$

Отсюда найдем сопротивление проводника:

$$R = \frac{Q}{I_0^2\tau - I_0K\tau^2 + \frac{K^2\tau^3}{3}};$$

$$[R] = \frac{\text{Дж}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом};$$

$$R = \frac{10^3}{5^2 \cdot 10 - 5 \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 + \dfrac{0{,}5^2 \cdot 10^3}{3}} = 12 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 12$ Ом.

ЗАДАЧА 3.46

Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением R = 3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_1 = 2 В до U_2 = 4 В в течение времени t = 20 с.

Дано:	**Решение**
R = 3 Ом U_1 = 2 В U_2 = 4 В t = 20 с	Так как сила тока в проводнике изменяется, то воспользуемся для подсчета заряда формулой $$dq = Idt$$ и проинтегрируем: $q = \int_1^2 Idt$.
q – ?	

Выразив силу тока по закону Ома, получим:

$$q = \int_1^2 \frac{U}{R} dt.$$

Напряжение U растет по линейному закону:

$$U = U_1 + Kt.$$

Подставляя это выражение в формулу заряда, найдем

$$q = \int_1^2 \left(\frac{U_1}{R} + \frac{Kt}{R} \right) dt = \frac{U_1}{R} \int_1^2 dt + \frac{K}{R} \int_1^2 tdt,$$

где $t_1 = 0$; $t_2 = 20$ с.

Найдем коэффициент пропорциональности K:

$$K = \frac{U_2 - U_1}{t}; \qquad K = \frac{4-2}{20} = 0{,}1 \ \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

После интегрирования получим

$$q = \frac{U_1}{R} t_2 + \frac{Kt_2^2}{2R}; \quad [q] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} + \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{2 \cdot 20}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 20^2}{2 \cdot 3} = 20 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 20$ Кл.

ЗАДАЧА 3.47

Сила тока в проводнике сопротивлением R = 20 Ом нарастает по линейному закону от $I_0 = 0$ до I_{max} = 6 А за t = 2 с. Определить количество выделившейся теплоты, Q_1 – за первую секунду и Q_2 – за вторую секунду.

Дано:
R = 20 Ом
$I_0 = 0$
I_{max} = 6 А
t = 2 с

Q_1, Q_2 – ?

Решение

По закону Джоуля – Ленца количество выделившейся теплоты при прохождении тока по проводнику

$$Q = I^2 Rt,$$

где I – постоянный ток, протекающий по проводнику за время t.

Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и запишется в виде

$$dQ = I^2 Rdt.$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. Так как ток меняется по линейному закону,

$$I = I_0 + Kt; \qquad I = Kt,$$

где K – коэффициент пропорциональности, численно равный приращению силы тока в единицу времени,

$$K = \frac{\Delta I}{t}.$$

С учетом изменения тока

$$dQ = K^2 Rt^2 dt.$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt, следует проинтегрировать последнее выражение в пределах от $t_1 = 0$ до t_2:

$$Q = K^2 R\int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)^2 R\left(t_2^3 - t_1^3\right);$$

$$[Q] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2} = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж}.$$

Количество теплоты, выделившееся за первую секунду,

$$Q_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20(1-0) = 60\,\text{Дж}.$$

Количество теплоты, выделившееся за вторую секунду,

$$Q_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20\left(2^3 - 1^3\right) = 420\,\text{Дж}.$$

За вторую секунду теплоты выделяется в 7 раз больше.

Ответ: $Q_1 = 60\,\text{Дж}$; $Q_2 = 420\,\text{Дж}$.

ЗАДАЧА 3.48

По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди ρ = 8,9·10^3 кг/м^3.

Дано:
$S = 0{,}8\cdot 10^{-6}$ м^2
$I = 8\cdot 10^{-2}$ А
$M = 63{,}5\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\rho = 8{,}9\cdot 10^{3}$ кг/м^3
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ 1/моль

$\langle \upsilon \rangle$ – ?

Решение

Плотность тока, текущего по проводнику,

$$j = en\langle \upsilon \rangle,$$

где n – концентрация носителей заряда.

По условию задачи концентрация носителей заряда равна концентрации атомов, которую можно найти, зная число Авогадро.

Число молей меди определим, зная молярную массу меди m/M. Умножив число молей на число Авогадро, получим число атомов, а разделив на объем V – концентрацию:

$$n = \frac{\frac{m}{M}N_A}{V},$$

где m – масса проводника, $m = \rho V$.

Тогда

$$n = \frac{\rho N_A}{M}.$$

Выразим среднюю скорость электронов:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{j}{ne}; \qquad \langle \upsilon \rangle = \frac{IM}{S\rho N_A e};$$

$$\left[\langle \upsilon \rangle\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{0,08 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3}}{0,8 \cdot 10^{-6} \cdot 8,9 \cdot 10^{3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 7,4 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 7,4 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.49

Источники с электродвижущими силами ε_1 и ε_2 включены в цепь, как показано на рисунке. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если ε_1 = 10 В и ε_2 = 4 В, $R_1 = R_4$ = 2 Ом и $R_2 = R_3$ = 4 Ом. Сопротивлением источников пренебречь.

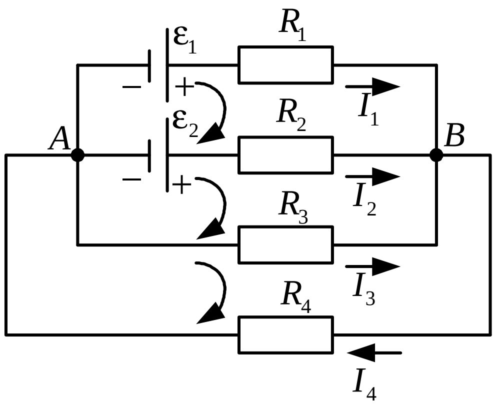
Дано:
ε_1 = 10 В
ε_2 = 4 В
$R_1 = R_4$ = 2 Ом
$R_2 = R_3$ = 4 Ом

I_2, I_3 – ?

Решение

Силы токов в разветвленной цепи определим, используя законы Кирхгофа. Для этого выберем направления токов, как показано на рисунке (направление тока выбирается произвольно).

По первому закону Кирхгофа составляется $(n-1)$ уравнение, где n – число узлов в цепи.



Рассматриваемая схема имеет два узла – A и B. При составлении уравнения необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком «плюс»; ток, отходящий от узла – со знаком «минус».

Запишем уравнение для узла B:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) четыре неизвестных. Недостающие три уравнения составим по второму закону Кирхгофа. Выбираем замкнутый контур таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не учитывавшаяся ни в одном из ранее использованных контуров. Например, контуры AR_1BR_2A, AR_1BR_3A и AR_3BR_4A.

При составлении уравнений для контуров по второму правилу Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае следует ставить знак «минус»;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком «плюс», в противоположном случае – со знаком «минус».

Условимся обходить выбранные контуры по часовой стрелке. Получим следующие уравнения:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \tag{2}$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1; \tag{3}$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \tag{4}$$

Подставив в равенства (2) – (4) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$
$$2I_1 - 4I_2 = 6;$$
$$2I_1 - 4I_3 = 10\ ;$$
$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов).

С этой целью перепишем систему уравнений в виде

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0;$$
$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6;$$
$$2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10;$$
$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}, \qquad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы уравнений; ΔI_2, ΔI_3 – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений.

Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96; \qquad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Отсюда получим:

$$I_2 = 0, \qquad\qquad I_3 = -1 \text{ А}.$$

Знак «минус» у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что истинное направление тока в резисторе R_3 противоположно выбранному.

Примечание. Задачу можно решить методом подстановки.

Ответ: $I_2 = 0$; $I_3 = -1 A$.

ЗАДАЧА 3.50

Два источника (ε_1 = 8 В, r_1 = 2 Ом, ε_2 = 6 В, r_2 = 1,5 Ом) и резистор сопротивлением R = 10 Ом соединены, как показано на рисунке. Вычислить силу тока I_1, текущую через источник с ЭДС ε_1.

Дано:

ε_1 = 8 В

ε_2 = 6 В

r_1 = 2 Ом

r_2 = 1,5 Ом

R = 10 Ом

I_1 – ?

Решение

Выберем направления токов на отдельных участках цепи (см. рис.) и запишем для узла A уравнение по первому правилу Кирхгофа:

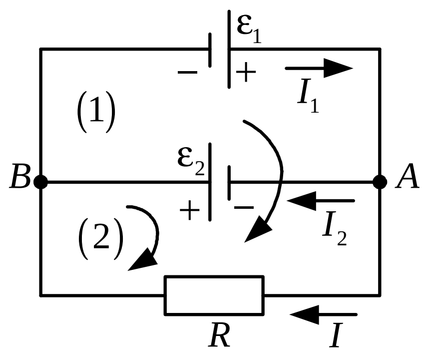
$$I_1 - I_2 - I = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим внешний (1) и внутренний контур (2), которые будем обходить по часовой стрелке. По второму правилу Кирхгофа запишем для них уравнения:

$$I_1 r_1 + IR = \varepsilon_1; \qquad (2)$$

$$-I_2 r_2 + IR = -\varepsilon_2. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1) – (3), получим выражение для силы тока, текущего через источник с ЭДС ε_1:



$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 (R + r_2) + \varepsilon_2 R}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2};$$

$$[I] = \frac{\text{В} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом}^2} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А};$$

$$I_1 = \frac{8(10 + 1{,}5) + 6 \cdot 10}{10 \cdot 2 + 10 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5} = 4 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 4$ А.

ЗАДАЧА 3.51

Элементы цепи имеют значения ε_1 = 1,5 В; ε_2 = 1,6 В; R_1 = 1 кОм; R_2 = 2 кОм (см. рис.). Определить показания вольтметра, если его сопротивление R_V = 2 кОм. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

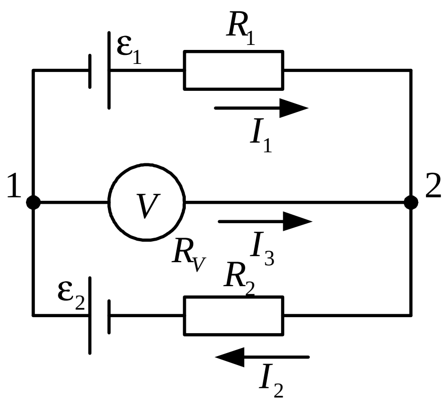
Дано:
$\varepsilon_1 = 1{,}5$ В
$\varepsilon_2 = 1{,}6$ В
$R_1 = 10^3$ Ом
$R_2 = 2\cdot10^3$ Ом
$R_V = 2\cdot10^3$ Ом

U_{12} – ?

Решение

Надо найти разность потенциалов между точками 1 и 2, которую измеряет вольтметр, подключенный к этим точкам.

Сопротивление вольтметра R_V одного порядка с R_1 и R_2, поэтому пренебречь током I_3 в цепи вольтметра нельзя. Таким образом, здесь имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут разные токи – I_1, I_2, I_3.



По закону Ома искомая разность потенциалов равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR_V .$$

Чтобы определить силу тока I_3 в цепи вольтметра, применим правила Кирхгофа. Обозначим направления всех токов и, согласно первому правилу Кирхгофа, запишем для узла 1:

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0 .$$

Для составления еще двух уравнений воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. Предварительно выбрав направление обхода замкнутых контуров (по часовой стрелке) и учитывая правило знаков, получим соответственно для контуров 1, R_1, 2, 1 и 1, R_2, 2, 1:

$$I_1R_1 - I_3R_V = \varepsilon_1 ;$$

$$I_3R_V + I_2R_2 = \varepsilon_2 .$$

Решая систему из трех уравнений, найдем ток I_3:

$$\frac{(\varepsilon_2 - I_3R_V)}{R_2} - \frac{(\varepsilon_1 - I_3R_V)}{R_1} - I_3 = 0 ;$$

$$\varepsilon_2R_1 - I_3R_1R_V - \varepsilon_1R_2 - I_3R_2R_V - I_3R_1R_2 = 0 ;$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2R_1 - \varepsilon_1R_2}{R_V(R_1 + R_2) + R_1R_2} ;$$

$$[I_3]=\frac{\text{В}\cdot\text{Ом}-\text{В}\cdot\text{Ом}}{\text{Ом}\left(\text{Ом}+\text{Ом}\right)+\text{Ом}\cdot\text{Ом}}=\frac{\text{В}\cdot\text{Ом}}{\text{Ом}^2}=\frac{\text{В}}{\text{Ом}}=\frac{\text{А}\cdot\text{Ом}}{\text{Ом}}=\text{А};$$

$$I_3=\frac{1{,}6\cdot10^3-1{,}5\cdot2\cdot10^3}{2\cdot10^3\left(10^3+2\cdot10^3\right)+10^3\cdot2\cdot10^3}=-0{,}175\cdot10^{-3}\,\text{А}.$$

Следовательно, ток через вольтметр течет от 2 к 1:

$$U_{12}=I_3R_V=-0{,}175\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^3=-0{,}35\ \text{В}.$$

Знак «минус» говорит о том, что потенциал точки 2 больше, чем точки 1.

Ответ: $U_{12}=-0{,}35$ В.

ЗАДАЧА 3.52

Если соединить два элемента одноименными полюсами, то сила тока в цепи I = 0,5 А. Электродвижущая сила первого элемента ε_1 = 1,2 В и внутреннее сопротивление r_1 = 0,1 Ом. Электродвижущая сила второго элемента ε_2 = 0,9 В и внутреннее сопротивление r_2 = 0,3 Ом. Определить сопротивление R соединительных проводов.

Дано:
I = 0,5 А
ε_1 = 1,2 В
r_1 = 0,1 Ом
ε_2 = 0,9 В
r_2 = 0,3 Ом

R – ?

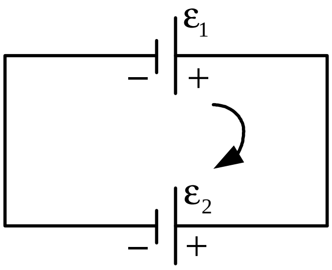
Решение

Рассмотрим схему (см. рис.) соединения двух элементов, предложенную в условии.

Так как $\varepsilon_1>\varepsilon_2$, то ток в цепи идет по часовой стрелке. Выберем направление обхода контура тоже по часовой стрелке и запишем второе правило Кирхгофа:

$$Ir_1+Ir_2+IR=\varepsilon_1-\varepsilon_2,$$

откуда



$$R=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2-I\left(r_1+r_2\right)}{I};$$

$$[R]=\frac{\text{В}-\text{В}-\text{А}\cdot\text{Ом}}{\text{А}}=\frac{\text{А}\cdot\text{Ом}-\text{А}\cdot\text{Ом}-\text{А}\cdot\text{Ом}}{\text{А}}=\frac{\text{А}\cdot\text{Ом}}{\text{А}}=\text{Ом};$$

$$R=\frac{1{,}2-0{,}9-0{,}5\left(0{,}1+0{,}3\right)}{0{,}5}=0{,}2\ \text{Ом}.$$

Если изменить полярность второго источника, то знак перед ε_2 изменится на противоположный.

Ответ: $R=0{,}2$ Ом.

ЗАДАЧА 3.53

Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника, реостата и амперметра. При температуре t_0 = 0 °C сопротивление реостата R_0 = 120 Ом, сопротивление амперметра R_A = 20 Ом. Амперметр показывает ток I_0 = 22 мА. Если же реостат нагреется на Δt = 50 °C, то амперметр покажет силу тока I = 17,5 мА. Каков температурный коэффициент сопротивления проволоки, из которой сделан реостат?

Дано:

$t_0 = 0$ °C

$R_0 = 120$ Ом

$R_A = 20$ Ом

$I_0 = 22 \cdot 10^{-3}$ А

$\Delta t = 50$ °C

$I = 17{,}5 \cdot 10^{-3}$ А

α – ?

Решение

Запишем закон Ома для первоначального состояния цепи:

$$I_0 = \frac{U}{R_0 + R_A}.$$

После того, как реостат нагрелся, его сопротивление R_0 изменилось и стало равным R. Амперметр показал новую силу тока:

$$I = \frac{U}{R + R_A}.$$

Сопротивление реостата можно найти по формуле $R = \rho \dfrac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление, которое зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta t).$$

Тогда

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t), \quad \text{где} \quad R_0 = \rho_0 \frac{l}{S}.$$

Найдем отношение токов

$$\frac{I_0}{I} = \frac{R_0 (1 + \alpha \Delta t) + R_A}{R_0 + R_A},$$

из которого определим искомую неизвестную величину

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{I_0}{I} - 1 \right)(R_0 + R_A)}{R_0 \Delta t}; \qquad [\alpha] = \frac{\text{Ом}}{\text{Ом} \cdot \text{К}} = \text{К}^{-1};$$

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{22 \cdot 10^{-3}}{17{,}5 \cdot 10^{-3}} - 1 \right)(120 + 20)}{120 \cdot 50} = 0{,}006 \text{ К}^{-1}.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}006$ К$^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.54

Вольфрамовая нить электрической лампочки при температуре t_1 = 20 °С имеет сопротивление R_1 = 35,8 Ом. Какова будет температура t_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением U = 120 В по нити идет ток I = 0,33 А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама α = 4,6·10^{-3} К$^{-1}$.

Дано:
U = 120 В
I = 0,33 А
t_1 = 20°С
α = 4,6·10^{-3} К$^{-1}$
R_1 = 35,8 Ом

t_2 – ?

Решение

Зависимость сопротивления нити от температуры выражается соотношением

$$R_1 = R_0\left(1+\alpha\Delta t\right),$$

где R_0 – сопротивление нити при температуре $t_0 = 0$ °С; $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$.

Тогда $R_1 = R_0\left(1+\alpha t_1\right)$.

Аналогично запишем $R_2 = R_0\left(1+\alpha t_2\right)$.

Разделим одно уравнение на другое

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_0\left(1+\alpha t_1\right)}{R_0\left(1+\alpha t_2\right)}$$

и выразим сопротивление R_2 из закона Ома $\left(I = \dfrac{U}{R}\right)$:

$$\frac{R_1}{\dfrac{U}{I}} = \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}.$$

Отсюда найдем t_2:

$$t_2 = \frac{\left(1+\alpha t_1\right)U}{I\alpha R_1} - \frac{1}{\alpha}; \qquad \left[t_2\right] = \frac{\text{В}\cdot{}^\circ\text{C}}{\text{А}\cdot\text{Ом}} - {}^\circ\text{C} = {}^\circ\text{C};$$

$$t_2 = \frac{\left(1+4,6\cdot10^{-3}\right)\cdot120}{0,33\cdot4,6\cdot10^{-3}\cdot35,8} - \frac{1}{4,6\cdot10^{-3}} = 2200\ {}^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t_2 = 2200\ {}^\circ\text{C}$.

ЗАДАЧА 3.55

Через лампу накаливания течет ток I = 1 А. Температура t вольфрамовой нити диаметром d_1 = 0,2 мм равна 2000 °С. Ток подводится медным проводом сечением S_2 = 5 мм^2. Определить напряженность электростатического поля: 1) в вольфраме; 2) в меди. Удельное сопротивление вольфрама при 0 °С ρ_0 = 55 нОм·м, его температурный коэффициент сопротивления α_1 = 0,0045 град$^{-1}$, удельное сопротивление меди ρ_2 = 17 нОм·м.

Дано:
I = 1 А
$d_1 = 2\cdot10^{-4}$ м
t = 2000°С
$S_2 = 5\cdot10^{-6}$ м^2
$\rho_0 = 55\cdot10^{-8}$ Ом·м
α_1 = 0,0045 град$^{-1}$
$\rho_2 = 17\cdot10^{-8}$ Ом·м

$E_1,\ E_2$ – ?

Решение

Согласно закону Ома в дифференциальной форме плотность тока

$$j = \sigma E = \frac{E}{\rho}, \qquad (1)$$

где $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – удельная электрическая проводимость проводника; E – напряженность электростатического поля.

Удельное сопротивление вольфрама изменяется с температурой по линейному закону:

$$\rho_1 = \rho_0 (1 + \alpha t). \qquad (2)$$

Плотность тока в вольфраме

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\pi d_1^2 / 4}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую напряженность электростатического поля в вольфраме:

$$E_1 = j_1 \rho_1 = \frac{4I}{\pi d_1^2} \rho_0 (1 + \alpha t);$$

$$[E_1] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_1 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8} (1 + 0{,}0045 \cdot 2000)}{3{,}14 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2} = 17{,}5\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Напряженность электростатического поля в меди

$$E_2 = j_2 \rho_2 = \frac{I\rho_2}{S_2} \text{ – учли, что } j_2 = \frac{I}{S_2};$$

$$[E_2] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}; \qquad E_2 = \frac{1 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-6}} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E_1 = 17{,}5\ \frac{\text{В}}{\text{м}};\ E_2 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.56

По медному проводу длиной l = 1000 м и диаметром d = 4 мм течет ток I. При каком значении тока падение напряжения U на проводе будет равно 10,8 В?

Дано:	**Решение**
l = 1000 м d = 0,004 м U = 10,8 В ρ = 0,017·10^{-6} Ом·м	Ток, текущий по участку однородного проводника, подчиняется закону Ома $$I = \frac{U}{R},$$
I – ?	где $R = \rho\frac{l}{S}$ – сопротивление провода.

Так как $S = \frac{\pi d^2}{4}$, то $R = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$.

Тогда сила тока

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U\pi d^2}{\rho 4l};$$

$$[I] = \frac{\text{В}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}}{\text{В}} = \text{А};$$

$$I = \frac{10{,}8\cdot 3{,}14\cdot 0{,}004^2}{0{,}017\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 1000} = 8\text{ А}.$$

Ответ: $I = 8$ А.

ЗАДАЧА 3.57

На катушку намотана медная проволока диаметром d = 1 мм. Какое сопротивление имеет проволока, если масса ее m = 3,41 кг?

Дано:	**Решение**
d = 10^{-3} м m = 3,41 кг	Сопротивление проводника $R = \rho\frac{l}{S}$, где ρ =
R – ?	= 1,7·10^{-8} Ом·м – удельное сопротивление медного провода; l – длина проволоки, намотанной на катушку; $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – сечение проволоки.

Длину l проволоки найдем, зная ее массу:
$m = DlS$, где D = 8,6·10^3 кг/м^3 – плотность меди.

Тогда $l=\dfrac{m}{DS}$, а сопротивление равно:

$$R=\rho\frac{m}{DS^2}=\rho\frac{16m}{D\pi^2d^4};$$

$$[R]=\frac{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{м}^4}=\text{Ом};$$

$$R=1{,}7\cdot10^{-8}\frac{16\cdot3{,}41}{8{,}6\cdot10^3\left(3{,}14\right)^2\left(10^{-3}\right)^4}=10{,}8\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R=10{,}8$ Ом.

ЗАДАЧА 3.58

Чтобы изготовить печь сопротивлением R = 40 Ом, при комнатной температуре t = 20 °С на фарфоровый цилиндр диаметром d = 5 см наматывают никелиновую проволоку радиусом r = 0,5 мм. Сколько витков проволоки потребуется для изготовления такой печи? Удельное сопротивление никелина ρ = $4\cdot10^{-7}$ Ом·м при температуре t = 20 °С.

Дано:
R = 40 Ом
d = 0,05 м
r = $5\cdot10^{-4}$ м
ρ = $4\cdot10^{-7}$ Ом·м
t = 20 °С

N – ?

Решение

Сопротивление проводника можно рассчитать по формуле

$$R=\rho\frac{l}{S}, \tag{1}$$

где ρ – удельное сопротивление; l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения.

Длина одного витка равна $2\pi\dfrac{d}{2}$, тогда длина всей намотанной проволоки $l=\pi dN$, где N – число витков. Площадь поперечного сечения провода $S=\pi r^2$. Подставив l и S в формулу (1), получим:

$$R=\rho\frac{\pi dN}{\pi r^2}.$$

Откуда
$$N=\frac{Rr^2}{\rho d}.$$

$$[N]=\frac{\text{Ом}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=1; \qquad N=\frac{40\cdot\left(5\cdot10^{-4}\right)^2}{4\cdot10^{-7}\cdot0{,}05}=500.$$

Ответ: $N=500$.

ЗАДАЧА 3.59

Электрический ток силой I = 8 А протекает по стальной проволоке круглого сечения. Радиус сечения r = 0,5 мм. Рассчитать скорость направленного движения (дрейфа) электронов в проволоке. Концентрацию электронов проводимости принять равной 10^{29} м$^{-3}$.

Дано:	Решение
$I = 8$ А $r = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ м $n = 10^{29}$ м$^{-3}$	Используя формулу $$j = en\langle\upsilon\rangle,$$ выразим среднюю скорость направленного движения
$\langle\upsilon\rangle$ – ?	через плотность тока:

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{j}{en}, \qquad \text{где} \qquad j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2}.$$

Тогда

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{I}{en\pi r^2};$$

$$\left[\langle\upsilon\rangle\right] = \frac{\text{А}\cdot\text{м}^3}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{8}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{29}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}25\cdot 10^{-6}} = 6{,}4\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = 6{,}4\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.60

В цепь источника постоянного тока с ЭДс ε = 6 В включен резистор сопротивления R = 80 Ом. Определить: 1) плотность тока в соединительных проводах площадью поперечного сечения S = 2 мм^2; 2) число N электронов, проходящих через сечение проводов за время t = 1 с. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

Дано:	Решение
$\varepsilon = 6$ В $R = 80$ Ом $S = 2\cdot 10^{-6}$ м^2 $t = 1$ с	1. Плотность тока по определению есть отношение силы тока I к площади поперечного сечения провода:
1) j – ?; 2) N – ?	$$j = \frac{I}{S}. \qquad (1)$$

Силу тока в этой формуле выразим по закону Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_1 + r}, \tag{2}$$

где R – сопротивление резистора; R_1 – сопротивление соединительных проводов; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и r (по условию задачи), из (2) получим:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Подставив это выражение силы тока в (1), найдем

$$j = \frac{\varepsilon}{RS};$$

$$[j] = \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}; \qquad j = \frac{6}{80 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 3{,}75 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

2. Число электронов, проходящих за время t через поперечное сечение, найдем, разделив заряд q, протекающий за это время через сечение, на элементарный заряд:

$$N = \frac{q}{e},$$

или с учетом того, что $q = It$ и $I = \frac{\varepsilon}{R}$, получим:

$$N = \frac{\varepsilon t}{eR};$$

$$[N] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}} = 1;$$

$$N = \frac{6 \cdot 1}{80 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4{,}69 \cdot 10^{17} \text{ электронов.}$$

Ответ: 1) $j = 3{,}75 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$; 2) $N = 4{,}69 \cdot 10^{17}$ электронов.

ЗАДАЧА 3.61

По железному проводнику (ρ = 7,87 г/см^3, M = 56·10^{-3} кг/моль) сечением S = 0,5 мм^2 течет ток I = 0,1 А. Определить среднюю скорость упорядоченного (направленного) движения электронов, считая, что число n свободных электронов в единице объема проводника равно числу атомов n' в единице объема проводника.

Дано:	**Решение**
$\rho = 7{,}87\cdot 10^{-3}$ кг/м^3 $M = 56\cdot 10^{-3}$ кг/моль $I = 0{,}1$ А $S = 0{,}5\cdot 10^{-6}$ м^2	Плотность тока в проводнике $$j = en\langle\upsilon\rangle, \quad (1)$$
$\langle\upsilon\rangle$ – ?	где $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения электронов в проводнике; n – концентрация электронов (число электронов в единице объема), $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Согласно условию задачи

$$n = n' = \frac{N}{V} = \frac{\frac{m}{M}N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{M}. \quad (2)$$

Учли, что $N = \frac{m}{M}N_A$, где m – масса проводника; M – его молярная масса; N_A = $6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро; $\rho = \frac{m}{V}$ – плотность железа.

Учитывая формулу (2) и то, что плотность тока $j = \frac{I}{S}$, выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{I}{S} = \frac{\rho N_A}{M}e\langle\upsilon\rangle.$$

Откуда искомая скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{IM}{\rho N_A eS};$$

$$[\langle\upsilon\rangle] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{0{,}1\cdot 56\cdot 10^{-3}}{7{,}87\cdot 10^{-3}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}} = 14{,}8\cdot 10^{-6}\text{м/с} = 14{,}8\ \text{мкм/с}.$$

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = 14{,}8$ мкм/с.

ЗАДАЧА 3.62

Определить плотность тока в медной проволоке длиной l = 100 м, если разность потенциалов на ее концах $\varphi_1 - \varphi_2$ = 10 В. Удельное сопротивление меди ρ = 17 нОм·м.

Дано:
l = 100 м
$\varphi_1 - \varphi_2$ = 10 В
ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м
j – ?

Решение

Согласно закону Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E, \qquad (1)$$

где $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ – удельная электрическая проводимость проводника; $E = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$ – напряженность электрического поля внутри однородного проводника, выраженная через разность потенциалов на концах проводника и его длину.

Подставив записанные формулы в выражение (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l};$$

$$[j] = \frac{\text{В}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}; \qquad j = \frac{10}{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 100} = 5{,}88 \cdot 10^6 \, \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 5{,}88 \, \frac{\text{МА}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $j = 5{,}88 \, \dfrac{\text{МА}}{\text{м}^2}$.

ЗАДАЧА 3.63

Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление ρ = 17 нОм·м), если удельная тепловая мощность тока ω = 1,7 $\dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$.

Дано:
ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м
ω = 1,7 $\dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$
j – ?

Решение

Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме

$$\omega = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho}; \qquad (1)$$

$$j = \sigma E = \frac{E}{\rho}, \qquad (2)$$

где σ и ρ – соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника.

Из закона (2) получим, что $E = \rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \sqrt{\frac{\omega}{\rho}};$$

$$[j]=\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{с}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}}}=\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^3\cdot\text{с}\cdot\text{В}\cdot\text{м}}}=\sqrt{\frac{\text{А}^2}{\text{м}^4}}=\frac{\text{А}}{\text{м}^2};\quad j=\sqrt{\frac{1{,}7}{1{,}7\cdot10^{-8}}}=10^4\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2}=10\ \text{кА/м}^2.$$

Ответ: $j=10$ кА/м^2.

ЗАДАЧА 3.64

Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем V = 375 см^3 и заполнено водородом, который частично ионизирован. Площадь пластин конденсатора S = 250 см^2. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока I, протекающего через конденсатор, достигнет значения 2 мкА, если концентрация n ионов обоих знаков в газе равна 5,3·10^7 см$^{-3}$? Принять подвижность ионов $b_+=5{,}4\cdot10^{-4}\,\frac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$, $b_-=7{,}4\cdot10^{-4}\,\frac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$.

Дано:
V = 375·10^{-6} м^3
S = 25·10^{-3} м^2
I = 2·10^{-6} А
n = 53 м$^{-3}$
$b_+=5{,}4\cdot10^{-4}\,\frac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$
$b_-=7{,}4\cdot10^{-4}\,\frac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$

U – ?

Решение

Напряжение U на пластинах конденсатора связано с напряженностью E электрического поля между пластинами и расстоянием d между ними соотношением

$$U=Ed. \qquad (1)$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения плотности тока

$$j=qn(b_++b_-)E,$$

где q – заряд иона.

Отсюда $E=\dfrac{j}{qn(b_++b_-)}=\dfrac{I}{qn(b_++b_-)S}$.

Расстояние d между пластинами найдем из соотношения

$$d=\frac{V}{S}.$$

Подставив выражения E и d в (1), получим

$$U=\frac{IV}{qn(b_++b_-)S^2};\qquad U = 100\ \text{В}.$$

$$[U]=\frac{\text{А}\cdot\text{м}^3}{\text{Кл}\cdot\text{м}^{-3}\left[\text{м}^3/(\text{В}\cdot\text{с})\right]\text{м}^4}=\frac{\text{А}\cdot\text{м}^6\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^6}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{В}.$$

Ответ: U = 100 В.

3.3. Магнитное поле в вакууме и веществе

Основные формулы

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция в точке поля, создаваемая элементом длины проводника $d\vec{l}$ с током I, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; μ – магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

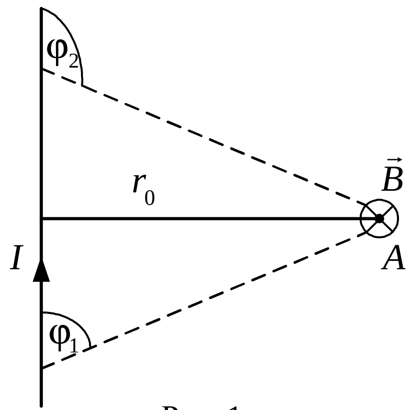


Рис. 1

Модуль вектора $d\vec{B}$ выражается формулой

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

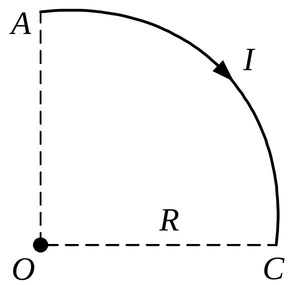


Рис. 2

Магнитная индукция поля бесконечно длинного прямого проводника с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

где r_0 – кратчайшее расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция в центре кругового витка радиусом R с током I

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемая отрезком проводника (рис. 1):

$$B = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}{4\pi r_0}.$$

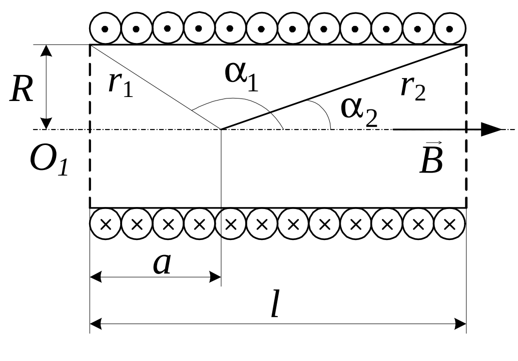


Рис. 3

Вектор $\vec{B}$ в точке A (рис. 1) направлен за чертеж перпендикулярно к его плоскости (по правилу правого винта). Индукция $\left|\vec{B}\right|$ магнитного поля в центре (точка O) дуги AC окружности длиной l, радиусом R, с током I (рис. 2)

$$B = \frac{\mu\mu_0 Il}{4\pi R^2}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемого длинным соленоидом (рис. 3), в средней его части

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, N – число витков соленоида, l – длина соленоида, I – сила тока в соленоиде.

Индукция магнитного поля на оси соленоида конечной длины

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} In\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right),$$

где α_1 и α_2 – углы между осью соленоида и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида.

Магнитная индукция поля внутри тороида

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r},$$

где N – число витков тороида, I – сила тока, r – внутренний радиус тороида.

Магнитная индукция на оси кругового витка радиусом R с током I на расстоянии a от его плоскости (рис. 4)

$$B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}},$$

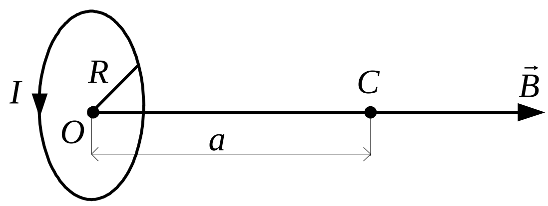


Рис. 4

направление вектора $\vec{B}$ определяется правилом правого винта.

Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i,$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля, $\vec{B}_i$ – магнитная индукция поля с индексом i.

Закон Ампера: сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = \left[d\vec{l}, \vec{B}\right] I,$$

где $\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ – векторное произведение элемента длины проводника $d\vec{l}$ и магнитной индукции поля $\vec{B}$.

Модуль силы Ампера

$$dF = IBdl \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Сила взаимодействия двух прямых бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, приходящаяся на единицу длины каждого из проводников,

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

где d – расстояние между проводниками.

Сила Лоренца – сила, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right].$$

Модуль силы Лоренца

$$F = q\upsilon B \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Результирующая сила, действующая на заряженную частицу с электрическим зарядом q, находящуюся в электрическом и магнитном полях,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) Φ через произвольную поверхность S в случае однородного магнитного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha = B_n S,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности, $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$.

В случае неоднородного поля поток Φ вектора $\vec{B}$

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к элементу площади dS.

Работа dA перемещения замкнутого контура с током силой I в магнитном поле определяется соотношением

$$dA = -Id\Phi,$$

где $d\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B – магнитная индукция, I – сила тока, d – толщина пластинки, $R = \frac{1}{en}$ – постоянная Холла (n – концентрация электронов, e – заряд электрона).

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной контура l произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром.

Теорема о циркуляции вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I,$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром l.

Намагниченность

$$\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{P}}{V},$$

где $\vec{P}_m = \sum \vec{P}$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{j} = \chi\vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{j}\right) = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_0(1+\chi)\vec{H}.$$

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества:

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0\left(I + I'\right),$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру L произвольной формы; I и I' – соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным вектором.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 3.65

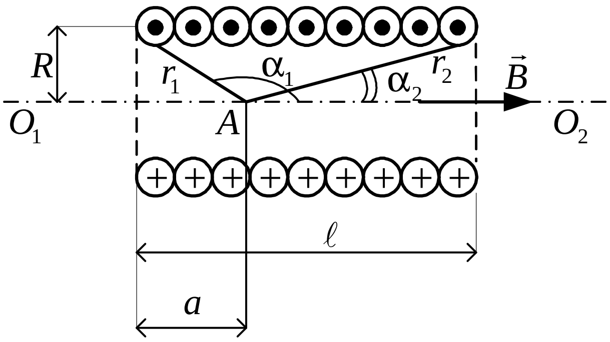
Соленоид длиной l = 20 см содержит N = 1000 витков. Радиус катушки соленоида R = 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси соленоида на расстоянии a = 5 см от его конца. По обмотке соленоида идет ток I = 5 А.

Дано:
l = 0,2 м
N = 1000
R = 0,1 м
a = 0,05 м
I = 5 А
B – ?

Решение

Соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось.

На рисунке показано сечение соленоида длиной l с током I. Кружки с точками представляют собой сечения витков радиуса R, в которых ток направлен из-за чертежа к нам, а кружки с крестиками – сечения витков, в которых ток направлен за чертеж; n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида $\left(n = \dfrac{N}{l}\right)$. По правилу буравчика магнитная индукция $\vec{B}$ в любой точке, лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси и ее модуль равен алгебраической сумме индукций, создаваемых всеми витками в этой точке. Магнитная индукция в произвольной точке A соленоида определяется по формуле



$$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 nI\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right),$$

где $\alpha_2 < \alpha_1$, $\mu = 1$ (для вакуума), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Из рисунка видно, что $\cos\alpha_1 = \dfrac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$; $\cos\alpha_2 = \dfrac{l-a}{\sqrt{R^2 + \left(l-a\right)^2}}$.

Таким образом, $$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N}{l} I\left(\frac{l-a}{\sqrt{R^2 + \left(l-a\right)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right);$$

$$\left[B\right] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{1}{2} 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1000}{0,2} 5\left(\frac{0,2 - 0,05}{\sqrt{0,1^2 + \left(0,2 - 0,05\right)^2}} - \frac{0,05}{\sqrt{0,1^2 + 0,05^2}}\right) =$$

$$= 40,2 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл} = 40,2\ \text{мТл}.$$

Примечание. Можно доказать, что при прочих равных условиях индукция B наибольшая в точке, лежащей на середине оси соленоида, причем $B_{\max} = \dfrac{\mu\mu_0 nIl}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$.

Ответ: $B = 40,2$ мТл.

ЗАДАЧА 3.66

Найти напряженность H магнитного поля внутри прямого длинного соленоида при силе тока I = 4 А. Витки намотаны из проволоки радиусом r = 0,25 мм. Толщиной изоляции пренебречь.

Дано:	Решение
I = 4 А r = 25·10^{-5} м	По условию соленоид можно считать бесконечно длинным, тогда напряженность поля внутри него определим по формуле $H = nI$.
H – ?	

Предполагается, что витки плотно прилегают друг к другу, поэтому длина соленоида $l = N2r$.

Итак,

$$H = I\frac{N}{l} = I\frac{N}{N2r} = \frac{I}{2r}, \quad H = \frac{4}{2\cdot 25\cdot 10^{-5}} = 8\cdot 10^{3}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: $H = 8\cdot 10^{3}\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.67

По двум длинным параллельным проводам текут токи $I_1 = I_2 = 30$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами d = 5 см. Найти модуль и направление напряженности $\vec{H}$ магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 = 4 см от одного и r_2 = 3 см от другого провода.

Дано:
$I_1 = I_2 = 30A$
d =0,05 м
r_1 = 0,04 м
r_2 = 0,03 м

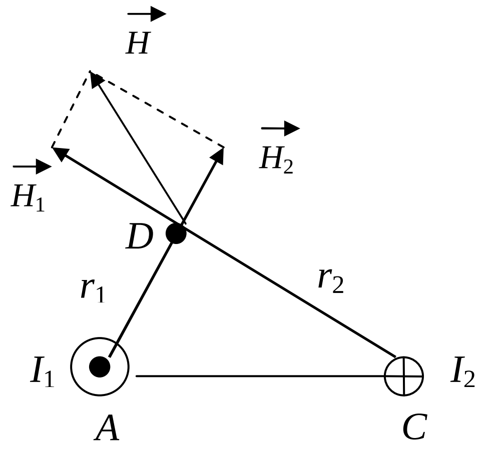
H – ?

Решение

Согласно принципу суперпозиции напряженность магнитного поля в точке D (см. рисунок)

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$

где $H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi r_1}$; $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi r_2}$ (проводники бесконечно длинные).



Направления векторов H_1 и H_2 определяются по правилу буравчика. Треугольник ADC – прямоугольный (треугольник Пифагора),

$$\angle ADC = \angle H_1DH_2 = 90°.$$

Поэтому напряженность в точке D

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$$

или $$H = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi r_2}\right)^2}.$$

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}; \quad H = \sqrt{\left(\frac{30}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}04}\right)^2 + \left(\frac{30}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}03}\right)^2} = 200\,\frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: $H = 200\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.68

Два параллельных бесконечно длинных провода расположены на расстоянии d = 4 см друг от друга. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см и от другого – на расстоянии r_2 = 8 см. Токи в проводах I_1 = 50 А и I_2 = 100 А текут в одном направлении.

Дано:	**Решение**
d = 0,04 м r_1 = 0,05 м r_2 = 0,08 м I_1 = 50 А I_2 = 100 А	Для нахождения магнитной индукции в указанной точке A (см. рис.) определим направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.
B – ?	Модуль индукции найдем по теореме косинусов

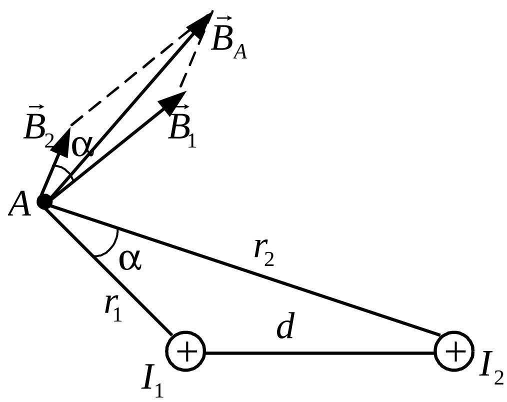
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Значения индукций B_1 и B_2 вычислим по формулам

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Подставляя выражения для B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\frac{\mu_0}{2\pi}$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 + 2\frac{I_1 I_2}{r_1 r_2}\cos\alpha}; \ (2)$$



$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}.$$

Из треугольника ADC по теореме косинусов запишем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$;

$$\cos\alpha = 0{,}912;$$

$$B = \frac{4\pi\cdot10^{-7}}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{50}{0{,}05}\right)^2 + \left(\frac{100}{0{,}08}\right)^2 + 2\frac{50\cdot100}{0{,}05\cdot0{,}08}\cdot0{,}912} = 443\cdot10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B = 443$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.69

Определить магнитную индукцию на оси кругового контура на расстоянии d = 3 см от его плоскости, если радиус контура R = 4 см, а сила тока в контуре равна 5 А.

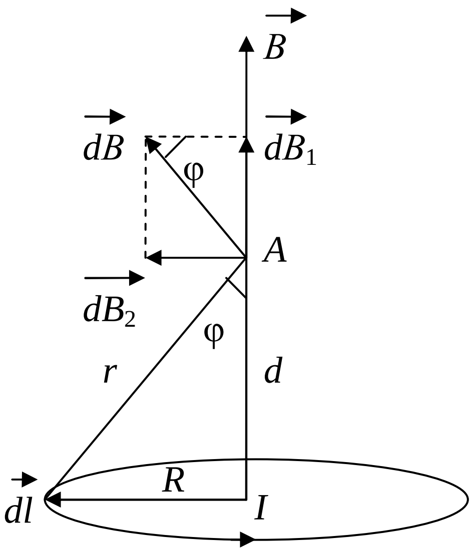
Дано:
$d = 3\cdot10^{-2}$ м
$R = 4\cdot10^{-2}$ м
$I = 5$ А
$B = ?$

Решение

Согласно закону Био – Савара – Лапласа магнитная индукция поля в вакууме, создаваемого элементом $\vec{dl}$ проводника с током I,

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\left[\vec{dl},\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный от $\vec{dl}$ к точке A, а вектор $\vec{dB}$ (см. рис.) направлен согласно правилу правого винта.



Согласно принципу суперпозиции магнитных полей индукция в точке A

$$\vec{B} = \oint_L \vec{dB}, \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по всем элементам кругового контура.

Разложив вектор $\vec{dB}$ на два компонента – $\vec{dB_1}$, перпендикулярный к плоскости контура, и $\vec{dB_2}$, параллельный ей, получим:

$$\vec{dB} = \vec{dB_1} + \vec{dB_2}.$$

Учитывая, что из соображений симметрии $\int_L \vec{dB_2} = 0$, а векторы $\vec{dB_1}$ от всех элементов $\vec{dl}$ сонаправлены, интеграл (2) сводится к выражению

$$B = \int_0^{2\pi R} \vec{dB_1}, \qquad (3)$$

где, как следует из рисунка,

$$dB_1 = dB\sin\varphi. \qquad (4)$$

Поскольку все элементы кругового контура перпендикулярны к радиус-вектору, то, согласно (1),

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Idl}{\left(R^2+d^2\right)}, \text{ учтено, что } r = \sqrt{R^2+d^2}. \qquad (5)$$

Из рисунка следует, что $\sin\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}$. Подставив это выражение в формулу (4), а также учитывая (5), найдем, согласно (3), искомую магнитную индукцию на оси кругового контура:

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IRdl}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}};$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Ам}^2}{\left(\text{м}^2\right)^{3/2}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2\text{А}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2}{2 \cdot \left(\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2\right)^{3/2}} = 40{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B = 40{,}2$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.70

Бесконечно длинный проводник изогнут так, как показано на рис. 1. Радиус дуги окружности R = 10 см. Определить магнитную индукцию поля $\vec{B}$, создаваемого в точке O током I = 80 А, текущим по этому проводнику.

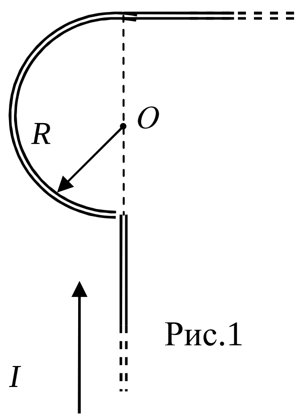


Рис.1

Дано:	Решение
$R = 0{,}1$ м $I = 80$ А $B = ?$	Магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей: $\vec{B} = \sum \vec{B_i}$.

В нашем случае проводник можно разбить на три части (рис. 2): два прямолинейных проводника (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиусом R.

Тогда

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3},$$

где $\vec{B_1}$, $\vec{B_2}$ и $\vec{B_3}$ – магнитные индукции поля в точке O, создаваемые током, текущим, соответственно, на первом, втором и третьем участках проводника.

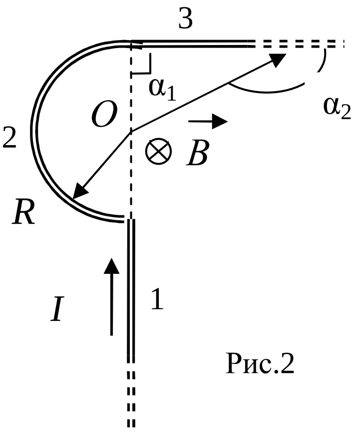


Рис.2

Так как точка O лежит на оси проводника 1, то $B_1 = 0$, и тогда

$$\vec{B} = \vec{B_2} + \vec{B_3}.$$

Учитывая, что векторы $\vec{B_2}$ и $\vec{B_3}$ направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно к плоскости чертежа от нас, геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнитную индукцию поля B_2 можно найти, используя выражение для магнитной индукции в центре кругового проводника с током I:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Так как магнитная индукция B_2 создается в точке O половиной такого кругового проводника с током, то, учитывая равный вклад в магнитную индукцию от каждой половинки проводника, можно написать:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, используя закон Био – Савара – Лапласа:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

В нашем случае $r_0 = R$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $\left(\cos\alpha_1 = 0\right)$; $\alpha_2 \to \pi$; $\left(\cos\alpha_2 = -1\right)$.

Тогда $B_3 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$.

Используя найденные выражения для B_2 и B_3, получим:

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\pi + 1\right);$$

$$\left[B\right] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{А}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80}{4\pi \cdot 0{,}1}\left(3{,}14 + 1\right) = 3{,}31 \cdot 10^{-4}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B = 331$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.71

Стороны прямоугольника, изготовленного из тонкого провода, равны: a = 30 см и b = 40 см. Магнитная индукция $\vec{B}_0$ в точке пересечения диагоналей равна 400 мкТл, если по проводнику пропустить ток I. Определить величину тока I.

Дано:	
a = 0,3 м	
b = 0,4 м	
$B_0 = 4\cdot10^{-4}$ Тл	
I – ?	

Решение

Обозначим индукции магнитных полей, создаваемых в точке O прямоугольника проводами AB, BC, CD, DA, соответственно, $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ (см. рис.).

Они имеют одинаковое направление – перпендикулярно к плоскости контура от нас. Поэтому индукция результирующего магнитного поля в точке O равна

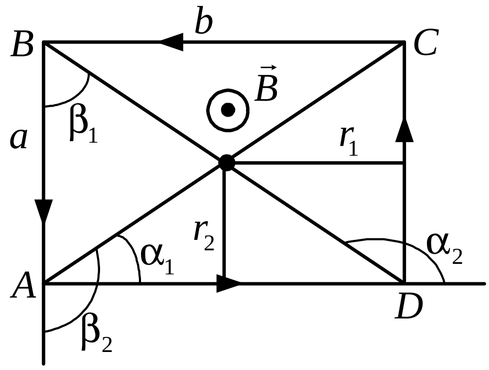
$$B_0 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Стороны прямоугольника AB и CD обозначены a, а BC и DA – b. В силу симметрии $B_1 = B_3$ и $B_2 = B_4$. Таким образом,

$$B_0 = 2B_1 + 2B_2.$$

Величины B_1 и B_2 можно вычислить по формуле

$$B = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}{4\pi r},$$



тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right);$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Из рисунка можно также определить:

$$\cos\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\beta_2 = \cos\left(180-\beta_1\right) = -\cos\beta_1;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad \cos\alpha_2 = \cos\left(180-\alpha_1\right) = -\cos\alpha_1;$$

$$r_1 = \frac{b}{2}; \qquad r_2 = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, индукция магнитного поля в точке O пересечения диагоналей равна:

$$B_0 = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{b}{2}}\left(2\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a}{2}}\left(2\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{8\mu_0 I}{4\pi ab}\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Из последней формулы находим:

$$I = \frac{B_0 4\pi ab}{8\mu_0\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$[I] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{А};$$

$$I = \frac{4\cdot10^{-4}\cdot4\cdot3{,}14\cdot0{,}3\cdot0{,}4}{8\cdot4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\sqrt{0{,}3^2+0{,}4^2}} = 120\,\text{А}.$$

Ответ: $I = 120\,\text{А}$.

ЗАДАЧА 3.72

По тонкому проволочному контуру в виде треугольника течет ток. Не изменяя силы тока, контуру придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Решение

Рассмотрим контур 1 в виде равностороннего треугольника (рис. 1) и выберем направление тока. По принципу суперпозиции

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AC} + \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{DC}.$$

Все эти векторы направлены перпендикулярно к плоскости чертежа от нас и в силу симметрии равны по модулю. Следовательно, $B_\Delta = 3B_{AC}$.

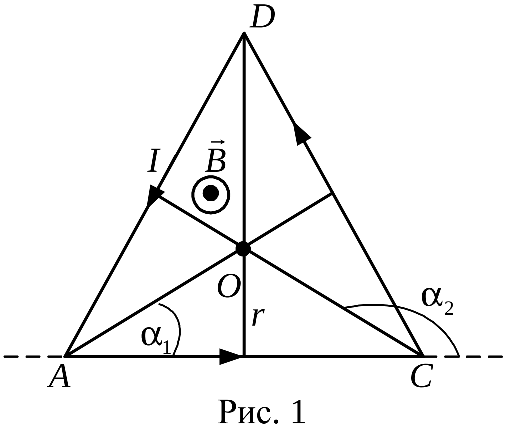


Рис. 1

Тогда

$$B_{AC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right);$$

$$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2; \quad \alpha_1 = 30°.$$

Пусть длина проволочного контура – l, тогда сторона треугольника – $\frac{l}{3}$, а

$$r = \frac{l}{6\sqrt{3}}.$$

Таким образом, магнитная индукция в центре треугольника

$$B_\Delta = 3\frac{\mu_0 I 6\sqrt{3}}{4\pi l} 2\cos\alpha_1 = \frac{54\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Рассмотрим теперь контур 2 из того же проводника, но имеющий форму квадрата (рис. 2). Выбрав направление тока, проведя аналогичные рассуждения, будем иметь:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD};$$

$$B_0 = 4B_{AD} = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right);$$

$$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2; \qquad \beta_1 = 45°.$$

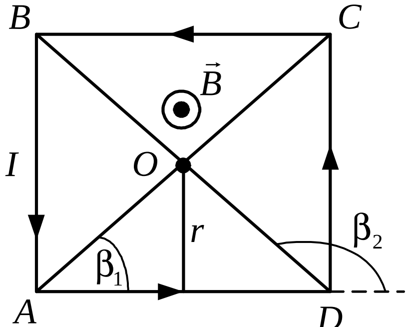


Рис. 2

Сторона квадрата (длина контура не изменилась) $a = \frac{l}{4}$, а $r = \frac{l}{8}$.

Окончательно имеем:

$$B_\square = 4\frac{8\mu_0 I}{4\pi l} 2\cos\beta_1 = \frac{32\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Вычислим, во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура $\frac{B_\Delta}{B_\square}$:

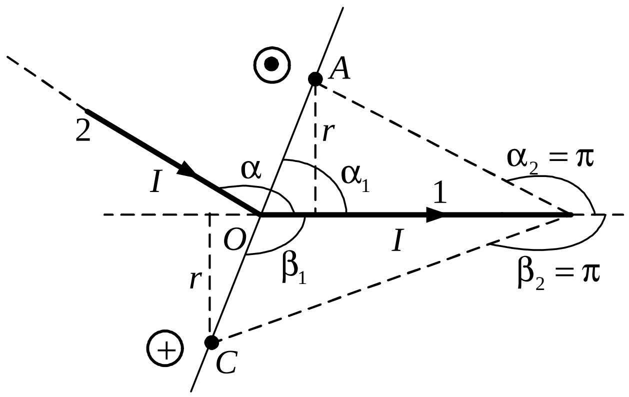
$$\frac{B_\Delta}{B_\square} = \frac{54\mu_0 I \; 4\pi l}{4\pi l \; 32\sqrt{2}\mu_0 I} = 1{,}19.$$

Ответ: уменьшилась в 1,19 раз.

ЗАДАЧА 3.73

Длинный прямой провод с током I = 50 А изогнут под углом α = 150°. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от его вершины на расстояние a = 5 см.

Дано:	**Решение**
I = 50 А α = 150° $OA = OC = a$ = 0,05 м B_A, B_C – ?	Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых сходятся в точке O (см. рис.). В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция $\vec{B}$ в точке A будет равна геометрической сумме



$\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых проводниками 1 и 2, т.е.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

В силу симметрии $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$, а векторы направлены перпендикулярно к плоскости чертежа от нас.

Следовательно, в точке A результирующая индукция

$$B_A = 2B_1 .$$

Магнитную индукцию B_1 можно вычислить по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

где $\alpha_1 = 75°$, $\alpha_2 = \pi$ для бесконечно длинного провода и $r = a\sin\alpha_1$.

Следовательно,

$$B_A = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(\cos\alpha_1 + 1\right);$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B_A = 2\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{4\pi\cdot 0{,}05\cdot\sin 75°}\left(\cos 75° + 1\right) = 261\cdot 10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести относительно точки C:

$$\vec{B}_C = \vec{B}_1' + \vec{B}_2'; \qquad B_C = 2B_1'.$$

Направление вектора $\vec{B}_C$, определяемое по правилу буравчика, противоположно $\vec{B}_A$,

$$B_1' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right),$$

где $\beta_1 = \pi - \alpha_1 = 105°$, $\qquad \beta_2 = \pi$.

Таким образом,

$$B_C = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(-\cos\alpha_1 + 1\right);$$

$$B_C = 2\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50}{4\pi\cdot 0{,}05\cdot\sin 75°}\left(-\cos 75° + 1\right) = 153\cdot 10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B_A = 261\cdot 10^{-6}\,\text{Тл}$; $B_C = 153\cdot 10^{-6}\,\text{Тл}$.

ЗАДАЧА 3.74

По контуру $ABCA$ идет ток I = 10 А. Определить вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля в точке O, если радиус дуги AB R = 10 см, φ = 60° (см. рис.).

Дано:
I = 10 А
R = 0,1 м
φ = 60°
μ = 1
$\vec{B}$ – ?

Решение

Индукция $\vec{B}$ магнитного поля в точке O по принципу суперпозиций полей равна векторной сумме индукций магнитного поля, создаваемых всеми элементами контура с током. Разобьем весь контур на три участка: дугу AB и прямолинейные отрезки BC и CA. Тогда будем иметь:

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}.$$

Вычислим модули всех трех слагаемых. Индукция $\vec{B}_{AB}$ магнитного поля от дуги AB вычисляется по формуле

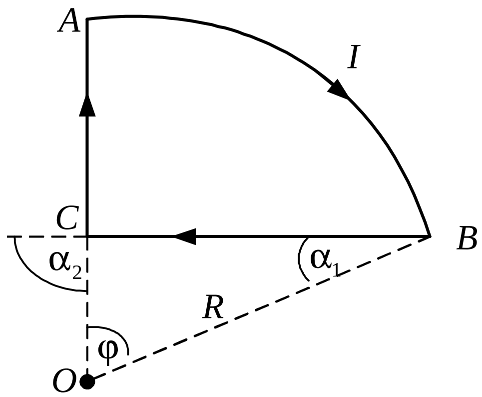
$$B = \frac{\mu_0 \mu I l}{4\pi R^2},$$

где дуга $l = \dfrac{2\pi R}{6}$, так как угол φ = 60°.

Тогда $B_{AB} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{12R}$.

Индукция $\left|\vec{B}_{BC}\right|$ магнитного поля от отрезка BC вычисляется по формуле для величины индукции линейного проводника конечной длины:

$$B_{BC} = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{4\pi a}.$$



Из рисунка видно, что α_1 = 30°; α_2 = 90°; длина a отрезка OC

$$a = OC = R\sin\alpha_1 = R\sin 30°.$$

Тогда

$$B_{BC} = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}\cdot 2}{4\pi R\cdot 2} = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}}{4\pi R}.$$

Индукция $\left|\vec{B}_{CA}\right|$ магнитного поля от проводника CA в точке O будет равна нулю, так как в формуле индукции для конечного проводника в данном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ и, следовательно, $B_{CA} = 0$. Тогда результирующий вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля будет равен: $\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}$.

Оба эти векторы перпендикулярны к плоскости рисунка; по правилу правого винта вектор $\vec{B}_{AB}$ направлен от наблюдателя, а вектор $\vec{B}_{BC}$ – к наблюдателю. Если принять направление вектора $\vec{B}_{BC}$ за положительное, то модуль $\left|\vec{B}\right|$ результирующего вектора $\vec{B}$ будет равен:

$$B = B_{BC} - B_{AB}; \qquad B = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{3}}{4\pi R} - \frac{\mu\mu_0 I}{12R}.$$

Вектор $\vec{B}$ направлен к нам перпендикулярно к плоскости листа, а модуль результирующего вектора $\vec{B}$ определяется как

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{1}{6}\right);$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{7}\cdot 10}{2\cdot 10^{-1}}\left(0,28 - 0,17\right) = 0,69\cdot 10^{-5}\,\text{Тл} = 6,9\text{ мкТл}.$$

Ответ: $B = 6,9$ мкТл.

ЗАДАЧА 3.75

По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А. Определить силу взаимодействия.

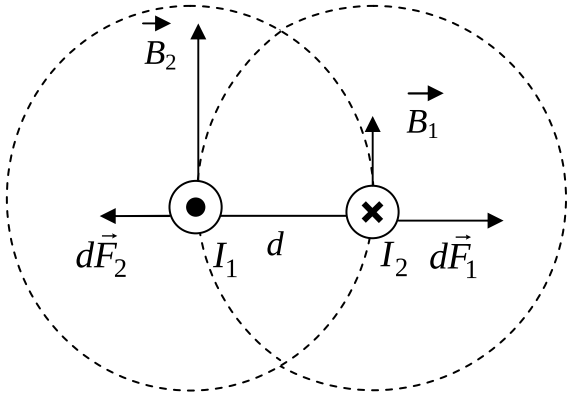
Дано:	**Решение**
$l = 2$ м $d = 0,1$ м $I_1 = 50$ А $I_2 = 100$ А	Согласно закону Ампера на каждый элемент проводника длиной dl с током I_2 действует магнитное поле, создаваемое током I_1, сила $$dF_1 = I_2 B_1 dl. \qquad (1)$$
$F - ?$	

Направление силы определено по правилу левой руки и указано на рисунке.

Аналогичные рассуждения (ток I_1 находится в магнитном поле, создаваемом током I_2) приводят к выражению

$$dF_2 = I_1 B_2 dl. \qquad (2)$$

Модули магнитных индукций B_1 и B_2 (направления векторов $\overrightarrow{B_1}$ и $\overrightarrow{B_2}$ показаны на рисунке) определяются соотношениями



$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}; \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d}.$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получим, что по модулю

$$dF_1 = dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl = dF. \qquad (3)$$

Направления сил указаны на рисунке.

Проинтегрировав выражение (3), найдем искомую силу взаимодействия токов:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l; \quad [F] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} \cdot \text{м} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{А}^2 \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}^2 \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н};$$

$$F = \frac{12{,}57 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 100 \cdot 2}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} = 20 \cdot 10^{-3} \text{Н}.$$

Ответ: $F = 20$ мН.

ЗАДАЧА 3.76

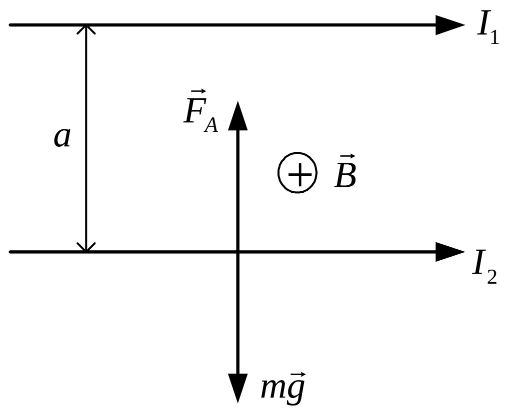
По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток силой I_1 = 27 А. Под ним на расстоянии a = 1,5 см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток I_2 = 1,5 А. Определить, какой должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Плотность алюминия 2,7 г/см^3. Равновесие будет устойчивым или неустойчивым?

Дано:
I_1 = 27 А
I_2 = 1,5 А
ρ = 2,7·10^3 кг/м^3
μ = 1
g = 10 м/с^2
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
a = 1,5·10^{-2} м

S – ?

Решение

Проводник с током силой I_1 образует вокруг себя на расстоянии a магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. На проводник с током силой I_2 будет действовать сила Ампера $\vec{F}_A$ со стороны этого магнитного поля. По правилу левой руки эта сила направлена вверх (см. рис.). Чтобы проводник удерживался незакрепленным, сила Ампера $\vec{F}_A$, приходящаяся на единицу длины проводника, должна быть равна силе



тяжести $m\vec{g}$, приходящейся на единицу длины проводника.

$$\frac{F_A}{l} = BI_2; \qquad \frac{mg}{l} = \rho Sg;$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a}; \qquad \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = \rho Sg.$$

Отсюда выразим площадь S поперечного сечения алюминиевого проводника:

$$S = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a \rho g};$$

$$[S] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с}^2}{\text{А}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м}^2;$$

$$S = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 27\cdot 1{,}5}{2\pi\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 2{,}7\cdot 10^3\cdot 10} = 2\cdot 10^{-8}\text{м}^2.$$

Равновесие будет неустойчивым, так как при малейшем смещении проводники в исходное положение не возвратятся.

Ответ: $S = 2\cdot 10^{-8}\text{м}^2$.

ЗАДАЧА 3.77

Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии a_1 = 10 см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи силой 20 А и 30 А. Какую работу A_l на каждый метр длины проводника нужно совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния a_2 = 20 см (см. рис.)?

Дано:
I_1 = 20 А
I_2 = 30 А
a_1 = 0,1 м
a_2 = 0,2 м
μ = 1
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м

A_l – ?

Решение

Элементарная работа A_l при перемещении второго проводника от первого на расстояние dx равна:

$$dA = F_A dx,$$

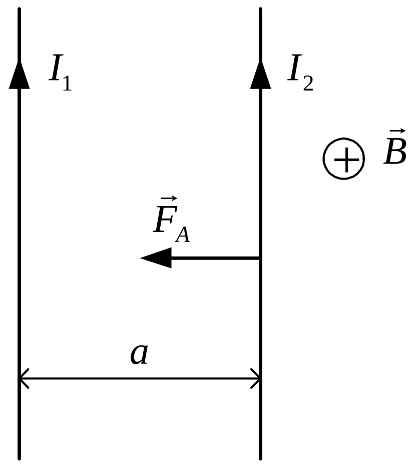
где F_A – сила Ампера, действующая на проводник с током силой I_2 со стороны проводника с током силой I_1.

При этом сила Ампера F_A равна:

$$F_A = BI_2 l,$$

где B – модуль магнитной индукции поля первого проводника на расстоянии x от него:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$



Тогда элементарная работа dA_l, приходящаяся на единицу длины,

$$dA_l = \frac{dA}{l} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}.$$

Конечное ее значение получается интегрированием по смещению x второго проводника

$$\frac{A}{l} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{a_2}{a_1};$$

$$\left[\frac{A}{l}\right] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}};$$

$$\frac{A}{l} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20\cdot 30\cdot 0,69}{2\pi} = 8,28\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\frac{A}{l} = 8,28\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.78

В однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл влетает протон под углом 30° к направлению поля. Кинетическая энергия протона W = 433 эВ. Определить радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

Дано:

B = 0,1 Тл

α = 30°

$W = 693\cdot 10^{-19}$ Дж

$m_p = 1,67\cdot 10^{-27}$ кг

$q_p = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл

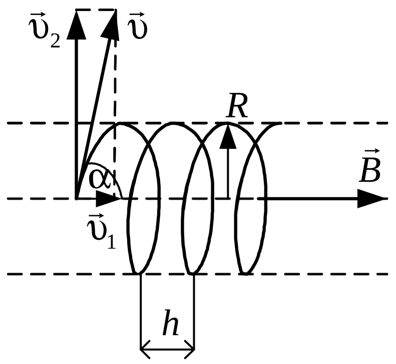
R – ?

Решение

Движение протона в однородном магнитном поле со скоростью $\vec{\upsilon}$, направленной под углом α к вектору магнитной индукции $\vec{B}$, происходит по винтовой линии (спирали). Разложим скорость протона на две составляющие – параллельную линиям индукции и перпендикулярную к ним (см. рис.):

$$\upsilon_1 = \upsilon\cos\alpha; \quad (1)$$

$$\upsilon_2 = \upsilon\sin\alpha. \quad (2)$$



Благодаря наличию перпендикулярной составляющей скорости υ_2 на протон действует сила Лоренца, заставляя его двигаться по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Радиус окружности определяется условием

$$\frac{m\upsilon_2^2}{R} = q\upsilon_2 B,$$

так как сила Лоренца сообщает протону центростремительное ускорение.

Отсюда

$$R = \frac{m\upsilon_2}{qB} = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}. \qquad (3)$$

Вдоль направления вектора $\vec{B}$ силы не действуют, поэтому частица движется равномерно со скоростью υ_1.

В результате сложения двух движений протон движется по спирали радиусом R с шагом винта h:

$$h = \upsilon_1 T, \qquad (4)$$

где T – период обращения протона по окружности;

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon_2}. \qquad (5)$$

Учитывая соотношения (1) – (3) и (5), из уравнения (4) получаем:

$$h = \frac{2\pi\upsilon m\cos\alpha}{qB}.$$

Скорость протона входит в кинетическую энергию:

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2}; \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2W}{m}};$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot 693\cdot 10^{-19}}{1{,}67\cdot 10^{-27}}} = 2{,}9\cdot 10^5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Протон, обладающий такой скоростью, не является релятивистским, так как $\upsilon \ll c$.

Таким образом,

$$R=\frac{\sqrt{2mW}\sin\alpha}{qB};\qquad h=\frac{2\pi\sqrt{2mW}\cos\alpha}{qB};\qquad h = 16{,}3\text{ см};$$

$$[R]=\frac{\sqrt{\text{Дж}\cdot\text{кг}}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}}=\frac{\sqrt{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{Н}}=\text{м};$$

$$R=\frac{\sqrt{2\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\cdot693\cdot10^{-19}}\sin30^\circ}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}1}=1{,}5\cdot10^{-2}\text{ м}=1{,}5\text{ см}.$$

Ответ: $R=1{,}5$ см.

ЗАДАЧА 3.79

Перпендикулярно к магнитному полю с индукцией B = 0,1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью E = 100 кВ/м. Перпендикулярно к обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Дано:	**Решение**
B = 0,1 Тл E = 10^5 В/м	Чтобы движение заряженной частицы было равномерным и прямолинейным, должно выполняться условие (см. рис.):
υ – ?	

$$F_л=F_к, \tag{1}$$

где $F_л$ – сила Лоренца; $F_к$ – кулоновская сила,

$$F_л=q\upsilon B\sin\alpha \qquad (\sin\alpha=1);$$

$$F_к=qE.$$

Подставим выражения для этих сил в равенство (1):

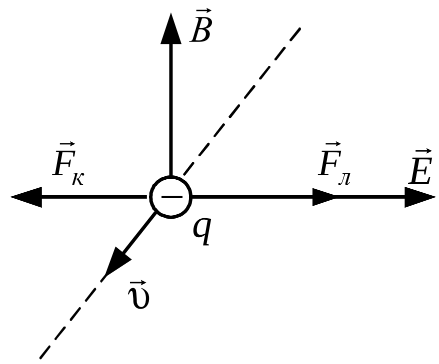
$$q\upsilon B=qE,$$

откуда

$$\upsilon=\frac{E}{B};$$

$$[\upsilon]=\frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Н}}=\frac{\text{В}\cdot\text{А}}{\text{Н}}\cdot\frac{\text{с}}{\text{с}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon=\frac{10^5}{0{,}1}=10^6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$



Ответ: $\upsilon=10^6\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.80

Протон влетает в электромагнитное поле со скоростью υ = 100 км/с. Магнитное поле с напряженностью H = 2,6 кА/м и электрическое поле напряженностью E = 210 В/м направлены одинаково. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное ускорение протона. Задачу решить, если скорость протона направлена:

1) параллельно направлению электрического поля;
2) перпендикулярно к направлению электрического поля.

Дано:
$\upsilon = 10^5$ м/с
$H = 2{,}6 \cdot 10^3$ А/м
$E = 210$ В/м
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

a_n, a_τ, a – ?

Решение

1. При совпадающих по направлению полях $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 1), когда скорость протона совпадает с общим направлением полей, на него действует только кулоновская сила (сила Лоренца равна нулю):

$$F_к = qE.$$

По второму закону Ньютона эта сила равна ma_τ:

$$ma_\tau = qE; \qquad a_\tau = \frac{qE}{m};$$

$$a_\tau = a = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 210}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 20{,}1 \cdot 10^9 \text{ м/с}^2.$$

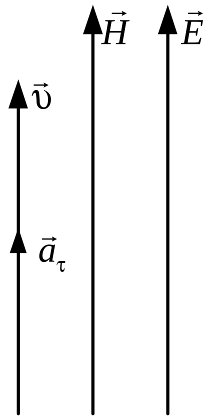


Рис. 1

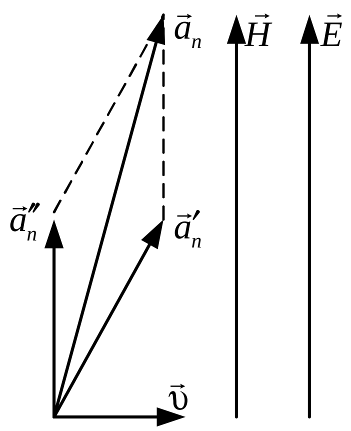


Рис. 2

2. Если направление вектора скорости протона перпендикулярно к направлению векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 2), то к кулоновской силе добавляется сила Лоренца:

$$F_л = qB\upsilon \sin\alpha \qquad (\sin\alpha = 1).$$

Сила Лоренца перпендикулярна к вектору скорости протона и создает нормальное ускорение:

$$ma'_n = qB\upsilon; \qquad a'_n = \frac{qB\upsilon}{m}.$$

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, считая μ = 1, получим:

$$a'_n = \frac{q\mu_0 H\upsilon}{m};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Электрическое поле действует перпендикулярно к движению протона, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a_n'' = \dfrac{qE}{m}$. Векторы $\vec{a}_n'$ и $\vec{a}_n''$ взаимно перпендикулярны, поэтому нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{\left(a_n'\right)^2 + \left(a_n''\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{q\mu_0 H\upsilon}{m}\right)^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2};$$

$$\left[a_n''\right] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = a = \sqrt{\left(\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot2{,}6\cdot10^{3}\cdot10^{5}}{1{,}67\cdot10^{-27}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot210}{1{,}67\cdot10^{-27}}\right)^2} = 37{,}5\cdot10^{9}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 1) $a_\tau = a = 20{,}1\cdot10^{9}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) $a_n = a = 37{,}5\cdot10^{9}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

ЗАДАЧА 3.81

В однородное магнитное поле напряженностью H = 200 кА/м влетает заряженная частица со скоростью υ = 10^6 м/с перпендикулярно к магнитному полю. В результате частица движется по окружности радиусом R = 8,3 см. Найти удельный заряд частицы.

Дано:
H = $2\cdot10^5$ А/м
υ = 10^6 м/с
R = 0,083 м

$\dfrac{q}{m}$ – ?

Решение

На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца

$$F_л = q\upsilon B,$$

которая сообщает ей центростремительное ускорение, заставляя частицу двигаться по окружности, т.е.

$$F_ц = F_л; \qquad \frac{m\upsilon^2}{R} = qB\upsilon.$$

Отсюда

$$\frac{q}{m} = \frac{\upsilon}{RB} = \frac{\upsilon}{\mu_0 RH};$$

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Гн}\cdot\text{м}\cdot\text{А}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{с}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Например, для α-частицы

$$\frac{q}{m} = \frac{2q_p}{4m_p},$$

где $q_p = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл – заряд протона; $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг – масса протона.

$$\left(\frac{q}{m}\right)_\alpha = \frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{4\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}} = 4{,}8\cdot 10^{7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Ответ: в магнитном поле движется α-частица $\left(\frac{q}{m}\right)_\alpha = 4{,}8\cdot 10^{7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

ЗАДАЧА 3.82

Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Найти отношение периода обращения T_1 протона в магнитном поле к периоду обращения T_2 α-частицы.

Дано:

$m_1 = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг

$m_2 = 6{,}64\cdot 10^{-27}$ кг

$q_1 = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$q_2 = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл

$\frac{T_1}{T_2}$ – ?

Решение

Период обращения заряженной частицы

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon}. \qquad (1)$$

Скорость частицы υ найдем из условия, что на частицу при ее движении в магнитном поле действует сила Лоренца $F_л = qB\upsilon\sin\alpha$ ($\sin\alpha = 1$ по условию), которая сообщает частице центростремительное ускорение, т.е.

$$F_л = ma_ц = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Тогда

$$qB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдем скорость частицы и подставим ее в формулу (1):

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (3)$$

Учитывая, что заряженные частицы влетают в одно и то же магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, используя выражение (3), найдем отношение их периодов обращения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 q_2}{q_2 m_2}, \qquad (4)$$

где m_1, q_1 – масса и заряд протона; m_2, q_2 – масса и заряд α-частицы.

Из уравнения (4) найдем отношение их периодов:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,64 \cdot 10^{-27}} = 0,5.$$

Ответ: $\frac{T_1}{T_2} = 0,5$.

ЗАДАЧА 3.83

В магнитном поле с индукцией B = 0,6 Тл по круговой орбите радиусом R = 4 см движется заряженная частица. Скорость движения частицы υ = 10^6 м/с. Найти заряд q частицы и частоту n обращения ее в магнитном поле, если известно, что ее энергия W = 24 кэВ.

Дано:
B = 0,6 Тл
R = 0,04 м
υ = 10^6 м/с
W = 38,4·10^{-16} Дж

q, n – ?

Решение

Частица не является релятивистской, так как $\upsilon \ll c$. Ее кинетическая энергия

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{2}$$

где υ – скорость частицы, которую найдем из равенства

$$F_л = ma_ц = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Здесь $F_л$ – сила Лоренца, $a_ц$ – центростремительное ускорение;

$$qB\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{R}; \qquad \upsilon = \frac{qBR}{m}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$W = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) найдем заряд частицы:

$$q = \sqrt{\frac{2mW}{B^2R^2}}. \tag{4}$$

Массу частицы m выразим из формулы (1):

$$m = \frac{2W}{\upsilon^2}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в (4), получим:

$$q = \sqrt{\frac{2W \cdot 2W}{\upsilon^2B^2R^2}} = \frac{2W}{\upsilon BR};$$

$$[q]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{м}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}=\text{А}\cdot\text{с}=\text{Кл};$$

$$q=\frac{2\cdot 38{,}4\cdot 10^{-16}}{10^{6}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}04}=3{,}2\cdot 10^{-19}\,\text{Кл}.$$

Для определения частоты обращения n воспользуемся соотношением между циклической частотой ω и частотой n: $\omega=2\pi n$. Сила Лоренца при вращении электрона создает нормальное ускорение $a_n=\frac{\upsilon^2}{R}$, тогда

$$m\frac{\upsilon^2}{R}=q\upsilon B; \qquad \upsilon=\frac{qBR}{m};$$

$$\upsilon=\omega R; \qquad \upsilon=2\pi nR; \qquad n=\frac{\upsilon}{2\pi R};$$

$$n=\frac{Bq}{2\pi m}=\frac{Bq\upsilon^2}{2\pi 2W};$$

$$[n]=\frac{\text{Тл}\cdot\text{Кл}}{\text{кг}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}=\frac{1}{\text{с}}=\text{Гц};$$

$$n=\frac{0{,}6\cdot 3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot\left(10^{6}\right)^{2}}{2\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 38{,}4\cdot 10^{-16}}=4\cdot 10^{6}\,\text{Гц}.$$

Ответ: $q=3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл; $n=4\cdot 10^{6}$ Гц.

ЗАДАЧА 3.84

В однородное магнитное поле влетают протон и α-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона отличается от радиуса кривизны R_2 траектории α-частицы? Магнитное поле перпендикулярно к скоростям частиц.

Дано:

$m_p=m_1$

$q_p=q_1$

$m_\alpha=4m_p=m_2$

$q_\alpha=2q_p=q_2$

$\frac{R_1}{R_2}$ – ?

Решение

На заряженные частицы, влетающие в магнитное поле перпендикулярно к вектору магнитной индукции, действует сила Лоренца

$$F_л=qB\upsilon, \tag{1}$$

которая сообщает им центростремительное ускорение.

Поэтому

$$qB\upsilon=\frac{m\upsilon^2}{R}. \tag{2}$$

Из (2) находим радиус траектории:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}. \qquad (3)$$

По закону сохранения энергии работа электрического поля qU, ускоряющая частицу, равна кинетической энергии частицы:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = qU, \qquad (4)$$

где U – ускоряющая разность потенциалов.

Из уравнения (4) определяется скорость частицы:

$$U = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \qquad (5)$$

Подставив выражение (5) в (3), найдем радиус кривизны траектории частицы:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (6)$$

По формуле (6) запишем радиусы R_1 и R_2 для протона и α-частицы:

$$R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{q_1}}; \qquad R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{q_2}}.$$

Найдем отношение радиусов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1q_2}{q_1m_2}};$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1 2q_1}{q_1 4m_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = 0,7$.

ЗАДАЧА 3.85

Прямоугольная рамка со сторонами a = 5 см, b = 10 см, состоящая из N = 20 витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл. Нормаль к рамке составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Определить вращающий момент сил M, действующий на рамку, если по ней течет ток I = 2 А.

Дано:	Решение
$a = 5 \cdot 10^{-2}$ м $b = 10^{-1}$ м $N = 20$ $B = 0,2$ Тл $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $I = 2$ А	Механический момент, действующий на рамку с током, помещенную в однородное магнитное поле, $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{p_m}, \overrightarrow{B}\right]$, где $\overrightarrow{p_m}$ – магнитный момент рамки с током. Модуль $M = p_m B \sin\alpha$. Поскольку рамка состоит из N витков, то
$M - ?$	$M = Np_m B \sin\alpha$, (1)

где магнитный момент рамки с током

$$p_m = IS = Iab. \quad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомый вращающий момент:

$$M = NIBab\sin\alpha;$$

$$[M] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м} \cdot \text{м} = \frac{\text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м};$$

$$M = 20 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} \sin 30° = 0,02 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $M = 0,02$ Н · м.

ЗАДАЧА 3.86

Плоский квадратный контур со стороной 10 см, по которому течет ток силой I = 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией 1 Тл (рис. 1). Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол 90°. Считать, что при повороте сила тока не меняется.

Дано:	**Решение**
I = 100 А $B = 1$ Тл b = 0,1 м α = 90°	На контур с током в магнитном поле $\vec{B}$ действует вращающий момент $\vec{M}$, величина которого $M = P_m B \sin\alpha$,
A – ?	где P_m – магнитный момент контура $(P_m = IS)$;

B – модуль индукции магнитного поля; α – угол между вектором $\vec{P}_m$, направленным по нормали $\vec{n}$ к контуру, и вектором $\vec{B}$.

В начальный момент контур свободно установился в магнитном поле (рис. 2). Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости витка. При этом момент сил равен нулю $(M=0)$, так как силы, действующие на каждую сторону рамки, направлены в разные стороны и лежат в плоскости рисунка, угол $\alpha=0$, так как направления нормали к рамке $(\vec{n})$ и вектора $\vec{B}$ совпадают. (Нормаль $\vec{n}$ и вектор $\vec{B}$ направлены от нас).

Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент будет стремиться вернуть контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешних сил (рис. 3).

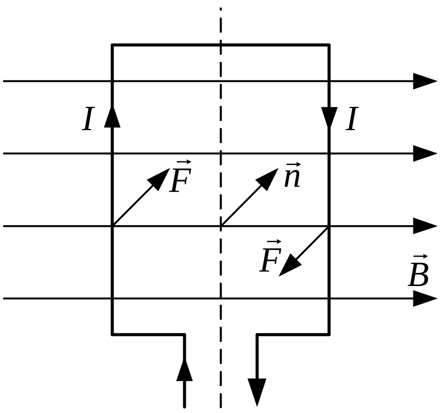


Рис. 1

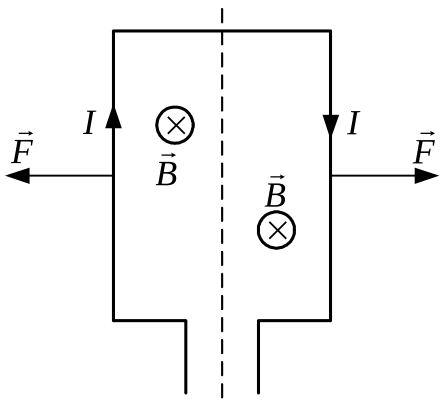


Рис. 2

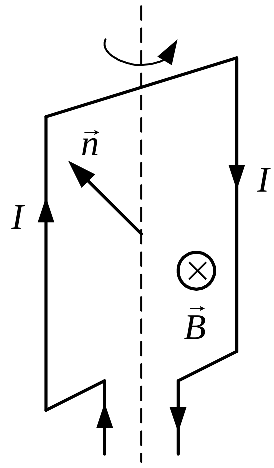


Рис. 3

Элементарная работа при повороте на угол $d\alpha$ равна:

$$dA = Md\alpha;$$

$$dA = P_m B d\alpha \sin\alpha;$$

$$dA = Ib^2 B d\alpha \sin\alpha.$$

Полная работа A при повороте на конечный угол $\pi/2$ будет равна интегралу от этого выражения:

$$A = Ib^2 B \int\limits_{\alpha_1=0}^{\alpha_2=\pi/2} \sin\alpha d\alpha = Ib^2 B(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = Ib^2 B;$$

$$[A] = \text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Тл} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж};$$

$$A = 10^2\cdot 10^{-2}\cdot 1\cdot 1 = 1\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 1$ Дж.

ЗАДАЧА 3.87

Длинный провод имеет изгиб в форме правильного треугольника, удаленная сторона которого параллельна проводу. Провод без трения может вращаться вокруг горизонтальной оси в поле тяжести Земли и в однородном вертикальном магнитном поле с постоянной индукцией магнитного поля B = 0,5 Тл. При какой силе постоянного тока I в проводе его треугольный изгиб отклонится на угол 45° от вертикали, если линейная плотность материала провода γ = 12,5 кг/м?

Дано:	**Решение**
γ = 12,5 кг/м B = 0,5 Тл α = 45°	Пусть I – искомая сила тока в проводе; B – магнитная индукция; $m\vec{g}$ – сила тяжести треугольного изгиба провода; α – угол плоскости изгиба с вертикалью; O – точка пересечения медиан треугольного изгиба провода или центр масс этого изгиба; a – длина стороны треугольника (см. рис.).
I – ?	

По условию механического равновесия треугольного контура момент силы тяжести и момент сил Ампера равны. Поэтому для модулей этих моментов имеем равенство

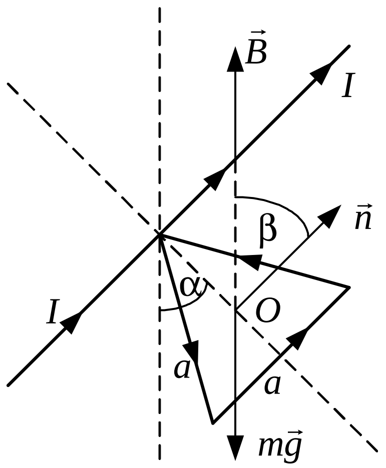
$$mg\frac{2}{3}a\sin 60°\sin\alpha = P_m B\sin\beta,$$

где $\vec{P}_m = IS\vec{n}$ – магнитный момент контура с током; S – площадь этого треугольника,

$$S = \frac{1}{2}a^2\cos 60°.$$

Масса треугольного контура провода

$$m = \gamma 3a.$$



Тогда

$$I = \frac{4\gamma g}{B};$$

$$[I] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{Тл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{А};$$

$$I = \frac{4\cdot 12{,}5\cdot 9{,}81}{0{,}5} = 981\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 981$ А.

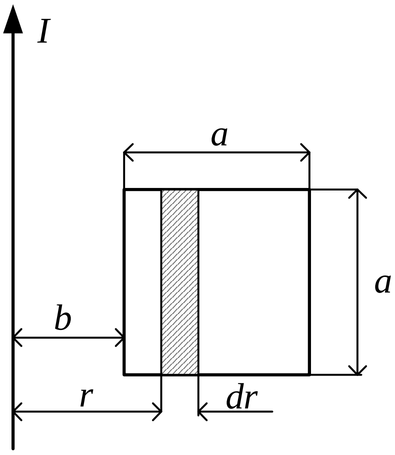
ЗАДАЧА 3.88

В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током I = 20 А расположена квадратная рамка со стороной a = 10 см, причем две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей стороны рамки равно b = 5 см (см. рис.). Определить магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Дано:	**Решение**
I = 20 А $a = 10^{-1}$ м $b = 5 \cdot 10^{-2}$ м $\mu = 1$	Магнитная индукция B бесконечно длинного проводника с током I обратно пропорциональна расстоянию r до той точки, в которой надо ее определить:
Φ – ?	$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int B dS.$$



Площадь рамки разобьем на узкие элементарные площадки шириной dr и площадью adr (см. рис.), в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной.

Тогда поток сквозь элементарную площадку

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi r} dr. \qquad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1) в пределах от b до $b + a$, найдем искомый магнитный поток:

$$\Phi = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b};$$

$$[\Phi] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Гн} \cdot \text{А} = \text{Вб};$$

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-1}}{2\pi} \ln 3 = 4,4 \cdot 10^{-7}\,\textit{Вб} = 0,44\ \text{мкВб}.$$

Ответ: $\Phi = 0,44$ мкВб.

ЗАДАЧА 3.89

В одной плоскости с бесконечным прямым проводником с током I = 10 А расположена прямоугольная проволочная рамка (стороны a = 25 см, b = 10 см), по которой протекает ток I_1 = 2 А. Длинные стороны рамки параллельны прямому току, причем ближайшая из них находится от прямого тока на расстоянии c = 10 см и ток в ней сонаправлен току I. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки.

Дано:
I = 10 А
a = 0,25 м
b = 0,1 м
I_1 = 2 А
c = 0,1 м
F_1, F_2, F_3, F_4 – ?

Решение

Прямоугольная рамка находится в неоднородном поле прямого тока с индукцией

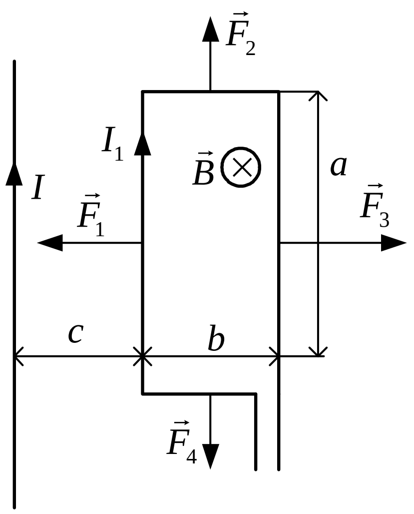
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad (1)$$

где μ = 1; r – расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки.

Сила, с которой действует поле прямого тока, может быть найдена суммированием элементарных сил, определяемых законом Ампера:

$$dF = IBdl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.



Вектор $\vec{B}$ в пределах рамки направлен перпендикулярно к ее плоскости за чертеж, и в пределах каждой стороны угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Это означает, что в пределах одной стороны элементарные силы параллельны друг другу и сложение векторов можно заменить сложением их модулей:

$$F = \int_l dF = \int_l I_1 B dl, \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по соответствующей стороне рамки.

Короткие стороны рамки расположены одинаково относительно провода, а поэтому действующие на них силы численно равны, но направлены противоположно. Их направление, как и направление других сил (см. рис.) определяется по правилу левой руки. Вдоль каждой из коротких сторон прямоугольника магнитная индукция изменяется – см. формулу (1). Тогда, произведя интегрирование, с учетом (2),

$$F_2 = F_4 = \int_c^{c+b} \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi l} dl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \ln\frac{c+b}{c}.$$

Длинные стороны рамки параллельны прямому току, находясь от него, соответственно, на расстояниях c и $c+b$.

Тогда

$$F_1=\int_0^a I_1B_1dl=\int_0^a\frac{\mu_0I_1I}{2\pi c}dl=\frac{\mu_0I_1Ia}{2\pi c};\qquad F_3=\int_0^a I_1B_2dl=\int_0^a\frac{\mu_0I_1I}{2\pi(c+b)}dl=\frac{\mu_0I_1Ia}{2\pi(c+b)},$$

где $B_1=\dfrac{\mu_0I}{2\pi c}$ и $B_2=\dfrac{\mu_0I}{2\pi(c+b)}$;

$$[F_2]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}}=\text{Н};$$

$$[F_1]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}}=\text{Н};$$

$$F_1=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10\cdot0{,}25}{2\pi\cdot0{,}1}=16\cdot10^{-6}H=16\ \text{мкН};$$

$$F_2=F_4=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10}{2\pi}\ln2=5\cdot10^{-6}H=5\ \text{мкН};$$

$$F_3=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10\cdot0{,}25}{2\pi\cdot0{,}2}=10\cdot10^{-6}H=10\ \text{мкН}.$$

Ответ: $F_1=16$ мкН, $F_2=5$ мкН, $F_3=10$ мкН, $F_4=5$ мкН.

ЗАДАЧА 3.90

В однородном магнитном поле (B = 1 мТл) в плоскости, перпендикулярной к линиям магнитной индукции, расположено тонкое проволочное полукольцо длиной l = 50 см, по которому течет ток I = 5 А. Определить результирующую силу, действующую на полукольцо.

Дано:
$B=10^{-3}$ Тл
$l=0{,}5$ м
$I=5$ А

F – ?

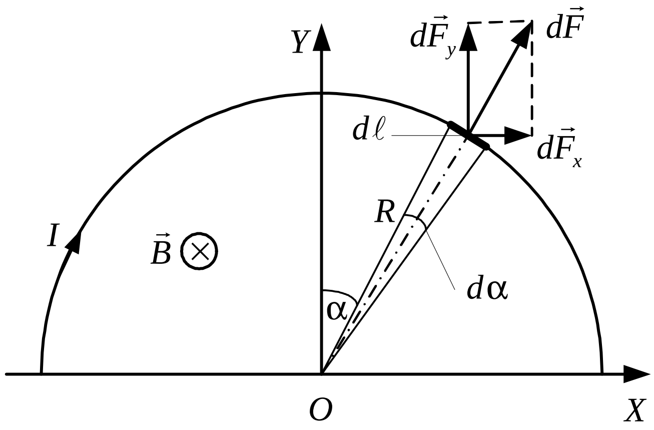
Решение

Согласно условию задачи полукольцо расположили (см. рис.) перпендикулярно к линиям магнитной индукции (вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно к чертежу от нас). На полукольце выделим малый элемент dl с током I.

На этот элемент будет действовать по закону Ампера сила

$$d\vec{F}=I\left[d\vec{l},\vec{B}\right],\qquad(1)$$

направление которой определяется правилом левой руки (см. рис.).



По условию задачи во всех точках полукольца угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен $\pi/2$, поэтому уравнение (1) в скалярной форме примет вид

$$dF = IBdl\,. \tag{2}$$

Все элементарные силы dF (при указанном на рисунке направлении тока они растягивают кольцо) лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка. Однако при переходе от одного элемента полукольца к другому их направление меняется (они всегда направлены вдоль радиуса полукольца). Для нахождения результирующей силы необходимо найти ее проекции на оси координат, которые выбраны с учетом симметрии полукольца (см. рис.).

Тогда

$$F_x = \int_l dF_x \qquad \text{и} \qquad F_y = \int_l dF_y\,,$$

где интеграл берется по полукольцу; dF_x и dF_y – проекции элементарных сил на оси координат; F_x и F_y – проекции результирующей силы на те же оси координат.

Из соображений симметрии проекция результирующей силы на ось OX

$$F_x = \int_l dF_x = 0\,. \tag{3}$$

Проекция элементарной силы на ось OY

$$dF_y = dF\cos\alpha = IBdl\cos\alpha = IBR\cos\alpha d\alpha\,.$$

Учли формулу (2) и $dl = Rd\alpha$, где R – радиус полукольца. Проинтегрировав по полукольцу (из рисунка следует, что α изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$), найдем:

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} IBR\cos\alpha d\alpha = 2IBR\,.$$

Учитывая, что $R = \dfrac{l}{\pi}$, получим:

$$F_y = \frac{2IBl}{\pi}\,.$$

Ясно, что сила $F = F_y$ и направлена вдоль оси OY.

Таким образом, сила, действующая на полукольцо, $F = \dfrac{2IBl}{\pi}$;

$$[F] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м} = \frac{\text{А} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Н}; \quad F = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{3,14} = 1,59 \cdot 10^{-3} H = 1,59 \text{ мН}.$$

Ответ: $F = 1,59$ мН.

ЗАДАЧА 3.91

Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной l_0 = 5 мм. Длина l средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока I = 4 А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

Дано:

$l_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м

l = 1 м

I = 4 А

B = 0,5 Тл

N – ?

Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока, мы можем принять, что индукция поля в воздушном зазоре равна индукции поля в чугуне. На основании закона полного тока запишем:

$$IN = Hl + H_0 l_0.$$

По графику (см. рис.) находим, что при B = 0,5 Тл напряженность H магнитного поля в чугуне равна 1,5 кА/м.

Так как для воздуха $\mu = 1$, то напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0};$$

$$H_0 = \frac{0,5}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{0,5}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Искомое число витков

$$N = \frac{Hl + H_0 l_0}{I};$$

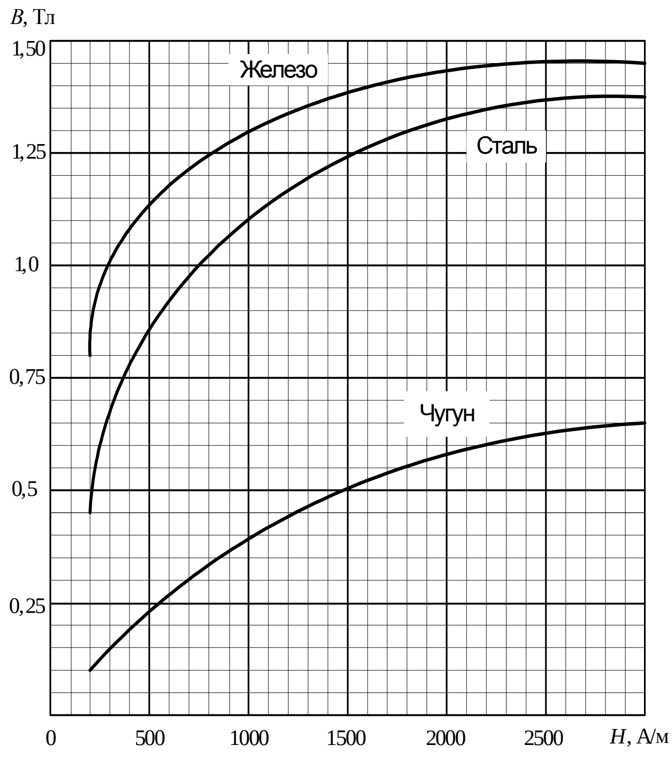


График зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля

$$[N]=\frac{\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}}+\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}}}{\text{А}}=\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{А}}=1;$$

$$N=\frac{1{,}5\cdot 10^{3}\cdot 1+4\cdot 10^{5}\cdot 5\cdot 10^{-3}}{4}=875.$$

Ответ: $N=875$.

ЗАДАЧА 3.92

Определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей N = 200 витков, идет ток I = 5 А. Внешний диаметр d_1 тороида равен 30 см, внутренний d_2 = 20 см.

Дано:
I = 5 А
N = 200
d_1 = 0,3 м
d_2 = 0,2 м

B_0, H – ?

Решение

Для определения напряженности магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора $\vec{H}$ вдоль линии магнитной индукции поля:

$$\oint Hdl.$$

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этих линий напряженности одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряженность H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до $2\pi r$, где r – радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой определяется циркуляция, т.е.

$$\oint_l Hdl=H\int_0^{2\pi r}dl=2\pi rH. \qquad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_l H_l dl=\sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим:

$$2\pi rH=\sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (3)$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид

$$2\pi rH = NI \,.$$

Откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \tag{4}$$

Для средней линии тороида

$$r = \left(\frac{1}{2}\right)\left(R_1 + R_2\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(d_1 + d_2\right).$$

Подставив это выражение r в формулу (4), найдем

$$H = \frac{2NI}{\pi\left(d_1 + d_2\right)}.$$

Магнитная индукция B_0 в вакууме связана с напряженностью поля соотношением

$$B_0 = \mu_0 H \,.$$

Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi\left(d_1 - d_2\right)};$$

$$\left[H\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$\left[B_0\right] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}\,;$$

$$H = \frac{2\cdot 200\cdot 5}{3{,}14\left(0{,}3 + 0{,}2\right)} = 1{,}37\cdot 10^3\,\frac{\text{А}}{\text{м}} = 1{,}37\,\frac{\text{кА}}{\text{м}}\,;$$

$$B_0 = \frac{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 200\cdot 5}{\pi\left(0{,}3 + 0{,}2\right)} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{Тл} = 1{,}6\ \text{мТл}\,.$$

Ответ: $H = 1{,}37\,\frac{\text{кА}}{\text{м}}$, $B_0 = 1{,}6$ мТл.

ЗАДАЧА 3.93

На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром d = 70 мм намотана обмотка с общим числом витков N = 600. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной b = 1,5 мм (см. рис.). При силе тока через обмотку I = 4 А магнитная индукция в прорези B_0 = 1,5 Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определить магнитную проницаемость железа для данных условий.

Дано:
$d = 7\cdot10^{-2}$ м
$N = 600$
$I = 4$ А
$B_0 = 1{,}5$ Тл
$b = 1{,}5\cdot10^{-3}$ м
μ – ?

Решение

Теорема о циркуляции вектора H:

$$\oint_L \vec{H}dl = \oint_L H_l dl = I,$$

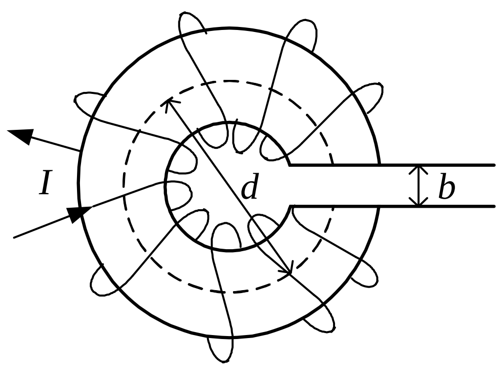
где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром. Выбрав в качестве контура окружность диаметром d (см. рис., штриховая линия), теорему можно записать в виде

$$H\left(\pi d - b\right) + H_0 b = NI, \tag{1}$$

где H и H_0 – соответственно, модули вектора $\vec{H}$ в железе и прорези; N – число витков тороида.

Поскольку рассеяние поля на краях прорези отсутствует, магнитные индукции поля в железе и прорези одинаковы:

$$B = B_0. \tag{2}$$



Учитывая равенство (2) и то, что $B = \mu_0\mu H$ (μ – магнитная проницаемость железа) и $B_0 = \mu_0 H$ (магнитная проницаемость вакуума равна 1), выражение (1) можем записать в виде

$$\frac{B_0}{\mu_0\mu}\left(\pi d - b\right) + \frac{B_0}{\mu_0}b = NI.$$

Откуда искомая магнитная проницаемость железа при рассматриваемых условиях

$$\mu = \frac{\left(\pi d - b\right)B_0}{\mu_0 NI - bB_0};$$

$$[\mu]=\frac{\text{м}\cdot\text{Тл}}{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\text{А}-\text{м}\cdot\text{Тл}}=\frac{\text{м}\cdot\text{Тл}}{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\text{А}-\text{м}\cdot\text{Тл}}=\frac{\frac{\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}}{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}}-\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}}}=$$

$$=\frac{\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}-\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{Дж}}=1;$$

$$\mu=\frac{\left(3{,}14\cdot 7\cdot 10^{-2}-1{,}5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 1{,}5}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 600\cdot 4-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5}=428.$$

Ответ: $\mu=428$.

ЗАДАЧА 3.94

Через сечение медной пластинки толщиной d = 0,2 мм пропускается ток силой I = 6 А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией B = 1 Тл, перпендикулярное к ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникшую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди 8,93 г/см^3.

Дано:
$d = 2\cdot 10^{-4}$ м
$I = 6$ А
$B = 1$ Тл
$\rho = 8{,}93\cdot 10^{3}$ кг/м^3
$\mu = 6{,}5\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ 1/моль
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$\Delta\varphi$ – ?

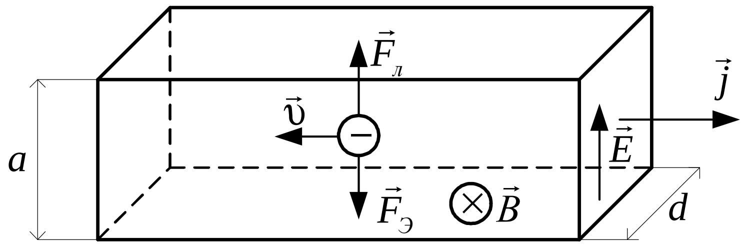
Решение

Техническое направление тока показано на рисунке (вектор $\vec{j}$), следовательно, свободные электроны в медной пластине движутся в противоположном направлении.

Так как пластина помещена в магнитное поле, направленное перпендикулярно к направлению движения свободных электронов, то на электроны будет действовать сила Лоренца, направленная вверх.

Следовательно, на верхней грани пластины будет избыток электронов, а на нижней грани – недостаток. Смещение электронов продолжается до тех пор, пока в образовавшемся электрическом поле не будет уравновешена сила Лоренца $F_л = e\upsilon B$ действием силы со стороны образовавшегося электрического поля $F_э = eE$. Получим выражение $E = \upsilon B$.

Так как электрическое поле напряженностью E однородное, то разности потенциалов между нижней и верхней гранями равны:



$\Delta\varphi = Ea$; $\Delta\varphi = \upsilon Ba$,

где a – вертикальный размер образца.

Скорость движения электронов υ можно найти, используя плотность тока $j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{I}{ad}$, где d – толщина образца;

$$j = en\upsilon; \qquad \upsilon = \frac{I}{enad},$$

где n – концентрация свободных электронов в медной пластинке.

Так как концентрация свободных электронов равна концентрации атомов, то

$$n = \frac{N}{V} = \frac{mN_A}{\mu V} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

где N_A – число Авогадро; μ – молярная масса меди.

Тогда

$$\upsilon = \frac{I\mu}{ead\rho N_A}.$$

Искомая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{I\mu B}{ed\rho N_A};$$

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В};$$

$$\Delta\varphi = \frac{6\cdot 63{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 1}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 8{,}93\cdot 10^{3}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}} = 2{,}21\cdot 10^{-6}\,\text{В} = 2{,}21\ \text{мкВ}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 2{,}21$ мкВ.

3.4. Явление электромагнитной индукции

Основные формулы

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где ε_i – мгновенное значение ЭДС индукции; $\frac{d\Phi}{dt}$ – скорость изменения магнитного потока. Знак «минус» говорит о том, что индукционный ток имеет такое направление, чтобы противодействовать причине, его вызывающей (правило Ленца).

Если контур состоит не из одного, а из N одинаковых витков, то

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

где $d\psi = N\Phi$ – потокосцепление (полный магнитный поток).

Индукционный ток

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

где R – сопротивление контура.

Разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью υ в однородном магнитном поле,

$$U = Bl\upsilon\sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов скорости $\vec{\upsilon}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

Электродвижущая сила индукции ε_i, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\varepsilon_i = BNS\omega\sin\omega t,$$

где $\omega t = \alpha$ – мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки.

Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI.$$

Индуктивность L соленоида зависит от геометрических размеров контура и заполняющей его среды:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 n^2 lS = \mu\mu_0\frac{N^2 S}{l},$$

где N – число витков соленоида, l – его длина, S – площадь витков соленоида (площадь поперечного сечения соленоида), $n=\frac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, $V = Sl$ – объем соленоида.

Формула для ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура, $\frac{dI}{dt}$ – скорость изменения силы тока.

Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L,

после замыкания цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}\left(1-e^{-(R/l)t}\right) = I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

где ε – ЭДС источника, r – внутреннее сопротивление источника, t – время, прошедшее после замыкания цепи, $\tau = L/R$ – постоянная времени цепи, I_0 – сила тока в цепи при $t=0$ (амплитудное значение силы тока);

после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t} = I_0 e^{-t/\tau},$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t=0$, t – время, прошедшее после размыкания цепи.

Коэффициент трансформации K (в режиме холостого хода)

$$K = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

где ε, N – соответственно, ЭДС и число витков в обмотках трансформатора.

Энергия W магнитного поля, созданного контуром индуктивности L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность ω энергии W магнитного поля в объеме поля V

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 3.95

Стержень длиной 1 м вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω = 30 рад/с. Ось вращения стержня параллельна магнитным силовым линиям поля и проходит через его конец. Определить ЭДС индукции, возникшую на концах стержня, если индукция магнитного поля B = $2\cdot 10^{-2}$ Тл.

Дано:

l = 1 м

ω = 30 рад/с

B = $2\cdot 10^{-2}$ Тл

ε – ?

Решение

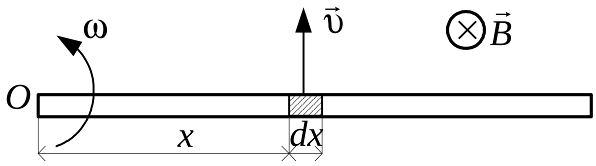
При вращении стержня в любом его бесконечно малом участке dx (см. рис.), взятом на расстоянии x от оси вращения O, возникает элементарная ЭДС индукции

$$d\varepsilon = -B\upsilon dx,$$

где υ – линейная скорость участка dx.

Поскольку $\upsilon = \omega x$, то

$$d\varepsilon = -B\omega x dx.$$



Интегрируя полученное выражение по длине стержня (от 0 до l), найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon = -\int_0^l B\omega x dx = -B\omega \frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = -\frac{1}{2}B\omega l^2;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В};$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 30\cdot 1^2 = -0{,}3\ \text{В}.$$

Знак «минус» определяет направление ЭДС индукции.

Ответ: $\varepsilon = -0{,}3$ В.

ЗАДАЧА 3.96

В однородном горизонтальном магнитном поле с магнитной индукцией B = 0,5 Тл по вертикально расположенным рельсам, замкнутым через последовательно соединенные резистор сопротивлением R = 5 Ом и источник ЭДС ε = 12 В (см. рис.), свободно скользит без нарушения контакта проводник длиной l = 1 м и массой m = 100 г. Найти величину скорости υ и направление установившегося движения проводника. Сопротивлением рельсов, проводника и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:
B = 0,5 Тл
R = 5 Ом
ε = 12 В
l = 1 м
m = 0,1 кг

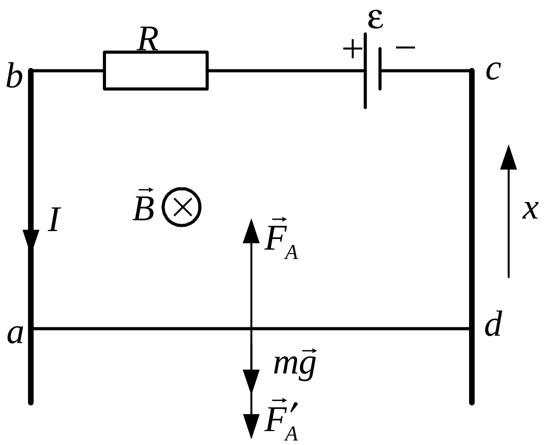
υ – ?

Решение

Сила тока в контуре $abcd$ $I=\dfrac{\varepsilon}{R}$.

Поскольку проводник ad расположен в магнитном поле, то при прохождении тока на него будет действовать сила Ампера

$$F_A = IBl = \frac{\varepsilon Bl}{R}; \qquad (1)$$



$$F_A = \frac{12\cdot 0,5\cdot 1}{5} = 1,2\ \text{Н},$$

направленная вверх (по правилу левой руки).

На проводник также действует сила тяжести

$$mg = 0,1\cdot 9,8 = 0,98\ \text{Н},$$

направленная вниз.

Под действием результирующей этих двух сил проводник ad начинает двигаться вверх с ускорением. При этом на концах проводника возникает разность потенциалов, которая равна

$$U = B\upsilon l.$$

В проводнике ab возникает индукционный ток

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{B\upsilon l}{R}, \qquad (2)$$

а значит, появится новая сила Ампера

$$F'_A = I_i Bl = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{R}, \qquad (3)$$

направленная (по правилу Ленца) против движения проводника, т.е. вниз.

По второму закону Ньютона запишем:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}'_A = m\vec{a}. \qquad (4)$$

При установившемся движении $\vec{\upsilon} = \text{const}$, а ускорение $\vec{a} = 0$. В проекции на направление движения (ось X) уравнение (4) примет вид:

$$F_A - mg - F'_A = 0. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнение (5) выражения (1) и (3), получим:

$$\frac{\varepsilon lB}{R} - mg = \frac{l^2B^2\upsilon}{R}; \qquad \varepsilon lB - mgR = l^2B^2\upsilon,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{\varepsilon lB - mgR}{l^2B^2};$$

$$[\upsilon]=\frac{\text{В}\cdot\text{м}\cdot\text{Тл}-\text{Н}\cdot\text{Ом}}{\text{м}^2\cdot\text{Тл}^2}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{Ом}}{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{Ом}}{\text{Н}}=\frac{\text{А}^2\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{Н}}=\frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{Н}}\cdot\frac{\text{с}}{\text{с}}=$$

$$=\frac{\text{Дж}}{\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{с}}=\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon=\frac{12\cdot1\cdot0{,}5-0{,}1\cdot9{,}8\cdot5}{1^2\cdot0{,}5^2}=4{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon=4{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.97

В магнитном поле Земли находится виток проволоки радиусом r = 20 см и сопротивлением 2 Ом. Если виток повернуть с одной стороны на другую, то по проволоке протечет заряд q. Какое количество электричества q протечет по витку, если виток первоначально расположен горизонтально, а вертикальная составляющая индукции $\vec{B}$ магнитного поля Земли равна 50 мкТл?

Дано:
r = 0,2 м
R = 2 Ом
B = $5\cdot10^{-5}$ Тл
q – ?

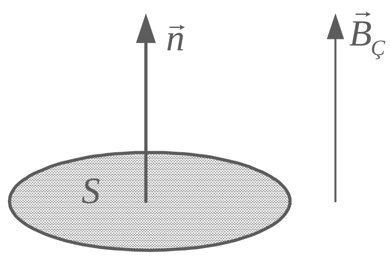
Решение

Первоначальное положение витка в поле Земли горизонтальное (см. рис.). В этом случае магнитный поток, пронизывающий виток,

$$\Phi_1=BS\cos\alpha_1,$$

где α_1 – угол между нормалью к поверхности витка и направлением индукции магнитного поля Земли;

$$\alpha_1=0°;\quad \cos\alpha_1=1;\quad \Phi_1=BS.$$



По условию задачи при повороте витка по проволоке потечет ток. Сила тока $I=\frac{dq}{dt}$, откуда

$$dq=Idt. \qquad (1)$$

С другой стороны, сила тока

$$I=\frac{\varepsilon_i}{R}, \qquad (2)$$

где ε_i – ЭДС, индуцируемая в витке.

Тогда из выражений (1) и (2) получим:

$$dq=\frac{\varepsilon_i}{R}dt. \qquad (3)$$

Электродвижущая сила индукции ε_i связана со скоростью изменения магнитного потока Φ по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) запишем:

$$dq = -\frac{d\Phi}{R}. \tag{5}$$

Интегрируем выражение (5) с пределами интегрирования от Φ_1 до Φ_2:

$$q = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{d\Phi}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{2BS}{R},$$

где $S = \pi r^2$ – площадь витка, $\Phi_2 = BS\cos 180°$.

Окончательно $$q = \frac{2\pi B r^2}{R}.$$

$$[q] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 5\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}2^2}{2} = 6{,}28\cdot 10^{-6}\,\text{Кл} = 6{,}28\ \text{мкКл}.$$

Ответ: $q = 6{,}28$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.98

Проволочное кольцо радиусом r = 8 см и сопротивлением R = 0,1 Ом находится в однородном магнитном поле. Плоскость кольца составляет угол α = 30° с линиями индукции поля. Если магнитное поле выключить, то по кольцу протечет количество электричества q = 10 мКл. Какова была индукция B магнитного поля?

Дано:
r = 0,08 м
R = 0,1 Ом
α = 30°
$q = 10^{-2}$ Кл

B – ?

Решение

Рассмотрим положение проволочного кольца в магнитном поле (см. рис.). При выключении магнитного поля меняется магнитный поток, пронизывающий кольцо, и, следовательно, возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{1}$$

До выключения магнитного поля проволочное кольцо пронизывал магнитный поток

$$\Phi_1 = BS\cos\beta,$$

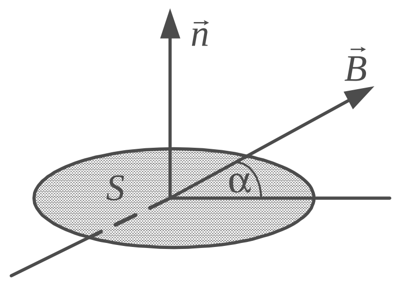
где β – угол между нормалью к плоскости кольца и вектором индукции $\vec{B}$ $\left(\beta = \pi/2 - \alpha = 60°\right)$.

Если магнитное поле выключено, то $B = 0$ и $\Phi_2 = 0$. При выключении магнитного поля по кольцу потечет ток. Сила тока $I = \dfrac{dq}{dt}$, откуда заряд

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

С другой стороны, по закону Ома сила тока $I = \dfrac{\varepsilon_i}{R}$, тогда

$$dq = \frac{\varepsilon_1}{R}dt. \qquad (3)$$



Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R} = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Тогда

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{BS}{R}\cos\beta. \qquad (4)$$

Площадь кольца $S = \pi r^2$. Из уравнения (4) найдем искомую величину B магнитного поля:

$$B = \frac{qR}{\pi r^2 \cos\beta};$$

$$[B] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{10^{-2} \cdot 0{,}1}{3{,}14 \cdot 0{,}08^2 \cos 60°} = 0{,}1 \text{ Тл.}$$

Ответ: $B = 0{,}1$ Тл.

ЗАДАЧА 3.99

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл с частотой n = 10 об/с вращается рамка, содержащая N = 1000 витков провода. Ось рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в рамке, равна $\varepsilon_{\max}$ = 94,2 В. Найти площадь рамки S.

Дано:	**Решение**
B = 0,1 Тл n = 10 об/с N = 1000 $\varepsilon_{\max}$ = 94,2 В	Запишем закон электромагнитной индукции:
S – ?	

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} N, \quad (1)$$

где $\Phi = BS\cos\omega t$ – магнитный поток, пронизывающий плоскость витка рамки; ω – угловая скорость вращения рамки.

Тогда
$$\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega \sin\omega t. \quad (2)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi n$, из уравнений (1) и (2) получим:

$$\varepsilon_i = BS2\pi nN \sin\omega t.$$

ЭДС индукции максимальна, когда $\sin\omega t = 1$. Следовательно,

$$\varepsilon_{\max} = BS2\pi nN.$$

Откуда площадь рамки

$$S = \frac{\varepsilon_{\max}}{2\pi nNB};$$

$$[S] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Тл}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Н}} = \text{м}^2;$$

$$S = \frac{94,2}{2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 1000 \cdot 0,1} = 15 \cdot 10^{-3}\text{м}^2.$$

Ответ: $S = 15 \cdot 10^{-3}\text{м}^2$.

ЗАДАЧА 3.100

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции поля, вращается стержень длиной l = 20 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. При какой частоте вращения n разность потенциалов на концах его равна U = 1,6 В?

Дано:	**Решение**
B = 0,8 Тл l = 0,2 м U = 1,6 В	Под действием магнитной составляющей силы Лоренца
n – ?	

$$\vec{F}_л = e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \quad (1)$$

в стержне при его вращении происходит перераспределение электронов.

Здесь e – заряд электрона; $\vec{\upsilon}$ – скорость его движения; $\vec{B}$ – индукция магнитного поля.

На концах стержня образуются заряды разных знаков, которые создают электрическое поле напряженностью

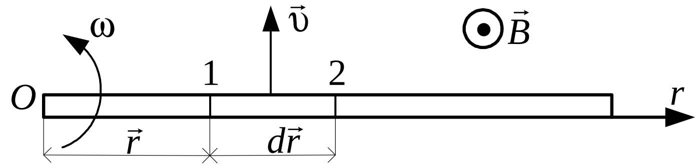
$$E = -\frac{F}{e} \qquad (2)$$

и разностью потенциалов между двумя произвольными точками стержня

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \,. \qquad (3)$$

Знак «минус» в выражении (2) ставится потому, что сила Лоренца $\vec{F}_л$ является сторонней силой, dr – приращение радиус-вектора $\vec{r}$ на участке стержня между точками 1 и 2. Пусть $\vec{r}$ направлен от оси вращения вдоль стержня (см. рис.). Вектор силы Лоренца при любом положении вращающегося стержня направлен вдоль стержня к оси вращения (к точке O). Вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ перпендикулярен к вектору $\vec{B}$, и модуль его векторного произведения

$$\left\| \left[\vec{\upsilon}, \vec{B} \right] \right\| = \upsilon B \,.$$



Линейная скорость

$$\upsilon = \omega r \,,$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения стержня.

Тогда выражение (3) с учетом всех равенств примет вид:

$$U = -\omega B \int_0^l r dr = -\frac{1}{2} B \omega l^2 = -B \pi n l^2 \,.$$

Знак «минус» означает, что при указанном на рисунке направлении вращения электроны будут скапливаться около оси вращения (точки O). Из последнего уравнения определим частоту вращения:

$$n = \frac{U}{\pi B l^2} \,;$$

$$[n] = \frac{\text{В}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{кл}} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}} \,;$$

$$n = \frac{1{,}6}{3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2} = 16 \text{ с}^{-1} \,.$$

Ответ: $n = 16 \text{ с}^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.101

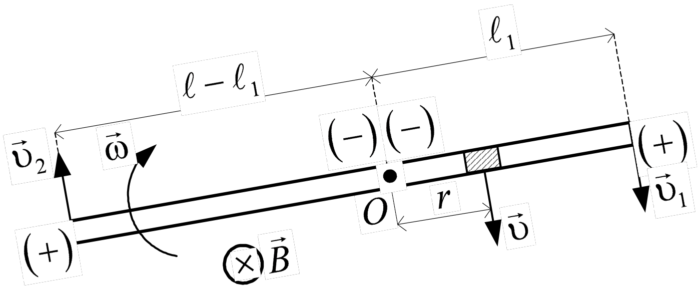
Тонкий металлический стержень длиной l = 1,2 м вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной к стержню оси, отстоящей от одного из его концов на расстоянии l_1 = 0,25 м, делая n = 2 об/с (см. рис.). Вектор $\vec{B}$ параллелен оси вращения и имеет величину B = 1 Тл. Найти разность потенциалов U, возникающую между концами стержня.

Дано:
l = 1,2 м
l_1 = 0,25 м
n = 2 об/с
B = 1 Тл

U – ?

Решение

Вместе с проводником в магнитном поле вращаются и свободные электроны, находящиеся в металле. На заряды, движущиеся в магнитном поле, будет действовать сила Лоренца, направление которой можно определить по правилу левой руки. Используя



это правило, найдем, что около оси вращения будут скапливаться отрицательные заряды, а на концах стержня – положительные.

Таким образом, в точке O, лежащей на оси вращения, стержень разбивается на две части длиной l_1 и $l - l_1$, в которых будут возникать ЭДС индукций $\varepsilon_{инд1}$ и $\varepsilon_{инд2}$, направленные навстречу друг другу, и разность потенциалов U на концах стержня тогда будет равна

$$U = \varepsilon_{инд2} - \varepsilon_{инд1}. \qquad (1)$$

Используя то, что $\varepsilon_{инд} = \int\limits_l \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] d\vec{l}$ и учитывая, что согласно условию задачи $\vec{B} \perp \vec{\upsilon} \perp d\vec{r}$, найдем ЭДС индукции $\varepsilon_{инд1}$, возникающую в части стержня длиной l_1:

$$\varepsilon_{инд1} = \int\limits_0^{l_1} \upsilon B dr = \int\limits_0^{l_1} \omega r B dr = \omega B \int\limits_0^{l_1} r dr = 2\pi n B r^2 / 2 \Big|_0^{l_1} = \pi n B l_1^2 . \qquad (2)$$

Здесь учли, что $\upsilon = \omega r$ и $\omega = 2\pi n$.

Аналогично ЭДС индукция $\varepsilon_{инд2}$, возникающая в остальной части стержня $l - l_1$, будет

$$\varepsilon_{инд2} = \int\limits_0^{l - l_1} \upsilon B dr = \pi n B \left(l - l_1\right)^2 . \qquad (3)$$

Окончательно, с учетом (1) – (3), определим разность потенциалов U:

$$U = \varepsilon_{инд2} - \varepsilon_{инд1} = \pi n B l \left(l - 2l_1\right);$$

$$\left[U\right] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В};$$

$$U = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1{,}2\left(1{,}2 - 2 \cdot 0{,}25\right) = 5{,}3 \cdot 10^{-3} B = 5{,}3 \text{ мВ}.$$

Ответ: $U = 5{,}3$ мВ.

ЗАДАЧА 3.102

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл равномерно вращается рамка площадью S = 50 см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна к линиям индукции. Среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменился от нуля до максимального значения, равно $\langle \varepsilon_i \rangle$ = 0,16 В. С какой частотой n вращалась рамка?

Дано:
B = 0,8 Тл
$S = 5 \cdot 10^{-3}$ м^2
$\langle \varepsilon_i \rangle$ = 0,16 В

n – ?

Решение

При вращении рамки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции, так как изменяется со временем магнитный поток, пронизывающий рамку. Если линии магнитной индукции скользят по рамке, то магнитный поток $\Phi_{\min}$ = 0, если линии вектора $\vec{B}$ перпендикулярны к плоскости рамки, то поток

$$\Phi_{\max} = BS .$$

Согласно закону Фарадея среднее значение ЭДС индукции

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Delta t} .$$

Такое изменение магнитного потока, пронизывающего рамку, происходит 4 раза за один оборот, т.е. $\Delta t = \dfrac{T}{4}$, где $T = \dfrac{1}{n}$ – период вращения рамки.

Таким образом,

$$\Delta t = 1/(4n), \quad \text{а} \quad \langle \varepsilon_i \rangle = 4n\Phi_{\max} = 4BSn .$$

Отсюда находим частоту вращения рамки:

$$n = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{4BS};$$

$$[n] = \frac{\text{В}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \cdot \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}};$$

$$n = \frac{0{,}16}{4 \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 10$ с$^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.103

Катушка сопротивлением R_1 = 5 Ом имеет N = 30 витков площадью S = 2 см^2 и помещена между полюсами электромагнита в поле с индукцией B = 0,75 Тл. Ось катушки параллельна линиям индукции и соединена с баллистическим гальванометром R_2 = 45 Ом. Какое количество электричества q протечет по цепи, если ток в обмотке электромагнита выключить?

Дано:
R_1 = 5 Ом
N = 30
$S = 2\cdot 10^{-4}$ м^2
B = 0,75 Тл
R_2 = 45 Ом

q – ?

Решение

При выключении тока в обмотке электромагнита изменяется магнитный поток, пронизывающий витки катушки, от $\Phi_1 = NBS$ до $\Phi_2 = 0$. Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции в катушке наводится ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Поскольку витки соединены с баллистическим гальванометром, то по цепи потечет ток $I = dq/dt$, откуда

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R_1 + R_2}. \qquad (3)$$

Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -N\frac{d\Phi}{dt}\cdot\frac{dt}{R_1 + R_2}, \quad \text{а} \qquad q = \frac{N}{R_1 + R_2}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{N\Phi_1}{R_1 + R_2} = \frac{NBS}{R_1 + R_2};$$

$$[q] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл}; \quad q = \frac{30\cdot 0,75\cdot 2\cdot 10^{-4}}{5+45} = 90\ \text{мкКл}.$$

Ответ: $q = 90$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.104

Квадрат из медной проволоки помещен в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл так, что плоскость его перпендикулярна к линиям магнитной индукции поля. Если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию, то по проволоке потечет количество электричества q = 84 мКл. Какова масса m проволоки?

Дано:	**Решение**
$B = 0{,}2$ Тл	
$q = 84\cdot10^{-3}$ Кл	
$\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м	
$D = 8{,}6\cdot10^{3}$ кг/м^3	
m – ?	

При вытягивании квадрата в линию изменяется площадь фигуры и меняется магнитный поток, пронизывающий ее, от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$. По закону Фарадея для электромагнитной индукции в проволоке наводится ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1}$$

и по ней потечет индукционный ток $I = \frac{dq}{dt}$, откуда

$$dq = Idt. \tag{2}$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}. \tag{3}$$

Из выражений (1) – (3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R}, \quad \text{а} \quad q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{BS}{R}, \tag{4}$$

где $S = l^2$ – площадь квадрат; l – сторона рамки; $R = \frac{\rho 4l}{S_1}$ – сопротивление проволоки; ρ – удельное сопротивление; $S_1 = \frac{m}{D4l}$ – площадь сечения провода; D – плотность меди.

Подставив S_1 в формулу для сопротивления, получим:

$$R = \frac{16\rho l^2 D}{m}. \tag{5}$$

Из выражений (4) и (5) находится масса проволоки:

$$m = \frac{16\rho D q}{B};$$

$$[m] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{Тл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{м}\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Н}} = \text{кг};$$

$$m = \frac{16\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\cdot8{,}6\cdot10^{3}\cdot84\cdot10^{-3}}{0{,}2} = 0{,}98\cdot10^{-3}\,\text{кг} = 0{,}98\ \text{г}.$$

Ответ: $m = 0{,}98$ г.

ЗАДАЧА 3.105

Магнитный поток, пронизывающий соленоид, Φ = 80 мкВб. Когда сила тока I, протекающего по обмотке, равна 6 А, индуктивность соленоида L = 8 мГн. Сколько витков N содержит соленоид?

Дано:
$\Phi = 80\cdot10^{-6}$ Вб
$I = 6$ А
$L = 8\cdot10^{-3}$ Гн
N – ?

Решение

Между магнитным потоком и силой тока существует связь $\psi = LI$, где $\psi = N\Phi$ – потокосцепление;

$$N\Phi = LI; \qquad N = \frac{LI}{\Phi};$$

$$[N] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{Вб}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1;$$

$$N = \frac{8\cdot10^{-3}\cdot6}{80\cdot10^{-6}} = 600.$$

Ответ: $N = 600$.

ЗАДАЧА 3.106

В магнитном поле, величина индукции которого изменяется по закону $B = \alpha + \beta t^2$, где α = $1\cdot10^{-1}$ Тл, β = $1\cdot10^{-2}$ Тл/с^2, расположена квадратная рамка со стороной a = 0,2 м, причем плоскость рамки перпендикулярна к $\vec{B}$. Определить: 1) величину ЭДС индукции $\varepsilon_{инд}$ в рамке в момент времени t = 5 с; 2) количество теплоты Q, которое выделится в рамке за первые 5 секунд, если сопротивление рамки R = 0,5 Ом.

Дано:
$B = \alpha + \beta t^2$
$\alpha = 1\cdot10^{-1}$ Тл
$\beta = 1\cdot10^{-2}$ Тл/с^2
a = 0,2 м
t = 5 с
R = 0,5 Ом
1) $\varepsilon_{инд}$, 2) Q – ?

Решение

1. Определим магнитный поток Φ через рамку. Так как плоскость рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции $\vec{B}$, то

$$\Phi = \left(\vec{B}, \vec{S}\right) = \left(\alpha + \beta t^2\right)a^2.$$

Используя закон электромагнитной индукции, найдем величину ЭДС индукции $\varepsilon_{инд}$ в момент времени t = 5 с:

$$\varepsilon_{инд} = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = 2\beta a^2 t = 4\cdot10^{-3}\,\text{В};$$

$$[\varepsilon_{инд}] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В};$$

$$\varepsilon_{инд} = 2\cdot 10^{-1}\cdot 0{,}2^2\cdot 5 = 4\cdot 10^{-3}\,\text{В}.$$

2. По закону Ома сила индукционного тока в рамке будет

$$I_{инд} = \frac{\varepsilon_{инд}}{R} = \frac{2\beta a^2 t}{R}.$$

Так как сила тока $I_{инд}$ непостоянна во времени, то для нахождения количества теплоты Q воспользуемся формулой

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt;$$

$$Q = \int_{t=0}^{t=5} I_{инд}^2 R dt = \int_{t=0}^{t=5} \frac{4\beta^2 a^4 t^2}{R} dt = \frac{4\beta^2 a^4 t^3}{3R}\Big|_{t=0}^{t=5} = \frac{4\beta^2 a^4 t^3}{3R};$$

$$[Q] = \frac{\text{Тл}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{с}^3}{\text{с}^4\cdot\text{Ом}} = \frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{А}}{\text{А}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж};$$

$$Q = \frac{4\cdot\left(10^{-2}\right)^2\cdot 0{,}2^4\cdot 5^3}{3\cdot 0{,}5} = 5{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{Дж}.$$

Ответ: 1) $\varepsilon_{инд} = 4\cdot 10^{-3}\,\text{В}$; 2) $Q = 5{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{Дж}$.

ЗАДАЧА 3.107

Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода. Диаметр провода 0,2 мм, диаметр соленоида 5 см. По соленоиду течет ток 1 А. Определить, какое количество электричества протечет через обмотку соленоида, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Дано:
ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м
d = 2·10^{-4} м
I_0 = 1 А
D = 5·10^{-2} м
μ = 1
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м

q – ?

Решение

Количество электричества dq, которое протекает по проводнику за время dt при силе тока I, определяется соотношением

$$dq = Idt.$$

Общее количество q электричества, протекающее через проводник за время t, получается интегрированием:

$$q = \int_0^t Idt.$$

Сила тока I в данном случае убывает экспоненциально со временем t и выражается формулой

$$I = I_0 e^{-Rt/L},$$

где I_0 – сила тока до замыкания.

Индуктивность L соленоида

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_1} S_1,$$

где S_1 – площадь поперечного сечения $\left(S_1 = \frac{\pi D^2}{4} \right)$; l_1 – длина соленоида, которая выражается через диаметр проволоки d и число витков N соотношением $l_1 = dN$.

Сопротивление обмотки соленоида

$$R = \rho \frac{l_2}{S_2},$$

где ρ – удельное сопротивление медной проволоки; l_2 – длина медной проволоки, $l_2 = \pi DN$; S_2 – площадь поперечного сечения медной проволоки, $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Искомое значение q находим интегрированием:

$$q = \int_0^\infty I_0 e^{-Rt/L} dt = I_0 \left(-\frac{L}{R} \right) e^{-Rt/L} = -I_0 \frac{L}{R}(0-1) = I_0 \frac{L}{R} =$$

$$= \frac{I_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}{I_1 \rho l_2} = \frac{I_0 \mu_0 N^2 \pi D^2 \pi d^2}{4 \cdot 4 dN \rho \pi DN} = \frac{I_0 \mu_0 \pi Dd}{16\rho};$$

$$[q] = \frac{\text{А} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл};$$

$$q = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}} = 145 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл} = 145\ \text{мкКл}.$$

Ответ: $q = 145$ мкКл.

ЗАДАЧА 3.108

На картонный цилиндр диаметром D = 4 см намотано N = 1000 витков проволоки в один слой. Витки плотно прижаты друг к другу. Индуктивность полученного соленоида L = 4 мГн. Каков диаметр d проволоки, из которой сделан соленоид?

Дано:	**Решение**
D = 0,04 м N = 1000 L = 4·10^{-3} Гн	Индуктивность однослойного воздушного соленоида $$L = \mu\mu_0 n^2 l S,$$
d – ?	где μ = 1 – магнитная проницаемость воздуха, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $n = \dfrac{N}{l}$ –

число витков на единицу длины соленоида; S – площадь сечения катушки соленоида.

Так как витки плотно прилегают друг к другу, то длина l соленоида $l = dN$, где d – диаметр проволоки.

Площадь сечения S катушки $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$. Тогда

$$L = \mu_0 \frac{N}{d} \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отсюда находим диаметр проволоки

$$d = \frac{\mu_0 N \pi D^2}{4L};$$

$$[d] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{Гн}} = \text{м};$$

$$d = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot \pi \cdot 0,04^2}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

Ответ: $d = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{м}$.

ЗАДАЧА 3.109

Индуктивность соленоида L = 220 мкГн. Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой S_0 = 1 мм^2. Сопротивление обмотки R = 0,4 Ом. Чему равна длина l соленоида?

Дано:	**Решение**
L = 220·10^{-6} Гн S_0 = 10^{-6} м^2 R = 0,4 Ом ρ = 1,7·10^{-8} Ом·м	Индуктивность соленоида $$L = \mu_0 n^2 l S,$$
ℓ – ?	где $n = \dfrac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида. Тогда $L = \mu_0 \dfrac{N^2}{l} S$.

Для нахождения площади сечения S соленоида используем сопротивление R обмотки: $R = \rho \frac{l_0}{S_0}$, где l_0 – длина обмотки.

Если диаметр обмотки соленоида D, то $l_0 = N\pi D$.

Тогда $R = \rho \frac{N\pi D}{S_0}$, где ρ – удельное сопротивление меди. Отсюда находим диаметр D и площадь сечения соленоида:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{R^2 S_0^2}{4\rho^2 N^2 \pi}.$$

Следовательно, индуктивность соленоида можно представить в виде

$$L = \mu_0 \frac{R^2 S_0^2}{4\rho^2 \pi l}.$$

Длина катушки соленоида

$$l = \frac{\mu_0 R^2 S_0^2}{4L\rho^2 \pi};$$

$$[\ell] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Гн} \cdot \text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{м}; \quad l = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,4^2 \cdot \left(10^{-6}\right)^2}{4 \cdot 220 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1,7 \cdot 10^{-8}\right)^2 \cdot \pi} = 0,25 \text{ м}.$$

Ответ: $\ell = 0,25\grave{\imath}$.

ЗАДАЧА 3.110

Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром 0,4 мм имеет длину 0,5 м и поперечное сечение 60 см^2. За какое время при напряжении 10 В и силе тока 1,5 А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным. Генератор тока поддерживает силу тока постоянной.

Дано:

$d = 4 \cdot 10^{-4}$ м
$\ell = 0,5$ м
$S = 6 \cdot 10^{-3}$ м^2
$U = 10$ В
$I = 1,5$ А
$Q = W$
$\mu = 1$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

t – ?

Решение

При прохождении тока I по проволоке при напряжении U за время t выделяется количество теплоты $Q = IUt$.

Внутри соленоида создается магнитное поле, энергия которого

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} lS,$$

где B – индукция магнитного поля внутри соленоида.

Диаметр соленоида гораздо меньше его длины, поэтому магнитную индукцию можно считать по формуле бесконечного соленоида:

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l},$$

где N – число витков соленоида.

Если витки плотно прилегают друг к другу, то $N = \frac{l}{d}$, где l – длина соленоида; d – диаметр проволоки.

Получим после подстановки

$$W = \frac{\mu^2\mu_0^2 I^2 lS}{2d^2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 I^2 lS}{2d^2}.$$

Согласно условию $Q = W$, тогда

$$IUt = \frac{\mu\mu_0 I^2 lS}{2d^2},$$

откуда

$$t = \frac{\mu\mu_0 IlS}{2Ud^2};$$

$$[t] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{В}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}} = \text{с};$$

$$t = \frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5\cdot 6\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10\cdot 16\cdot 10^{-8}} = 1{,}77\cdot 10^{-3}\,\text{с} = 1{,}77\ \text{мс}.$$

Ответ: $t = 1{,}77$ мс.

ЗАДАЧА 3.111

Длина соленоида l = 160 см, площадь поперечного сечения S = 19,6 см^2. Обмотка соленоида имеет $N = 2000$ витков, и по ней течет ток I = 2 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в витке, надетом на соленоид с железным сердечником, если ток в соленоиде спадает до нуля в течение времени $t = 2$ мс?

Дано:
l = 1,6 м
S = 19,6·10^{-4} м^2
$N = 2000$
I = 2 А
$t = 2\cdot 10^{-3}$ с

$\langle \varepsilon_S \rangle$ – ?

Решение

Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируется ЭДС самоиндукции

$$\langle \varepsilon_S \rangle = -L_{1,2}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где $L_{1,2} = \mu\mu_0 n_1 n_2 lS$ – взаимная индуктивность витка и соленоида.

Для соленоида $n_1 = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины; для витка $n_2 = \frac{1}{l}$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем $\Delta t = t$ и $\Delta I = I$. Теперь уравнение для ЭДС можно переписать в виде

$$\langle \varepsilon_S \rangle = \mu\mu_0 \frac{N}{l} S \frac{I}{t}.$$

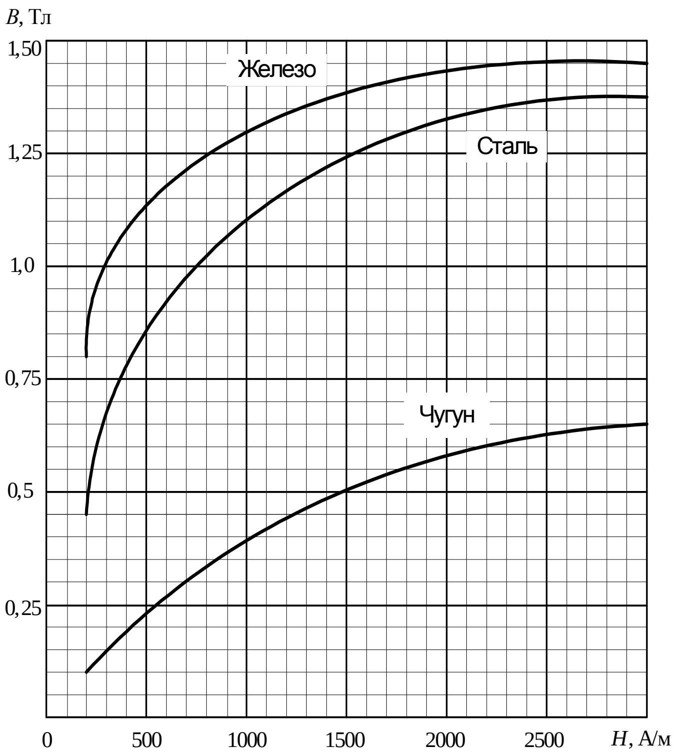


График зависимости магнитной индукции B от напряженности H магнитного поля

В полученном уравнении неизвестна магнитная проницаемость железа μ. Запишем напряженность магнитного поля соленоида, считая его бесконечно длинным:

$$H = In_1 = \frac{IN}{l};$$

$$H = \frac{2 \cdot 2000}{1,6} = 2500 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

По графику (см. рис.) находим значение магнитной индукции для железа: B = 1,48 Тл.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то

$$\mu\mu_0 = \frac{B}{H};$$

$$\mu\mu_0 = 0,55 \ \frac{\text{мГн}}{\text{м}}.$$

Подставляя найденное значение в уравнение для средней ЭДС, получим:

$$\langle \varepsilon_S \rangle = \mu\mu_0 \frac{N}{l} S \frac{I}{t};$$

$$\left[\langle \varepsilon_S \rangle\right] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В};$$

$$\langle \varepsilon_S \rangle = 0,55 \frac{2000}{1,6} 19,6 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 1,42 \text{ В}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_S \rangle = 1,42$ В.

ЗАДАЧА 3.112

Дроссель с индуктивностью L = 8 Гн и сопротивлением R_1 = 40 Ом и лампа сопротивлением R_2 = 200 Ом соединены параллельно и подключены к источнику с электродвижущей силой ε = 120 В через ключ (см. рис.). Определить напряжение U на зажимах дросселя в момент: 1) t_1 = 0,01 с и 2) t_2 = 0,5 с после размыкания цепи.

Дано:
L = 8 Гн
R_1 = 40 Ом
R_2 = 200 Ом
ε = 120 В
t_1 = 0,01 с
t_2 = 0,5 с

U_1, U_2 – ?

Решение

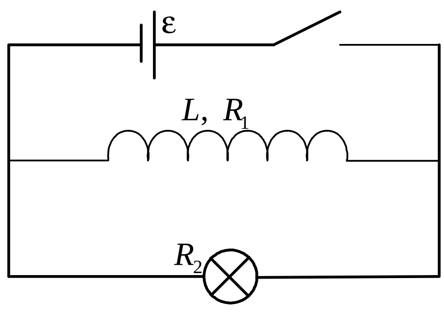
При установившемся режиме сила тока I_0 в цепи равна сумме сил токов, текущих через дроссель $I_1 = \varepsilon / R_1$ и лампу $I_2 = \varepsilon / R_2$. При замыкании ключа в дросселе возникает ЭДС самоиндукции ε_S, которая стремится воспрепятствовать исчезновению тока:

$$\varepsilon_S = -L\frac{dI_1}{dt}.$$

Электродвижущая сила самоиндукции ε_S возникает только в дросселе, так как индуктивность лампы и проводов можно принять равной нулю, то есть ими можно пренебречь.

После отключения источника замкнутую цепь составляют дроссель и лампа, соединенные теперь последовательно. По закону Ома для замкнутой цепи можно написать с учетом ЭДС самоиндукции:

$$I\left(R_1 + R_2\right) = -L\frac{dI}{dt}.$$



После разделения переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L}dt.$$

При $t = 0$ $I(0) = I_1$ (установившаяся сила тока в дросселе до отключения источника).

Интегрируем:

$$\int_{I_1}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L}\int_0^t dt; \qquad I = I_1 e^{-(R_1+R_2)t/L} = \frac{\varepsilon}{R_1}e^{-(R_1+R_2)t/L}.$$

Напряжение U на зажимах дросселя в любой момент времени после отключения источника постоянного тока

$$U = I(t)R_2,$$

где I – текущее значение силы тока, зависящее от времени;

$$U = \varepsilon \frac{R_2}{R_1} e^{-(R_1+R_2)t/L};$$

$$U_1 = \frac{120 \cdot 200}{40} e^{-(40+200)10^2/8} = 6 \cdot 10^2 \cdot e^{-0,3} = 440 \text{ В};$$

$$U_2 = \frac{120 \cdot 200}{40} e^{-(40+200)0,5/8} = 6 \cdot 10^2 \cdot e^{-15} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{В}.$$

Как видно из полученного результата, напряжение U на очень короткое время значительно превышает ЭДС источника, что позволяет наблюдать мгновенную яркую вспышку лампы в момент выключения цепи.

Ответ: $U_1 = 440$ В, $U_2 = 1,8 \cdot 10^{-4}$ В.

ЗАДАЧА 3.113

Определить сопротивление R электрического контакта из-за неидеального осуществления короткого замыкания концов обмотки длинного сверхпроводящего соленоида с индуктивностью L = 3,6 Гн, если в течение каждого часа магнитное поле в соленоиде убывает на 0,01 % (10 промилле).

Дано:
L = 3,6 Гн
$\Delta B/(B\Delta t)$ = 0,01% в час

R – ?

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой электрической цепи имеем:

$$IR = \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (1)$$

Согласно закону Био – Савара – Лапласа $B \sim I$ и $\Delta B \sim \Delta I$.

Поэтому $\dfrac{\Delta B}{B} = \dfrac{\Delta I}{I}$ и $\dfrac{\Delta B}{B\Delta t} = \dfrac{\Delta I}{I\Delta t}$.

Тогда, учитывая равенство (1), получаем:

$$R = L\left|\frac{dI}{Idt}\right| = L\left|\frac{\Delta I}{I\Delta t}\right| = L\left|\frac{\Delta B}{B\Delta t}\right|;$$

$$R = 3,6\frac{0,01 \cdot 10^{-2}}{3,6 \cdot 10^3} = 10^{-7} \text{Ом} = 100 \text{ нОм}.$$

Ответ: $R = 100$ нОм.

ЗАДАЧА 3.114

По соленоиду течет ток силой 5 А. Длина соленоида 1 м, число витков 500. В соленоид вставлен железный сердечник. Найти: 1) намагниченность; 2) объемную плотность энергии магнитного поля соленоида.

Дано:	**Решение**
I = 5 А l = 1 м N = 500	Намагниченность определяется отношением магнитного момента к объему магнетика и связана с напряженностью магнитного поля соотношением
j, ω – ?	$$j = \chi H, \quad (1)$$

где χ – магнитная восприимчивость среды.

Поле соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля вычисляется по формуле

$$H = In,$$

где I – сила тока, текущего по обмотке соленоида; $n = N/l$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Тогда

$$H = \frac{IN}{l}.$$

Связь между магнитной восприимчивостью χ и магнитной проницаемостью μ среды выражается формулой

$$\chi = \mu - 1. \quad (2)$$

Используя соотношение $B = \mu_0 \mu H$, находим

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля соленоида

$$\omega = \frac{BH}{2}.$$

Вычислим напряженность поля соленоида:

$$H = \frac{5 \cdot 500}{1} = 2500 \text{ А/м}.$$

По графику (см. задачу 3.107) находим, что напряженности 2500 А/м соответствует индукция магнитного поля B = 1,49 Тл.

Тогда $\mu = \dfrac{1,49}{12,6 \cdot 10^{-7} \cdot 2500} = 721.$

Согласно формуле имеем: χ = 721 – 1 = 720.

Определим намагниченность по формуле (1):

$$j = 720 \cdot 2500 = 15,9 \cdot 10^6 \text{ А/м} = 15,9 \text{ МА/м}.$$

Объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{1,49 \cdot 2500}{2} = 3625 \text{ Дж/м}^3 \approx 3,63 \text{ кДж/м}^3.$$

Ответ: 1) $j = 15,9$ МА/м; 2) $\omega = 3,63$ кДж/м^3.

ЗАДАЧА 3.115

Рамка площадью S = 150 см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с частотой n = 2,4 об/с. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол α = 30° с направлением магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции $\varepsilon_{\max}$ во вращающейся рамке равна 0,09 В. Какова индукция магнитного поля B?

Дано:
S = 0,015 м^2
n = 2,4 об/с
α = 30°
$\varepsilon_{\max}$ = 0,09 В

B – ?

Решение

Мгновенное значение ЭДС индукции определяется по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет все время угол α с направлением вектора магнитной индукции поля. Кроме того, при вращении рамки меняется магнитный поток, пронизывающий рамку.

Закон изменения магнитного потока

$$\Phi = BS\sin\alpha\cos\omega t, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения рамки.

Из уравнений (1) и (2) найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -BS\sin\alpha\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BS\omega\sin\alpha\sin\omega t.$$

Максимального значения ЭДС достигнет при $\sin\omega t = 1$.

Отсюда

$$\varepsilon_{\max} = BS2\pi n\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$B = \frac{\varepsilon_{\max}}{S2\pi n\sin\alpha};$$

$$[B] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл};$$

$$B = \frac{0{,}09}{0{,}015\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}4\cdot 0{,}5} = 0{,}8\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}8$ Тл.

ЗАДАЧА 3.116

По обмотке соленоида с параметрами: число витков 1000, длина 0,5 м, диаметр 4 см течет ток 0,5 А. Определить потокосцепление, энергию, объемную плотность энергии соленоида.

Дано:	**Решение**
$N = 1000$ $l = 0{,}5$ м $D = 0{,}04$ м $I = 0{,}5$ А $\mu = 1$	Напряженность магнитного поля соленоида $H = I\dfrac{N}{l}$, индукция $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 I\dfrac{N}{l}$, объемная плотность энергии $\omega = \dfrac{W}{V} = \dfrac{W}{Sl}$, а через характеристики поля $\omega = \dfrac{BH}{2}$;
ψ, W, ω – ?	

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2} I^2 \frac{N^2}{l^2};$$

$$[\omega] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{А}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\omega = \frac{1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}25\cdot 10^6}{2\cdot 0{,}25} = 0{,}63\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$W = \omega S\ell;\ [W] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \text{Дж};$$

$$W = 0{,}63\frac{3{,}14\cdot 4^2\cdot 10^{-4}}{4}0{,}5 = 4\cdot 10^{-4}\,\text{Дж}.$$

Потокосцепление ψ соленоида равно:

$$\psi = BSN = B\frac{\pi D^2}{4}N = \mu\mu_0 I\frac{N}{l}\frac{\pi D^2}{4}N;$$

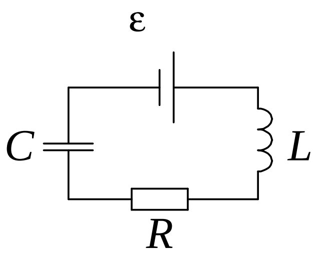
$$[\psi] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{А}} = \text{Вб};$$

$$\psi = \frac{1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}5\cdot 10^6\cdot 3{,}14\cdot 4^2\cdot 10^{-4}}{4\cdot 0{,}5} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{Вб}.$$

Ответ: $\psi = 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{Вб}$; $W = 4\cdot 10^{-4}\,\text{Дж}$; $\omega = 0{,}63\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Основные формулы



Колебательный контур в общем случае имеет вид, приведенный на рисунке.

Уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления (свободные незатухающие колебания, $\varepsilon = 0$, $R = 0$):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q – электрический заряд; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура; L – индуктивность контура; C – электроемкость конденсатора.

Решением уравнения колебаний в контуре без активного сопротивления является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0 – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период незатухающих электрических колебаний в контуре.

Уравнение затухающих колебаний ($\varepsilon = 0$, $R \neq 0$):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания.

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т.е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение уравнения затухающих колебаний имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период, где период колебаний $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$, N_e – число колебаний за время τ, τ – время релаксации.

Добротность колебательного контура

$$Q=\frac{\pi}{\beta}=\pi N_\tau=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}-\frac{R^2}{4}}.$$

При слабом затухании $\left(\omega_0^2\approx\beta^2\right)$

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=2\pi\frac{W}{\Delta W},$$

где W – энергия, запасенная в контуре, ΔW – убыль этой энергии за один период колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t;\quad q=q_m\cos(\omega t-\varphi),$$

где $q_m=\dfrac{U_m}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$; φ – сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением $U=U_0\cos\omega t$; R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура.

Резонансная частота и резонансная амплитуда заряда в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}};\quad (q_m)_{рез}=\frac{U_m/L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}},$$

где ω_0 – собственная частота контура; β – коэффициент затухания; R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура, U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез}=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad (I_m)_{рез}=\frac{U_m}{R},$$

где ω_0 – собственная частота контура; R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; ω – частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L – индуктивность; C – емкость.

Реактивное сопротивление

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z},$$

где R – активное сопротивление цепи; ωL – реактивное индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; Z – полное сопротивление цепи.

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – скорость распространения света в вакууме; ε_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Связь между мгновенными значениями E и H:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H,$$

где E, H – модули напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Уравнение плоской электромагнитной волны:

$$E = E_0\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right),$$

где E_0 – амплитуда напряженности электромагнитного поля волны; ω – циклическая частота; $k = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число; φ_0 – начальная фаза; υ – фазовая скорость распространения волны.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Плотность потока энергии электромагнитных волн – вектор Умова – Пойтинга

$$\vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right],$$

где $\vec{S}$ – плотность потока электромагнитной энергии; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Модуль плотности потока энергии

$$S = \omega\upsilon = EH,$$

где ω – объемная плотность энергии электромагнитной волны; υ – скорость распространения волны в среде; E – напряженность электрического поля волны; H – напряженность магнитного поля волны.

Интенсивность электромагнитной волны

$$I = \left|\left\langle S\right\rangle\right| = \frac{1}{2}E_0H_0.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 3.117

Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 10\cos 10^4 t$ (В). Емкость конденсатора 10 мкФ. Найти индуктивность контура и закон изменения силы тока в нем.

Дано:
$U = 10\cos 10^4 t$ В
$C = 10^{-5}$ Ф

L, $I(t)$ – ?

Решение

Напряжение U на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по гармоническому закону $U = U_0 \cos \omega t$, где U_0 – амплитудное значение напряжения; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота (в условиях задачи $\omega = 10^{-4}$ с$^{-1}$); L – индуктивность; C – емкость конденсатора.

Отсюда

$$L = \frac{1}{\omega^2 C};$$

$$L = \frac{1}{1 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}} = 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Заряд на обкладках конденсатора q равен

$$q = CU = CU_0 \cos \omega t.$$

Сила тока по определению

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t;$$

$$I = -10^5 \cdot 10^{-5} \sin 10^4 t = -\sin 10^4 t, \text{А}.$$

Ответ: $L = 10^{-3}$ Гн; $I(t) = -\sin 10^4 t$ А.

ЗАДАЧА 3.118

Идеальный контур Томсона состоит из конденсатора емкостью C = 25 нФ и катушки с индуктивностью L = 1,015 Гн. Пластинам конденсатора сообщен заряд q_0 = 2,5 мкКл. Как изменяются разность потенциалов U на обкладках конденсатора и значения тока I в цепи в пределах одного периода колебаний? Постройте графики зависимости U и I от времени.

Дано:	**Решение**
$C = 25\cdot10^{-9}$ Ф $L = 1{,}015$ Гн $q_0 = 2{,}5\cdot10^{-6}$ Кл	Колебательный контур без активного сопротивления $(R=0)$ является идеальным и называется контуром Томсона. Уравнение незатухающих электромагнитных колебаний в таком контуре имеет вид:
$U(t),\ I(t)$ – ?	

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q = 0.$$

Уравнение имеет решение в виде

$$q = q_0\cos(\omega_0 t+\alpha),$$

где q_0 – амплитуда незатухающих колебаний заряда на конденсаторе; ω_0 – собственная частота колебаний; α – начальная фаза колебаний (в дальнейшем, для простоты, будем полагать $\alpha = 0$).

Период незатухающих электромагнитных колебаний определяется по формуле Томсона:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}.$$

Учитывая, что $I=\dfrac{dq}{dt}$, запишем закон изменения тока в контуре:

$$I=\frac{dq}{dt}=-q_0\omega_0\sin\omega_0 t=-I_0\sin\omega_0 t,$$

где $I_0 = q_0\omega_0$ – амплитуда колебаний силы тока.

Найдем ω_0 и I_0:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$[\omega_0]=\frac{1}{\sqrt{\text{Гн}\cdot\text{Ф}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\cdot\dfrac{\text{Кл}}{\text{В}}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{с}\cdot\text{Кл}\cdot\text{с}}{\text{Кл}}}}=\text{с}^{-1};$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{1{,}015\cdot25\cdot10^{-9}}}=0{,}63\cdot10^4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}=$$

$$=2\pi\cdot10^3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

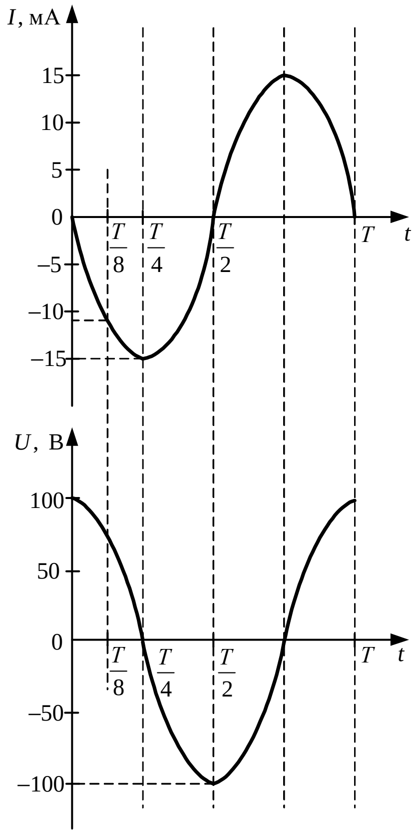
$$I_0=q_0\omega_0;$$

$$I_0=2{,}5\cdot10^{-6}\cdot2\cdot3{,}14\cdot10^3=-15{,}7\cdot10^{-3}\,A.$$

Следовательно, уравнение изменения тока в цепи имеет вид:

$$I(t) = -15{,}7\cdot 10^{-3}\sin 2\pi\cdot 10^{-3}t, \text{А}.$$

Так как напряжение на пластинах конденсатора $U_C = \dfrac{q}{C}$, то уравнение для изменения U будет иметь вид:



$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0\cos\omega_0 t}{C} = U_0\cos\omega_0 t,$$

где $U_0 = \dfrac{q_0}{C}$, U_0 = 100 В – амплитудное значение напряжения.

Следовательно,

$$U(t) = 100\cos 2\pi\cdot 10^{3}t, \text{В}.$$

Для построения графиков составим таблицу.

t	$T/8$	$T/4$	$T/2$
I, мА	–11,1	–15,7	0
U, В	70,7	0	–100

Примечание. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$;

$$T = \frac{2\pi}{2\pi\cdot 10^{3}} = 10^{-3} \text{ с}.$$

На рисунке представлены графики зависимости силы тока и напряжения от времени.

Ответ: $I(t) = -15{,}7\cdot 10^{-3}\sin 2\pi\cdot 10^{-3}t, \text{А}$; $U(t) = 100\cos 2\pi\cdot 10^{3}t$, В.

ЗАДАЧА 3.119

Найти логарифмический декремент затухания δ колебаний в контуре, состоящем из конденсатора емкостью C = 2,22 нФ и катушки из медной проволоки диаметром d = 0,5 мм. Катушка имеет 400 витков проволоки.

Дано:

C = 2,22·10^{-9} Ф

d = 5·10^{-4} м

N = 400

δ – ?

Решение

Логарифмический декремент затухания δ определяется по формуле

$$\delta = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right) = \beta T, \qquad (1)$$

где $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \approx 2\pi\sqrt{LC}\,, \tag{2}$$

так как затухание за один период колебаний мало.

Таким образом, задача сводится к нахождению R и L.

Индуктивность катушки выражается формулой

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S\,, \tag{3}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\mu = 1$ (катушка без сердечника) – магнитная проницаемость среды; l – длина катушки; $n = N/l$ – число витков на единицу длины катушки; S – площадь поперечного сечения катушки.

Пусть D – диаметр катушки, тогда $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Длина катушки $l = Nd$.

Тогда

$$L = \mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}\,. \tag{4}$$

Активное сопротивление проволоки

$$R = \rho \frac{\ell_{пр}}{S_{пр}} = \rho \frac{4ND}{d^2}\,, \tag{5}$$

где $l_{пр} = N \cdot \pi D$ (число витков, умноженное на длину одного витка);

$$S_{пр} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Используя уравнения (4) и (5), для коэффициента затухания запишем:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{8\rho}{\pi\mu_0 D d}\,, \tag{6}$$

где ρ = $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м – удельное сопротивление меди.

Период колебаний найдем из выражений (2), (4):

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\mu_0 C N D^2}{4d}}\,.$$

Логарифмический декремент затухания определим из (1), (6):

$$\theta = 8\rho\sqrt{\frac{\pi C N}{\mu_0 d^3}}\,;$$

$$[\theta] = \text{Ом} \cdot \text{м}\sqrt{\frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{Гн} \cdot \text{м}^3}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{В} \cdot \text{С}}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{С} \cdot \text{А}}{\text{В}^2 \cdot \text{С}}} = \text{Ом}\sqrt{\frac{1}{\text{Ом}^2}} = 1;$$

$$\delta = 8 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 2{,}22 \cdot 10^{-9} \cdot 400}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot \left(5 \cdot 10^{-4}\right)^3}} = 0{,}018 .$$

Ответ: $\delta = 0{,}018$.

ЗАДАЧА 3.120

В контуре вследствие затухания теряется 99 % энергии. Колебательный контур содержит емкость C = 0,55 нФ и индуктивность L = 10 мГн. За какое время происходит потеря энергии в контуре, если логарифмический декремент затухания δ = 0,005?

Дано:
n = 0,99
C = $0{,}55 \cdot 10^{-9}$ Ф
L = 10^{-2} Гн
δ = 0,005

t – ?

Решение

Потерю энергии в колебательном контуре можно записать как отношение:

$$n = \frac{W_0 - W}{W_0},$$

где $W_0 = \dfrac{CU_0^2}{2}$; $W = \dfrac{CU^2}{2}$.

Тогда

$$n = \frac{U_0^2 - U^2}{U_0^2} = 0{,}99; \quad n = 1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}99; \quad \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}01.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^2 = 100; \quad \frac{U_0}{U} = 10. \tag{1}$$

С другой стороны, для затухающих колебаний разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t,$$

т.е. за время t амплитуда изменилась и стала равной

$$\frac{U_0}{U} = e^{\beta t}. \tag{2}$$

Выразим коэффициент затухания через логарифмический декремент из соотношения:

$$\theta = \beta T; \quad \beta = \frac{\theta}{T}. \tag{3}$$

Таким образом, из уравнений (1) – (3) запишем:

$$10 = e^{\frac{\theta t}{T}}. \tag{4}$$

Прологарифмируем равенство (4) и вычислим время затухания:

$$\ln 10 = \frac{\theta t}{T}; \qquad t = \frac{T \cdot \ln 10}{\theta},$$

где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период колебаний.

Искомое время $t = \dfrac{2\pi\sqrt{LC} \cdot \ln 10}{\theta}$;

$$[t] = \sqrt{\text{Гн} \cdot \text{Ф}} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \sqrt{\frac{\text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{с}}{\text{Кл}}} = \text{с};$$

$$t = \frac{2 \cdot 3{,}14\sqrt{10^{-2} \cdot 0{,}55 \cdot 10^{-9}} \cdot \ln 10}{0{,}005} = 6{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

Ответ: $t = 6{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{с}$.

ЗАДАЧА 3.121

Для какого момента времени t отношение $\dfrac{W_м}{W_{эл}}$ энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля равно 3?

Дано:

$\dfrac{W_м}{W_{эл}} = 3$

t – ?

Решение

Энергия магнитного поля

$$W_м = \frac{LI^2}{2}, \tag{1}$$

где

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}; \tag{2}$$

L – индуктивность катушки.

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2}, \tag{3}$$

где

$$U = U_0 \cos \omega t \tag{4}$$

– изменение напряжения на обкладках конденсатора.

Дифференцируя выражение (4) и подставляя его в (2), получим:

$$I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0 \omega \sin \omega t. \tag{5}$$

С учетом уравнений (5) и (4) формулы (1) и (3) примут вид

$$W_м = \frac{LC^2 U_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2}; \tag{6}$$

$$W_{эл} = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}. \tag{7}$$

Поделив уравнение (6) на (7), найдем отношение энергий:

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \frac{LC\omega^2 \sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 tg^2 \omega t\,. \qquad (8)$$

Кроме того, для колебательного контура известно, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,. \qquad (9)$$

Подставив в формулу (8) выражение (9), получим

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \mathrm{tg}^2 \omega t\,.$$

По условию задачи

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = 3\,.$$

Значит, $\mathrm{tg}\omega t = \sqrt{3}$, или $\omega t = \frac{\pi}{3}$; так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний, то

$$\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{3}; \qquad t = \frac{T}{6}\,.$$

Ответ: $t = \frac{T}{6}$.

ЗАДАЧА 3.122

Ток в колебательном контуре изменяется по закону $I = -0{,}04 \sin 400 \cdot \pi t$, А. Емкость конденсатора C = 0,63 мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность контура L, минимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Дано:
C = 0,63·10^{-6} Ф
L, T, $W_м$, $W_{эл}$ – ?

Решение

Закон изменения тока в цепи со временем получим, продифференцировав уравнение $q = q_0 \cos \omega t$:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t = -CU_0 \omega \sin \omega t \qquad (1)$$

Сопоставляя уравнение (1) с заданным в условии задачи, находим период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400\pi}; \qquad T = 5\,\text{мс}.$$

С другой стороны, по формуле Томпсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

можно определить индуктивность катушки L:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};$$

$$[L] = \frac{\text{с}^2}{\text{Ф}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Гн};$$

$$L = 1\ \text{Гн}.$$

Ток максимален, когда $\sin 400\pi t = -1$, т.е. $I_{\max} = 0{,}04$ А. Тогда максимальная энергия магнитного поля

$$W_м = \frac{L I_{\max}^2}{2};$$

$$[W_м] = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^2}{\text{А}} = \text{Дж}; \qquad W_м = 0{,}8\ \text{мДж}.$$

Поскольку колебания в контуре не затухают $(R = 0)$, то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля

$$W_{эл} = W_м = 0{,}8\ \text{мДж}.$$

Ответ: $L = 1$ Гн; $T = 5$ мс; $W_{эл} = W_м = 0{,}8$ мДж.

ЗАДАЧА 3.123

Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 25\cos 10^4 \pi t$, В. Индуктивность катушки L = 10,13 мГн. Найти период T колебаний, емкость C конденсатора, закон изменения со временем тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Дано:
L = 10,13·10^{-3} Гн
T, C, $I(t)$, λ – ?

Решение

В общем виде уравнение изменения напряжения на пластинах конденсатора

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Сравнивая его с уравнением, данным в условии задачи, находим собственную частоту колебаний в контуре: $\omega = 10^4 \pi$.

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, находим период T = 0,2 мс.

Из формулы Томсона вычисляем емкость конденсатора:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}; \quad [C] = \frac{\text{с}^2}{\text{Гн}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}; \quad C = 0{,}1\ \text{мкФ}.$$

Закон изменения со временем тока в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t = -CU_0 \omega \sin \omega t .$$

Подставляя числовые значения емкости $C = 0{,}1$ мкФ, амплитуды напряжения $U_0 = 25$ В и собственной частоты колебаний $\omega = 10^4 \pi$ с$^{-1}$, получаем:

$$I(t) = -78{,}5 \cdot 10^{-3} \sin 10^4 \pi t, \text{ А}.$$

Длина волны, соответствующая контуру,

$$\lambda = cT ; \qquad \lambda = 60 \text{ км},$$

где c – скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Ответ: T = 0,2 мс; $C = 0{,}1$ мкФ; $I(t) = -78{,}5 \cdot 10^{-3} \sin 10^4 \pi t$, А; $\lambda = 60$ км.

ЗАДАЧА 3.124

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ, катушки с индуктивностью L = 5,07 мГн и сопротивления R = 11,1 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за два периода колебаний?

Дано:
$C = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ Ф
$L = 5{,}07 \cdot 10^{-3}$ Гн
$R = 11{,}1$ Ом
$t = 2T$

n – ?

Решение

В колебательном контуре, имеющем активное сопротивление R, возникают затухающие электромагнитные колебания.

Дифференциальное уравнение таких колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 .$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где q_0 – амплитудное значение заряда на пластинах конденсатора в момент времени $t = 0$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний в контуре; $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; α – начальная фаза колебаний (для удобства примем $\alpha = 0$).

Разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos \omega t,$$

где $\frac{q_0}{C} = U_0$ – амплитуда колебаний разности потенциалов на пластинах конденсатора в момент времени $t = 0$.

Следовательно,

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

Тогда за два периода амплитуда колебаний уменьшится в n раз:

$$n = \frac{U(t)}{U(t+2T)} = e^{\beta 2T}.$$

Период T для затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Величина $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ немного меньше $\frac{1}{LC} \approx 10^9$, поэтому для периода T можно применить приближенную формулу Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, $T = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

Тогда

$$n = e^{\beta 2T} = e^{\frac{R}{2L} 2T} = e^{\frac{RT}{L}}; \qquad n = 1{,}55.$$

Ответ: $n = 1{,}55$

ЗАДАЧА 3.125

На зажимы цепи, изображенной на рис. 1, подается переменное напряжение с действующим значением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц. Активное сопротивление цепи R = 22 Ом, индуктивность L = 318 Гн. Переменная емкость в цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно индуктивности, стало максимальным. Найти показания U_1 вольтметра и I амперметра в этих условиях.

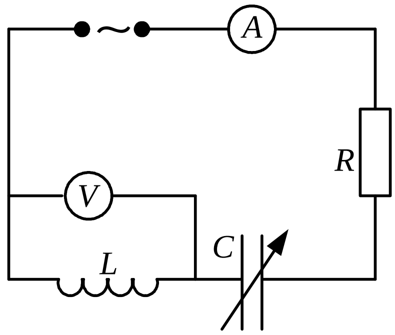


Рис. 1

Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.

Дано:
U = 220 В
ν = 50 Гц
R = 22 Ом
L = 318·10^{-3} Гн

U_1, I – ?

Решение

Применим второе правило Кирхгофа:

$$U_L + U_C + U_R = U. \qquad (1)$$

Из условия задачи, согласно которому напряжение на катушке индуктивности $U_L \equiv U_1$ является максимальным, следует, что переменная емкость C подобрана так, что контур настроен на резонансную частоту, при которой $\mathrm{tg}\varphi = 0$.

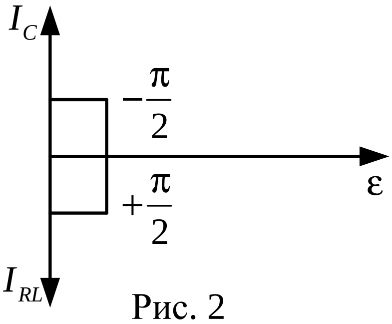


Рис. 2

Следовательно, $\varphi = \pi$. Из векторной диаграммы (рис. 2) видно, что сдвигу фаз $\varphi = \pi$ соответствует падение напряжения на катушке U_L, равное по величине падению напряжения на конденсаторе U_C, но находящееся в противофазе, т.е. $U_L = -U_C$ или $U_L + U_C = 0$.

Таким образом, выражение (1) упростится:

$$U = U_R = IR. \qquad (2)$$

Откуда $I = \dfrac{U}{R} = 10$ А.

В последовательно соединенном контуре $I_L = I_R$, т.е.

$$\frac{U_L}{\omega L} = \frac{U_R}{R}.$$

Следовательно, с учетом (2) максимальное напряжение U_1 будет

$$U_1 \equiv U_L = \frac{U_R \omega L}{R} = \frac{U \omega L}{R} = \frac{U 2\pi\nu L}{R};$$

$$[U_1] = \frac{\text{В} \cdot \text{Гн}}{\text{с} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{В}} = \text{В};$$

$$U_1 = \frac{220 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 380 \cdot 10^{-3}}{22} = 10^3 \text{В}.$$

Ответ: $U_1 = 10^3$ В; $I = 10$ А.

ЗАДАЧА 3.126

Конденсатор емкостью C = 10 мкФ подключен параллельно к последовательно соединенным сверхпроводящему соленоиду индуктивностью L = 1 мГн и резистору сопротивлением R = 0,1 Ом и заряжается при этом генератором тока, задающим во внешней цепи ток силой I = 100 А. После зарядки конденсатора LCR-контур отключают от генератора и в контуре возникают слабозатухающие электрические колебания. Найти: 1) энергию W, рассеиваемую контуром в результате затухания колебаний; 2) период T электрических колебаний в контуре; 3) логарифмический декремент δ колебаний в контуре; 4) добротность Q электрического контура; 5) оценить число колебаний N в контуре до их полного затухания.

Дано:

$C = 10 \cdot 10^{-6}$ Ф

$L = 10^{-3}$ Гн

$R = 0{,}1$ Ом

$I = 100$ А

W, T, θ, Q, N – ?

Решение

1. Ответим сначала на вопрос об энергии W, рассеиваемой контуром при затухании электрических колебаний. Она равна суммарной энергии электрического $W_э$ и магнитного $W_м$ полей в конденсаторе и, соответственно, в соленоиде:

$$W = W_э + W_м = \frac{1}{2}(IR)^2 C + \frac{1}{2} L I^2,$$

поскольку в стационарном состоянии до отключения контура от генератора тока напряжение U_{0C} на конденсаторе емкостью C было равно напряжению $U_R = IR$ на резисторе при протекании через него и соленоид индуктивностью L тока I.

Откуда

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \left(1 + R^2 \frac{C}{L}\right) \approx \frac{1}{2} L I^2.$$

Поскольку

$$R^2 \frac{C}{L} = 10^{-2} \frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-4} \ll 1,$$

то этим слагаемым можно пренебречь.

Подставляя числовые данные, получим:

$$W = \frac{1}{2} 10^{-3} \left(10^2\right)^2 \approx 5 \text{ Дж}.$$

В соответствии с общей теорией затухающих электрических колебаний в LCR-контуре при слабом затухании:

2. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 628 \text{ мкс} = 0{,}63\text{нс}$.

3. Логарифмический декремент

$$\theta = \beta T = (2R/L)\left(2\pi\sqrt{LC}\right) = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}03 \ll 1.$$

4. Добротность $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 100 \gg 1$.

5. Число колебаний $N \approx Q \approx 100$.

Ответ: 1) $W = 5$ Дж; 2) $T = 0{,}63$нс; 3) $\theta = 0{,}03$; 4) $Q = 100$; 5) $N = 100$.

ЗАДАЧА 3.127

Активное сопротивление колебательного контура R = 0,33 Ом. Какую мощность P потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой силы тока I_m = 30 мА?

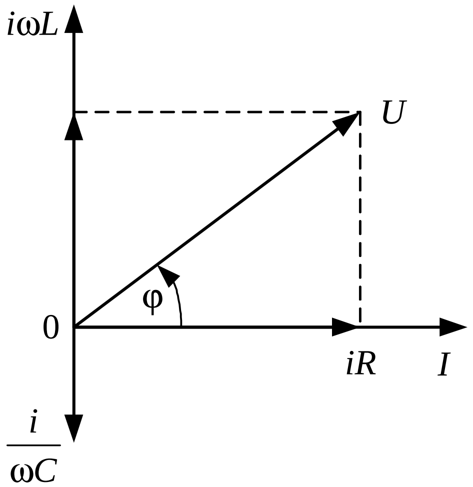
Дано:
R = 0,33 Ом
$I_m = 30 \cdot 10^{-3}$ А

P – ?

Решение

Для поддержания незатухающих колебаний контур должен потреблять мощность, равную выделяемой им в цепи переменного тока, т.е.

$$P = IU\cos\varphi. \qquad (1)$$



С учетом того, что $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $I = \frac{I_m}{\sqrt{}}$, перепишем (1) в виде

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi. \qquad (2)$$

Применяя метод векторных диаграмм (см. рис.), определим коэффициент мощности $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}, \qquad (3)$$

где Z – полное сопротивление цепи ($Z = \sqrt{R^2 + x^2}$).

Используя закон Ома для переменного тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)}} = \frac{U_m}{Z},$$

а также формулы (2) и (3), выразим мощность P в виде

$$P = \frac{I_m^2 R}{2}; \qquad [P] = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В}}{\text{А}} = \text{А} \cdot \text{В} = \text{Вт};$$

$$P = \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 0{,}33/2 = 0{,}15 \cdot 10^{-3}\text{Вт}.$$

Ответ: $P = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$Вт.

ЗАДАЧА 3.128

Катушка сопротивлением 8,2 Ом включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Длина катушки l = 100 см и площадь поперечного сечения S = 40 см^2. Число витков на катушке N = 3000. Найти сдвиг фаз φ между напряжением и током.

Дано:
R = 8,2 Ом
ν = 50 Гц
l = 1 м
$S = 4 \cdot 10^{-3}$ м^2
N = 3000
φ – ?

Решение

Для решения удобно использовать векторную диаграмму (см. рис.), изобразив амплитуды напряжений

$$U_{Rm} = RI_m; \qquad U_{Lm} = \omega L I_m$$

и их векторную сумму, равную, согласно второму правилу Кирхгофа,

$$U_L + U_R = \varepsilon_m \cos\omega t,$$

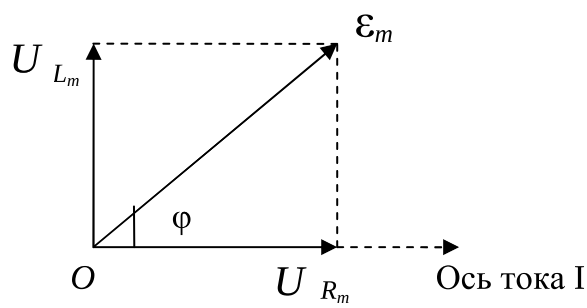
где $\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$ – внешняя переменная ЭДС, зависящая от времени по гармоническому закону.

Из рисунка видно, что сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$tg\varphi = \frac{U_{Lm}}{U_{Rm}} = \frac{\omega L}{R}.$$

Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула примет упрощенный вид:

$$\text{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}. \qquad (1)$$



Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2)$$

Индуктивность катушки

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\text{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 n^2 l S}{R}, \qquad (4)$$

где $\mu = 1$ – магнитная проницаемость воздуха; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; l – длина катушки.

Так как число витков на единицу длины катушки $n = \frac{N}{l}$, то формула (4) примет вид:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{\ell R}; \quad [\varphi] = \frac{\text{Гц} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}} = 1;$$

$$\varphi = 60°.$$

Ответ: $\varphi = 60°$.

ЗАДАЧА 3.129

Колебательный контур настроен на длину волны λ = 1500 м и состоит из катушки индуктивностью L = 60 мкГн и плоского конденсатора с площадью пластин S = 400 см^2. Расстояние между пластинами d = 0,02 см. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Дано:
λ = 1500 м
$L = 6 \cdot 10^{-5}$ Гн
$S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2
$d = 2 \cdot 10^{-4}$ м

ε – ?

Решение

Длина волны, на которую настроен контур,

$$\lambda = cT, \tag{1}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн.

Период колебаний определим по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \tag{3}$$

Из выражения (3) найдем емкость конденсатора:

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}. \tag{4}$$

С другой стороны, емкость плоского конденсатора можно найти по формуле

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{5}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь пластины и d – расстояние между пластинами конденсатора.

Решая уравнения (4) и (5), найдем диэлектрическую проницаемость среды:

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 L S}; \qquad \varepsilon = 6;$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{А}}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{Кл}} = 1.$$

Ответ: $\varepsilon = 6$.

ЗАДАЧА 3.130

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 100 пФ, катушки индуктивностью L = 0,01 Гн и резистора сопротивлением R = 20 Ом. Определить: 1) период затухающих колебаний; 2) через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Дано:
$C = 10^{-7}$ Ф
L = 0,01 Гн
R = 20 Ом

1) T; 2) N_e – ?

Решение

Искомый период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}},$$

учли, что собстветственная частота контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$.

Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \qquad (1)$$

где время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$.

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомое число полных колебаний:

$$N_e = \frac{2L}{RT};$$

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{Гн}\cdot\text{Ф}} - \frac{\text{Ом}^2}{\text{Гн}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{Кл}} - \frac{\text{В}^2\cdot\text{А}^2}{\text{А}^2\cdot\text{В}^2\cdot\text{с}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{А}}{\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{с}} - \frac{1}{\text{с}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}}} = \text{с};$$

$$T = \frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{1}{0{,}01\cdot 10^{-2}} - \frac{20^2}{4\cdot(0{,}01)^2}}} = 2\cdot 10^{-3}\,\text{с} = 2\ \text{мс}.$$

$$[N_e] = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}} = 1; \qquad N_e = \frac{2\cdot 0{,}01}{20\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 5.$$

Ответ: 1) $T = 2$ мс; 2) $N_e = 5$.

ЗАДАЧА 3.131

Определить добротность Q колебательного контура, если собственная частота ω_0 колебательного контура отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано:	Решение
$\omega_0 = 1,05\omega$	В реальном колебательном контуре (т.е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \simeq 0$)
Q – ?	

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,, \qquad (1)$$

где β – коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\theta = \beta T$ (T – период затухающих колебаний, $T = \frac{2\pi}{\omega}$).

Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{\theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q\cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\,.$$

Откуда искомая добротность

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}};$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1,05\omega}{\omega}\right)^2 - 1}} = 1,56.$$

Ответ: $Q = 1,56$.

ЗАДАЧА 3.132

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 10 нФ и катушки индуктивностью L = 4 мкГн. Определить критическое сопротивление $R_{кр}$ контура, при котором наступает апериодический процесс.

Дано:
$C = 10^{-8}$ Ф
$L = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн
$R_{кр}$ – ?

Решение

Частота свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

При увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет и при $\beta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т.е. вместо колебаний будет происходить разряд конденсатора.

Критическое сопротивление, при котором наступает апериодический процесс, определяется из условия

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}, \quad \text{откуда} \quad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\left[R_{кр}\right] = \sqrt{\frac{\text{Гн}}{\text{Ф}}} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{Кл}}} = \sqrt{\frac{\text{В}^2 \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}; \quad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-6}}{10^{-8}}} = 40 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{кр} = 40$ Ом.

ЗАДАЧА 3.133

Колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 5 мГн и конденсатор емкостью C = 2 мкФ. Добротность колебательного контура Q = 100. Какую среднюю мощность следует подводить для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{cm} = 2B$?

Дано:
$L = 5 \cdot 10^{-3}$ Гн
$C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф
$Q = 100$
$U_{cm} = 2B$
$\langle P \rangle$ – ?

Решение

Средняя мощность, выделяемая в колебательном контуре,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2, \qquad (1)$$

где R – активное сопротивление; I_m – амплитуда силы тока.

Активное сопротивление R найдем из формулы для добротности:

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда

$$R=\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (2)$$

Амплитудное значение силы тока найдем, применяя закон Ома для элемента контура C, поскольку в задаче задано амплитудное значение напряжения на конденсаторе:

$$I_m=\omega C U_{Cm}=U_{Cm}\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad (3)$$

учли, что при незатухающих колебаниях $\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую среднюю мощность:

$$\langle P\rangle=\frac{U_{Cm}^2}{2Q}\sqrt{\frac{C}{L}};$$

$$\langle P\rangle=\text{В}^2\sqrt{\frac{\text{Ф}}{\text{Гн}}}=\text{В}^2\sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}}=\text{В}^2\sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{В}^2\cdot\text{с}}}=\text{В}^2\,\frac{\text{А}}{\text{В}}=\text{В}\cdot\text{А}=\text{Вт};$$

$$\langle P\rangle=\frac{2^2}{2\cdot 100}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-6}}{5\cdot 10^{-3}}}=0,4\cdot 10^{-3}\,\text{Вт}.$$

Ответ: $\langle P\rangle=0,4\cdot 10^{-3}\,\text{Вт}$.

ЗАДАЧА 3.134

Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью, равной 1, имеет вид $E=10\sin\left(6,28\cdot 10^8 t-4,19x\right)$. Определить диэлектрическую проницаемость среды ε и длину волны λ.

Дано:
$\mu=1$
$E=10\sin\left(6,28\cdot 10^8 t-4,19x\right)$
$c=3\cdot 10^8$ м/с

ε, λ – ?

Решение

Уравнение плоской электромагнитной волны в общем виде $E=E_0\sin\left(\omega t-kx\right)$, где E_0 – амплитудное значение напряженности электрического поля; $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны; ω – циклическая частота; $\omega=k\upsilon$; υ – фазовая скорость.

По условию задачи $k = 4{,}19\,\text{м}^{-1}$. Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \qquad \lambda = \frac{6{,}28}{4{,}19} \simeq 1{,}5\ \text{м}.$$

Фазовая скорость волны $\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$.

Отсюда $\varepsilon = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{c^2}{\upsilon^2}$.

Или, с учетом того, что $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$, а ω по условию задачи равна $6{,}28 \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$, получим:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu}\left(\frac{c \cdot k}{\omega}\right)^2;$$

$$\varepsilon = \frac{9 \cdot 10^{16} \cdot 4{,}19^2}{6{,}28^2 \cdot 10^6} = 4.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}5\ \text{м}$; $\varepsilon = 4$.

ЗАДАЧА 3.135

Длина электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 31,4 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определить максимальную силу тока I_m в контуре, если максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора равен 50 нКл.

Дано:
λ = 31,4 м
$R = 0$
q_m = $5 \cdot 10^{-8}$ Кл

I_m – ?

Решение

Колебания в контуре – незатухающие ($R = 0$), поэтому максимальная энергия магнитного поля катушки равна максимальной энергии электрического поля конденсатора (полная энергия колебательного контура постоянна):

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}, \tag{1}$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Откуда

$$LC = \frac{q_m^2}{I_m^2}. \tag{2}$$

Длина волны определяется по формуле

$$\lambda = cT\,, \tag{3}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения света в вакууме; T – период колебаний, определяемый по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{4}$$

Подставив выражение (2) в формулу (4), а затем (4) в (3), найдем искомую максимальную силу тока в контуре:

$$I_m = 2\pi c \frac{q_m}{\lambda};$$

$$[I_m] = \frac{\text{м} \cdot \text{Кл}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{А};$$

$$I_m = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{5 \cdot 10^{-8}}{31{,}4} = 3\ \text{А}.$$

Ответ: $I_m = 3$ А.

ЗАДАЧА 3.136

В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Определить амплитуду напряженности электрического поля волны, если амплитуда H_0 напряженности магнитного поля волны равна 5 мА/м.

Дано:

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$H_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ А/м

E_0 – ?

Решение

Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}E = \sqrt{\mu_0 \mu}H\,,$$

где ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; ε и μ – соответственно, электрическая и магнитная проницаемость среды.

Поскольку электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), то

$$\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H\,. \tag{1}$$

В электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, поэтому выражение (1) может быть записано и для мгновенных значений амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0.$$

Из последнего выражения найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля электромагнитной волны:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_0;$$

$$[E_0] = \sqrt{\frac{\text{Гн}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{Кл}}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}}\cdot 5\cdot 10^{-3} = 1{,}88\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E_0 = 1{,}88\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.137

В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой 100 В/м. Какую энергию переносит эта волна через площадку 50 см^2, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны, за 1 мин? Период волны $T \ll t$.

Дано:
E_0 = 100 В/м
S = 5·10^{-3} м^2
t = 60 с
$T \ll t$

W – ?

Решение

Энергия, переносимая через площадку S, перпендикулярную к направлению распространения волны, в единицу времени равна

$$\frac{dW}{dt} = \omega c S,$$

где ω – объемная плотность энергии;

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2},$$

или с учетом того, что

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2, \qquad \omega = \varepsilon_0 E^2.$$

Напряженность электрического поля волны $E = E_0 \sin\omega t$.

Таким образом, $\frac{dW}{dt} = cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\omega t$.

Энергия, переносимая волной за время t, будет определяться интегралом

$$W = \int_0^t cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \int_0^t \sin^2\omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right).$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому $\frac{t}{2} \gg \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$, и тогда $W = \frac{1}{2} cS\varepsilon_0 E_0^2 t$;

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 60 \simeq 4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $W = 4$ Дж.

ЗАДАЧА 3.138

Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной изотропной среде с $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0 = 12 В/м. Определить: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано:
$\varepsilon = 2$
$\mu = 1$
E_0 = 12 В/м

1) υ; 2) H_0 – ?

Решение

Фазовая скорость электромагнитных волн

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}};$$

$$\upsilon = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 1}} = 2{,}12 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения света в вакууме.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Тогда для амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны (см. задачу 3.131)

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0.$$

Откуда искомая амплитуда напряженности магнитного поля электромагнитной волны

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} E_0;$$

$$[H_0] = \frac{\sqrt{\text{Ф/м}}}{\sqrt{\text{Гн/м}}} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\text{А}}{\text{м}};$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2}}{\sqrt{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1}} \cdot 12 = 45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: 1) $\upsilon = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с; 2) $H_0 = 45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

ЗАДАЧА 3.139

Определить энергию, которую переносит за 1 минуту плоская синусоидальная волна, распространяющаяся в вакууме через площадку площадью 10 см^2, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны 1 мВ/м. Период волны $T \ll 1\,\text{мин}$.

Дано:
$T = 60$ с
$S = 10^{-3}$ м^2
$E_0 = 10^{-3}$ В/м
$\varepsilon = 1$
$\mu = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

W – ?

Решение

Энергия, переносимая электромагнитной волной за единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга $\vec{S}^*$. Учитывая, что в электромагнитной волне $\vec{E} \perp \vec{H}$, получаем для модуля вектора $\left|\vec{S}^*\right| = EH$, или $\left|\vec{S}^*\right| = E_0 \sin\omega t \cdot H_0 \sin\omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t$.

Таким образом можно определить мгновенное значение величины $\vec{S}^*$. Поэтому, согласно определению вектора плотности потока энергии, запишем:

$$\left|\vec{S}^*\right| = \frac{dW}{dt}\frac{1}{S}.$$

Отсюда энергия, переносимая волной через площадку S за время dt, будет равна

$$dW = \left|\vec{S}^*\right| SdS = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt.$$

Согласно теории электромагнитных волн объемные плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени равны:

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Напряженность магнитного поля H можно выразить через напряженность электрического поля E:

$$H = E\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Тогда выражение для энергии примет вид:

$$dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \sin^2(\omega t)\, dt.$$

Отсюда полная энергия, переносимая волной за время t,

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \int_0^t \sin^2(\omega t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right).$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{T}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$.

Учитывая, что $T \ll t$, получаем, что $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \ll \frac{t}{2}$.

Тогда получим:

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \frac{t}{2};$$

$$[W] = \sqrt{\frac{\text{Ф}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Гн}}} \cdot \frac{\text{В}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}} \cdot \text{В}^2\cdot\text{с} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{В}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}} \cdot \text{В}^2\cdot\text{с} =$$

$$= \frac{\text{А}\cdot\text{В}^2\cdot\text{с}}{\text{В}} = \text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с} = \text{Дж};$$

$$W = \sqrt{\frac{8{,}85\cdot 10^{-12}}{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}}\left(10^{-3}\right)^2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{60}{2} = 8\cdot 10^{-11}\,\text{Дж}.$$

Ответ: $W = 8\cdot 10^{-11}\,\text{Дж}$.

4. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. СТРОЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

4.1. Элементы геометрической оптики

Основные формулы

При падении луча света на границу двух сред наблюдаются явления отражения и преломления света (рис. 1).

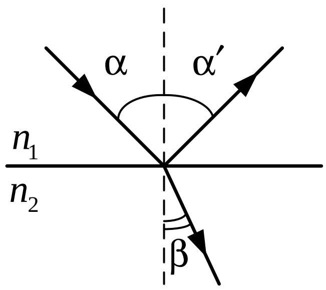


Рис. 1

Закон отражения света:

$$\alpha = \alpha',$$

где α – угол падения луча; α' – угол отражения.

Закон преломления света при прохождении через границу раздела двух сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где α – угол падения луча; β – угол преломления; n_{21} – относительный показатель преломления; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред.

Явление полного внутреннего отражения возможно при условии $n_2 < n_1$. Тогда угол $\beta > \alpha$ и при $\alpha = \alpha_{пр}$ угол β = 90°. Все лучи, падающие на границу двух сред под углом $\alpha > \alpha_{пр}$, полностью отражаются.

Закон полного внутреннего отражения имеет вид:

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1},$$

где $\alpha_{пр}$ – предельный угол полного отражения.

Ход лучей в призме

Для призмы из материала с показателем преломления n и преломляющим углом A (рис. 2)

для первой преломляющей грани

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n;$$

для второй преломляющей грани

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{1}{n};$$

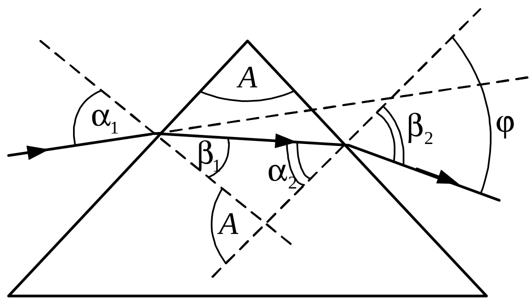


Рис. 2

преломляющий угол

$$A = \alpha_2 + \beta_1.$$

Связь угла φ отклонения лучей и преломляющего угла A призмы:

$$\varphi = A(n-1) = \alpha_1 + \beta_2 - A.$$

Абсолютный показатель преломления

$$n = \frac{c}{\upsilon},$$

где c – скорость света в вакууме; υ – скорость света в среде.

Формула сферического зеркала (для параксиальных световых лучей):

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где F – главное фокусное расстояние; R – радиус кривизны сферического зеркала; d – расстояние от зеркала до светящейся точки; f – расстояние от зеркала до изображения.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = \frac{1}{F} = \frac{2}{R},$$

где F – главное фокусное расстояние; R – радиус кривизны сферического зеркала.

Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где F – главное фокусное расстояние линзы; $n_л$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{ср}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды (одинаковой с обеих сторон линзы).

В этой формуле радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком «плюс», вогнутых – со знаком «минус».

Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где d – расстояние от оптического центра линзы до предмета; f – расстояние от оптического центра линзы до изображения. Для собирающих линз величина F положительная, для рассеивающих линз величина F отрицательная. Если изображение мнимое, то величина f отрицательная.

Увеличение в линзе

$$\Gamma = \frac{h}{h_0} = \frac{f}{d},$$

где h и h_0 – соответственно, линейные размеры изображения и предмета.

Построение изображения в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

– луч, проходящий через оптический центр линзы, – не изменяет своего направления и является побочной оптической осью;

– луч, идущий параллельно главной оптической оси, – после преломления в линзе этот луч или его продолжение проходит через один из фокусов линзы;

– луч (или его продолжение), проходящий через первый фокус линзы, – после преломления в ней выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

При построении изображений в тонкой линзе полезно также помнить свойства побочных фокусов. Напомним, что побочной оптической осью называется любая прямая, проходящая через оптический центр линзы под углом к главной оптической оси. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к главной оптической оси, называется главной фокальной плоскостью. Точка пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью называется побочным фокусом F' (рис. 3). Любой луч (или его продолжение), параллельный побочной оптической оси, проходит через соответствующий побочный фокус; F' – побочный фокус.

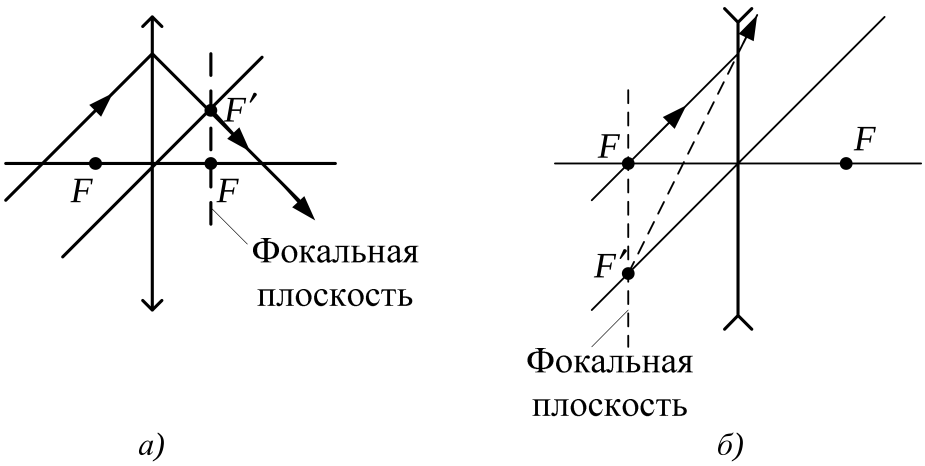


Рис. 3

Увеличение лупы

$$N = \frac{L}{F}, \qquad L = 0{,}25 \text{ м (расстояние наилучшего зрения).}$$

Увеличение микроскопа

$$N = \frac{\delta L}{F_1 F_2},$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра; F_1 и F_2 – фокусные расстояния объектива и окуляра.

Световой поток Φ, испускаемый изотропным источником в пределах телесного угла ω, в вершине которого находится источник, пропорционален силе света I источника и величине телесного угла ω:

$$\Phi = I\omega.$$

Полный световой поток изотропного точечного источника

$$\Phi_0 = 4\pi I.$$

Поток излучения

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W – энергия излучения; t – время излучения.

Светимость R *равномерно светящейся поверхности* численно равна световому потоку, испускаемому с единицы площади поверхности:

$$R = \frac{\Phi}{S}.$$

Энергетическая яркость (светимость)

$$B = \frac{\Delta I_e}{\Delta S},$$

где ΔI_e – энергетическая сила света элемента излучающей поверхности; ΔS – площадь проекции элемента излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению наблюдения.

Освещенность E поверхности численно равна световому потоку, падающему на единицу площади:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Освещенность, создаваемая изотропным точечным источником на расстоянии r от него,

$$E = \frac{I\cos\alpha}{r^2},$$

где α – угол падения луча.

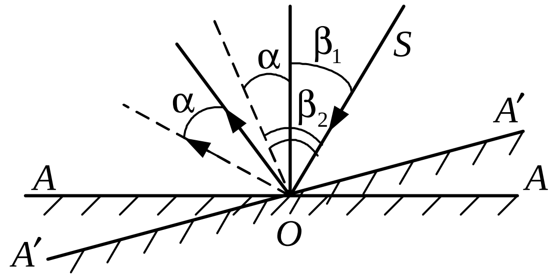
Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.1

Определить, на какой угол γ повернется луч, отраженный от плоского зеркала, если повернуть зеркало на угол α.

Дано:	**Решение**
α	Пусть AA – первоначальное положение зеркала;
γ – ?	$A'A'$ – его положение после поворота на угол α.

Если угол падения луча SO на зеркало в положении AA равен β_1 (см. рис.), то при повороте зеркала на угол α (положение $A'A'$) угол падения луча стал равным



$$\beta_2 = \alpha + \beta_1.$$

Следовательно, отраженный луч повернется на угол

$$\gamma = (\beta_2 + \alpha) - \beta_1 = \alpha + \beta_1 + \alpha - \beta_1 = 2\alpha.$$

Ответ: $\gamma = 2\alpha$.

ЗАДАЧА 4.2

На плоскопараллельную стеклянную $(n=1{,}5)$ пластинку толщиной d = 8 см падает под углом α = 60° луч света. Определить боковое смещение луча h, прошедшего сквозь эту пластинку.

Дано:	**Решение**
$n=1{,}5$	Вышедший из пластинки луч будет параллелен падающему, т.е. плоскопараллельная пластинка не изменяет направление падающих на нее лучей, а только смещает их относительно первоначального хода.
d = $8 \cdot 10^{-2}$ м	
α = 60°	
h – ?	

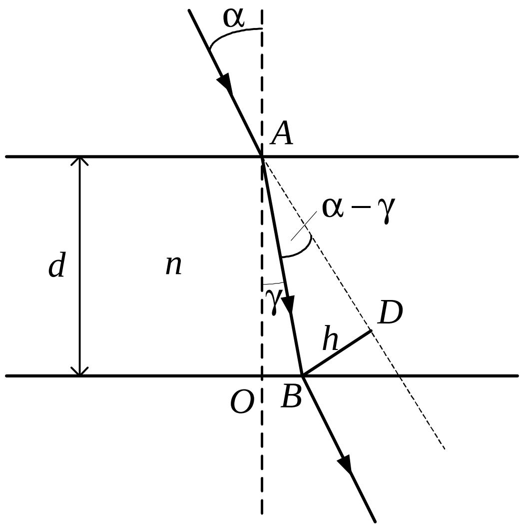
Это смещение h и надо определить.

Из ΔABD (см. рис.)

$$h = AB\sin(\alpha - \gamma). \qquad (1)$$

Из ΔAOB найдем:

$$AB = \frac{AO}{\cos\gamma} = \frac{d}{\cos\gamma}. \qquad (2)$$



Подставляя (2) в (1), получим:

$$h = \frac{d \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\gamma}. \qquad (3)$$

Угол γ найдем, используя закон преломления:

$$\sin\alpha = n \sin\gamma;$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}58;$$

$$\gamma = 35°45';$$

$$\cos\gamma = 0{,}81.$$

Подставив числовые значения в формулу (3), получим:

$$h = \frac{8 \cdot 10^{-2} \sin 24°15'}{\cos 35°45'} = 0{,}04 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 0{,}04$ м.

ЗАДАЧА 4.3

Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку, показатель преломления которой 1,6, под углом 45° (см. рис.). Определить толщину пластинки, если вышедший из пластинки луч смещен относительно продолжения падающего луча на расстояние 2 см.

Дано:
n = 1,6
α_1 = 45°
h = $2{\cdot}10^{-2}$ м
d – ?

Решение

Вышедший луч будет параллелен падающему лучу, так как пластинка плоскопараллельная. По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = n; \qquad (\alpha_2 = \gamma_1); \qquad (\alpha_1 = \gamma_2).$$

Из треугольника ADB

$$\cos\alpha_2 = \frac{d}{AB},$$

а из треугольника ABC

$$\frac{h}{AB} = \sin(\alpha_1 - \gamma_1) = \sin(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Откуда

$$\frac{d}{\cos\alpha_2} = \frac{h}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$d=\frac{h\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{h\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\sin\alpha_2};$$

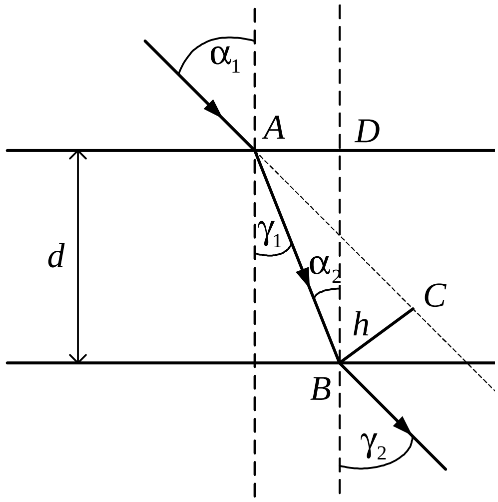
$$\sin\alpha_2=\frac{\sin\alpha_1}{n}; \qquad \cos\alpha_2=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha_1}{n^2}}.$$

Тогда искомая толщина

$$d=\frac{h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_2}}{\sin\alpha_1\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}-\sin\alpha_1\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}}=$$

$$=\frac{h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_2}}{\sin\alpha_1\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}-\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}\right)};$$

$$d=\frac{2\cdot10^{-2}\sqrt{2{,}56-0{,}5}}{0{,}71\left(\sqrt{2{,}56-0{,}5}-\sqrt{1-0{,}5}\right)}=5{,}6\cdot10^{-2}\,\text{м}.$$



Ответ: $d=5{,}6\cdot10^{-2}\,\text{м}$.

ЗАДАЧА 4.4

Наблюдатель рассматривает светящуюся точку через плоскопараллельную стеклянную пластину с показателем преломления 1,5 толщиной 3 см так, что луч зрения нормален к пластине. Определить расстояние между светящейся точкой и ее изображением (см. рис.).

Дано:
n = 1,5
d = $3\cdot10^{-2}$ м
SS' – ?

Решение

В глаз наблюдателя попадает световой пучок, лучи которого образуют между собой весьма малые углы. Продолжения этих лучей пересекаются в одной точке S', являющейся изображением светящейся точки S. Пусть два луча выходят из точки S и попадают в глаз. Один из них, луч SN, падает нормально на пластинку. Другой луч SO попадает под произвольным весьма малым углом α. Этот луч, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку SO.

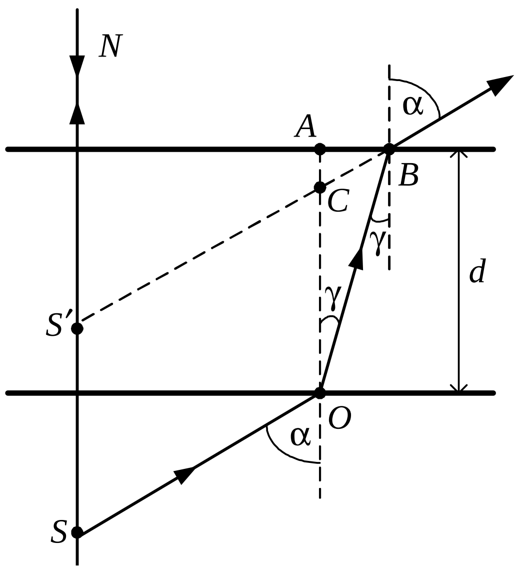
Чтобы определить положение точки S', в которой пересекутся продолжения этих двух лучей, проведем отрезок OA, параллельный лучу SN.

Из параллелограмма $SS'CO$ следует:

$$SS'=OC=OA-AC=d-h.$$

При этом отрезок $AC = h$ можно выразить через толщину пластинки d и ее показатель преломления n. Для этого заметим, что если бы в точке O находился источник света, его изображением явилась бы точка C, так как здесь пересекались бы лучи, выходящие из точки O, после преломления на верхней грани пластинки:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n.$$



Из треугольника OAB

$$AB = AO\,\mathrm{tg}\gamma,$$

из треугольника CAB

$$AB = AC\,\mathrm{tg}\alpha,$$

тогда получим:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{AO}{AC} = \frac{d}{h}.$$

Так как углы малы, то

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{h} = n; \qquad h = \frac{d}{n}.$$

Отсюда

$$SS' = d - \frac{d}{n} = \frac{d(n-1)}{n};$$

$$SS' = \frac{3\cdot 10^{-2}(1{,}5-1)}{1{,}5} = 10^{-2} \text{ м}.$$

Изображение S' смещено относительно светящейся точки на 1 см в сторону наблюдателя.

Ответ: $SS' = 10^{-2}$ м.

ЗАДАЧА 4.5

На дно сосуда, наполненного скипидаром до высоты 10 см, помещен источник света S. На поверхности скипидара плавает круглая непрозрачная пластина так, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти из скипидара (см. рис.)? Определить скорость света в скипидаре.

Дано:	**Решение**
$n_1 = 1{,}48$ $n_2 = 1$ $h = 10^{-2}$ м $c = 3 \cdot 10^8$ м/с R, υ – ?	Луч света идет из среды более оптически плотной (скипидар) в менее плотную среду (воздух). При угле падения, равном предельному, угол преломления будет равен 90°. При угле падения больше $\alpha_{пред}$ луч будет отражаться от границы раздела (полное внутреннее отражение);

$$\frac{\sin\alpha_{пред}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1};$$

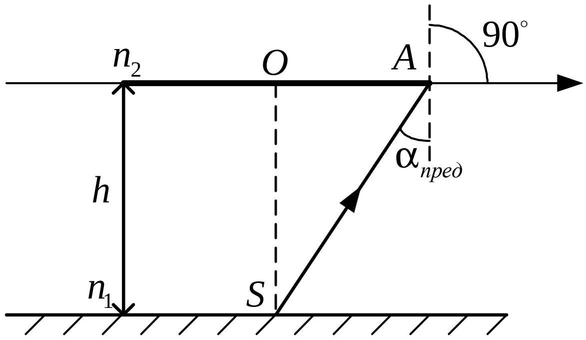
$$\sin\alpha_{пред} = \frac{1}{1{,}48} = 0{,}68.$$

Тогда из треугольника SOA можно определить при $OA = R$:

$$\mathrm{tg}\alpha_{пред} = \frac{OA}{OS};$$

$$R = \frac{h\sin\alpha_{пред}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_{пред}}};$$

$$R = \frac{0{,}1\cdot 0{,}68}{\sqrt{1-0{,}68^2}} = 9\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$



Для определения скорости света в скипидаре воспользуемся соотношением

$$\frac{\sin\alpha_{пред}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1} = \frac{\upsilon}{c}; \quad \text{отсюда} \quad \upsilon = \frac{c}{n_1}; \quad \upsilon = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}48} = 2{,}03\cdot 10^8\,\text{м/с}.$$

Ответ: $R = 9\cdot 10^{-2}$ м; $\upsilon = 2{,}03\cdot 10^8$ м/с.

ЗАДАЧА 4.6

На стеклянную призму с преломляющим углом θ = 50° падает под углом α_1 = 30° луч света. Определить угол отклонения σ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,56.

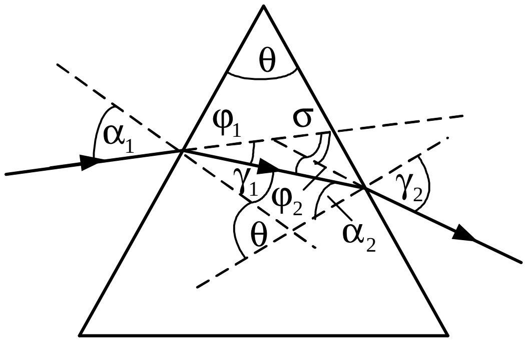
Дано:	**Решение**
θ = 50° α_1 = 30° n = 1,56 σ – ?	Из рисунка видно, что угол отклонения $\sigma = \varphi_1 + \varphi_2,$ (1) а углы φ_1 и φ_2 просто выражаются через углы α_1, γ_1, α_2, γ_2, которые последовательно будем вычислять.

Из закона преломления $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}$ имеем:

$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right) = 18,7\,^\circ.$$

Из рисунка следует, что угол падения α_2 на вторую грань призмы

$$\alpha_2 = \theta - \gamma_1 = 31,3\,^\circ.$$



Угол α_2 меньше предельного ($\alpha_{2пред} = \arcsin\frac{1}{n} = 39,9\,^\circ$), поэтому на второй грани луч преломится и выйдет из призмы.

Так как $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} = \frac{1}{n}$, то

$$\gamma_2 = \arcsin\left(n\sin\alpha_2\right) = 54,1\,^\circ.$$

Теперь найдем углы φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \gamma_1 = 11,3\,^\circ \qquad \text{и} \qquad \varphi_2 = \gamma_2 - \alpha_2 = 22,8\,^\circ.$$

По формуле (1) находим:

$$\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 = 34,1^\circ.$$

Ответ: $\sigma = 34,1^\circ$.

ЗАДАЧА 4.7

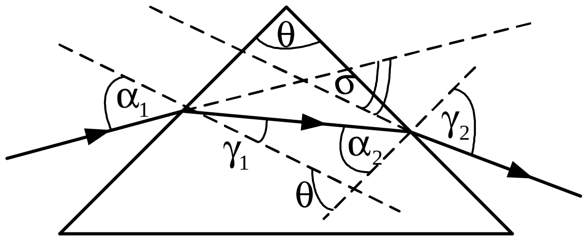
Вывести зависимость угла σ отклонения узкого монохроматического пучка света призмой с показателем преломления n и малым преломляющим углом θ.

Дано:	**Решение**
θ n	Пусть узкий монохроматический пучок света падает на призму под углом α_1 (см. рис.). После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) пучок отклоняется от первоначального направления на угол σ.
$\sigma(\theta)$ – ?	

Пользуясь законами преломления и учитывая геометрические соотношения, получим:

$$\sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}; \qquad \theta = \gamma_1 + \alpha_2;$$
$$\sin\gamma_2 = n\sin\alpha_2; \qquad \sigma = \left(\alpha_1 - \gamma_1\right) + \left(\gamma_2 - \alpha_2\right) = \alpha_1 + \gamma_2 - \theta. \qquad (1)$$

Из формул (1) видно, что угол отклонения зависит от показателя преломления, поэтому при прохождении через призму светового пучка сплошного спектрального состава наблюдается дисперсия света. Преломляющую призму с малым преломляющим углом называют оптическим клином. В случае оптического клина при малом угле падения луча α_1, когда $\sin\alpha \approx \alpha$, формулы (1) принимают следующий вид:



$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{n}; \qquad \theta = \alpha_2 + \gamma_1; \qquad \gamma_2 = n\alpha_2;$$

$$\sigma = n\gamma_1 + n\alpha_2 - \theta = n(\gamma_1 + \alpha_2) - \theta = n\theta - \theta = \theta(n-1).$$

Ответ: $\sigma = \theta(n-1)$.

ЗАДАЧА 4.8

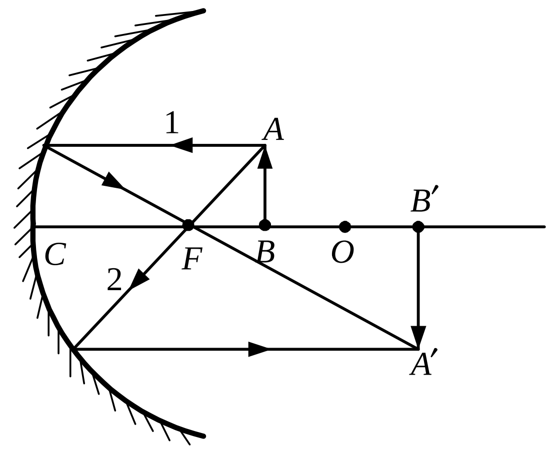
Радиус кривизны R вогнутого зеркала 60 см. Определить, на каком расстоянии a от зеркала следует поместить предмет, чтобы его действительное изображение было в два раза больше предмета.

Дано:
$R = 0{,}6$ м
$\lvert A'B'\rvert = 2\lvert AB\rvert$
a – ?

Решение

Как известно, чтобы получить в вогнутом зеркале действительное увеличенное изображение, предмет следует поместить между главным фокусом F и оптическим центром O зеркала (см. рис.).

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB: 1) луч 1, параллельный главной оптической оси, который после отражения проходит через главный фокус; 2) луч 2, проходящий через главный фокус, который после отражения от зеркала идет параллельно главной оптической оси.



Точка пересечения A' отраженных лучей – действительное изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось.

Таким образом, $A'B'$ – изображение действительное, увеличенное, перевернутое.

Согласно формуле сферического зеркала

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}, \qquad (1)$$

все расстояния взяты со знаком «+» (изображение действительное).

По условию задачи

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=2=\frac{b}{a},$$

откуда

$$b=2a. \qquad (2)$$

Фокусное расстояние

$$F=\frac{R}{2} \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в формулу (1), получим:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{2}{R},$$

откуда искомое расстояние

$$a=\frac{3}{4}R; \qquad a=\frac{3}{4}\cdot 0,6=0,45\text{ м}=45\text{ см}.$$

Ответ: $a=45$ см.

ЗАДАЧА 4.9

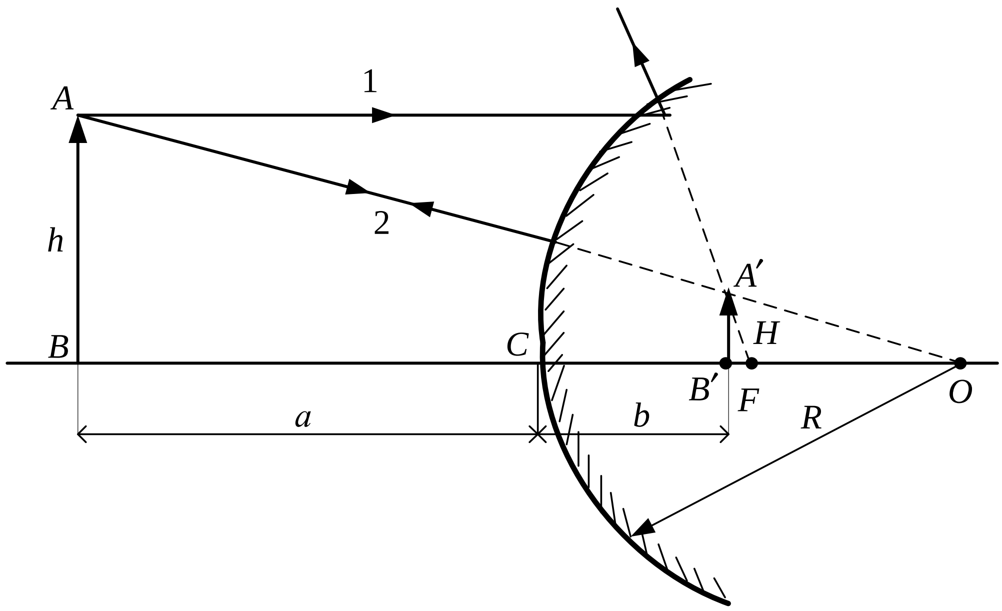
Выпуклое сферическое зеркало имеет радиус кривизны R = 40 см. На расстоянии a = 30 см от полюса зеркала поставлен предмет высотой h = 20 см. Определить: 1) расстояние b от полюса зеркала до изображения; 2) высоту H изображения.

Дано:	**Решение**
R = 0,4 м	Известно, что в выпуклом сферическом зеркале
a = 0,3 м	при любом положении предмета получается мнимое,
h = 0,2 м	прямое, уменьшенное изображение предмета, которое
1) b; 2) H – ?	находится между главным фокусом и зеркалом.

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB (см. рис.):

1) луч 1, параллельный главной оптической оси, продолжение которого после отражения проходит через фокус F;

2) луч 2, проходящий через оптический центр O зеркала, который после отражения идет назад вдоль первоначального направления.



Точка пересечения A' отраженных лучей – мнимое изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось.

1. Согласно формуле сферического зеркала для параксиальных лучей

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}=\frac{2}{R}, \qquad (1)$$

где F – главное фокусное расстояние зеркала.

Поскольку сферическое зеркало выпуклое, фокусное расстояние – величина отрицательная. Расстояние b – расстояние от мнимого изображения – его следует также брать со знаком «–». Поэтому для выпуклого сферического зеркала формула (1) запишется в виде

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{F} \qquad \text{или} \qquad -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R}.$$

Откуда искомое расстояние от полюса зеркала до изображения

$$b=\frac{aR}{2a+R}; \qquad b=\frac{0,3\cdot 0,4}{2\cdot 0,3+0,4}=0,12 \text{ м}.$$

2. Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем:

$$\frac{h}{H}=\frac{R+a}{R-b}.$$

Откуда искомая высота изображения

$$H = \frac{R-b}{R+a}h;$$

$$H = \frac{(0,4-0,12)\cdot 0,2}{0,4+0,3} = 0,08\,\text{м}.$$

Ответ: 1) $b = 0,12$ м; 2) $H = 0,08$ м.

ЗАДАЧА 4.10

Радиусы кривизны поверхностей собирающей линзы $R_1 = R_2 = 20$ см. Определить: 1) фокусное расстояние линзы в воздухе; 2) фокусное расстояние этой же линзы, погруженной в жидкость ($n_{ж}$ = 1,7). Показатель преломления материала линзы $n_{л}$ = 1,5.

Дано:	**Решение**
$R_1 = R_2 = 20$ см $n_{ж}$ = 1,7 $n_{л}$ = 1,5 $n_{в}$ = 1	Формула тонкой линзы $$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{л}}{n_{ср}} - 1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right).$$
1) F_1 – ?; 2) F_2 – ?	1. Применим данную формулу для случая, когда линза находится в воздухе. Учтем, что радиусы $R_1 = R_2 = R$;

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_{л}}{n_{в}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{n_{л}}{n_{в}} - 1\right)\frac{2}{R},$$

откуда

$$F_1 = \frac{R}{2\left(\frac{n_{л}}{n_{в}} - 1\right)}; \qquad F_1 = \frac{0,2}{2\left(\frac{1,5}{1} - 1\right)} = 0,2\,\text{м}.$$

2. Когда линза погружена в жидкость,

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_{л}}{n_{ж}} - 1\right)\frac{2}{R}, \qquad \text{откуда} \qquad F_2 = \frac{R}{2\left(\frac{n_{л}}{n_{ж}} - 1\right)};$$

$$F_2 = \frac{0,2}{2\left(\frac{1,5}{1,7} - 1\right)} = -0,85\,\text{м},$$ то есть линза будет рассеивающей.

Ответ: 1) $F_1 = 0,2$ м; 2) $F_2 = -0,85$ м.

ЗАДАЧА 4.11

Двояковыпуклая линза, оптическая сила которой D = 8 дптр, дает изображение предмета на экране, удаленном на расстоянии f = 75 см, равное h = 10 см. Определить положение и высоту предмета. Построить его изображение.

Дано:	**Решение**
D = 8 дптр f = 0,75 м h = 0,1 м	Запишем формулу тонкой линзы:
d, h_0 – ?	

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \tag{1}$$

и формулу увеличения изображения в линзе

$$\Gamma = \frac{h}{h_0} = \frac{f}{d}. \tag{2}$$

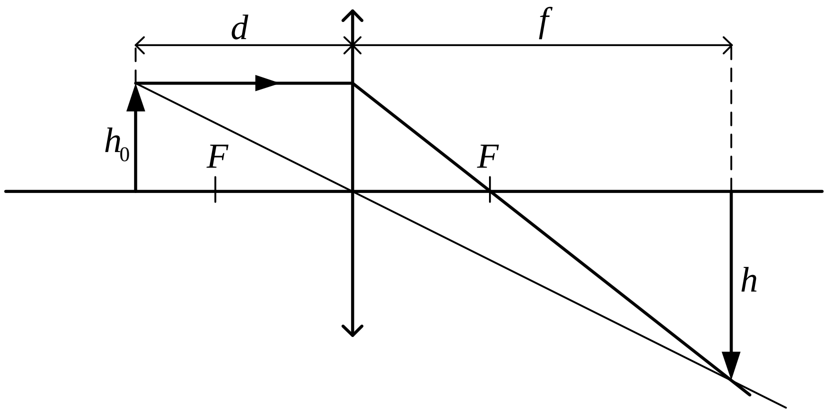
Из (1) находится расстояние от предмета до линзы:

$$d = \frac{f}{Df - 1}; \qquad d = \frac{0,75}{8 \cdot 0,75 - 1} = 0,15 \text{ м}.$$

Из (2) определяется высота предмета:

$$h_0 = \frac{hd}{f}; \qquad h_0 = \frac{0,1 \cdot 1,15}{0,75} = 0,02 \text{ м}.$$

Изображение предмета в линзе показано на рисунке.



Ответ: $d = 0,15$ м; $h_0 = 0,02$ м.

ЗАДАЧА 4.12

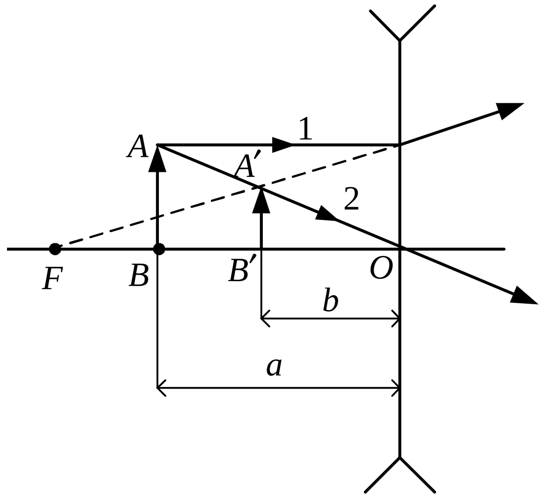
На расстоянии a = 15 см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F = 30 см перпендикулярно к главной оптической оси находится предмет высотой h = 9 см. Определить: 1) расстояние b изображения от линзы; 2) высоту H изображения. Среда по обе стороны линзы одинаковая.

Дано:	**Решение**
a = 0,15 м F = 0,3 м h = 0,09 м	
b, H – ?	

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB:

1) луч 1, идущий параллельно главной оптической оси, продолжение которого после преломления в линзе проходит через фокус линзы;

2) луч 2, проходящий через оптический центр линзы и не изменяющий своего направления. Точка пересечения A' есть мнимое изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось. Из построения следует, что при любом расположении предмета изображение находится между предметом и линзой (по ту же сторону линзы, что и предмет) и является мнимым, прямым, уменьшенным.



Согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Поскольку линза рассеивающая, то F – величина отрицательная, b – также величина отрицательная (расстояние до мнимого изображения).

Поэтому формула тонкой линзы запишется в виде

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{F},$$

откуда искомое расстояние изображения до линзы

$$b=\frac{aF}{a+F}; \qquad b=\frac{0{,}15\cdot 0{,}3}{0{,}15+0{,}3}=0{,}1\text{ м}=10\text{ см}.$$

Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем:

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{b},$$

откуда искомая высота изображения

$$H=\frac{bh}{a}; \qquad H=\frac{0{,}1\cdot 0{,}09}{0{,}15}=0{,}06\text{ м}=6\text{ см}.$$

Ответ: $b=10$ см; $H=6$ см.

ЗАДАЧА 4.13

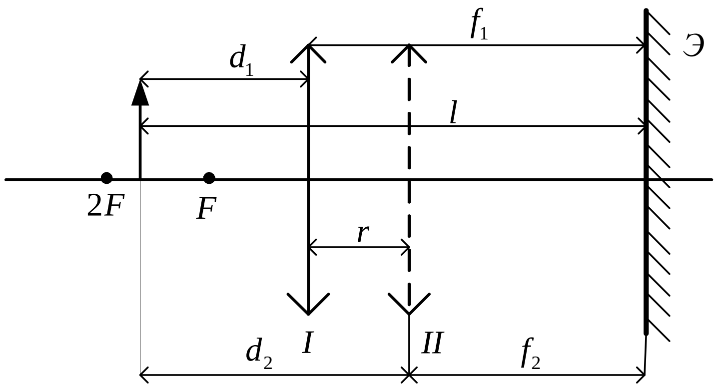
Свеча находится на расстоянии $l = 3{,}5$ м от экрана. Между свечой и экраном помещают собирающую линзу, которая дает на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы. Найти фокусное расстояние линзы F, если расстояние между положениями линзы $r = 0{,}5$ м.

Дано:	**Решение**
$l = 3{,}5$ м $r = 0{,}5$ м	Поскольку изображение свечи в случаях I и II (см. рис.) получается на экране, следовательно, оно действительное, тогда свеча должна находиться в положении I между фокусом и двойным фокусом, а в положении II – за двойным фокусом.
F – ?	

Применим формулы тонкой линзы:

для положения I

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1},$$



где

$$d_1 + f_1 = l; \qquad f_1 = l - d_1; \quad (1)$$

для положения II

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2},$$

где

$$d_2 = d_1 + r; \quad f_2 = l - d_1 - r. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{l - d_1}; \\ \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1 + r} + \dfrac{1}{l - d_1 - r}. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3), получим:

$$F = \frac{l^2 - r^2}{4l};$$

$$F = \frac{3{,}5^2 - 0{,}5^2}{4 \cdot 3{,}5} = 0{,}86 \text{ м}.$$

Ответ: $F = 0{,}86$ м.

ЗАДАЧА 4.14

Предмет высотой 20 см расположен на расстоянии 30 см перед двояковыпуклой линзой, имеющей оптическую силу 2,5 дптр. Определить: 1) фокусное расстояние линзы; 2) на каком расстоянии от линзы находится изображение предмета; 3) линейное увеличение линзы; 4) высоту изображения. Постройте изображение предмета в линзе. Что это за изображение?

Дано:
h = 0,2 м
a = 0,3 м
D = 2,5 дптр
F, b, Γ, H – ?

Решение

1. Оптическая сила линзы – величина, обратная фокусному расстоянию:

$$D=\frac{1}{F},$$

откуда фокусное расстояние

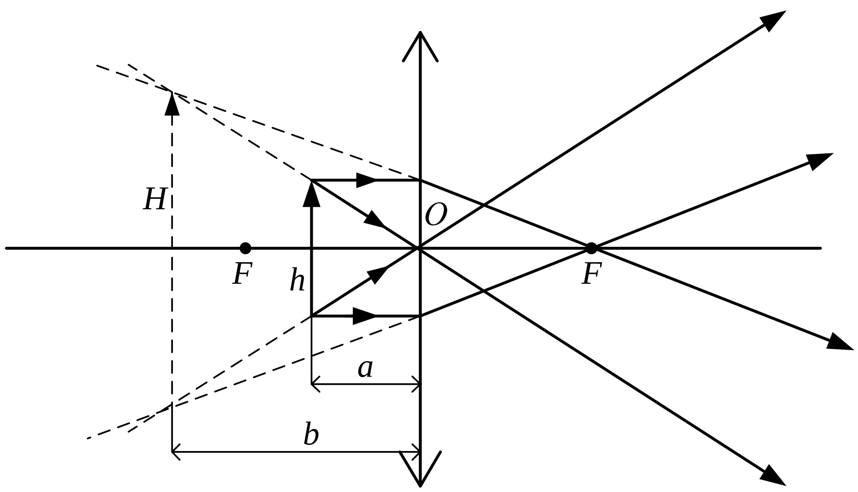
$$F=\frac{1}{D}; \qquad F=\frac{1}{2,5}=0,4 \text{ м}.$$

2. Согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$$

получим искомое расстояние от изображения предмета до линзы:

$$b=\frac{aF}{a-F}; \qquad b=\frac{0,3\cdot 0,4}{0,3-0,4}=-1,2 \text{ м}.$$



3. Линейное увеличение линзы

$$\Gamma=\frac{b}{a}; \qquad \Gamma=\frac{-1,2}{0,3}=-4.$$

4. Высота изображения предмета

$$H=\Gamma h; \qquad H=-4\cdot 0,2=-0,8 \text{ м}$$

или

$$H = h\frac{F}{a-F}; \qquad H = 0,2\frac{0,4}{0,3-0,4} = -0,8 \text{ м}.$$

Согласно полученным значениям изображение – мнимое, прямое, увеличенное, что показано построением на рисунке.

Ответ: 1) $F = 0,4$ м; 2) $b = -1,2$ м; 3) $\Gamma = -4$; 4) $H = -0,8$ м.

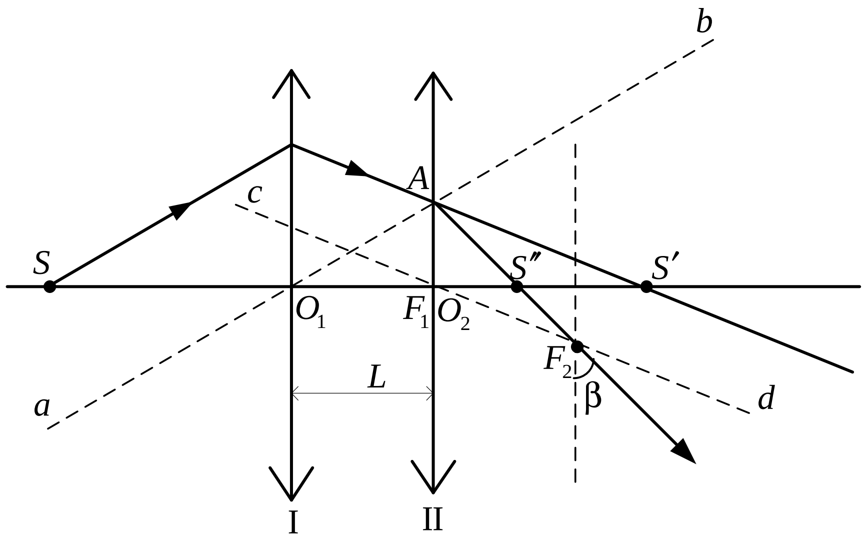
ЗАДАЧА 4.15

Светящаяся точка S находится на главной оптической оси центрированной системы двух тонких линз на расстоянии 40 см от первой линзы. Расстояние между линзами 30 см. Где получится изображение точки, если фокусное расстояние каждой из них 30 см?

Дано:
$F_1 = F_2 = 0,3$ м
$a_1 = 0,4$ м
$L = 0,3$ м
b_2 – ?

Решение

На рисунке S' – изображение светящейся точки S, созданное линзой I; S'' – изображение точки S', созданное линзой II. Здесь дважды применен способ построения преломленного луча, основанный на том, что все лучи, параллельные побочной оптической оси (ab), пересекаются в фокальной плоскости в точке, лежащей на пересечении побочной оптической оси с фокальной плоскостью (точка A) (для линзы II cd – побочная ось, точка B – точка пересечения побочной оси с фокальной плоскостью) (см. рис.).



Чтобы вычислить координату точки S'' на оптической оси, применим для линзы I формулу

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{F},$$

где b_1 – расстояние от точки S' до первой линзы, $b_1=O_1S'$, $a_1=SO_1$;

для линзы II

$$-\frac{1}{b_1-L}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{F},$$

где $b_1-L=O_2S'$ и $b_2=O_2S''$ – расстояния изображений S' и S'' от линзы II;

$$b_1=\frac{a_1F}{a_1-F};\qquad b_1-L=\frac{b_2F}{F-b_2};\qquad b_1=L+\frac{b_2F}{F-b_2};$$

$$\frac{a_1F}{a_1-F}=L+\frac{b_2F}{F-b_2};\qquad \frac{b_2F}{F-b_2}=\frac{0,3\cdot 0,4}{0,4-0,3}-0,3=0,9\text{ м};$$

$$\frac{b_2F}{F-b_2}=0,9\text{ м};\qquad b_2\cdot 0,3=0,9\cdot 0,3-0,9b_2;$$

$$1,2b_2=0,27;\qquad b_2=\frac{0,27}{1,2}=0,225\text{ м}.$$

Ответ: $b_2=0,225$ м.

ЗАДАЧА 4.16

Светильник в виде равномерно светящегося шара в 500 кд имеет диаметр 50 см. Определить: 1) полный световой поток Φ, излучаемый светильником; 2) его светимость R; 4) освещенность E_1, светимость R_1 и яркость B_1 экрана, на который падает 20 % светового потока, излучаемого светильником. Площадь экрана составляет 0,5 м^2, а коэффициент отражения света его поверхностью ρ = 0,7.

Дано:	**Решение**
I = 500 кд d = 0,5 м $\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=0,2$ S_1 = 0,5 м^2 ρ = 0,7 Φ; R; E_1 R_1; B_1 – ?	Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником, $\Phi=4\pi I$; $\Phi=4\cdot 3{,}14\cdot 500=6,28$ клм. Светимость источника света $R=\frac{\Phi}{S}$, где S – площадь поверхности светильника; $S=4\pi r^2=\pi d^2$.

Тогда

$$R = \frac{4\pi I}{\pi d^2} = \frac{4I}{d^2}; \qquad R = \frac{4 \cdot 500}{0,5^2} = 8 \ \frac{\text{клм}}{\text{м}^2}.$$

Так как по условию на экран падает световой поток $\Phi_1 = 0,2\Phi$, то освещенность экрана

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 0,2\frac{\Phi}{S_1};$$

$$E_1 = 0,2\frac{6,28 \cdot 10^3}{0,5} = 2,51 \text{ клк}.$$

$$[E_1] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} = \text{лк}.$$

Светимость экрана

$$R_1 = \rho E_1; \qquad R_1 = 0,7 \cdot 2,51 = 1,76 \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Яркость экрана

$$B_1 = \frac{R_1}{\pi}; \qquad B_1 = \frac{1,76 \cdot 10^3}{3,14} = 560 \ \frac{\text{кд}}{\text{м}^2};$$

$$[B_1] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кд} \cdot \text{ср}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $\Phi = 6,28$ клм; $R = 8 \ \frac{\text{клм}}{\text{м}^2}$; $E_1 = 2,51$ клк; $R_1 = 1,76 \ \frac{\text{клм}}{\text{м}^2}$; $B_1 = 560 \ \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$.

ЗАДАЧА 4.17

В центре квадратной комнаты площадью S = 16 м^2 висит светильник. Считая светильник точечным источником света, определить высоту h от пола, на которой должен висеть светильник, чтобы освещенность в углах комнаты была максимальной.

Дано:
S = 16 м^2
$E = E_{\max}$
h – ?

Решение

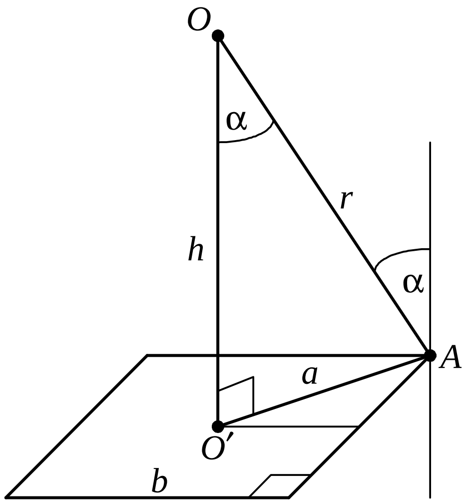
Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света I в точке, удаленной от него на расстояние r,

$$E = \frac{I \cos\alpha}{r^2}, \tag{1}$$

где α – угол падения лучей.

Если r – расстояние от лампы до угла комнаты, a – половина диагонали квадратного пола комнаты, b – сторона квадратного пола, то из треугольника OAO' (см. рис.)

$$a = r\sin\alpha = h\,\mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$



Подставив из формулы (2) $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ в формулу (1), найдем выражение для освещенности поверхности:

$$E = \frac{I\cos\alpha\sin^2\alpha}{a^2}.$$

Чтобы определить максимум освещенности, следует взять производную $\dfrac{dE}{d\alpha}$ и приравнять ее нулю:

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{I}{a^2}\left(2\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Искомая высота, согласно формуле (2), $h = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$.

Для квадрата можем записать:

$$a^2 = \frac{2b^2}{4}$$

или

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}} \quad \left(S = b^2\right).$$

Тогда с учетом (3)

$$h = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{S}}{2};$$

$$h = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 2$ м.

ЗАДАЧА 4.18

Определить высоту, на которую следует над чертежной доской повесить лампочку мощностью P = 100 Вт, чтобы освещенность E доски под лампочкой была равна 50 лк. Наклон доски α = 30°, световая отдача L лампочки равна 10 лм/Вт. Лампочку считать точечным источником, принимая полный световой поток $\Phi = 4\pi I$ (I – сила света лампочки).

Дано:

P = 100 Вт

E = 50 лк

α = 30°

L = 10 лм/Вт

$\Phi = 4\pi I$

h – ?

Решение

Световой отдачей лампочки называется отношение полного светового потока Φ, излучаемого лампочкой, к ее электрической мощности P:

$$L = \frac{\Phi}{P}. \quad (1)$$

Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света I в точке, удаленной от него на расстояние h,

$$E = \frac{I\cos\alpha}{h^2},$$

где α – угол между световым лучом и нормалью к поверхности (равен углу наклона доски).

Тогда

$$h = \sqrt{\frac{I\cos\alpha}{E}}. \quad (2)$$

Учитывая формулу (1) и $\Phi = 4\pi I$, из формулы (2) найдем искомую высоту:

$$h = \sqrt{\frac{LP\cos\alpha}{4\pi E}};$$

$$[h] = \sqrt{\frac{\text{лм}\cdot\text{Вт}}{\text{Вт}\cdot\text{лк}}} = \sqrt{\frac{\text{лм}}{\text{лк}}} = \sqrt{\frac{\text{лм}\cdot\text{м}^2}{\text{лм}}} = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$h = \sqrt{\frac{10\cdot 100\cdot\cos 30^\circ}{4\cdot 3{,}14\cdot 50}} = 1{,}17 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 1{,}17$ м.

4.2. Волновая оптика

4.2.1. Интерференция света

Основные формулы

Когерентность – согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Монохроматические волны называются когерентными, если разность их фаз остается постоянной во времени.

Монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга независимых гармонических цугов. Средняя продолжительность одного цуга $\tau_{ког}$ называется *временем когерентности* (время когерентности не может превышать время излучения τ, т.е. $\tau_{ког} < \tau$). Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности $\tau_{ког}$. За это время волна распространяется в вакууме на расстояние $l_{ког} = c\tau_{ког}$, называемое *длиной когерентности* (или длиной цуга).

Скорость света в среде $\upsilon = \dfrac{c}{n}$, где c – скорость распространения света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Оптическая длина пути, проходимого световым лучом в однородной среде с показателем преломления n, равна $L = nl$, где l – геометрическая длина пути луча.

Если один луч проходит путь длиной l_1 в среде с показателем преломления n_1, а другой луч – путь l_2 с показателем преломления n_2, то оптическая разность хода этих лучей

$$\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1 = L_2 - L_1,$$

где L_1 и L_2 – соответственно, оптические длины проходимых волнами путей.

Разность фаз двух когерентных волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где λ_0 – длина волны (световой) в вакууме, Δ – оптическая разность хода двух световых волн.

Расстояние Δx между интерференционными полосами на экране, полученными от двух когерентных источников света (ширина интерференционной полосы),

$$\Delta x = \frac{l\lambda_0}{d},$$

где l – расстояние от экрана до источника света, d – расстояние между источниками $(d \ll l)$.

Оптическая разность хода световых лучей Δ, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки, по обе стороны которых находятся одинаковые среды:

в проходящем свете $\quad \Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2\alpha}$;

в отраженном свете $\quad \Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2\alpha} - \frac{\lambda_0}{2}$,

где d – толщина пластинки; n – показатель преломления вещества пластинки; n_1 – показатель преломления среды; α – угол падения луча; λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Добавочная разность хода $\frac{\lambda}{2}$ учитывает изменение фазы волны на π при отражении ее от оптически более плотной среды.

Условие максимального усиления света при интерференции (интерференционный максимум):

$$\Delta = \pm m\lambda_0,$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме; $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ – порядок интерференционного максимума.

Условие максимального ослабления света при интерференции (интерференционный минимум):

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где m – порядок интерференционного минимума.

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе $(n_0 = 1)$,

максимум: $\quad 2dn\cos\beta \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$;

минимум: $2dn\cos\beta \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$,

где d – толщина пленки; n – показатель ее преломления; α – угол падения; β – угол преломления; $m = 0$, 1, 2… – порядок интерференции.

В общем случае член $\pm\frac{\lambda_0}{2}$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела – если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак «плюс», если $n < n_0$ – знак «минус».

Радиус колец Ньютона:

– темных в отраженном свете (или светлых в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda_0 R}{n}};$$

– светлых в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 R}{n}},$$

где R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной пластинкой; λ_0 – длина световой волны в вакууме; m – порядковый номер кольца, $m = 0$ соответствует центральному пятну; n – показатель преломления среды между линзой и пластиной.

В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n_{пл} = \sqrt{n_л \cdot n_{ср}},$$

где $n_{пл}$ – показатель преломления пленки, $n_{ср}$ – показатель преломления окружающей среды; $n_л$ – показатель преломления линзы.

Если окружающая среда – воздух (n_0), то выполняется условие $n_л > n_{пл} > n_0$ и потеря полуволны происходит на обеих поверхностях. Поэтому условие интерференционного максимума (при нормальном падении света)

$$2n_{пл}d = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где $n_{пл}d$ – оптическая толщина пленки; λ_0 – длина волны в вакууме.

Обычно принимают $m = 0$, тогда

$$n_{пл}d = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.19

Луч света, идущий в воздухе, проходит слой скипидара $(n_c = 1,48)$ толщиной $h = 2$ мм. Насколько изменится оптическая разность хода преломленного и непреломленного лучей, если световая волна падает под углом $\alpha = 45°$ к поверхности жидкости?

Дано:	**Решение**
$n_в = 1$ $n_c = 1,48$ $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м $\alpha = 45°$	На рисунке показан ход светового луча. Путь луча в воздухе толщиной h равен
Δ – ?	

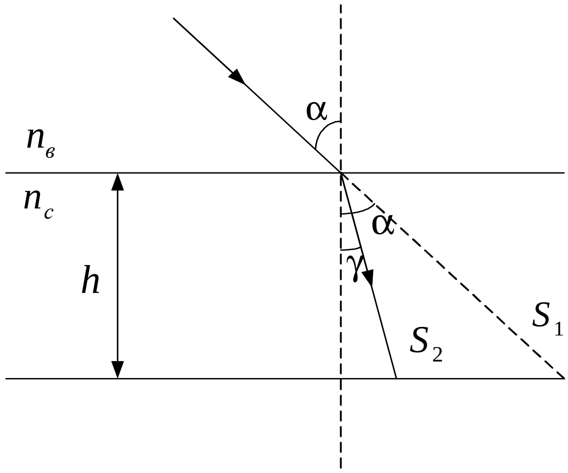
$$S_1 = \frac{h}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Путь луча в скипидаре толщиной h равен

$$S_2 = \frac{h}{\cos\gamma}. \qquad (2)$$

Для оптической разности хода волн запишем:

$$\Delta = S_2 n_c - S_1 n_в = S_2 n_c - S_1. \quad (3)$$



Используя закон преломления света, найдем угол преломления γ:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_c}{n_в}; \qquad \sin\gamma = \frac{n_в \sin\alpha}{n_c} = \frac{\sin\alpha}{n_c};$$

$$\gamma = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n_c}. \qquad (4)$$

Выражения (1), (2), (4) подставим в (3), получим:

$$\Delta = h\left(\frac{n_c}{\cos\gamma} - \frac{1}{\cos\alpha}\right); \qquad \Delta = 0,54 \text{ мм}.$$

Ответ: увеличится на $\Delta = 0,54$ мм.

ЗАДАЧА 4.20

Разность фаз колебаний двух интерферирующих лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм равна $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Определить разность хода этих лучей.

Дано:	Решение
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$	Разность фаз колебаний можно определить, используя формулы $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$ или $\frac{3\pi}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$
Δ – ?	

Тогда разность хода лучей

$$\Delta = \frac{3\lambda}{4}; \quad \Delta = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{4} = 3{,}75 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta = 375$ нм.

ЗАДАЧА 4.21

В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 5 м. В красном свете ширина интерференционных полос равна 5,5 мм. Определить длину волны λ красного света.

Дано:	Решение
$d = 5 \cdot 10^{-4}$ м $l = 5$ м $\Delta\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ м	В этом опыте свет падает расходящимся пучком на два плоских зеркала, расположенных друг от друга под углом, мало отличающимся от $180°$. Интерференционная картина получается при наложении двух когерентных пучков, отраженных от плоских зеркал.
λ – ?	

Расстояние между интерференционными полосами определяется по формуле

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d},$$

откуда находится длина волны:

$$\lambda = \frac{d\Delta x}{l};$$

$$\lambda = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 5{,}5\cdot 10^{-3}}{5} = 5{,}5\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 5{,}5\cdot 10^{-7}\,\text{м}$.

ЗАДАЧА 4.22

На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников с длиной волны 500 нм. На пути одного из лучей перпендикулярно к нему поместили стеклянную пластинку с показателем преломления 1,6 толщиной 5 мкм. Определить, на сколько полос при этом сместится интерференционная картина.

Дано:

$\lambda = 5\cdot 10^{-7}\,\text{м}$

$n = 1{,}6$

$d = 5\cdot 10^{-6}\,\text{м}$

m – ?

Решение

При внесении стеклянной пластинки оптическая разность хода между лучами изменится на

$$\Delta = nd - d = d\left(n-1\right),$$

где d – толщина пластинки; n – ее показатель преломления.

С другой стороны, внесение пластинки приведет к смещению интерференционной картинки на m полос, т.е. дополнительная разность хода равна $m\lambda$.

Следовательно,

$$d\left(n-1\right) = m\lambda.$$

Откуда найдем искомое m:

$$m = \frac{d\left(n-1\right)}{\lambda}; \qquad m = \frac{5\cdot 10^{-6}\left(1{,}6-1\right)}{5\cdot 10^{-7}} = 6.$$

Ответ: $m = 6$.

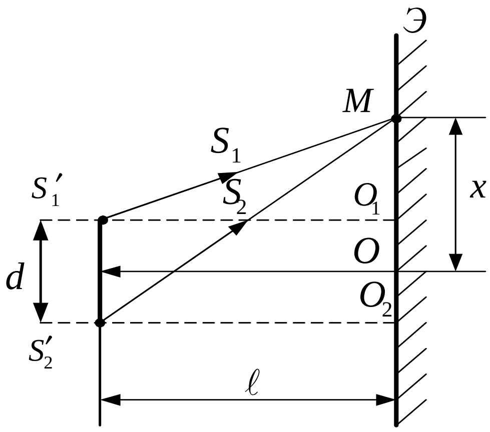
ЗАДАЧА 4.23

Расстояние между двумя когерентными источниками $d = 0{,}9$ мм. Источники, испускающие монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 640$ нм, расположены на расстоянии $l = 3{,}5$ м от экрана. Определить число светлых полос, располагающихся на 1 см длины экрана.

Дано:	**Решение**
$d = 9 \cdot 10^{-4}$ м $\lambda = 64 \cdot 10^{-8}$ м $l = 3{,}5$ м $x = 1 \cdot 10^{-2}$ м	В точке O на экране (см. рис.) будет максимальная освещенность: точка O равноудалена от обоих источников, S_1' и S_2', поэтому разность хода волн $S_1'O$ и $S_2'O$ равна нулю. В произвольной точке экрана M максимум освещенности будет наблюдаться, если оптическая разность хода когерентных волн равна целому числу длин волн:
$\frac{m}{x}$ – ?	

$$\Delta = S_2 - S_1 = m\lambda, \qquad (1)$$

где S_2, S_1 – оптический путь интерферирующих волн; λ – длина волны падающего света; m – номер светлой полосы (центральная светлая полоса принята за нулевую).



Оптическая разность хода волн

$$\Delta = \frac{xd}{l},$$

где x – расстояние от центральной светлой до m-й полосы.

Учитывая уравнение (1), получаем:

$$\Delta = \frac{xd}{l} = m\lambda. \qquad (2)$$

Из выражения (2) определяем искомую величину $\frac{m}{x}$ – число светлых интерференционных полос на 1 см длины:

$$\frac{m}{x} = \frac{d}{(l\lambda)};$$

$$\frac{m}{x} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{3{,}5 \cdot 64 \cdot 10^{-8}} = 400\ \text{м}^{-1};$$

$$\left[\frac{m}{x}\right] = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{м}} = \text{м}^{-1}.$$

Ответ: $\frac{m}{x} = 400\ \text{м}^{-1}$.

ЗАДАЧА 4.24

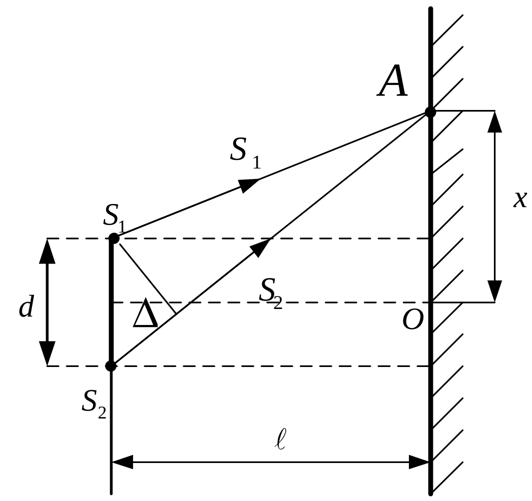
В опыте Юнга щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, расстояние d между щелями равно 1 мм и расстояние l от щелей до экрана – 1,2 м. Определить: 1) положение первой темной полосы; 2) положение третьей светлой полосы.

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$d = 10^{-3}$ м
$l = 1,2$ м
1) $x_{1\min}$ – ?
2) $x_{3\max}$ – ?

Решение

Две узкие щели S_1 и S_2 находятся на расстоянии d друг от друга и являются когерентными источниками света. Интерференция наблюдается в произвольной точке A экрана, параллельного обеим щелям и расположенного от них на расстоянии l $(l >> d)$.

Начало отсчета выберем в точке, симметричной относительно щелей. Интенсивность в любой точке A экрана, лежащей на расстоянии x от O, определяется оптической разностью хода $\Delta = S_2 - S_1$ (см. рис.).



Применяя теорему Пифагора, имеем:

$$S_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;$$

$$S_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$S_2^2 - S_1^2 = 2xd$$

или

$$\Delta = S_2 - S_1 = \frac{2xd}{S_2 + S_1}.$$

Из условия $l >> d$ следует, что $S_1 + S_2 \approx 2l$, поэтому оптическая разность хода

$$\Delta = \frac{xd}{l}. \qquad (1)$$

Интерференционный минимум наблюдается при оптической разности хода, равной полуцелому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ ...). \qquad (2)$$

Приравняем (1) и (2):

$$\frac{x_{\min} d}{\ell} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}.$$

1. Найдем искомое положение первой темной полосы (m = 1):

$$x_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda; \qquad x_{1\min} = \pm\frac{3}{2}\frac{l}{d}\lambda;$$

$$x_{1\min} = \frac{3\cdot 1{,}2\cdot 6\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-3}} = 1{,}08 \text{ мм}.$$

2. Найдем искомое положение третьей светлой полосы (m = 3).

Интерференционный максимум наблюдается при оптической разности хода, равной целому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm m\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3)$$

Приравняем выражения (3) и (1):

$$\frac{x_{\max} d}{l} = \pm m\lambda;$$

$$x_{\max} = \pm m\frac{l}{d}\lambda;$$

$$x_{3\max} = \pm 3\frac{l}{d}\lambda;$$

$$x_{3\max} = \frac{3\cdot 1{,}2\cdot 6\cdot 10^{-7}}{10^{-3}} 2{,}16 \text{ мм}.$$

Ответ: $x_{1\min} = 1{,}08$ мм; $x_{3\max} = 2{,}16$ мм.

ЗАДАЧА 4.25

В опыте Юнга расстояние $\Delta\alpha$ между соседними светлыми полосами составляет 10^{-3} рад. Определить расстояние l от щелей до экрана, если вторая светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4 мм.

Дано:	**Решение**
$\Delta\alpha = 10^{-3}$ рад $m = 2$ $x = 4\cdot 10^{-3}$ м	Угол α, под которым наблюдается светлая полоса, отстоящая от центра O интерференционной картины (см. рис.), ввиду его малости $(l >> d)$,
l – ?	

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{l}, \qquad (1)$$

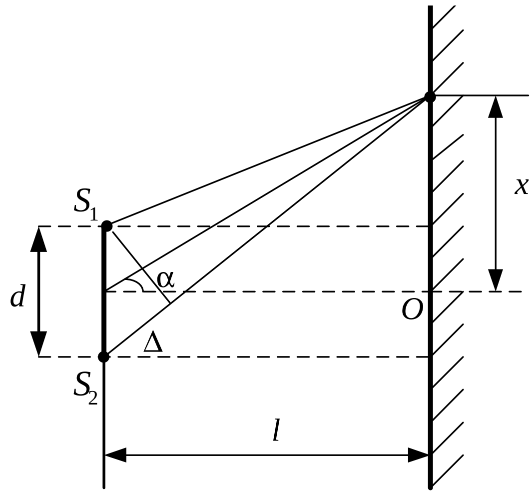
где l – расстояние от щелей до экрана.

Приравняв оптическую разность хода $\Delta = \dfrac{xd}{l}$ (см. решение задачи 4.24) и $\Delta = \pm m\lambda$ (условие интерференционного максимума), получим:

$$x = \frac{ml\lambda}{d}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем:

$$\alpha = \frac{m\lambda}{d}. \qquad (3)$$



Угловое расстояние между соседними светлыми полосами

$$\Delta\alpha = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(m-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{ml};$$

учли равенство выражений (1) и (3).

Откуда искомое расстояние от щелей до экрана

$$l = \frac{x}{m\Delta\alpha}; \qquad l = \frac{4\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 2$ м.

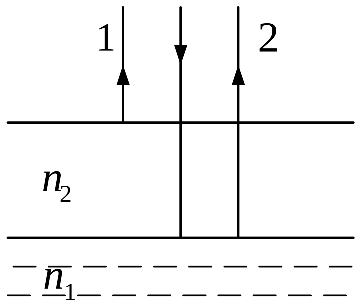
ЗАДАЧА 4.26

Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива с показателем преломления 1,7 нанесена тонкая прозрачная пленка с показателем преломления 1,3. При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление света, длина волны которого приходится на среднюю часть видимого спектра $(\lambda_0 = 0{,}56 \text{ мкм})$? Считать, что лучи падают нормально к поверхности объектива.

Дано:	**Решение**
$n_1 = 1{,}7$ $n_2 = 1{,}3$ $\lambda_0 = 5{,}6\cdot 10^{-7}$ м	Свет, падая нормально на объектив, отражается как от передней, так и от задней поверхностей пленки. Отраженные лучи 1 и 2 интерферируют (см. рис.). Условие минимума интенсивности света при интерференции выражается формулой
h – ?	

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где Δ – разность хода лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки, окруженной одинаковыми средами.



В данном случае пленка окружена различными средами – воздухом (n = 1) и стеклом (n_1 = 1,7). Из неравенства $n < n_2 < n_1$ следует, что оба луча, 1 и 2, отражаясь от границы с оптически более плотной средой, «теряют» полволны, т.е. меняют фазу на π, так что это не влияет на их разность хода, и условие минимума будет записано так:

$$\Delta = 2hn_2 \cos\gamma_2 = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}; \qquad \gamma_2 = 0, \quad \cos\gamma_2 = 1.$$

Для наименьшей толщины $m = 0$

$$2hn_2 = \frac{\lambda_0}{2}; \qquad h = \frac{\lambda_0}{4n_2}; \qquad h = \frac{5,6\cdot 10^{-7}}{4\cdot 1,3} = 1,08\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $h = 1,08\cdot 10^{-7}$ м.

ЗАДАЧА 4.27

Какую наименьшую толщину должна иметь пленка из скипидара, разлитого на воде, если на нее под углом $\alpha = 30°$ падает белый свет и она в отраженном свете окажется красной? Длина волны красных лучей $\lambda = 0,63$ мкм.

Дано:	**Решение**
$\alpha = 30°$ $n_1 = 1$ $n_2 = 1,33$ $n = 1,48$ $\lambda = 6,3\cdot 10^{-7}$ м	На рисунке показан ход луча света в пленке.
$h_{\min}$ – ?	

В точках A и B падающий пучок света частично отражается и частично преломляется.

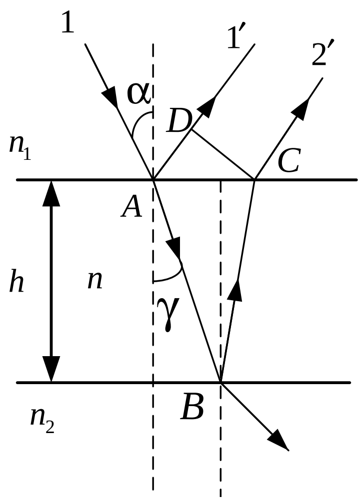
При отражении в точке A, т.е. от среды, оптически более плотной $(n > n_1)$, происходит изменение фазы волны на π, что соответствует изменению разности хода на $\dfrac{\lambda}{2}$.

При отражении в точке B, т.е. от среды оптически менее плотной $(n > n_2)$, изменение фазы волны не происходит.

Оптическая разность хода с учетом потери полуволны для лучей $1'$ и $2'$ равна:

$$\Delta = (AB + BC)n - ADn_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Из рисунка



$$AB = BC = \frac{h}{\cos\gamma}; \qquad AD = 2h\sin\alpha\,\mathrm{tg}\gamma.$$

Тогда

$$\Delta = 2h\left(\frac{n - n_1\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\gamma}\right) - \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что

$$\sin\gamma = \frac{n_1\sin\alpha}{n} \quad \text{и} \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha}{n}},$$

получаем:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}. \tag{1}$$

Запишем условие максимума освещенности при интерференции:

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует:

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2m\frac{\lambda}{2};$$

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

При $m = 0$ $\quad h = h_{\min}$ и уравнение (3) запишется в виде:

$$2h_{\min}\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} = \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha}};$$

$$h_{\min} = \frac{6{,}3\cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}48^2 - 1^2\cdot\sin^2 30^\circ}} = 0{,}15 \text{ мкм};$$

Ответ: $h_{\min} = 0{,}15$ мкм.

ЗАДАЧА 4.28

В зеркале Ллойда (см. рис.) точечный источник S находится на расстоянии $l = 2$ м от экрана. На экране образуется система интерференционных полос (когерентными источниками являются первичный источник S и его мнимое изображение S' в зеркале). Ширина интерференционных полос b на экране равна 1,2 мм. Определить длину волны λ света, если после того, как источник света S отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta d = 0,5$ мм, ширина полос уменьшилась в $n = 2$ раза.

Дано:	Решение
$l = 2$ м $b = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м $\Delta d = 5 \cdot 10^{-4}$ м $n = 2$	Ширина интерференционной полосы (расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами)
$\lambda - ?$	

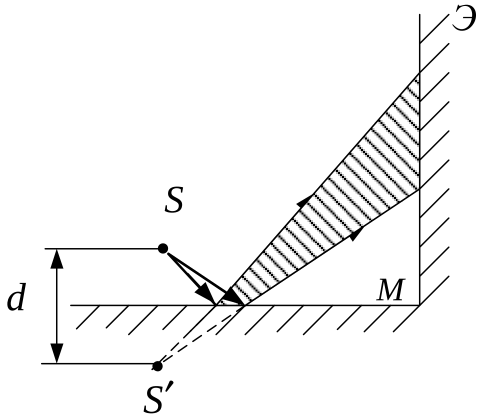
$$b = \frac{l}{d}\lambda$$

не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных l, λ и d, откуда расстояние между источником S и его мнимым изображением S'

$$d = \frac{l\lambda}{b}. \qquad (1)$$

После того, как источник S отодвинули от плоскости зеркала на Δd, расстояние между источником и его мнимым изображением стало равным

$$d + 2\Delta d = \frac{l\lambda}{\frac{b}{n}}; \qquad (2)$$



учли, что ширина полос стала в n раз меньше.

Вычитая выражение (1) из (2), получаем:

$$2\Delta d = \frac{l\lambda}{b}(n-1),$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{2b\Delta d}{(n-1)\partial}; \qquad [\lambda] = \frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{м};$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{(2-1) \cdot 2} = 6 \cdot 10^{-7}\,\text{м} = 600\ \text{нм}.$$

Ответ: $\lambda = 600$ нм.

ЗАДАЧА 4.29

Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны $a = 48$ см и $c = 6$ м. Бипризма стеклянная $(n = 1,5)$ с преломляющим углом $\theta = 10'$. Определить число полос, наблюдаемых на экране, если длина волны λ монохроматического света равна 600 нм.

Дано:

$a = 0,48$ м

$c = 6$ м

$n = 1,5$

$\theta = 10'$

$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м

N – ?

Решение

За бипризмой распространяются когерентные световые лучи, исходящие от мнимых источников S_1 и S_2, лежащих в одной плоскости с S. Число полос, наблюдаемых на экране,

$$N = \frac{AB}{b}, \qquad (1)$$

где AB – область, где происходит наложение когерентных пучков и наблюдается интерференция; b – ширина интерференционной полосы.

Протяженность

$$AB = 2c \cdot \mathrm{tg}\varphi.$$

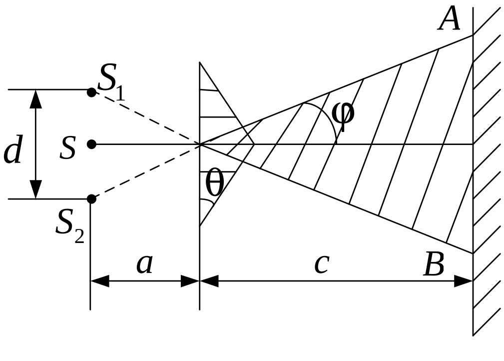
Поскольку отклоняющие углы у основания призмы малы, угол падения на бипризму также мал, поэтому все лучи отклоняются бипризмой на одинаковый угол

$$\varphi = (n-1)\theta. \qquad (2)$$

Тогда

$$AB = 2c \cdot \mathrm{tg}\varphi \approx 2c\varphi = 2c(n-1)\theta, \qquad (3)$$

где θ – угол, выражаемый в радианах.



Ширина интерференционной полосы (расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами)

$$b = \frac{l}{d}\lambda \qquad (4)$$

не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных l, λ и d.

Расстояние между источниками с учетом (2)

$$d = 2a\mathrm{tg}\varphi \approx 2a\varphi = 2a(n-1)\theta. \qquad (5)$$

Учитывая выражение (5), формулу (4) можно записать в виде:

$$b = \frac{a+c}{2a(n-1)\theta}. \qquad (6)$$

Подставив выражения (3) и (6) в формулу (1), найдем искомое число полос, наблюдаемых на экране:

$$N = \frac{4ac(n-1)^2\theta^2}{(a+c)\lambda};$$

$$N = \frac{4 \cdot 0,48 \cdot 6 \cdot (1,5 - 1) \cdot (10')^2}{(0,48 + 6) \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 6,27,$$

т.е. наблюдается 6 полос.

Ответ: $N = 6$.

ЗАДАЧА 4.30

На стеклянный клин с показателем преломления 1,5 и преломляющим углом $\alpha = 40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны 600 нм. Определить в интерференционной картине расстояние между двумя соседними максимумами.

Дано:	Решение
$n = 1,5$ $\alpha = 40'' = 1,94 \cdot 10^{-4}$ рад $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м $b - ?$	Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от его верхней и нижней граней. Так как угол клина мал, то отраженные лучи 1 и 2 практически параллельны.

Отраженные лучи когерентны, и на поверхности клина будет наблюдаться интерференционная картина (см. рис.).

Условие минимума для клина в отраженном свете:

$$2dn\cos\gamma_2 + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номеру m; γ_2 – угол преломления; $\frac{\lambda}{2}$ – дополнительная разность хода, обусловленная отражением световой волны 1 от оптически более плотной среды.

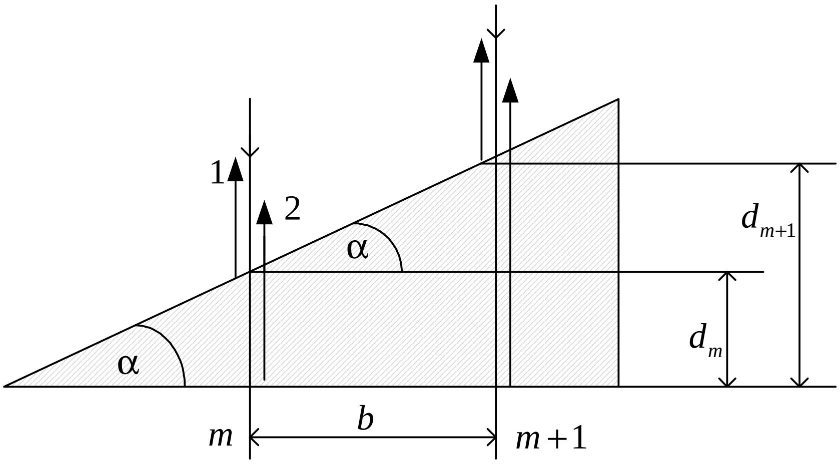
Угол падения, согласно условию, $\gamma_1 = 0$, следовательно, угол преломления $\gamma_2 = 0$.

Тогда условие минимума запишется в виде:

$$2dn = m\lambda; \qquad d = \frac{m\lambda}{2n}.$$

Из рисунка видно, что

$$\sin\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{b}.$$



Так как угол мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$;

$$\alpha\frac{(m+1)\lambda}{2nb} - \frac{m\lambda}{2nb}; \qquad \alpha = \frac{\lambda}{2nb}.$$

Отсюда

$$b = \frac{\lambda}{2n\alpha}; \qquad b = \frac{6\cdot 10^{-7}}{2\cdot 1{,}5\cdot 1{,}94\cdot 10^{-4}} = 1{,}03\cdot 10^{-3}\text{м}.$$

Ответ: $b = 1{,}03\cdot 10^{-3}$м.

ЗАДАЧА 4.31

Плосковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}6$ выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус третьего светлого кольца в отраженном свете $(\lambda = 0{,}6\text{ мкм})$ равен 0,9 мм. Определить фокусное расстояние линзы. Установка для наблюдения колец Ньютона расположена в воздухе.

Дано:

$n = 1{,}6$

$n_{ср} = 1$

$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м

$r_3 = 9\cdot 10^{-4}$ м

F – ?

Решение

Согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Для плосковыпуклой линзы $R_2 = \infty$, поэтому

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R_1}. \qquad (1)$$

Радиус линзы R_1 можно найти из формулы для светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda}{2}R_1}.$$

Тогда при $m = 3$

$$r_3 = \sqrt{\frac{5}{2}\lambda R_1};$$

$$R_1 = \frac{2r_3^2}{5\lambda}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получаем:

$$F = \frac{2r_3^2}{5(n-1)\lambda};$$

$$F = \frac{2\cdot\left(9\cdot 10^{-4}\right)^2}{5(1,6-1)\cdot 6\cdot 10^{-7}} = 0,9 \text{ м}.$$

Ответ: $F = 0,9$ м.

ЗАДАЧА 4.32

На стеклянный клин $(n = 1,5)$ с углом при вершине $\alpha = 1'$ падает под углом $i = 18°$ монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции в отраженном свете.

Дано:	Решение
$n = 1,5$ $\alpha = 1'$ $i = 18°$ $\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м $b - ?$	Для определения расстояния между соседними минимумами (темными полосами) найдем соответствующую им толщину клина (см. рис.). Условия минимумов m-го и $(m+1)$-го порядков в отраженном свете:

$$2d_m\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}; \tag{1}$$

$$2d_{m+1}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = (2m+3)\frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

где d_m и d_{m+1} – толщина клина в месте темных полос, соответствующих номерам m и $m+1$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$; $-\dfrac{\lambda}{2}$ – потеря полуволны, обусловленная отражением световой волны от оптически более плотной среды.

Если вычесть из (2) выражение (1) и разделить правую и левую части полученного уравнения на $2\sqrt{n^2-\sin^2 i}$, получим:

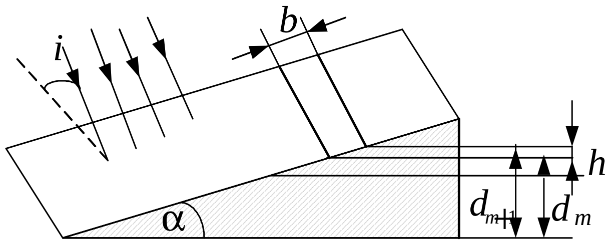
$$h = d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2 i}}.$$

Как следует из рисунка, $h = b\sin\alpha$.

Тогда искомое расстояние между двумя соседними минимумами

$$b = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\lambda}{2\sin\alpha\sqrt{n^2-\sin^2 i}};$$

$$b = \frac{6\cdot 10^{-7}}{2\cdot\sin 1'\cdot\sqrt{1,5^2-\sin^2 18^\circ}} = 0,703 \text{ мм}.$$



Ответ: $b = 0,703$ мм.

ЗАДАЧА 4.33

Сферическая поверхность плосковыпуклой линзы с показателем преломления 1,52 соприкасается со стеклянной пластиной с показателем преломления 1,7. Пространство между линзой, радиус кривизны которой равен 1 м, и пластинкой заполнено жидкостью (см. рис.). Наблюдая кольца Ньютона в отраженном свете $(\lambda_0 = 0,589 \text{ мкм})$, измеряем радиус десятого темного кольца. Определить показатель преломления жидкости в двух случаях: 1) $r_{10} = 2,05$ мм; 2) $r_{10} = 1,9$ мм.

Дано:
$n_1 = 1,52$
$n_2 = 1,7$
$\lambda_0 = 5,89\cdot 10^{-7}$ м
1) $r_{10} = 2,05\cdot 10^{-3}$ м
2) $r_{10} = 1,9\cdot 10^{-3}$ м
$n_{ж} - ?$

Решение

Радиус r_m темного кольца m-го порядка в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{mR\lambda},$$

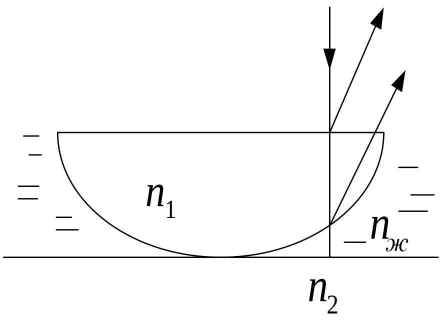
где λ – длина световой волны в среде между линзой и пластиной.

Если пространство заполнено жидкостью с показателем преломления $n_{ж}$, то

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{\upsilon}{\lambda};$$

$$n_{ж} = \frac{c}{\upsilon} = \frac{\lambda_0}{\lambda}; \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n_{ж}},$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме, $r_m = \sqrt{mR\frac{\lambda_0}{n_{ж}}}$.



Если $n_{ж} < n_1 < n_2$, то

$$n_{ж} = \frac{10R\lambda_0}{r_m^2};$$

$$n_{ж} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}}{2{,}05^2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}40;$$

$$n_{ж} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}}{1{,}9^2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}63.$$

Это значение не соответствует условию $n_{ж} < n_1 < n_2$.

Если $n_2 > n_{ж} > n_1$, то условие для темного кольца Ньютона в отраженном свете:

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{n_{ж}} R}; \qquad n_{ж} = \frac{(2m-1)\lambda_0 R}{2r_m^2};$$

$$n_{ж} = \frac{(20-1) \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 2{,}05^2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}33; \qquad n_{ж} = \frac{(20-1) \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 1{,}9^2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}55.$$

Ответ: 1) $n_{ж} = 1{,}40$; 2) $n_{ж} = 1{,}55$.

ЗАДАЧА 4.34

Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Пространство между линзой ($n_1 = 1{,}55$) и плоской прозрачной пластинкой ($n_2 = 1{,}5$) заполнено жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}6$. Найти радиус кривизны линзы *R*, если радиус четвертого ($m = 4$) светлого кольца в проходящем свете $r_4 = 1 \cdot 10^{-3}$ м.

Дано:

$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м

$n_1 = 1{,}55$

$n_2 = 1{,}5$

$n = 1{,}6$

$r_4 = 1 \cdot 10^{-3}$ м

$m = 4$

R – ?

Решение

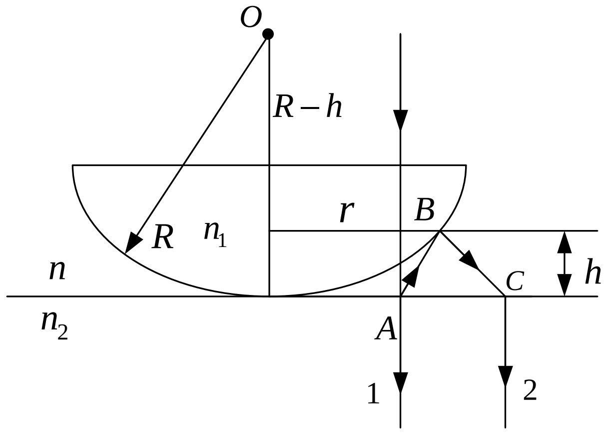
В тонкой жидкой пленке неодинаковой толщины каждый луч разделяется на два когерентных. В проходящем свете m-й максимум образуется вследствие интерференции луча 1, прошедшего через точку A в пластинку, и части этого луча (луч 2), отразившейся в точках A и B и прошедшей в пластинку через точку C. Так как $n > n_2$ и $n > n_1$, то при отражении в точках A и B потери полуволны не происходит.

Следовательно, приобретаемая лучами 1 и 2 оптическая разность хода

$$\Delta = 2hn. \qquad (1)$$

Для определения h воспользуемся рисунком, из которого следует, что радиус интерференционного кольца

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh}.$$



Тогда

$$h = \frac{r^2}{2R}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая условие максимума, находим:

$$2\frac{r^2 n}{2R} = 2m\frac{\lambda}{2}.$$

Откуда радиус кривизны линзы

$$R = \frac{r^2 n}{m\lambda};$$

$$R = \frac{\left(10^{-3}\right)^2 \cdot 1{,}6}{4\cdot 6\cdot 10^{-7}} \approx 66\cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Ответ: $R = 66$ см.

ЗАДАЧА 4.35

В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R_1 = 1$ м, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом кривизны $R_2 = 2$ м. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

Дано:

$\lambda = 0{,}5\cdot 10^{-6}$м

$R_1 = 1$ м

$R_2 = 2$ м

$m = 5$

r_5 – ?

Решение

Определим величину x_1 воздушного зазора между плосковыпуклой и вогнутой линзами на расстоянии r от точки их соприкосновения – центра линз.

Из рисунка видно, что

$$x_2 = R_2 - \sqrt{R_2^2 - r^2};$$

$$x_1 = R_1 - x_2 - \sqrt{R_1{}^2 - r^2} = R_1 - R_2 + \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1{}^2 - r^2}.$$

В дальнейших вычислениях будем полагать

$$x_1 << R_1 \qquad \text{и} \qquad x_1 << R_2.$$

Записав последнее равенство в виде

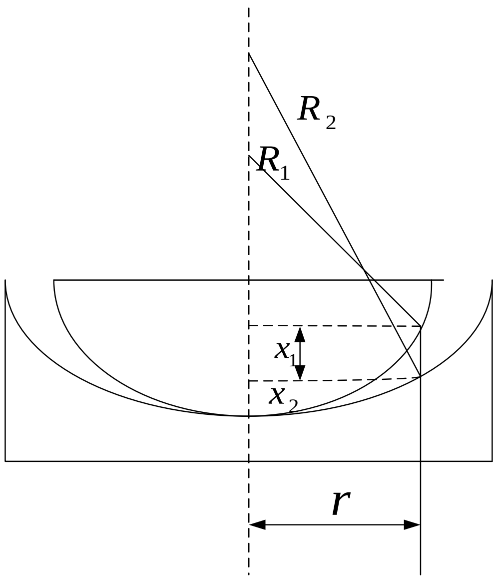
$$x_1 + (R_2 - R_1) = \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2},$$

возведя его в квадрат и пренебрегая слагаемым x_1^2, получаем:

$$R_2 R_1 - r^2 - x_1\left(R_2 - R_1\right) = \sqrt{\left(R_2{}^2 - r^2\right)\left(R_1{}^2 - r^2\right)}.$$

Второй раз возведя в квадрат это равенство и учитывая малость x_1, получаем:

$$r = \sqrt{\frac{x_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}.$$



Разность хода Δd в отраженном свете

$$\Delta d = 2x_1 + \frac{\lambda}{2}.$$

С другой стороны, условие наблюдения темного кольца:

$$\Delta d = \left(2m + 1\right)\frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$x_1 = m\lambda.$$

Следовательно, радиус m-го темного кольца в отраженном свете определяется формулой

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}}; \qquad \left[r_m\right] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}}} = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м};$$

$$r_5 = \sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 2}{2 - 1}} = 2{,}24 \cdot 10^{-3} = 2{,}24 \text{ мм}.$$

Ответ: $r_5 = 2{,}24$ мм.

4.2.2. Дифракция света

Основные формулы

Радиусы зон Френеля (см. рис):

– для *плоской* волны

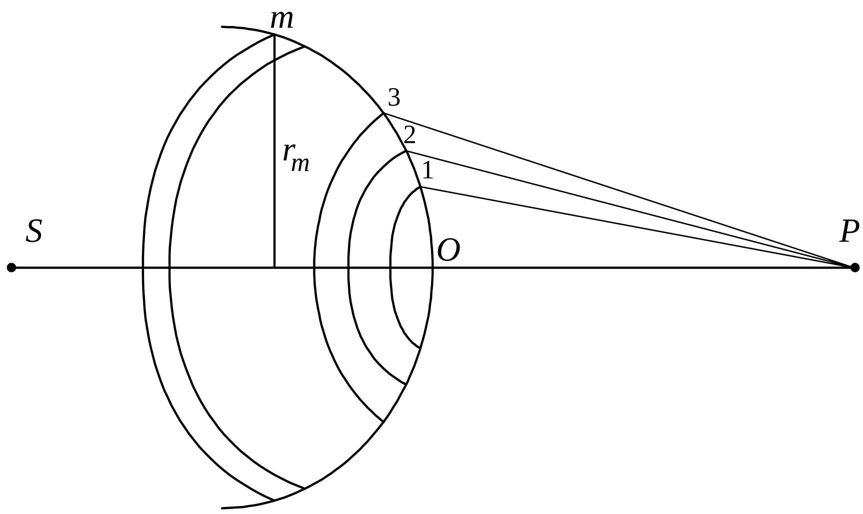
$$r_m = \sqrt{m r_0 \lambda},$$

где r – радиус зоны; m – номер зоны; r_0 – расстояние от круглого отверстия в непрозрачном экране до точки наблюдения, расположенной на оси отверстия; λ – длина световой волны;

– для *сферической* волны (радиус внешней границы m-й зоны Френеля)

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{(a+b)}},$$

где $SO = a$; $OP = b$; m – номер зоны Френеля; λ – длина волны (т.е. a и b – соответственно, расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина).



В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели шириной a при нормальном падении света положение минимумов и максимумов освещенности на экране определяется углом φ, отсчитанным от нормали к поверхности щели и удовлетворяющим условию:

– *минимум* $\qquad a\sin\varphi = \pm 2m\dfrac{\lambda}{2};$

– *максимум* $\qquad a\sin\varphi = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2},$

где φ – угол дифракции; m – порядок спектра $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, λ – длина волны.

Постоянная (период) дифракционной решетки

$$d = a + b; \qquad d = \frac{l}{N},$$

где a – ширина каждой щели решетки; b – ширина непрозрачных участков между щелями; N – число щелей, приходящихся на единицу длины дифракционной решетки; d – период решетки, l – длина решетки.

Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$d \sin\varphi = \pm m' \frac{\lambda}{N}, \quad (m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \quad \text{кроме } m' = 0,\ N,\ 2N,\ \ldots,$$

где d – постоянная (период) дифракционной решетки; φ – угол между нормалью к поверхности дифракционной решетки и направлением дифрагирующих лучей; N – число штрихов решетки; m – порядок дифракционного спектра.

Формула Вульфа – Брэггов (условие дифракционных максимумов от пространственной дифракционной решетки):

$$2d \sin\theta = m\lambda, \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения; λ – длина волны рентгеновского излучения.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi},$$

где φ – угол дифракции; m – порядок спектра; d – период решетки.

Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D = F\frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где F – фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран; $d\varphi$ – разница в углах, соответствующая двум линиям, отличающимся по длине волны на $d\lambda$.

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda$ – минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = mN,$$

где m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

Разрешающая способность призмы

$$R = \frac{\lambda}{(\lambda + \Delta\lambda)} = (a - b)\left(\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

где λ, $(\lambda + \Delta\lambda)$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; λ – длина волны в вакууме; a и b – пути, проходимые в призме крайними лучами пучка.

При полном использовании разрешающей способности падающий пучок покрывает всю боковую поверхность призмы. В этом случае $b = 0$ и $R_{\max} = a\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$.

Разрешающая способность объектива

$$R \approx \frac{1}{\varphi} = \frac{D}{1{,}22\lambda},$$

где D – диаметр объектива; φ – минимальное разрешаемое угловое расстояние.

Разрешающая способность глаза

$$R \approx \frac{1}{\varphi_{\min}} = \frac{d}{1{,}22\lambda},$$

где d – диаметр зрачка.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.36

На круглое отверстие диаметром d = 4 мм падает нормально параллельный пучок лучей $(\lambda = 0{,}5\ \text{мкм})$. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $r_0 = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

Дано:

$d = 4 \cdot 10^{-3}$ м

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м

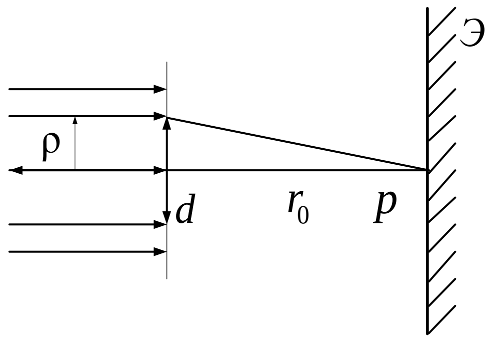
$r_0 = 1$ м

m – ?

Решение

Радиус отверстия (см. рис.) соответствует m-й зоне Френеля при условии, что отверстие пропускает m зон, т.е

$$\rho_m = \frac{d}{2}\ . \tag{1}$$



Используя формулу радиуса зоны Френеля для плоской волны

$$\rho_m = \sqrt{m r_0 \lambda},$$

где ρ – радиус зоны; m – номер зоны; r_0 – расстояние от круглого отверстия до точки наблюдения, расположенной на оси отверстия; λ – длина световой волны

и выражение (1), получим

$$\frac{d}{2} = \sqrt{m r_0 \lambda}; \qquad m = \frac{d^2}{4\lambda r_0}; \qquad m = \frac{(4\cdot 10^{-3})^2}{4\cdot 5\cdot 10^{-7}\cdot 1} = 8 \text{ зон.}$$

Поскольку число открытых зон четное, центр дифракционной картины будет темным.

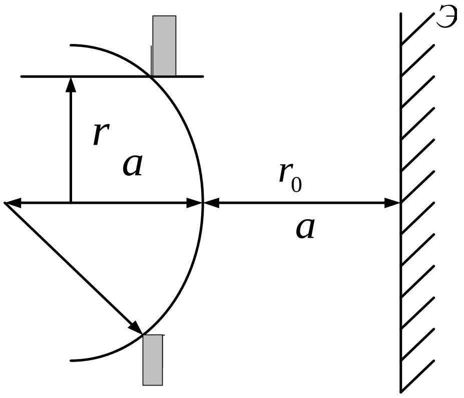
Ответ: $m = 8$, пятно темное.

ЗАДАЧА 4.37

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного монохроматического источника света $(\lambda = 600 \text{ нм})$, встречает на своем пути диафрагму с круглым отверстием. Определить, при каком радиусе r отверстия центр дифракционной картины, наблюдаемой на экране, будет максимально освещенным. Считать расстояние от источника света до диафрагмы и от диафрагмы до экрана равным $a = 1$ м.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м $a = 1$ м	Применим формулу для радиусов зон Френеля для сферической волны, полагая, что $R = r_0 = a$
r – ?	(см. рис.).

Радиус отверстия будет соответствовать радиусу m-й зоны Френеля



$$r = \rho_m = \sqrt{\frac{R r_0 m\lambda}{(R + r_0)}} = \sqrt{\frac{a^2 m\lambda}{2a}} = \sqrt{\frac{m\lambda a}{2}}.$$

Чтобы центр дифракционной картины был максимально освещен, в отверстие должна укладываться только одна зона Френеля, т.е. $m = 1$.

Тогда $r = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$;

$$r = \sqrt{\frac{1 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2}} = 0{,}55 \text{ мм}.$$

Ответ: $r = 0{,}55$ мм.

ЗАДАЧА 4.38

Между точечным источником света с длиной волны 0,5 мкм и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием радиусом 1 мм. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны, соответственно, 1 м и 2 м. Как изменится освещенность в точке, лежащей против центра отверстия, если диафрагму убрать?

Дано:

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м

$r = 10^{-3}$ м

$a = 1$ м

$b = 2$ м

$\frac{E_2}{E_1}$ – ?

Решение

В результате дифракции света на открытой диафрагме и интерференции вторичных волн на экране возникает дифракционная картина – чередующиеся светлые и темные кольца. При этом в центре картины будет светлое или темное пятно в зависимости от числа зон Френеля, укладывающихся на поверхности волнового фронта, ограниченной краями диафрагмы.

Четному числу зон Френеля соответствует темное пятно, а нечетному – светлое пятно.

Найдем это число m, используя формулу

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}};$$

$$m = \frac{r^2(a+b)}{ab\lambda}; \qquad m = \frac{10^{-6} \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 3.$$

Таким образом, в центре картины будет светлое пятно. В силу соотношений $r \ll a$; $r \ll b$ световые колебания проходят в центр картины, имея приблизительно равные амплитуды. При этом колебания, приходящие от любых двух соседних зон, будучи противоположными по фазе, гасят друг друга и весь эффект сводится к действию одной зоны, например, первой. Известно, что действие всей волны (нет диафрагмы) равно половине действия первой зоны Френеля. Следовательно, удаление диафрагмы уменьшает амплитуду колебания в центре картины в 2 раза.

Так как освещенность пропорциональна квадрату амплитуды световых колебаний, то она уменьшается в четыре раза:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\left(\frac{A_1}{2}\right)^2}{A_1^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{4}$; уменьшится в 4 раза.

ЗАДАЧА 4.39

Монохроматический свет $(\lambda = 0{,}5\ \text{мкм})$ падает нормально на круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы в отверстии помещалась одна зона Френеля; две зоны Френеля?

Дано:	Решение
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м $d = 0{,}01$ м 1) $m = 1$ 2) $m = 2$	Освещенность центра дифракционной картины, наблюдаемой на экране, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно, если нечетное – светлое.
r_0 – ?	

Используя формулу для плоской волны

$$\rho_m = \sqrt{m r_0 \lambda},$$

запишем выражение для r_0:

$$r_0 = \frac{\rho_m^2}{m\lambda}.$$

В первом случае

$$\rho_1 = \frac{d}{2}; \qquad r_0 = \frac{d}{4\lambda}; \qquad r_0 = \frac{0{,}01^2}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 50\ \text{м}.$$

Во втором случае

$$\rho_2 = \frac{d}{2}; \quad r_0 = \frac{d^2}{8\lambda}; \quad r_0 = \frac{0{,}01^2}{8 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 25\ \text{м}.$$

Ответ: 1) $r_0 = 50$ м; 2) $r_0 = 25$ м.

ЗАДАЧА 4.40

На щель шириной $a = 4\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Сколько минимумов будет наблюдаться на экране в дифракционном спектре?

Дано:	Решение
$a = 4\lambda$	
$N - ?$	

В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели шириной a при нормальном падении света положение минимумов освещенности на экране определяется углом φ, отсчитанным от нормали к поверхности щели и удовлетворяющим условию

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda.$$

Определим, под каким углом будут наблюдаться минимумы света:

$$\sin\varphi = \pm\frac{m\lambda}{a}.$$

При $m = 1$ $\quad \sin\varphi_1 = \pm\frac{\lambda}{4\lambda} = \pm\frac{1}{4}; \quad \varphi_1 \approx \pm 15°.$

При $m = 2$ $\quad \sin\varphi_2 = \pm\frac{2\lambda}{4\lambda} = \pm\frac{1}{2}; \quad \varphi_2 \approx \pm 30°.$

При $m = 3$ $\quad \sin\varphi_3 = \pm\frac{3\lambda}{4\lambda} = \pm\frac{3}{4}; \quad \varphi_3 \approx \pm 49°.$

При $m = 4$ $\quad \sin\varphi_4 = \pm\frac{4\lambda}{4\lambda} = \pm 1; \quad \varphi_4 \approx \pm 90°.$

Очевидно, что при $m \geq 4$ $\quad \sin\varphi > 1,$ что не имеет смысла.

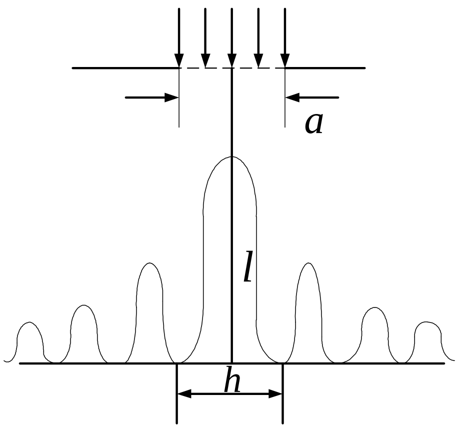
Ответ: N = 6 (3 слева и 3 справа от максимума нулевого порядка).

ЗАДАЧА 4.41

На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определить расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $h = 1$ см.

Дано:	Решение
$a = 10^{-4}$ м	
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м	
$h = 10^{-2}$ м	
$l - ?$	

Ширина центрального дифракционного максимума – это расстояние между первыми дифракционными минимумами (см. рис.).



Из рисунка видно, что

$$\frac{h}{2} = l\,\mathrm{tg}\varphi,$$

$$\text{т.е. } l = \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\varphi}. \qquad (1)$$

Угол φ найдем, используя формулу

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda.$$

При $m = 1$ $\quad \sin\varphi = \dfrac{\lambda}{a}$, тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$l = \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\left(\arcsin\dfrac{\lambda}{a}\right)}; \qquad l = \frac{10^{-2}}{2\,\mathrm{tg}(\arcsin\dfrac{5\cdot 10^{-7}}{10^{-4}})} = 1 \text{ м}.$$

Ответ: l = 1 м.

ЗАДАЧА 4.42

Найти постоянную дифракционной решетки *d*, если при наблюдении в монохроматическом свете $(\lambda = 600 \text{ нм})$ максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi = 18°$. Какое число штрихов *N* нанесено на единицу длины этой решетки?

Дано:

$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м
$\varphi = 18°$
$m = 5$

d, N – ?

Решение

Согласно условию наблюдения главных максимумов дифракционной решетки

$$d \sin\varphi = m\lambda,$$

откуда $d = \dfrac{5\lambda}{\sin\varphi}$; $\quad d = \dfrac{5\cdot 6\cdot 10^{-7}}{\sin 18°} = 9{,}7\cdot 10^{-6}$ м.

Число штрихов *N*, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки *d* соотношением

$$N = \frac{1}{d},$$

откуда

$$N = 103006 \text{ м}^{-1} = 103 \text{ мм}^{-1}.$$

Ответ: $d = 9{,}7\cdot 10^{-6}$м; $N = 103$ мм$^{-1}$.

ЗАДАЧА 4.43

На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. Определить угол дифракции для линии $\lambda_1 = 550$ нм в четвертом порядке, если этот угол для линии $\lambda_2 = 600$ нм в третьем порядке составляет $30°$.

Дано:	Решение
$\lambda_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-7}$ м $\varphi_2 = 30°$ $m_1 = 4$ $m_2 = 3$	По формуле для дифракционной решетки для λ_1 имеем: $d \sin\varphi_1 = 4\lambda_1,$ (1) для λ_2 $d \sin\varphi_2 = 3\lambda_2.$ (2)
φ_1 – ?	

Поделим правые и левые части уравнения (1) на уравнение (2):

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{4\lambda_1}{3\lambda_2},$$

откуда

$$\sin\varphi_1 = \frac{4\lambda_1 \sin\varphi_2}{3\lambda_2};$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{4 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7} \sin 30°}{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} \approx 0{,}611; \qquad \varphi_1 = 37°42'.$$

Ответ: $\varphi_1 = 37°42'$.

ЗАДАЧА 4.44

При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница $(\lambda_2 = 0{,}4$ мкм$)$ спектра третьего порядка?

Дано:	Решение
$m_1 = 2$ $m_2 = 3$ $\lambda_2 = 4 \cdot 10^{-7}$ м	Перекрытие двух спектральных линий при наблюдении дифракционной картины означает, что угол дифракции φ для них одинаковый.
λ_1 – ?	Запишем формулу для положения главных максимумов при нормальном падении света на дифракционную решетку для этих длин волн:

$$d \sin\varphi = m_1\lambda_1; \qquad d \sin\varphi = m_2\lambda_2.$$

Следовательно,

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{m_2\lambda_2}{m_1};$$

$$\lambda_1 = \frac{3\cdot 4\cdot 10^{-7}}{2} = 6\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 6\cdot 10^{-7}\,\text{м}$.

ЗАДАЧА 4.45

На дифракционную решетку длиной l = 15 мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 570$ нм. Определить максимально возможный порядок спектра, наблюдаемый с помощью этой решетки.

Дано:	Решение
$\lambda = 5{,}7\cdot 10^{-7}$ м $N = 3000$ $l = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ м	Максимально возможный порядок дифракционного спектра определяется из условия максимумов дифракционной решетки:
m_{max} – ?	$$d\sin\varphi = m\lambda. \quad (1)$$

Поскольку значение $\sin\varphi$ не может превышать единицы, то

$$m_{max}\lambda = d. \quad (2)$$

Постоянная дифракционной решетки

$$d = \frac{l}{N}. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) получим:

$$m_{max} = \frac{l}{N\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{1{,}5\cdot 10^{-2}}{3000\cdot 5{,}7\cdot 10^{-7}} = 8.$$

Ответ: $m_{max} = 8$.

ЗАДАЧА 4.46

На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны 550 нм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии 1 м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии 12 см от центрального. Определить: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3)общее число максимумов, даваемых решеткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

Дано:

$\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м

$L = 1$ м

$m = 1$

$l = 0{,}12$ м

$l' = 10^{-2}$ м

$d; n; N; \varphi_{max} - ?$

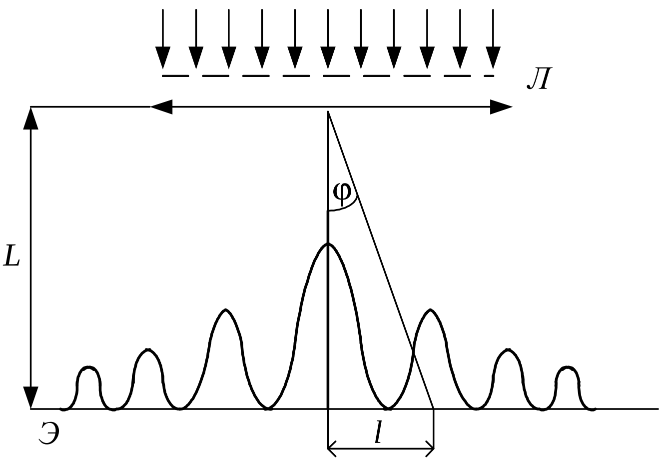
Решение

1. Период дифракционной решетки находим из условия главного максимума:

$$d \sin\varphi = m\lambda; \qquad (1)$$

для $m = 1$ $\quad d\sin\varphi = \lambda$.

Из рисунка следует, что $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{l}{L}$.



Так как $L >> l$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, тогда выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{ld}{L} = m\lambda,$$

откуда

$$d = \frac{L\lambda m}{l};$$

$$d = \frac{1 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{0{,}12} = 4{,}58 \cdot 10^{-6} \text{м}.$$

2. Определим число штрихов n, отнесенных к 1 см длины решетки:

$$l' = 1 \text{ см}; \qquad n = \frac{l'}{d};$$

$$n = \frac{10^{-2}}{4{,}58 \cdot 10^{-6}} = 2{,}18 \cdot 10^{3} \text{м}^{-1}.$$

3. Поскольку наибольший угол отклонения лучей решеткой не может быть больше $\frac{\pi}{2}$, из условия $d\sin\varphi = m\lambda$ можно найти максимальное значение для m:

$$m_{max} \le \frac{d}{\lambda}; \quad \text{учли, что } \sin\varphi_{max} = 1;$$

$$m_{max} = \frac{4{,}58 \cdot 10^{-6}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}} = 8{,}32, \quad \text{т.е. } m_{max} = 8.$$

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой, $N = 2m_{max} + 1 = 2 \cdot 8 + 1 = 17$, так как максимумы наблюдаются справа и слева от центрального максимума (единица учитывает центральный максимум).

4. Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем, записав условие (1):

$$d\sin\varphi_{max} = m_{max}\lambda; \qquad \sin\varphi_{max} = \frac{m_{max}\lambda}{d};$$

$$\sin\varphi_{max} = \frac{8 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{4{,}58 \cdot 10^{-6}} = 0{,}96; \qquad \varphi_{max} = 73{,}9°.$$

Ответ: $d = 4{,}58 \cdot 10^{-6}$ м; $n = 2{,}18 \cdot 10^{3}$ м$^{-1}$; $N = 17$; $\varphi_{max} = 73{,}9°$.

ЗАДАЧА 4.47

Дифракционная решетка длиной 5 мм может разрешить в первом порядке две спектральные линии натрия – $\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм. Определить, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться максимум интенсивности света с $\lambda_3 = 600$ нм, падающего на решетку нормально.

Дано:

$l = 5 \cdot 10^{-3}$ м

$\lambda_1 = 5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda_2 = 5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda_3 = 6 \cdot 10^{-7}$ м

$m_1 = 1$

$m_3 = 3$

φ – ?

Решение

Для нахождения искомого угла запишем условие дифракционного максимума:

$$d\sin\varphi = m_3\lambda_3; \qquad \sin\varphi = \frac{m_3\lambda_3}{d}.$$

Период дифракционной решетки

$$d = \frac{l}{N},$$

где N – общее число штрихов дифракционной решетки.

Из формулы для разрешающей способности дифракционной решетки найдем это число N:

$$R = m_1 N = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}; \qquad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Тогда

$$N = \frac{\lambda}{m_1(\lambda_2 - \lambda_1)}; \qquad d = \frac{l m_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1}.$$

Откуда для искомого угла φ имеем:

$$\sin\varphi = \frac{m_3 \lambda_3 \lambda_1}{l m_1(\lambda_2 - \lambda_1)};$$

$$\sin\varphi = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 0{,}35, \qquad \varphi = 20{,}7°.$$

Ответ: $\varphi = 20{,}7°$.

ЗАДАЧА 4.48

На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы с фокусным расстоянием F = 0,5 м. Ширина центральной светлой полосы $b = 5$ см (см. рис.). Определить, как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран (при любой ширине экрана).

Дано:	**Решение**
$F = 0{,}5$ м $b = 5 \cdot 10^{-2}$ м $\frac{a_2}{a_1}$ – ?	Центральная светлая полоса заключена между двумя минимумами первого порядка (см. рис.). Ее ширина b зависит от угла дифракции φ, соответствующего первому минимуму.

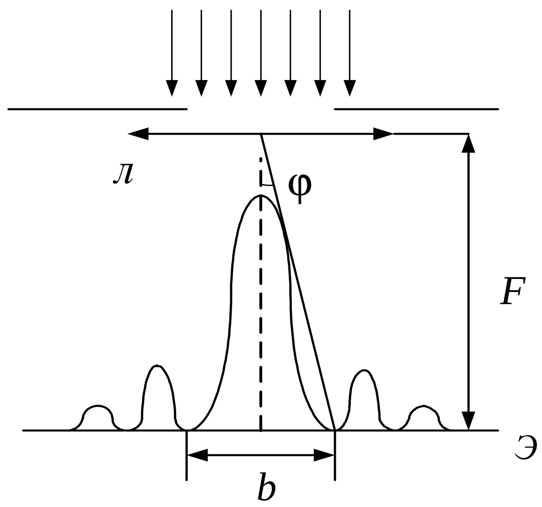
Условие дифракционного минимума:

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 1, 2 ...). \quad (1)$$

По условию задачи $m = 1$.

При изменении ширины щели от a_1 до a_2 величины m и λ остаются неизменными, поэтому согласно (1)

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \qquad (2)$$



Из условия задачи следует, что угол φ_1 очень мал, потому

$$\sin\varphi_1 \approx \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b}{2F}.$$

Чтобы центральная полоса заняла весь экран (при любой ширине экрана), необходимо, чтобы соблюдалось условие $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$

Подставив значения $\sin\varphi_1$ и $\sin\varphi_2$ в формулу (2), найдем искомое отношение:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b}{2F} = \frac{1}{20}.$$

Ответ: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{20}$, т.е. ширину щели надо уменьшить в 20 раз.

ЗАДАЧА 4.49

Сравнить наибольшую разрешающую способность для желтой линии натрия $(\lambda = 589\ \text{нм})$ двух дифракционных решеток одинаковой длины $(l = 4\ \text{мм})$, но разных периодов $(d_1 = 5\ \text{мкм},\ d_2 = 10\ \text{мкм})$.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м $l = 4 \cdot 10^{-3}$ м $d_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ м $d_2 = 10^{-5}$ м	Разрешающая способность дифракционной решетки $$R = mN,$$ где m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.
$R_{1\max},\ R_{2\max}$ – ?	

Согласно записанной формуле, наибольшая разрешающая способность дифракционных решеток

$$R_{1\max} = m_{1\max}N_1 \qquad \text{и} \qquad R_{2\max} = m_{2\max}N_2, \tag{1}$$

где $m_{1\max}$ и $m_{2\max}$ – максимальное число максимумов (наибольший порядок спектра), даваемых решетками.

Из условия главных максимумов в случае дифракционных решеток

$$d_1 \sin\varphi_1 = m_1\lambda \qquad \text{и} \qquad d_2 \sin\varphi_2 = m_2\lambda,$$

если принять

$$\sin\varphi_{\max} = \sin 90^\circ = 1;$$

$$m_{1\max} = \frac{d_1}{\lambda} \qquad \text{и} \qquad m_{2\max} = \frac{d_2}{\lambda}, \tag{2}$$

где $m_{1\max}$ и $m_{2\max}$ – целые числа.

$$m_{1\max} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5{,}89 \cdot 10^{-7}} = 8; \qquad m_{2\max} = \frac{10^{-5}}{5{,}89 \cdot 10^{-7}} = 16.$$

Число штрихов дифракционных решеток

$$N_1 = \frac{l}{d_1} \qquad \text{и} \qquad N_2 = \frac{l}{d_2}, \tag{3}$$

где l – длина решетки (по условию задачи она для обеих решеток одинакова); d_1 и d_2 – периоды решеток.

Подставив выражение (3) и значения $m_{1\max}$ и $m_{2\max}$ в формулы (1), найдем искомую разрешающую способность дифракционных решеток:

$$R_{1\max} = 8\frac{l}{d_1}; \qquad R_{1\max} = 8\frac{4 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} = 6400;$$

$$R_{2\max} = 16\frac{l}{d_2}; \qquad R_{2\max} = 16\frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 6400.$$

Ответ: $R_{1\max} = R_{2\max} = 6400$.

ЗАДАЧА 4.50

Определить расстояние между атомными плоскостями в кристалле каменной соли, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается при падении рентгеновских лучей с длиной волны 0,147 нм под углом $15°12'$ к поверхности кристалла.

Дано:
$\lambda = 1{,}47 \cdot 10^{-10}$ м
$\theta = 15°12'$
$m = 1$
d – ?

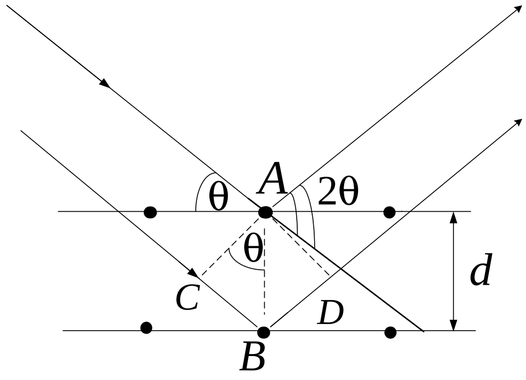
Решение

Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах – это результат интерференции рентгеновского излучения, зеркально отражающегося от системы параллельных плоскостей, которые проходят через узлы – атомы (например, A, см. рис.) кристаллической решетки.

Эти плоскости называют атомными.

Отражение наблюдается лишь в направлениях, соответствующих дифракционным максимумам, которым удовлетворяют выражения

$$\Delta = |BC| + |BD| = 2d\sin\theta \quad \text{и}$$



$$2d\sin\theta = m\lambda, \qquad (1)$$

где $m = 1, 2, 3....$ – порядок дифракционного максимума; θ – угол скольжения, т.е. угол между падающим лучом и плоскостью кристалла; d – расстояние между соседними плоскостями, называемое межплоскостным.

Исходя из условия (1) и учитывая, что $m = 1$, имеем:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta}; \qquad d = \frac{1,47\cdot 10^{-10}}{2\sin 15°12'} = 0,28 \text{ нм.}$$

Ответ: $d = 0,28$ нм.

ЗАДАЧА 4.51

Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки для $\lambda = 600$ нм в спектре второго порядка составляет $4\cdot 10^5\,\frac{\text{рад}}{\text{м}}$. Определить постоянную дифракционной решетки.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м $m = 2$ $D_\varphi = 4\cdot 10^5\,\frac{\text{рад}}{\text{м}}$	Угловая дисперсия дифракционной решетки $$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\sin\varphi},$$
d – ?	где φ – угол дифракции; m – порядок спектра; d – период дифракционной решетки.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{D_\varphi d}{m}. \qquad (1)$$

Из условия главного максимума для дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = m\lambda \qquad (2)$$

получаем, что

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d}. \qquad (3)$$

Тогда

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m\lambda D_\varphi d}{md} = \lambda D_\varphi; \qquad (4)$$

учли формулы (1) и (2),

откуда угол дифракции

$$\varphi = \operatorname{arctg}\varphi = \operatorname{arctg}(\lambda D_\varphi).$$

Искомую постоянную дифракционной решетки получим из выражения (2), используя формулу (4):

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi} = \frac{m\lambda}{\sin(\operatorname{arctg}\lambda D_\varphi)};$$

$$d = \frac{2\cdot 6\cdot 10^{-7}}{\sin(\operatorname{arctg}(6\cdot 10^{-7}\cdot 4\cdot 10^{-5}))} = 5{,}14\cdot 10^{-6}\,\text{м} = 5{,}14\ \text{мкм}.$$

Ответ: $d = 5{,}14$ мкм.

ЗАДАЧА 4.52

Измерение дисперсии показателя преломления оптического стекла дало n_1 = 1,528 для λ_1 = 0,434 мкм и n_2 = 1,523 для λ_2 = 0,486 мкм. Вычислить отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны 0,434 мкм.

Дано:

$\lambda_1 = 4{,}34\cdot 10^{-7}$ м

$n_1 = 1{,}528$

$\lambda_2 = 4{,}86\cdot 10^{-7}$ м

$n_1 = 1{,}523$

$\dfrac{u_1}{\upsilon_1}$ – ?

Решение

Зависимость групповой скорости u от показателя преломления n и длины волны λ имеет вид:

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{1}$$

Фазовая скорость υ определяется как

$$\upsilon = \frac{c}{n}. \tag{2}$$

Разделив выражение (1) на (2), получим:

$$\frac{u}{\upsilon} = 1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{3}$$

Для длины волны λ_1 и средней дисперсии $\left\langle \dfrac{dn}{d\lambda} \right\rangle = \dfrac{\Delta n}{\Delta\lambda}$ имеем:

$$\frac{u_1}{\upsilon_1} = 1 + \frac{\lambda_1}{n_1}\left(\frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right). \tag{4}$$

Подставляя в (4) числовые значения, получим:

$$\frac{u_1}{\upsilon_1} = 1 + \frac{4{,}34\cdot 10^{-7}\cdot(1{,}523 - 1{,}528)}{1{,}528\cdot(4{,}86 - 4{,}34)\cdot 10^{-7}} = 0{,}973.$$

Ответ: $\dfrac{u_1}{\upsilon_1} = 0{,}973$.

ЗАДАЧА 4.53

При нормальном падении света на дифракционную решетку на экране с помощью линзы (фокусное расстояние $F = 0{,}8$ м) наблюдается дифракционная картина. Красная линия $(\lambda = 630$ нм$)$ в спектре второго порядка наблюдается под углом $\varphi = 11°$. Определить: 1) постоянную решетки; 2) линейную дисперсию решетки *D*.

Дано:	Решение
$F = 0{,}8$ м $\lambda = 6{,}3 \cdot 10^{-7}$ м $m = 2$ $\varphi = 11°$	Постоянную дифракционной решетки найдем из условия главного максимума:
d; D_φ – ?	

$$d \sin\varphi = m\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

где m – порядок спектра.

Тогда искомое значение постоянной решетки

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}; \qquad d = \frac{2 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{-7}}{\sin 11°} = 6{,}6 \cdot 10^{-6}\text{м} = 6{,}6 \text{ мкм}. \tag{2}$$

Линейная дисперсия дифракционной решетки, согласно определению,

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} F, \tag{3}$$

где F – фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран.

Дифференцируя условие максимума для решетки $(d \sin\varphi = m\lambda)$, получаем:

$$d \cos\varphi d\varphi = m d\lambda,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}; \tag{4}$$

учитывая (2),

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\lambda}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), найдем искомую линейную дисперсию дифракционной решетки:

$$D = \frac{F\mathrm{tg}\varphi}{\lambda}; \qquad D = \frac{0{,}8 \cdot \mathrm{tg}11^0}{6{,}3 \cdot 10^{-7}} = 2{,}47 \cdot 10^5.$$

Ответ: $d = 6{,}6$ мкм; $D = 2{,}47 \cdot 10^5$.

4.2.3. Поляризация света

Основные формулы

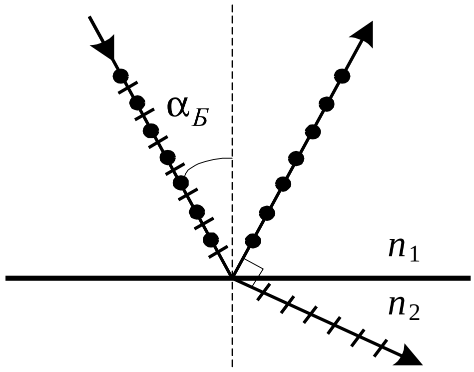


Рис. 1

Закон Брюстера, согласно которому при угле падения света $\alpha_Б$ (угол Брюстера), определяемом соотношением

$$\mathrm{tg}\alpha_Б = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

отраженный луч является плоскополяризованным.

При этом n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления диэлектриков; n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой (рис. 1). Преломленный луч поляризуется максимально, но не полностью. Если луч света падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

Интенсивность света, прошедшего через первый николь N_1 (рис. 2) (поляризатор *П*), с учетом поглощения,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 - k_1),$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый николь; k_1 – коэффициент поглощения света в поляризаторе.

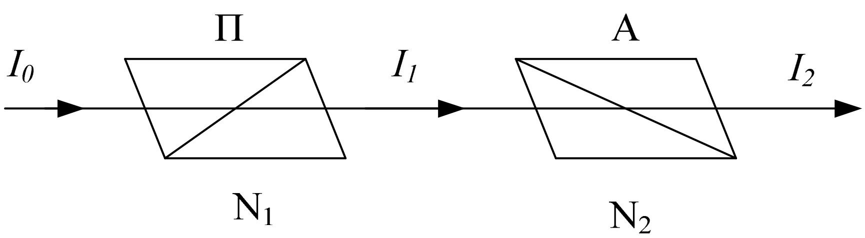


Рис. 2

Уменьшение интенсивности света после второго николя N_2 (анализатора *А*) определяется *законом Малюса*:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi.$$

С учетом потери интенсивности света в анализаторе

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1-k_1)(1-k_2)\cos^2\varphi,$$

где k_2 – коэффициент поглощения света в анализаторе; φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – соответственно, максимальная и минимальная интенсивность частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Двойное лучепреломление – способность веществ, в частности, кристаллов расщеплять падающий световой луч на два луча – обыкновенный (o) и необыкновенный (e), которые распространяются в различных направлениях с разными фазовыми скоростями. Если показатель преломления необыкновенного луча n_e больше показателя преломления обыкновенного луча n_o, то такие кристаллы называются оптически положительными. Если n_o больше n_e, то такие кристаллы называются оптически отрицательными.

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой оптическая разность хода равна

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda, \ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

называется пластинкой в четверть длины (пластинкой $\frac{\lambda}{4}$).

Пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

называется пластинкой в полволны.

Пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = \pm m\lambda, \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

называется пластинкой в целую длину волны.

Для всех названных пластинок знак «+» соответствует отрицательным одноосным кристаллам, знак «–» – положительным; λ – длина волны; d – толщина пластинки; n_o, n_e – соответственно, показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном к оптической оси.

Угол поворота плоскости поляризации

для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d ;$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d ,$$

где d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha([\alpha])$ – удельное вращение; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Фазовая скорость света

$$\upsilon = \frac{c}{n} ,$$

где c – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Дисперсия вещества

$$D = \frac{dn}{d\lambda} .$$

Групповая скорость света

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Направление излучения Вавилова – Черенкова

$$\cos\theta = \frac{c}{n\upsilon_r} ,$$

где υ_r – скорость заряженной частицы.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.54

Луч света, проходя слой льда, падает на алмазную пластинку, частично отражается, частично преломляется. Определить, каким должен быть угол падения, чтобы отраженный луч был максимально поляризован. Определить скорость света во льду.

Дано:	Решение
n_1 = 1,31 n_2 = 2,42	Отраженный свет максимально поляризован при угле падения $\alpha = \alpha_Б$, удовлетворяющем закону Брюстера:
α – ?	

$$\mathrm{tg}\alpha_Б = n_{21}, \qquad (1)$$

где $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ – относительный показатель преломления отражающей среды.

Если $\alpha = \alpha_Б$, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Проходящий свет поляризован лишь частично.

Из выражения (1) находим:

$$\alpha_Б = \mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1};$$

$$a_Б = \mathrm{arctg}\frac{2,42}{1,31} = 61,5°.$$

Абсолютный показатель преломления среды $n = \dfrac{c}{\upsilon}$, тогда, приняв $n_{льда}$ = 1,31, найдем скорость распространения света во льду:

$$\upsilon = \frac{c}{n_1};$$

$$\upsilon = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{1,33}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 2,21 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\alpha_Б$ = 61,5°; υ = $2,21 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.55

Угол между плоскостями поляризации двух поляроидов 70°. Как изменится интенсивность пошедшего через них света, если этот угол уменьшится в 5 раз?

Дано:	Решение
$\alpha_1 = 70°$ $\alpha_2 = 14°$	После прохождения света через оба поляроида его интенсивность
$\dfrac{I_2}{I_1}$ – ?	

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha_1; \qquad\qquad I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha_2;$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1};$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 14°}{\cos^2 70°} = \frac{0{,}942}{0{,}117} = 8,$$

т.е. интенсивность возрастет в 8 раз.

Ответ: $\frac{I_2}{I_1} = 8$; интенсивность возрастет в 8 раз.

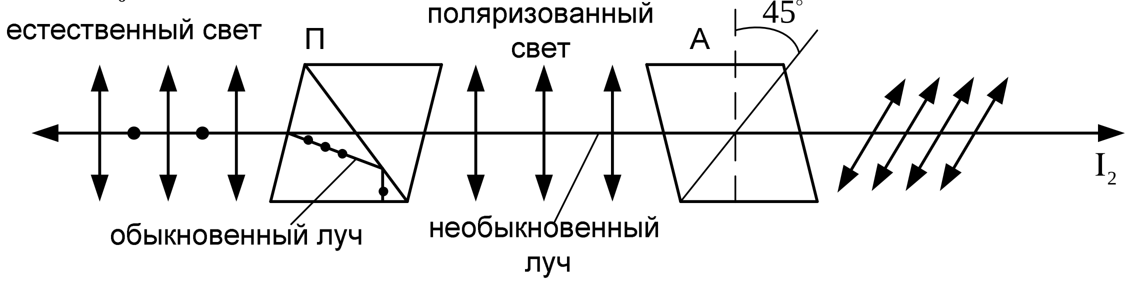
ЗАДАЧА 4.56

Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол $45°$. Каждый николь поглощает 8 % света, падающего на него (см. рис.).

Дано:	Решение
$\alpha = 45°$ $K = 0{,}08$	В результате двойного лучепреломления естественный луч света, попадая в призму – П-поляризатор, раздваивается на обыкновенный и необыкновенный лучи. Оба луча поляризованы, но во взаимно перпендикулярных плоскостях.
$\frac{I_0}{I_2} - ?$	

Обыкновенный луч, подчиняясь закону преломления, преломляется и, подойдя к слою канадского бальзама в николе, испытывает полное отражение и поглощается зачерненной боковой гранью призмы.

Необыкновенный луч проходит через призму без отклонения, интенсивность его уменьшается из-за поглощения света призмой на величину KI_0.



Интенсивность света, прошедшего через поляризатор,

$$I_1 = 0,5(1 - \mathrm{K}) I_0, \tag{1}$$

где $K = 0,08$ (т.е. 8 %) – коэффициент поглощения света в призме, I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поляризатор.

Поляризованный свет, войдя во второй николь – анализатор А, опять поглощается, и интенсивность его уменьшается.

Кроме того, интенсивность поляризованного света из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора, согласно закону Малюса,

$$I_2 = I_1(1 - K)\cos^2\alpha, \tag{2}$$

где α – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора; K – коэффициент поглощения; I_1 – интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор; I_2 – интенсивность поляризованного света, прошедшего через анализатор.

Подставляя выражение (1) в (2), имеем:

$$I_2 = 0,5(1 - \mathrm{K})^2 I_0 \cos^2\alpha. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует:

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1 - K)^2\cos^2\alpha; \qquad \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,5(1 - K)^2\cos^2\alpha};$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,5(1 - 0,08)^2\cos^2 45^\circ = 0,21;$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,21} = 4,7.$$

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_2} = 4,7$.

ЗАДАЧА 4.57

Какой угол образуют плоскости поляризации двух николей, если свет, вышедший из второго николя, был ослаблен в 5 раз? Учесть, что поляризатор поглощает 10, а анализатор – 8 % падающего на них света.

Дано:	**Решение**
$n = 5$ $K_1 = 0,1$ $K_2 = 0,08$	Естественный луч света, падая на грань призмы николя, претерпевает двойное лучепреломление. В результате возникают два луча – обыкновенный и необыкновенный.
$\varphi - ?$	

Оба луча поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, интенсивность их одинакова и равна половине интенсивности естественного света. Интенсивность света, прошедшего через первую призму (поляризатор), с учетом поглощения равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 - K_1), \qquad (1)$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый николь, K_1 = 0,1 – относительная потеря интенсивности света в поляризаторе.

Поляризованный свет, попадая на вторую призму (анализатор), вновь испытывает поглощение, но кроме этого, его интенсивность уменьшается из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора.

Уменьшение интенсивности определяется законом Малюса:

$$I_2 = I_1 \cos^2\varphi.$$

Учитывая потери интенсивности света в анализаторе, имеем:

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1 - K_1)(1 - K_2)\cos^2\varphi, \qquad (2)$$

где $K_2 = 0,08$ – относительная потеря интенсивности в анализаторе; φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

Так как по условию задачи известно, что относительное уменьшение интенсивности света $n = \dfrac{I_0}{I_2}$, то, подставив выражение (2), получим:

$$n = \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - K_1)(1 - K_2)\cos^2\varphi}. \qquad (3)$$

Из соотношения (3) получим:

$$\cos^2\varphi = \frac{2}{n(1 - K_1)(1 - K_2)}; \quad \cos^2\varphi = \frac{2}{5 \cdot 0,9 \cdot 0,92} = 0,483.$$

Следовательно, искомый угол $\varphi = 46°$.

Ответ: $\varphi = 46°$.

ЗАДАЧА 4.58

Естественный свет интенсивностью I_0 проходит чрез два николя, плоскости пропускания которых расположены под углом $60°$ друг к другу. После прохождения через второй николь свет падает на зеркало и, отразившись, проходит опять через оба николя. Во сколько раз изменится интенсивность света после обратного прохождения через оба николя?

Дано:	**Решение**
$\varphi = 60°$	После прохождения света через первый николь его интенсивность станет равной
$\dfrac{I_0}{I_3} - ?$	$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

(предполагается, что потери интенсивности необыкновенного луча при отражении и при прохождении внутри николя отсутствуют).

Согласно закону Малюса после прохождения света через второй николь его интенсивность

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi .$$

Соответственно, интенсивность света, прошедшего обратно через оба николя,

$$I_3 = I_2 \cos \varphi.$$

Тогда

$$I_3 = I_2 \cos \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} I_0 ;$$

$$\frac{I_0}{I_3} = \frac{2}{\cos^4 60°} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 32 .$$

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_3} = 32$.

ЗАДАЧА 4.59

Раствор сахара концентрацией $0,25$ г/см^3 толщиной 20 см поворачивает плоскость поляризации монохроматического света на $30°20'$. Второй раствор толщиной 15 см поворачивает плоскость поляризации на $20°$. Определить концентрацию сахара во втором растворе.

Дано:	**Решение**
$C_1 = 0,25$ г/см^3 $l_1 = 20$ см $\varphi_1 = 30,3°$ $l_2 = 15$ см $\varphi_2 = 20°$	Угол поворота плоскости поляризации определяется по формуле $$\varphi = [\alpha] C l ,$$ где $[\alpha]$ – удельное вращение; $$\varphi_1 = [\alpha] C_1 l_1 ,$$
$C_2 - ?$	

отсюда

$$[\alpha]=\frac{\varphi_1}{C_1 l_1}; \qquad \varphi_2=[\alpha]C_2 l_2,$$

откуда

$$C_2=\frac{\varphi_2}{[\alpha]l_2}=\frac{\varphi_2 l_1 C_1}{\varphi_1 l_2}; \quad C_2=\frac{20\cdot 0,25\cdot 20}{30,3\cdot 15}=0,22 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $C_2=0,22$ г/см^3.

ЗАДАЧА 4.60

Пластинка кварца толщиной 2 мм (удельное вращение кварца 15 град/мм), вырезанная перпендикулярно к оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями (рис. 1). Пренебрегая потерями света в николях, определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через эту систему.

Дано:	Решение
$d=2$ мм $[\alpha]=15$ град/мм $\frac{I_0}{I_2}-?$	Естественный свет, проходя через первый николь, вследствие двойного лучепреломления расщепляется на два луча – обыкновенный (*о*) и необыкновенный (*е*). Оба луча одинаковы по интенсивности и поляризованы полностью, но во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Из первого николя N_1 выходит необыкновенный луч света с интенсивностью $\frac{1}{2}I_0$ (обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение).

В кварцевой пластинке наблюдается вращение плоскости поляризации необыкновенного луча на угол

$$\varphi=[\alpha]d=15\cdot 20=30°.$$

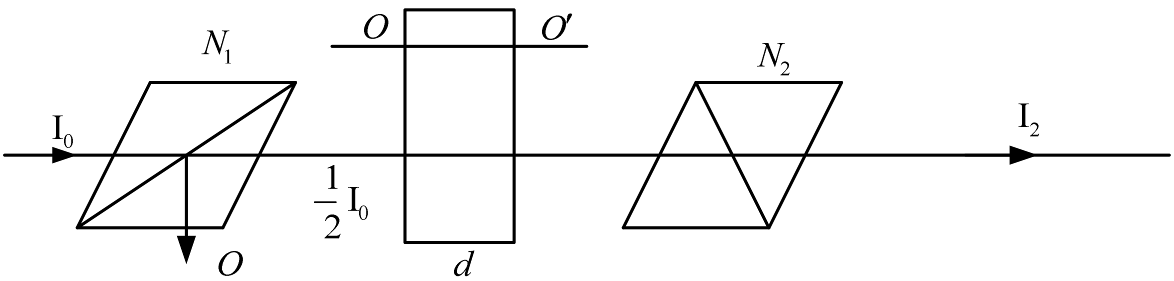


Рис. 1

Электрический вектор $\vec{E}_e$ луча, падающего на николь N_2 (рис. 2), составляет с его направлением пропускания угол $\beta = 90° - 30° = 60°$.

Согласно закону Малюса интенсивность прошедшего через николь N_2 света

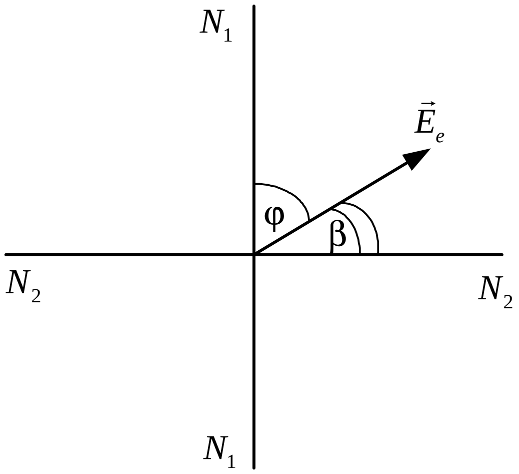


Рис. 2

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \beta;$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{\cos^2 \beta};$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{\cos^2 60°} = 8.$$

Ответ: $\frac{I_0}{I_2} = 8$.

ЗАДАЧА 4.61

Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Степень поляризации преломленного луча составляет 0,124. Найти коэффициент пропускания света.

Дано:
$P'' = 0{,}124$
$\tau - ?$

Решение

Естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность:

$$\mathrm{I}_{\parallel} = \mathrm{I}_{\perp}, \qquad (1)$$

где индексы $\parallel$ и $\perp$ обозначают колебания, параллельные и перпендикулярные к плоскости падения света на поверхность диэлектрика, причем интенсивность падающего света

$$I = I_{\parallel} + I_{\perp}. \qquad (2)$$

При падении света под углом полной поляризации отражаются только волны, поляризованные в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. В преломленной волне преобладают колебания, параллельные плоскости падения. Интенсивность преломленной волны можно записать как

$$I'' = I''_{\parallel} + I''_{\perp}. \qquad (3)$$

Составляющие $I''_{\parallel}$ и $I''_{\perp}$ интенсивности преломленной волны

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel} \quad \text{и} \quad I''_{\perp} = I_{\perp} - I', \tag{4}$$

где I' – интенсивность отраженного света.

Степень поляризации преломленного луча

$$P'' = \frac{I''_{\parallel} - I''_{\perp}}{I''_{\parallel} + I''_{\perp}} = \frac{I''_{\parallel} - I''_{\perp}}{I''}. \tag{5}$$

С учетом равенств (4) и (1) выражение (5) можно представить в виде:

$$P'' = \frac{I'}{I''}. \tag{6}$$

Коэффициент пропускания света определяется как

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{I''}{I' + I''}. \tag{7}$$

Или с учетом выражения (6)

$$\tau = \frac{1}{1 + P''}; \quad \tau = \frac{1}{1 + 0{,}124} = 0{,}89.$$

Ответ: $\tau = 0{,}89$.

ЗАДАЧА 4.62

Определить степень поляризации P света, являющегося смесью естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света и естественного равны.

Дано:	Решение
$I_{поляр} = I_{естеств}$	Для определения степени поляризации P исследуемый свет пропускают через анализатор и измеряют максимальную $I_{\max}$ и минимальную $I_{\min}$ интенсивность.
$P - ?$	

Выражение $P = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ называется степенью поляризации. В общем случае $I_{\max} = I_{поляр} + \dfrac{1}{2} I_{естеств}$, так как из закона Малюса следует, что анализатор пропускает половину интенсивности падающего на него естественного света;

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{естеств}.$$

Учитывая условия данной задачи, имеем:

$$I_{\max} = \frac{3}{2} I_{поляр}; \qquad I_{\min} = \frac{1}{2} I_{поляр};$$

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_{поляр} - \frac{1}{2} I_{поляр}}{\frac{3}{2} I_{поляр} + \frac{1}{2} I_{поляр}} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

а, следовательно, P = 0,5.

Ответ: $P = 0{,}5$.

ЗАДАЧА 4.63

Степень поляризации частично поляризованного света равна 0,8. Во сколько раз отличается амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, прошедшего через поляризатор, от амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности?

Дано:	**Решение**
$P = 0{,}8$	Степень поляризации света определяется выражением
$\dfrac{E_{\max}}{E_{\min}} - ?$	$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора E, т.е. $I \sim E^2$, то

$$P = \frac{E^2_{\max} - E^2_{\min}}{E^2_{\max} + E^2_{\min}} = \frac{\left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 + 1};$$

$$P\left[\left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 + 1\right] = \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 - 1;$$

$$\left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 = \frac{P+1}{1-P}; \qquad \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^2 = \frac{0{,}8+1}{1-0{,}8} = \frac{1{,}8}{0{,}2} = 9.$$

Тогда $\dfrac{E_{\max}}{E_{\min}} = \sqrt{9} = 3$.

Ответ: $\dfrac{E_{\max}}{E_{\min}} = 3$.

ЗАДАЧА 4.64

Определить минимальную толщину пластинки исландского шпата, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий на нее нормально плоскополяризованный свет выходил циркулярно поляризованным. Показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей $n_e = 1,489$, $n_0 = 1,664$, длина световой волны 527 нм.

Дано:
$n_e = 1,489$
$n_0 = 1,664$
$\lambda = 5,27 \cdot 10^{-7}$ м
$d_{\min} - ?$

Решение

Плоскополяризованный свет, падающий нормально на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, в результате прохождения сквозь пластинку превращается в циркулярно поляризованный в случае, если толщина пластинки – четверть длины волны, а угол между электрическим вектором плоскополяризованного луча и оптической осью кристалла составляет $45°$.

Для пластинки в четверть длины волны оптическая разность хода

$$\Delta = (n_0 - n_e)d = \left(m \pm \frac{1}{4}\right)\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем знак «$+$» соответствует отрицательным кристаллам, «–» – положительным.

Рассматриваемый в задаче исландский шпат – отрицательный кристалл, т.к. $n_e < n_0$, поэтому

$$(n_0 - n_e)d = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Минимальной толщине пластинки в четверть длины волны соответствует m = 0.

Тогда

$$(n_0 - n_e)d_{\min} = \frac{\lambda}{4}.$$

Откуда искомая минимальная толщина пластинки, при которой на выходе свет окажется циркулярно поляризованным,

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_0 - n_e)}; \qquad d_{\min} = \frac{5,27 \cdot 10^{-7}}{4(1,664 - 1,489)} = 0,753 \cdot 10^{-6}\text{ м}.$$

Ответ: $d_{\min} = 0,753$ мкм.

ЗАДАЧА 4.65

Определить разность показателей преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей, если наименьшая толщина кварцевой кристаллической пластинки в целую длины волны для голубого света $(\lambda = 486\text{ нм})$ равна 54 мкм.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 4{,}86\cdot 10^{-7}\,\text{м}$ $d_{\min} = 5{,}4\cdot 10^{-5}\,\text{м}$	Кристаллическая пластинка в целую длину волны – пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, для которой оптическая разность хода
$n_e - n_0 - ?$	$\Delta = (n_0 - n_e)d = \pm(m+1)\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

где знак «–» соответствует положительным кристаллам, «+» – отрицательным.

При нормальном падении на пластинку плоскополяризованного света (λ) между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке (в кристалле эти лучи пространственно нераздельные) возникает оптическая разность хода, равная λ.

Рассматриваемый в задаче кварц – положительный кристалл $(n_0 < n_e)$, поэтому можем записать:

$$(n_e - n_0)d = (m+1)\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Минимальной толщине пластинки в целую длину волны соответствует $m = 0$.

Тогда

$$(n_e - n_0)d_{\min} = \lambda.$$

Откуда искомая разность показателей преломления

$$n_e - n_0 = \frac{\lambda}{d_{\min}}; \qquad n_e - n_0 = \frac{4{,}86\cdot 10^{-7}}{5{,}4\cdot 10^{-5}} = 0{,}009.$$

Ответ: $n_e - n_0 = 0{,}009$.

ЗАДАЧА 4.66

Ячейку Керра поместили между скрещенными поляризатором и анализатором. Вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с плоскостями пропускания (главными плоскостями) поляризаторов. Конденсатор имеет длину $l = 15\text{ см}$ и заполнен нитробензолом, постоянная Керра B для используемой длины волны и данной температуры равна $2,2 \cdot 10^{-10}$ м/В. Определить минимальное значение напряженности электрического поля в конденсаторе, при котором интенсивность света за анализатором не будет зависеть от поворота анализатора.

Дано:	Решение
$l = 0,15$ м $\alpha = 45°$ $B = 2,2 \cdot 10^{-10}\ \dfrac{\text{м}}{\text{В}}$	При электрическом поле в конденсаторе, напряженность $\vec{E}$ которого составляет угол $\alpha = 45°$ с главными плоскостями поляризаторов, вещество в конденсаторе становится оптически анизотропным, двоякопреломляющим, его оптическая ось совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.
$E_{\min}$ – ?	

Возникающая разность показателей между обыкновенным и необыкновенным лучами

$$n_0 - n_e = B\lambda E^2,$$

где B – постоянная Керра; λ – длина волны света; E – напряженность электрического поля в конденсаторе.

Чтобы интенсивность прошедшего через систему света не зависела от поворота анализатора, необходимо, чтобы вышедший из ячейки Керра свет был циркулярно поляризованным. Это означает, что нитробензол должен соответствовать пластинке в четверть длины волны. Тогда можно записать:

$$B\lambda E^2 l = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda.$$

Поскольку значение $E_{\min}$ соответствует $m = 0$, то

$$B\lambda E^2{}_{\min} l = \frac{\lambda}{4},$$

откуда

$$E_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{Bl}} = \frac{1}{2\sqrt{2,2 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15}} = 8,7 \cdot 10^3\ \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Ответ: $E_{\min} = 8,7\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{см}}$.

ЗАДАЧА 4.67

Изменение дисперсии показателя преломления оптического стекла дало $n_1 = 1,528$ для $\lambda_1 = 0,434$ мкм и $n_2 = 1,523$ для $\lambda_2 = 0,486$ мкм. Вычислить отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны $0,434$ мкм.

Дано:	Решение
$\lambda_1 = 4,34 \cdot 10^{-7}$ мкм $n_1 = 1,528$ $\lambda_2 = 0,486 \cdot 10^{-7}$ м $n_2 = 1,523$	Зависимость групповой скорости u от показателя преломления n и длины волны λ имеет вид
$\dfrac{u_1}{\upsilon_1} - ?$	

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \qquad (1)$$

Фазовая скорость υ определяется как

$$\upsilon = \frac{c}{n}. \qquad (2)$$

Разделив выражение (1) на (2), получим:

$$\frac{u}{\upsilon} = 1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}. \qquad (3)$$

Для длины волны λ_1 и средней дисперсии $\left\langle \frac{dn}{d\lambda} \right\rangle = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda}$ имеем:

$$\frac{u_1}{\upsilon_1} = 1 + \frac{\lambda_1}{n_1}\left(\frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right);$$

$$\frac{u_1}{\upsilon_1} = 1 + \frac{4,34 \cdot 10^{-7}(1,523 - 1,528)}{1,528(4,86 - 4,34) \cdot 10^{-7}} = 0,973.$$

Ответ: $\dfrac{u_1}{\upsilon_1} = 0,973$.

ЗАДАЧА 4.68

Показатель преломления сероуглерода для света с длинами волн 509, 534 и 589 нм равен, соответственно, 1,647, 1,640 и 1,630. Вычислить фазовую и групповую скорость света вблизи длины волны 534 нм.

Дано:	Решение
$\lambda_1 = 509$ нм $\lambda_2 = 534$ нм $\lambda_3 = 589$ нм $n_1 = 1,647$ $n_2 = 1,640$ $n_3 = 1,630$	Групповая скорость u связана с фазовой скоростью υ света в среде соотношением
$u,\ \upsilon - ?$	

$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\upsilon = \dfrac{c}{n}$, из (1) получаем:

$$u = \upsilon\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{d\upsilon}{d\lambda}\right).$$

Для средней дисперсии вещества имеем:

$$u = \upsilon\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \qquad (2)$$

Для $\lambda = 534$ нм и $n = 1,640$ находим относительную дисперсию:

$$\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{534(1,647 - 1,630)}{1,640(509 - 589)} = -0,069.$$

Из соотношения (2) определяем:

$$\frac{u}{\upsilon} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\right) = (1 - 0,069) = 0,931;$$

$$u = 0,931\upsilon. \qquad (3)$$

Учитывая, что фазовая скорость $\upsilon = \dfrac{c}{n}$, находим ее значение вблизи $\lambda = 534$ нм:

$$\upsilon = \frac{3 \cdot 10^8}{1,640} = 1,83 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

По формуле (3) вычисляем групповую скорость:

$$u = 0,931 \cdot 1,83 \cdot 10^8 = 1,7 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $u = 1,7 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}};\ \upsilon = 1,83 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}.$

ЗАДАЧА 4.69

В черенковском счетчике из каменной соли релятивистские протоны излучают в конусе с раствором $82°$. Определить кинетическую энергию протонов. Показатель преломления каменной соли 1,54.

Дано:

$2\theta = 82°$

$n = 1,54$

$E_K - ?$

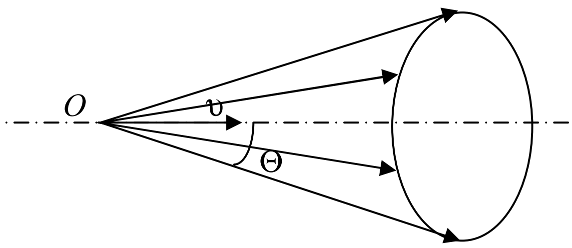
Решение

Излучение Вавилова – Черенкова возникает, когда скорость движения υ заряженной частицы в среде больше фазовой скорости света $\dfrac{c}{n}$ в этой среде (c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды):

$$\upsilon_г > \upsilon_ф = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления вещества; $\upsilon_ф$ – фазовая скорость света.

Свет, возникающий на каждом малом участке траектории заряженной частицы, распространяется вдоль образующих конуса, вершина которого O (см. рис.) расположена на этом участке, ось совпадает с траекторией частицы, а образующие составляют с осью угол Θ:



$$\cos\Theta = \frac{c}{n\upsilon_г}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется как

$$E_K = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_r^2}{c^2}}}-1\right), \qquad (2)$$

где $E_0 = mc^2$ – энергия покоя частицы; m – масса.

Для протонов $E_0 = 938{,}28$ МэВ.

Отношение $\frac{\upsilon_r}{c}$ определим из формулы(1):

$$\frac{\upsilon_r}{c} = \frac{1}{n\cos\theta}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$E_K = E_0\left(\frac{n\cos\theta}{\sqrt{n^2\cos^2\theta-1}}-1\right);$$

$$E_K = 938{,}28\left(\frac{1{,}54\cos 41°}{\sqrt{(1{,}54\cos 41°)^2-1}}-1\right) = 902{,}9 \text{ МэВ}$$

Ответ: $E_K = 902{,}9$ МэВ.

4.3. Квантовые свойства электромагнитного излучения

4.3.1. Тепловое излучение

Основные формулы

Основные **характеристики теплового излучения нагретого тела**

Энергетическая светимость $r_э(T)$ – энергия, испускаемая единицей поверхности излучающего тела в единицу времени. Размерность $[r_э]$ = Вт/м^2.

Энергетическая светимость тела $r_э$ – отношение потока излучения N, испускаемого телом, к площади поверхности излучателя S:

$$r_э = \frac{\Phi_э}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW_э}{dt} = \frac{N}{S},$$

где $\Phi_э$ – поток излучения; S – площадь излучающей поверхности; $dW_э$ – энергия, излучаемая поверхностью S за время dt; N – мощность излучения с поверхности S.

Испускательная способность тела $r_\nu = r(\nu,\ T)$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот. Размерность $[r_\nu]$ = Дж/м^2, связь с энергетической светимостью:

$$r_э(T) = \int\limits_0^\infty r(\omega, T)\,d\omega.$$

Испускательная способность тела $r_\lambda = r(\lambda, T)$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длин волн:

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T)\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda,$$

размерность $[r_\lambda]$ = Вт/м^3, связь с интегральной характеристикой:

$$r_э(T) = \int\limits_0^\infty r(\lambda, T)\,d\lambda.$$

Поглощательная способность тела a_ν – отношение потока энергии, поглощенной телом в единичном интервале частот, к падающему потоку энергии. Это безразмерная величина, не превышающая единицы. Тело, для которого $a_\nu = 1$, называется **абсолютно черным телом.**

Энергетическая светимость абсолютно черного тела определяется формулой Стефана – Больцмана:

$$R_э = \sigma T^4,$$

где T – термодинамическая температура, σ = 5,67·10^{-8} Вт/(м^{2}К^4) – постоянная Стефана – Больцмана.

Энергетическая светимость серого тела

$$r_э = A_T \sigma T^4,$$

где A_T – поглощательная способность серого тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – термодинамическая температура.

Закон смещения Вина: длина волны λ_{max}, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости в спектре абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \qquad \nu_{max} = aT,$$

где ν_{max} и λ_{max} – частота и длина волны, соответствующие максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; a = 5,9·10^{11} Гц/К, b = 2,9·10^{-3} мК – постоянные Вина.

Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости R_ν и R_λ абсолютно черного тела пропорционально третьей и, соответственно, пятой степени абсолютной температуры:

$$R_\nu = a_1 T^3; \qquad a_1 = 0{,}6\cdot 10^{-14}\ \text{Вт/(м}^3\text{К}^3\text{)};$$

$$R_\lambda = b_1 T^5; \qquad b_1 = 1{,}3\cdot 10^{-5}\ \text{Вт/(м}^3\text{К}^5\text{)}.$$

Формула Рэлея – Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела:

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где kT – средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν (k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура); c – скорость света в вакууме.

Формула Планка:

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}; \qquad R_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda}} - 1},$$

где $R_{\nu,T}$, $R_{\lambda,T}$ – спектральные плотности энергетической светимости черного тела, соответственно. как функция частоты ν и длины волны λ.

Радиационная температура тела

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{R_э}{\sigma}},$$

где $R_э$ – энергетическая светимость тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана.

Радиационная температура серого тела

$$T_p = T\sqrt[4]{A_T},$$

где T – истинная температура, A_T – поглощательная способность серого тела.

Закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = R_{\nu,T},$$

где $r_{\nu,T}$ – спектральная плотность энергетической светимости тела; $A_{\nu,T}$ – спектральная поглощательная способность тела; $R_{\nu,T}$ – спектральная плотность энергетической светимости черного тела.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.70

Температура внутренней поверхности электрической печи T = 700 °С. Определить мощность излучения печи через небольшое отверстие диаметром d = 5см, рассматривая его как излучение абсолютно черного тела.

Дано:	Решение
$T = 973$ К $d = 5\cdot 10^{-2}$ м	Из закона Стефана – Больцмана
N – ?	

$$R_э = \sigma T^4. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$R_э = \frac{N}{S},$$

откуда

$$N = R_э S, \qquad (2)$$

где площадь отверстия

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) и (1) в (2), получим:

$$N = \sigma T^4 \frac{\pi d^4}{4};$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \text{Вт};$$

$$N = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 973^4 \cdot \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^{-2}}{4} = 99,7 \text{ Вт}.$$

Ответ: N = 99,7 Вт.

ЗАДАЧА 4.71

Найти солнечную постоянную K, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Дано:

$T = 5800$ К

$R_c = 6,96 \cdot 10^8$ м

$r = 1,496 \cdot 10^{11}$ м

$K - ?$

Решение

По условию задачи излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, тогда по закону Стефана – Больцмана его энергетическая светимость

$$R_э = \sigma T^4. \tag{1}$$

Мощность излучения Солнца

$$N = R_э S_c, \tag{2}$$

где S_c – площадь поверхности Солнца,

$$S_c = 4\pi R_c^2. \tag{3}$$

Подставив (1) и (3) в (2), получим:

$$N = 4\pi R_c^2 \sigma T^4. \tag{4}$$

По условию задачи мощность, излучаемая Солнцем, падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли, поэтому площадь этой сферы

$$S = 4\pi r^2. \tag{5}$$

По определению солнечная постоянная $K = \dfrac{N}{S}$.

С учетом уравнений (4), (5) получаем:

$$K = \frac{4\pi R_c^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{R_c^2 \sigma T^4}{r^2}; \quad [K] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Вт} \cdot \text{К}^4}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$K=\frac{\left(6{,}96\cdot 10^{8}\right)^{2}\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot (5800)^{4}}{\left(1{,}496\cdot 10^{11}\right)^{2}}=1{,}38\cdot 10^{3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^{2}}=1{,}38\ \frac{\text{кВт}}{\text{м}^{2}}.$$

Ответ: $K=1{,}38\ \frac{\text{кВт}}{\text{м}^{2}}$.

ЗАДАЧА 4.72

Мощность излучения расплавленного свинца, площадь поверхности которого S = 40 см^2, взятого при температуре плавления, равна N = 17,6 Вт. Найти отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры.

Дано:	**Решение**
T = 600 К $S=4\cdot 10^{-3}\text{м}^2$ N = 17,6 Вт	Расплавленный свинец ведет себя как серое тело. Если излучающее тело не является абсолютно черным, то $r_э=A_T\sigma T^4$, а мощность излучения $N=r_эS$, т.е.
A_T – ?	

$$r_э=\frac{N}{S}. \qquad (1)$$

Если бы поверхность свинца была абсолютно черной, то по закону Стефана – Больцмана энергетическая светимость была бы

$$R_э=\sigma \text{T}^4, \qquad (2)$$

где T – температура плавления свинца.

Используя формулы (1) и (2), получаем:

$$A_T=\frac{r_э}{R_э}=\frac{N}{S\sigma T^4};$$

$$[A_T]=\frac{\text{м}^2\cdot\text{Вт}\cdot\text{К}^4}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4\cdot\text{Вт}}=1; \qquad A_T=\frac{17{,}6}{4\cdot 10^{-3}\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 600^4}=0{,}6.$$

Ответ: A_T = 0,6.

ЗАДАЧА 4.73

Пренебрегая потерями тепла на теплопроводность, подсчитать мощность электрического тока, необходимую для накаливания вольфрамовой нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 3500 К. Коэффициент черноты вольфрама для данной температуры A_T = 0,35. Какой ток потечет через лампу, если напряжение в сети 220 В?

Дано:	Решение
T = 3500 К $d = 1 \cdot 10^{-3}$ м L = 0,2 м A_T = 0,35 U = 220 В	Поскольку нить излучает как серое тело, то энергетическая светимость
N, I – ?	

$$r_э = A_T \sigma T^4, \qquad (1)$$

а мощность излучения нити

$$N = r_э S, \qquad (2)$$

где S – площадь поверхности вольфрамовой нити,

$$S = \pi d l. \qquad (3)$$

Подставляя (1), (3) в (2), получим:

$$N = A_T \sigma T^4 \pi d l;$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \text{Вт};$$

$$N = 0,35 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3500^4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 1870 \text{ Вт}.$$

С другой стороны, мощность тока $N = IU$, тогда

$$I = \frac{N}{U}; \qquad [I] = \frac{\text{Вт}}{\text{В}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{В}} = \text{А}; \qquad I = \frac{1870}{220} = 8,5 \text{ А}.$$

Ответ: N = 1870 Вт; I = 8,5 А.

ЗАДАЧА 4.74

Температура черного тела T_1 = 3000 К. При остывании тела длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определить температуру T_2, до которой тело охладилось.

Дано:	Решение
T_1 = 3000 К $\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-6}$ м	Из закона Вина имеем:
T_2 – ?	

$$\lambda_{\max 1} = \frac{b}{T_1} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{\max 2} = \frac{b}{T_2}.$$

Изменение длины волны, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости,

$$\Delta\lambda = \lambda_{\max 2} - \lambda_{\max 1} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1}.$$

Откуда

$$T_2 = \frac{b}{\Delta\lambda + \dfrac{b}{T_1}};$$

$$[T_2] = \frac{\text{м}\cdot\text{К}}{\text{м} + \frac{\text{м}\cdot\text{К}}{\text{К}}} = \text{К}; \qquad T_2 = \frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{8\cdot10^{-6} + \frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{3000}} = 323\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2 = 323$ К.

ЗАДАЧА 4.75

Принимая Солнце за абсолютно черное тело и учитывая, что максимальное значение его плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 500$ нм, определить массу, теряемую Солнцем за 10 мин за счет излучения.

Дано:	Решение
$\lambda_{\max} = 5\cdot10^{-7}$ м $t = 600$ с $R_c = 6{,}95\cdot10^{8}$ м	
Δm – ?	

Решение

Из закона Вина определим температуру поверхности Солнца:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

тогда

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}. \qquad (1)$$

Мощность, излучаемая Солнцем,

$$N = R_э S. \qquad (2)$$

Энергетическую светимость $R_э$ найдем по закону Стефана – Больцмана для абсолютно черного тела:

$$R_э = \sigma \mathrm{T}^4. \qquad (3)$$

Площадь поверхности Солнца

$$S = 4\pi R_c^{\,2}. \qquad (4)$$

Подставляя (1), (3), (4) в (2), получим:

$$N = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4 4\pi R_c^{\,2}.$$

Найдем изменение энергии Солнца ΔW за счет излучения за время t:

$$\Delta W = Nt = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4 4\pi R_c^{\,2} t. \qquad (5)$$

С другой стороны, по закону взаимосвязи массы и энергии

$$\Delta W = \Delta m c^2, \qquad (6)$$

где $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость света; Δm – изменение массы Солнца.

Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем:

$$\Delta m c^2 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 4\pi R_c{}^2 t,$$

откуда

$$\Delta m = \frac{4\pi R_c{}^2 t \sigma b^4}{\lambda_{\max}^4 c^2};$$

$$[\Delta m] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{К}^4}{\text{м}^2 \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{с}^3 \cdot \text{Вт}}{\text{м}^2} = \frac{\text{с}^3 \cdot \text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{кг};$$

$$\Delta m = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(6{,}95 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 600 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(2{,}9 \cdot 10^{-3}\right)^4}{\left(5 \cdot 10^{-7}\right)^4 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2} = 2{,}6 \cdot 10^{12} \ \text{кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 2{,}6 \cdot 10^{12}$ кг.

ЗАДАЧА 4.76

Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны 5000 Å. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость Солнца; 2) поток энергии, излучаемый Солнцем.

Дано:	**Решение**
$\lambda_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}$ м	1. Энергетическая светимость абсолютно черного тела выражается формулой Стефана – Больцмана
1) $R_э$ – ? 2) Φ_w – ?	$$R_э = \sigma T^4,$$

где δ – постоянная Стефана – Больцмана; T – абсолютная температура излучающей поверхности.

Температура может быть определена из закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} T = b,$$

где $\lambda_{\max}$ – длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности светимости абсолютно черного тела.

Выразив температуру и подставив ее в уравнение энергетической светимости, получаем:

$$R_э = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4;$$

$$[R_э] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}\left(\frac{\text{м}^4\cdot\text{К}^4}{\text{м}^4}\right) = \frac{\text{Вт}\cdot\text{К}^4}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$R_э = 5,67\cdot10^{-8}\left(\frac{2,9\cdot10^{-3}}{5\cdot10^{-7}}\right)^4 = 6,4\cdot10^7\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 64\ \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2}.$$

2. Поток энергии, излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь его поверхности:

$$\Phi_w = R_э S \qquad \text{или} \qquad \Phi_w = R_э 4\pi R_c{}^2,$$

где R_c – радиус Солнца ($R_c = 6,95\cdot10^8$ м);

$$[\Phi_w] = \frac{\text{Вт}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}};$$

$$\Phi_w = 6,4\cdot10^7\cdot4\cdot3,14\left(6,95\cdot10^8\right)^2 = 3,9\cdot10^{26}\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Ответ: $R_э = 64\ \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2}$; $\Phi_w = 3,9\cdot10^{26}\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.77

Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, равна 0,58 мкм. Определить: 1) энергетическую светимость поверхности тела; 2) спектральную плотность энергетической светимости, рассчитанную на интервал длин волн, равный 1 нм, вблизи $\lambda_{\max}$.

Дано:	**Решение**
$\lambda_{\max}$ = $5,8\cdot10^{-7}$ м $\Delta\lambda = 10^{-9}$ м	1. По закону Стефана – Больцмана энергетическая светимость
1) $R_э$ – ? 2) r_λ – ?	$$R_э = \sigma T^4.$$

Температуру вычислим из закона смещения Вина:

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}.$$

Тогда получим:

$$R_э = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4;$$

$$[R_э] = \frac{\text{Вт}\cdot\text{м}^4\cdot\text{К}^4}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4\cdot\text{м}^4} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$R_э = 5{,}67\cdot10^{-8}\left(\frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{5{,}8\cdot10^{-7}}\right) = 3{,}5\cdot10^7\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 35\ \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2}.$$

2. Максимум спектральной плотности энергетической светимости пропорционален пятой степени температуры:

$$r_\lambda = b_1 T^5;$$

$$r_\lambda = b_1\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^5;$$

$$[r_\lambda] = \frac{\text{Вт}\cdot\text{м}^5\cdot\text{К}^5}{\text{м}^2\cdot\text{К}^5\cdot\text{м}^5} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

где $b_1 = 1{,}3\cdot10^{-5}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{К}^5}$ – постоянная для единого интервала волн; $\Delta\lambda = 1$ м.

По условию задачи $\Delta\lambda = 1$ нм.

Тогда

$$r_\lambda = \frac{1{,}3\cdot10^{-5}}{10^9}\left(\frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{5{,}8\cdot10^{-7}}\right)^5 = 4{,}06\cdot10^4\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{нм}} = 40{,}6\ \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2\cdot\text{нм}}.$$

Ответ: $R_э = 35\ \dfrac{\text{МВт}}{\text{м}^2}$; $r_\lambda = 40{,}6\ \dfrac{\text{кВт}}{\text{м}^2\cdot\text{нм}}$.

ЗАДАЧА 4.78

Считается, что атмосфера поглощает 10 % лучистой энергии, посылаемой Солнцем. Найти мощность излучения, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью 0,5 га. Высота Солнца над горизонтом $30°$. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела с температурой 5800 К.

Дано:	**Решение**
$\eta = 10\ \%$ $S = 0{,}5 \cdot 10^4\ \text{м}^2$ $\varphi = 30°$ $T = 5800\ \text{К}$ $r_{з.о} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{м}$ $r_c = 6{,}95 \cdot 10^8\ \text{м}$ $N - ?$	Энергетическая светимость – это энергия, излучаемая с единицы поверхности в единицу времени, она может быть найдена по закону Стефана – Больцмана. Тогда полная мощность, которую излучает Солнце,

$$N_1 = R_э S_1; \qquad R_э = \sigma T^4,$$

где S_1 – площадь поверхности Солнца; T – температура Солнца.

Тогда

$$N_1 = \sigma T^4 4\pi r_c^2,$$

где r_c – радиус Солнца.

Это излучение, распространяясь в пространстве, доходит до сферы с радиусом земной орбиты $r_{з.о}$.

Тогда мощность, приходящаяся на единицу площади этой сферы, будет равна

$$N_2 = \frac{N_1}{S_{з.о}} = \frac{\sigma T^4 4\pi r_c^2}{4\pi r_{з.о}^2} = \frac{\sigma T^4 r_c^2}{r_{з.о}^2}.$$

В атмосфере теряется 10 % этой мощности, тогда на поверхность площадью S поступает

$$N = (1-\eta) N_2.$$

Но лучи падают под углом $30°$ к горизонту, нормальная составляющая будет

$$N = (1-\eta)\frac{\sigma T^4 r_c^2}{r_{з.о}^2} S \cos 60°; \qquad [N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2} = \text{Вт};$$

$$N = \frac{0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}8^4 \cdot 10^{12} \cdot 6{,}95^2 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5}{1{,}5^2 \cdot 10^{22}} =$$

$$= 3{,}1 \cdot 10^6\ \text{Вт} = 3{,}1\ \text{МВт}.$$

Ответ: $N = 3{,}1$ МВт.

ЗАДАЧА 4.79

В результате охлаждения черного тела длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1\max} = 0{,}8$ мкм до $\lambda_{2\max} = 2{,}4$ мкм. Определить, во сколько раз изменятся: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости.

Дано:	**Решение**
$\lambda_{1\max} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м $\lambda_{2\max} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ м	Энергетическая светимость черного тела, согласно закону Стефана – Больцмана,
$\dfrac{R_{2э}}{R_{1э}}$; $\dfrac{(r_{\lambda_2 T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 T_1})_{\max}}$ – ?	

$$R_э = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – термодинамическая температура.

Согласно закону смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \qquad (2)$$

где b – постоянная Вина.

Тогда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{1\max}} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{b}{\lambda_{2\max}}. \qquad (3)$$

Искомое отношение энергетических светимостей с учетом формул (1) и (3) запишется в виде:

$$\frac{R_{2э}}{R_{1э}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^4; \quad \frac{R_{2э}}{R_{1э}} = \left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{2{,}4 \cdot 10^{-6}}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры:

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = cT^5,$$

где постоянная $c = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$.

Тогда искомое отношение максимальных спектральных плотностей энергетической светимости с учетом закона смещения Вина (2)

$$\frac{(r_{\lambda_2 T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 T_1})_{\max}} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^5; \qquad \frac{(r_{\lambda_2 T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 T_1})_{\max}} = \left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{2{,}4 \cdot 10^{-6}}\right)^5 = \frac{1}{243}.$$

Ответ: уменьшится в 81 раз; уменьшится в 243 раза.

ЗАДАЧА 4.80

Определить количество теплоты, теряемой 50 см^2 поверхности расплавленной платины за 1 мин, если поглощательная способность платины $A_T = 0{,}8$. Температура t плавления платины равна 1770 °С.

Дано:	**Решение**
$S = 5\cdot 10^{-3}$ м^2 t = 60 с T = 2043 К $A_T = 0{,}8$	Количество теплоты, теряемое платиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью:
Q – ?	

$$Q = W = A_T R_э S t, \qquad (1)$$

где $R_э$ – энергетическая светимость черного тела; S – поверхность излучения; t – время.

Согласно закону Стефана – Больцмана

$$R_э = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Подставив (2) в (1), найдем искомое количество теплоты, теряемое расплавленной платиной:

$$Q = A_T \sigma T^4 S t; \qquad [Q] = \frac{\text{Вт}\cdot\text{К}^4\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4} = \text{Вт}\cdot\text{с} = \text{Дж};$$

$$Q = 0{,}8\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot (2043)^4\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 60 = 237\cdot 10^3\ \text{Дж}.$$

Ответ: $Q = 237$ кДж.

ЗАДАЧА 4.81

Выведите связь между истинной T и радиационной T_p температурами, если известна поглощательная способность A_T серого тела.

Дано:	**Решение**
A_T	В случае серого тела энергетическая светимость
$T = f(T_p)$	

$$R_э^c = A_T R_э = A_T \sigma T^4, \qquad (1)$$

где $R_э = \sigma T^4$ – энергетическая светимость черного тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – истинная температура; A_T – поглощательная способность серого тела.

С другой стороны,

$$R_э^c = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где T_p – радиационная температура.

Приравняв выражения (1) и (2), запишем: $A_T \sigma T^4 = \sigma T_p{}^4$,

откуда искомая связь между истинной и радиационной температурами:

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{A_T}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{T_p}{\sqrt[4]{A_T}}$.

4.3.2. Квантово-оптические явления

Основные формулы

Энергия кванта (фотона)

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где ν – частота света; λ – длина световой волны; h = 6,62·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} \quad \text{или} \quad h\nu = h\nu_0 + eU_0,$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла (ν – частота падающего фотона, h – постоянная Планка); A – работа выхода электрона из металла; $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона; U_0 – задерживающее напряжение (напряжение запирания фотона), ν_0 – красная граница фотоэффекта.

Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ – энергия фотона.

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho),$$

где $E_e = Nh\nu$ – облученность поверхности (количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени); ρ – коэффициент отражения; c – скорость света в вакууме; ω – объемная плотность энергии излучения.

Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеивании (эффект Комптона):

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ и λ' – длины волн падающего и рассеянного излучения; m – масса электрона; θ – угол рассеяния; $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 0{,}242\cdot10^{-11}$ м – комптоновская длина волны.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.82

Красная граница фотоэффекта для металла $\lambda_к = 6,2 \cdot 10^{-5}$ см. Найти величину запирающего напряжения $U_з$ для фотоэлектронов при освещении металла светом длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Дано:	Решение
$\lambda_к = 6,2 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda = 3,3 \cdot 10^{-7}$ м $U_з - ?$	Запирающим напряжением $U_з$ при фотоэффекте называют напряжение на электродах, которое способно полностью остановить, затормозить электроны, вылетевшие из металла.

Это напряжение должно быть таким, чтобы работа соответствующего электрического поля $A_э$ была равна кинетической энергии $E_к$ вылетевших из металла электронов:

$$A_э = E_к$$

или

$$eU_з = E_к. \tag{1}$$

Кинетическую энергию $E_к$ определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + E_k,$$

тогда

$$E_k = h\nu - A. \tag{2}$$

Работу выхода электрона из металла A можно определить, если известна красная граница фотоэффекта λ_k, т.е. предельная длина волны, при которой еще возможен фотоэффект:

$$A = h\nu_k = h\frac{c}{\lambda_k}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2), (3) в (1), получим:

$$eU_з = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_k},$$

откуда

$$U_з = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right);$$

$$[U_з] = \frac{Дж \cdot с \cdot м}{с \cdot Кл \cdot м} = \frac{Дж}{Кл} = В;$$

$$U_з = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{1}{3,3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{6,2 \cdot 10^{-7}} \right) = 1,76 \text{ В}.$$

Ответ: $U_з = 1,76 B$

ЗАДАЧА 4.83

Красная граница фотоэффекта для никеля равна 0,257 мкм. Найти длину волны света, падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов, равной 1,5 В.

Дано:
$\lambda_к = 2,57 \cdot 10^{-7}$ м
$U = 1,5$ В

$\lambda - ?$

Решение

Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A + E_{k\max} \quad . \qquad (1)$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия равенства энергии фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ работе выхода электронов *A*, т.е.

$$\frac{hc}{\lambda_к} = A. \qquad (2)$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов может быть определена через задерживающую разность потенциалов *U*:

$$E_{k\max} = eU, \qquad (3)$$

где *e* – заряд электрона.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем длину волны света:

$$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{eU}{hc} \right)^{-1};$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{м} + \frac{Кл \cdot В \cdot с}{Дж \cdot с \cdot м} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{м} + \frac{А \cdot с \cdot В}{Дж \cdot м} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{м} + \frac{Дж}{Дж \cdot м} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{м} + \frac{1}{м} \right)^{-1} = м;$$

$$\lambda=\left(\frac{1}{2{,}57\cdot10^{-7}}+\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1{,}5}{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}\right)^{-1}=1{,}96\cdot10^{-7}=0{,}196\text{ мкм.}$$

Ответ: $\lambda=0{,}196$ мкм.

ЗАДАЧА 4.84

Какую часть энергии фотона составляет энергия, которая пошла на совершение работы выхода электронов из фотокатода, если красная граница для материала фотокатода равна 0,54 мкм? Кинетическая энергия фотоэлектронов 0,5 эВ.

Дано:	Решение
$\lambda_к=5{,}4\cdot10^{-7}$ м	Формула Эйнштейна для фотоэффекта:
$E_к=0{,}5$ эВ	$\varepsilon=A_в+\mathrm{E}_к$.
$\dfrac{A_в}{\varepsilon}-?$	Длина волны λ_K красной границы:

$$\lambda_K=\frac{hc}{A_в};$$

$$\frac{A_в}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon-E_к}{\varepsilon}=1-\frac{E_к}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\varepsilon=\frac{hc}{\lambda_k}+E_k;$$

$$\varepsilon=\frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{5{,}4\cdot10^{-7}}+0{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-19}=4{,}48\cdot10^{-19}\text{Дж}=2{,}8\text{ эВ};$$

$$\frac{A_в}{\varepsilon}=1-\frac{E_k}{\varepsilon}=1-\frac{0{,}5}{2{,}8}=0{,}82,$$

т.е. составляет 82 %.

Ответ: $\dfrac{A_в}{\varepsilon}=82$ %.

ЗАДАЧА 4.85

Определить максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности материала γ-квантом с энергией 1,53 МэВ.

Дано:	**Решение**
$E = 1{,}53$ МэВ $E_0 = 0{,}511$ МэВ	По формуле Эйнштейна для фотоэффекта $$E = A_в + E_к.$$
$\upsilon - ?$	

Энергия кванта излучения расходуется на работу вырывания электрона $A_в$ и сообщение ему кинетической энергии $E_к$. Так как $A_в$ = E, то электрон будет релятивистским и $E = E_к$, а кинетическая энергия будет выражаться формулой

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right) = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - E_0,$$

где E_0 – энергия покоя электрона;

$$E_к + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = \left(\frac{E_0}{E_к + E_0}\right)^2 = \left(\frac{0{,}511}{1{,}53+0{,}511}\right)^2 = 0{,}063;$$

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} = 0{,}937; \qquad \upsilon = c\cdot 0{,}937 = 2{,}8\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}8\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.86

Определить, с какой скоростью υ должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия $E_к$ была равна энергии ε фотона с длиной волны $\lambda = 1$ пм.

Дано:	**Решение**
$E_к = \varepsilon$ $\lambda = 10^{-12}$ м	Чтобы определить, является электрон частицей классической или релятивистской, следует энергию фотона (по условию задачи кинетическая энергия электрона равна энергии фотона) сравнить с энергией покоя электрона.
$\upsilon - ?$	

Энергия фотона

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (1)$$

где h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Энергия покоя электрона

$$E_0 = mc^2, \qquad (2)$$

где $m-$ масса электрона.

Поделив (1) на (2), получим:

$$\frac{\varepsilon}{E_0} = \frac{h}{m\lambda c};$$

$$\frac{\varepsilon}{E_0} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,43,$$

т.е. $\varepsilon > E_0$ и электрон является релятивистской частицей. Следовательно, кинетическая энергия электрона определяется релятивистской формулой

$$E_\kappa = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (3)$$

Приравняем, согласно условию задачи, выражения (1) и (3):

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{hc}{\lambda}.$$

Найдем искомую скорость:

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{h}{mc\lambda} + 1\right)^2}};$$

$$[\upsilon] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}\right)^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}\right)^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}\right)^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = 2,87 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\upsilon = 2,87 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.87

Определить, во сколько раз максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка (работа выхода 4 эВ) монохроматическим светом с длиной волны λ = 220 нм, превосходит среднюю энергию теплового движения электронов при температуре 27 °C.

Дано:

$A = 4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

$\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м

$T = 300$ К

$\dfrac{E_{k\max}}{\langle \varepsilon \rangle}$ – ?

Решение

Согласно уравнению Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon^2_{\max}}{2}.$$

Учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получаем:

$$E_{k\max} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Средняя энергия теплового движения электронов

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Тогда

$$\frac{E_{k\max}}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{\dfrac{hc}{\lambda} - A}{\dfrac{3}{2}kT} = \frac{2\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right)}{3kT};$$

$$\left[\frac{E_{k\max}}{\langle \varepsilon \rangle}\right] = \frac{\dfrac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} - \text{Дж}}{\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1; \qquad \frac{E_{k\max}}{\langle \varepsilon \rangle} = 42{,}5,$$

т.е. максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов в 42,5 раза больше, чем средняя энергия теплового движения электронов.

Ответ: $\dfrac{E_{k\max}}{\langle \varepsilon \rangle} = 42{,}5.$

ЗАДАЧА 4.88

Определить длину волны λ фотона, импульс P которого в два раза меньше импульса P_e электрона, движущегося со скоростью 0,1 Мм/с.

Дано:

$P=\dfrac{P_e}{2}$

$m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг

$\upsilon=10^5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

$\lambda-?$

Решение

Импульс фотона

$$P=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}, \qquad (1)$$

где h – постоянная Планка.

Импульс электрона

$$P_e=m_e\upsilon, \qquad (2)$$

где m_e – масса электрона.

Согласно условию задачи

$$P=\frac{P_e}{2}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (2) в формулу (3), получим:

$$\frac{h}{\lambda}=\frac{m_e\upsilon}{2}.$$

Откуда искомая длина волны фотона

$$\lambda=\frac{2h}{m_e\upsilon};$$

$$[\lambda]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}=\text{м};$$

$$\lambda=\frac{2\cdot6{,}63\cdot10^{-34}}{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot10^5}=14{,}5\cdot10^{-9}\ \text{м}=14{,}5\ \text{нм}.$$

Ответ: $\lambda=14{,}5$ нм.

ЗАДАЧА 4.89

На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм, производя давление $5\cdot10^{-6}$ Па. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1 м^2 в 1 с.

Дано:

$\lambda=6{,}5\cdot10^{-7}$ м

$P=5\cdot10^{-6}$ Па

$\rho=0$

$S=1$ м^2

$t=1$ с

$n_0,\ n-?$

Решение

Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ вычисляется по формуле

$$P=\omega(1+\rho) \qquad (1)$$

или

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \tag{2}$$

где ω – объемная плотность энергии; E_e – энергетическая освещенность; c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения поверхности, в данном случае $\rho = 0$.

Объемная плотность энергии равна произведению концентрации фотонов (числа фотонов в единицу объема) на энергию одного фотона:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \text{ т.е.}$$

$$\omega = n_0 \frac{hc}{\lambda}, \tag{3}$$

откуда

$$n_0 = \frac{\omega\lambda}{hc}. \tag{4}$$

Определяя объемную плотность энергии из (1) и подставляя в (4), имеем:

$$n_0 = \frac{P\lambda}{hc}; \tag{5}$$

$$[n_0] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2\text{Дж}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3};$$

$$n_0 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} \simeq 1,6 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Число фотонов, падающих на площадь в 1 м^2 за 1 с, численно равно отношению энергетической освещенности к энергии одного фотона:

$$n = \frac{E_e}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{E_e\lambda}{hc}. \tag{6}$$

Энергетическую освещенность определяем из выражения (2) и, подставляя в (6), получаем:

$$n = \frac{Pc\lambda}{hc} = \frac{P\lambda}{h}. \tag{7}$$

С учетом (5) выражение (7) примет вид:

$$n = n_0 c;$$

$$[h] = \frac{\text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}; \quad h = 1,6 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^{8} = 4,8 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Ответ: $n_0 = 1,6 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$; $n = 4,8 \cdot 10^{21}$ с$^{-1} \cdot$ м$^{-2}$.

ЗАДАЧА 4.90

На идеально отражающую поверхность площадью $S = 5\ \text{см}^2$ за время $t = 3$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 9$ Дж. Определить световое давление, оказываемое на поверхность.

Дано:	Решение
$S = 5 \cdot 10^{-4} \text{м}^2$	Давление, производимое светом, определяется по формуле
$t = 180$ с	$$P = \frac{E_e(1+\rho)}{c}, \quad (1)$$
$\rho = 1$	где E_e – количество энергии, падающей на единицу поверхности;
$W = 9$ Дж	
$P - ?$	

$$E_e = \frac{W}{St}. \quad (2)$$

В случае идеально отражающей поверхности (зеркальной) коэффициент отражения $\rho = 1$.

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\rho = 1$, получим:

$$P = \frac{2W}{Stc};$$

$$[P] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па};$$

$$P = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 180 \cdot 3 \cdot 10^8} = 667 \cdot 10^{-9}\ \text{Па} = 667\ \text{нПа}.$$

Ответ: $P = 667$ нПа.

ЗАДАЧА 4.91

Световое давление, испытываемое зеркальной поверхностью площадью $1\ \text{м}^2$, равно 10^{-6} Па. Найти длину волны света, если на поверхность ежесекундно падает $5 \cdot 10^{16}$ фотонов.

Дано:	Решение
$S = 10^{-4}\ \text{м}^2$	Если на $S = 1\ \text{см}^2$ падает *n* фотонов, то на $1\ \text{м}^2$ –
$P = 10^{-6}$ Па	
$n = 5 \cdot 10^{16}$	$$N = \frac{n}{S} = 5 \cdot 10^{20}\ \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$
$\rho = 1$	
$\lambda - ?$	

Световое давление определяется по формуле

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho),$$

где $E_e = \frac{hc}{\lambda}N$ – энергетическая освещенность поверхности, т.е. энергия всех фотонов, попадающих на 1 м^2 поверхности за 1 с;

$$P = \frac{hc}{\lambda}\frac{N}{c}(1+\rho).$$

Откуда

$$\lambda = \frac{hN(1+\rho)}{P}; \quad [\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м};$$

$$\lambda = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 5\cdot 10^{20}\cdot 2}{10^{-6}} = 6{,}63\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 6{,}63\cdot 10^{-7}\,\text{м}$.

ЗАДАЧА 4.92

Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}3$, расположенную перпендикулярно к падающему свету, равно $0{,}2$ мкПа. Определить число фотонов, поглощаемых ежесекундно 1 м^2 этой поверхности.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ м $\rho = 0{,}3$ $P = 2\cdot 10^{-7}$ Па $t = 1$ с $S = 1$ м^2	Давление, производимое светом при его нормальном падении на поверхность, $P = \frac{E_e}{c}(1+\rho)$, где $E_e = N'h\nu$ – облученность поверхности (энергия
N – ?	всех фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с).

Так как $\nu = \frac{c}{\lambda}$, имеем:

$$P = \frac{N'h}{\lambda}(1+\rho).$$

Отсюда число фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с,

$$N' = \frac{P\lambda}{(1+\rho)h}. \qquad (1)$$

Исходя из определения коэффициента отражения получим, что искомое число фотонов, поглощаемых ежесекундно 1 $м^2$ поверхности,

$$N = (1-\rho)N'. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), найдем:

$$N = \frac{P\lambda(1-\rho)}{h(1+\rho)};$$

$$[N] = \frac{Па \cdot м}{Дж \cdot с} = \frac{Н \cdot м \cdot м^2 \cdot с}{м^2 \cdot Н \cdot м \cdot с} = 1; \quad N = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-7}(1-0,3)}{6,62 \cdot 10^{-34}(1+0,3)} = 8,12 \cdot 10^{19}.$$

Ответ: $N = 8,12 \cdot 10^{19}$.

ЗАДАЧА 4.93

Давление света с длиной волны 0,55 мкм, нормально падающего на зеркальную поверхность, равно 9 мкПа. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности.

Дано:

$\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м

$P = 9 \cdot 10^{-6}$ Па

$\rho = 1$

$n - ?$

Решение

Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ определяется по формуле

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho), \qquad (1)$$

где ω – объемная плотность энергии излучения;

$$\omega = \frac{E_e}{c}.$$

Объемная плотность энергии ω равна произведению концентрации фотонов n (числа фотонов в единице объема) на энергию одного фотона;

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

т.е.

$$\omega = \frac{nhc}{\lambda}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$P = \frac{nhc}{\lambda}(1+\rho).$$

Откуда

$$n = \frac{\lambda P}{hc(1+\rho)};$$

$$[n] = \frac{\text{м} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3};$$

$$n = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}(1+1)} \simeq 1{,}24 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $n \simeq 1{,}24 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$.

ЗАДАЧА 4.94

Определить, сколько фотонов испускает электрическая лампочка мощностью $P = 25$ Вт за время $t = 1$ с, если предположить, что она излучает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм, а также, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Дано:	**Решение**
$P = 25$ Вт $t = 1$ с $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м	Энергия, потребляемая электрической лампочкой, $W = Pt$. (1)
$N - ?$	Энергия N фотонов $W = Nh\nu$. (2)

Приравняв, согласно закону сохранения и превращения энергии, выражения (1) и (2) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получаем:

$$Pt = \frac{Nhc}{\lambda}.$$

Откуда искомое число фотонов

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc};$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1;$$

$$N = \frac{25 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 7{,}54 \cdot 10^{19}.$$

Ответ: $N = 7{,}54 \cdot 10^{19}$.

ЗАДАЧА 4.95

Угол рассеяния фотона с энергией $1{,}2\ \text{МэВ}$ на свободном электроне $60°$. Найти длину волны рассеянного фотона.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 1{,}2\ \text{МэВ} = 1{,}92\cdot 10^{-13}\ \text{Дж}$ $\theta = 60°$	Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии определяется формулой
$\lambda' - ?$	

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (1)$$

где $\lambda_c = 0{,}242\cdot 10^{-11}\text{м} -$ комптоновская длина волны; $\theta -$ угол рассеяния.

Выразим λ через энергию фотона:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

т.е.

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}.$$

Подставив в (1), получим:

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$[\lambda'] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Дж}} + \text{м} = \text{м};$$

$$\lambda' = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}92\cdot 10^{-13}} + 2\cdot 0{,}242\cdot 10^{-11}\sin^2\frac{60}{2} = 2{,}25\cdot 10^{-12}\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda' = 2{,}25\cdot 10^{-12}\ \text{м}$.

ЗАДАЧА 4.96

В результате эффекта Комптона фотон рассеялся на покоившемся свободном электроне на угол $\theta = 90°$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon' = 216\ \text{кэВ}$. Определить: 1) энергию фотона до рассеяния; 2) кинетическую энергию $E_к$ электрона отдачи; 3) угол φ, под которым движется электрон отдачи.

Дано:	**Решение**
$\theta = 90°$ $\varepsilon' = 0{,}216$ МэВ	Для определения энергии фотона до рассеяния рассмотрим формулу Комптона:
1) $\varepsilon - ?$ 2) $E_к - ?$ 3) $\varphi - ?$	$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{mc}(1-\cos\theta) = \frac{h}{mc}, \qquad (1)$$ т.к. по условию задачи $\cos\theta = 0$.

Выразив длины волн λ и λ' через энергии фотонов ε и ε' и воспользовавшись формулой $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, получим:

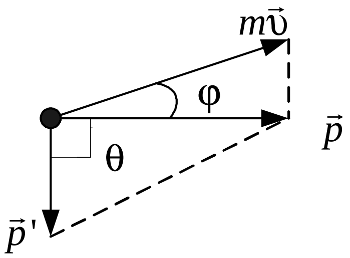
$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{mc}. \qquad (2)$$

Преобразовав формулу (2), найдем искомую энергию фотона до рассеяния:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' mc^2}{mc^2 - \varepsilon'} = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - \varepsilon'}; \qquad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}216}{0{,}512 - 0{,}216} = 374 \text{ кэВ},$$

где $E_0 = mc^2 = 0{,}512$ МэВ $-$ энергия покоя электрона.



Кинетическая энергия электрона отдачи, согласно закону сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$E_к = \varepsilon - \varepsilon';$$

$$E_к = 374 - 216 = 158 \text{ кэВ}.$$

Согласно закону сохранения импульса, импульс $\vec{P}$ падающего фотона равен векторной сумме импульса рассеянного фотона $\vec{P}\,'$ и электрона отдачи $m\vec{\upsilon}$ (см. рис.) На рисунке учтено, что фотон отдачи рассеялся на $\theta = 90°$.

Угол, под которым движется электрон отдачи, можно найти из рисунка:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{P'}{P}.$$

Импульсы и энергии падающего и рассеянного фотонов связаны между собой следующим образом:

$$P = \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{и} \quad P' = \frac{\varepsilon'}{c}.$$

Тогда с учетом формулы (3)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p'}{p} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon'(E_0 - \varepsilon')}{\varepsilon' E_0} = \frac{E_0 - \varepsilon'}{E_0} = 1 - \frac{\varepsilon'}{E_0}.$$

Откуда искомый угол φ, под которым движется электрон отдачи,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\varepsilon'}{E_0}\right);$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{0,216}{0,512}\right) = 30°.$$

Ответ: $\varepsilon = 374$ кэВ; $E_к = 158$ кэВ; $\varphi = 30°$.

ЗАДАЧА 4.97

Фотон с энергией $\varepsilon = 0,23$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 15 %.

Дано:	**Решение**
$\varepsilon = 0,23$ МэВ $\Delta\lambda = 0,15\lambda$	Кинетическая энергия электрона отдачи, согласно закону сохранения энергии, равна разности между энергией падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:
$E_к$ – ?	

$$E_к = \varepsilon - \varepsilon'. \quad (1)$$

В результате эффекта Комптона длина волны рассеянного излучения увеличивается, поэтому по условию задачи

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0,15\lambda. \quad (2)$$

Энергия падающего и рассеянного фотонов равна, соответственно,

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{и} \quad \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Откуда

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}.$$

Учитывая (2), получаем:

$$\varepsilon' = \frac{hc}{1,15\lambda} = \frac{hc\varepsilon}{1,15hc} = \frac{\varepsilon}{1,15}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую кинетическую энергию электрона отдачи:

$$E_к = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1{,}15};$$

$$E_к = 0{,}23 - \frac{0{,}23}{1{,}15} = 0{,}23 - 0{,}2 = 0{,}03 \text{ МэВ} = 30 \text{ кэВ}.$$

Ответ: $E_к = 30$ кэВ.

ЗАДАЧА 4.98

Гамма-фотон с длиной волны $1{,}2$ пм в результате комптоновского рассеяния на свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол $60°$. Определить кинетическую энергию и импульс электрона отдачи. До столкновения электрон покоился.

Дано:

$\lambda_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ м

$\theta = 60°$

$\lambda_c = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м

$E_0 = 0{,}511 \text{ МэВ} = 0{,}818 \cdot 10^{-13}$ Дж

$E_к$, $P - ?$

Решение

Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии на неподвижном свободном электроне

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн падающего и рассеянного фотонов; $\theta -$ угол рассеяния фотона; $\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{E_0}$ – комптоновская длина волны электрона.

Из (1) найдем:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_c(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Выразим энергию падающего и рассеянного фотонов через их длины волн:

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_1 + \lambda_c(1 - \cos\theta)}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия электрона отдачи согласно закону сохранения энергии равна:

$$E_к = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), найдем:

$$E_к = \left(\frac{hc}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{\lambda_1+\lambda_c(1-\cos\theta)} = \mathrm{E}_0\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{\lambda_1+\lambda_c(1-\cos\theta)};$$

$$[E_к] = \text{Дж}\left(\frac{\text{м}}{\text{м}}\right)\frac{\text{м}}{\text{м}+\text{м}} = \text{Дж};$$

$$E_к = 0{,}511\left(\frac{2{,}43\cdot10^{-12}}{1{,}2\cdot10^{-12}}\right)\frac{2{,}43\cdot10^{-12}(1-\cos 60°)}{1{,}2\cdot10^{-12}+2{,}43\cdot10^{-12}(1-\cos 60°)} =$$
$$= 0{,}521\ \text{МэВ} = 0{,}833\cdot10^{-13}\ \text{Дж}.$$

Зная кинетическую энергию электрона, найдем его импульс. Поскольку кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)},$$

где E_0 = 0,511 МэВ – энергия покоя электрона;

$$[P] = \frac{\text{с}}{\text{м}}\sqrt{\text{Дж}(\text{Дж}+\text{Дж})} = \frac{\text{с}}{\text{м}}\sqrt{\text{Дж}^2} = \frac{\text{с}\cdot\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{с}\cdot\text{Н} = \frac{\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}};$$

$$P = \frac{1}{3\cdot10^8}\sqrt{0{,}833\cdot10^{-13}\left(0{,}833\cdot10^{-13}+2\cdot0{,}818\cdot10^{-13}\right)} = 4{,}8\cdot10^{-22}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $E_к = 0{,}833\cdot10^{-13}$ Дж; $P = 4{,}8\cdot10^{-22}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.99

Фотон с энергией 0,51 МэВ в результате комптоновского рассеяния отклонился на угол $180°$. Определить долю энергии в процентах, оставшуюся у рассеянного фотона.

Дано:	Решение
$\varepsilon_1 = 0{,}51$ МэВ $\theta = 180°$	По закону сохранения энергии $$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + E_e,$$
$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ – ?	где ε_1 – энергия падающего фотона; ε_2 – энергия рассеянного фотона; E_e – энергия электрона;

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{hc}{\varepsilon_1},$$

где $\lambda_1 -$ длина волны налетающего фотона; $h -$ постоянная Планка; $c -$ скорость света;

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2},$$

где λ_2 – длина волны рассеянного фотона.

Изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ фотона при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_c \left(1 - \cos\theta\right),$$

где $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м – комптоновская длина волны электрона; $\theta -$ угол рассеяния;

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot 2.$$

Тогда

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_c$$

и энергия

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1 + 2\lambda_c},$$

а отношение

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{\varepsilon_1\left(\frac{hc}{\varepsilon_1} + 2\lambda_c\right)} = \frac{hc}{hc + \varepsilon_1 \cdot 2\lambda_c};$$

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \frac{\text{с} \cdot \text{м}}{\text{с}}}{\text{Дж} \cdot \frac{\text{с} \cdot \text{м}}{\text{с}} + \text{Дж} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{Дж} \cdot \text{м}} = 1;$$

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right] = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 + 0,51 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 2,43 \cdot 10^{-12}} = 0,33 = 33\ \%.$$

Ответ: $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 33\ \%$.

ЗАДАЧА 4.100

В результате комптоновского рассеяния на свободном покоящемся электроне длина волны γ-фотона λ_1 увеличилась вдвое. Найти кинетическую энергию и импульс электрона отдачи, если угол рассеяния равен $60°$.

Дано:	**Решение**
$\lambda_2 = 2\lambda_1$ $\theta = 60°$	Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при комптоновском рассеянии определяется по формуле
$E_к,\ P - ?$	$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c\left(1-\cos\theta\right),$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн фотона до и после рассеяния; $\lambda_c = 2,43\cdot10^{-12}$ м – комптоновская длина волны; $\theta-$ угол рассеяния.

По условию задачи $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1$,

тогда

$$\lambda_1 = \lambda_c\left(1-\cos\theta\right); \qquad \lambda_2 = 2\lambda_c\left(1-\cos\theta\right).$$

Энергия электрона

$$E = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_c\left(1-\cos\theta\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right);$$

$$\left[E\right] = \frac{Дж\cdot\dfrac{с\cdot м}{с}}{м} = Дж;$$

$$E = \frac{6,63\cdot10^{-34}\cdot0,5\cdot3\cdot10^{8}}{2,43\cdot10^{-12}\left(1-0,5\right)} \simeq 0,8\cdot10^{-13}\ Дж = 0,5\ МэВ.$$

Импульс электрона

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к+2E_0\right)},$$

где $E_0 = 0,511$ МэВ $-$ энергия покоя электрона; $c-$ скорость света;

$$\left[P\right] = \frac{с}{м}\sqrt{Дж\left(Дж+Дж\right)} = \frac{с}{м}\sqrt{Дж^2} = \frac{с\cdot Дж}{м} = \frac{с\cdot Н\cdot м}{м} =$$

$$= с\cdot Н = с\cdot кг\cdot\frac{м}{с^2} = кг\cdot\frac{м}{с};$$

$$P = \frac{1}{3\cdot10^{8}}\sqrt{0,8\cdot10^{-13}\left(0,8\cdot10^{-13}+2\cdot0,82\cdot10^{-13}\right)} = 4,7\cdot10^{-22}\ \frac{кг\cdot м}{с}.$$

Ответ: $E_к = 0,5$ МэВ; $P = 4,7\cdot10^{-22}\,\dfrac{кг\cdot м}{с}$.

4.4. Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

4.4.1. Физика атома

Основные формулы

Основу теории Бора составляют следующие постулаты:

Первый постулат Бора: в атоме существуют стационарные орбиты, на которых электрон не излучает и не поглощает энергию.

Второй постулат Бора: излучение или поглощение в виде кванта с энергией $h\nu$ происходит при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. Величина энергии кванта равна разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается переход:

$$h\nu = \hbar\omega = E_n - E_k,$$

где h – постоянная Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; ν – частота излучения; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота; E_n, E_k – энергетические уровни с квантовыми числами n и k (т.е. энергии стационарных состояний атома, соответственно, до и после излучения (поглощения).

Согласно правилу квантования момента импульса электрона *(третий постулат Бора)* стационарными орбитами являются те, для которых момент импульса кратен $\hbar$:

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar = n\frac{h}{2\pi},$$

где $h = 6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05\cdot10^{-34}$ Дж·с; Z – заряд ядра; m – масса электрона; e – заряд электрона; r_n – радиус n-й орбиты электрона; υ_n – его скорость на этой орбите, $n = 1, 2, 3$ … – главное квантовое число.

Согласно теории Бора в стационарных состояниях атом не излучает энергию. При этом электрон движется по круговой стационарной орбите.

По второму закону Ньютона для электрона имеем: $\vec{F}_{эл} = m\vec{a}_n$, или

$$m\frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{kZe^2}{r_n^2}.$$

Радиус n-й стационарной орбиты в боровской модели атома водорода

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} n^2 = r_1 n^2 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots),$$

где $\hbar$ – постоянная Планка; ε_0 – электрическая постоянная; m_e – масса электрона; e – элементарный заряд; r_1 – первый боровский радиус.

Первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 52{,}8 \text{ пм}.$$

Энергия электрона на n-й стационарной орбите для водородоподобного атома

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ эВ} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где Z – заряд ядра; ε_0 – электрическая постоянная; m_e – масса электрона; e – заряд электрона; 13,6 эВ – энергия электрона на первой боровской орбите.

Второй постулат Бора позволяет ввести обобщенную формулу Бальмера, описывающую серии в спектре атома водорода:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{или} \qquad \nu = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода; $R = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 c} = 1{,}097\cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; $R' = R\cdot c = 3{,}29\cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ – также постоянная Ридберга; c – скорость света в вакууме; Z – заряд ядра; $\dfrac{1}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны излучения; n – определяет серию $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$; k – определяет отдельные линии соответствующей серии $(k = n+1,\ n+2\ldots)$; $n = 1$ – серия Лаймана, $n = 2$ – серия Бальмера, $n = 3$ – серия Пашена, $n = 4$ – серия Брэкета, $n = 5$ – серия Пфунда, $n = 6$ – серия Хэмфри.

Спектральные линии характеристического рентгеновского излучения:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где a – постоянная экранирования; R – постоянная Ридберга; n, k – целые, $k > n$; λ – длина волны излучения.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.101

Электрон находится на третьей боровской орбите атома водорода. Определить: 1) радиус этой орбиты; 2) скорость электрона на этой орбите; 3) частоту вращения электрона на этой орбите; 4) потенциальную энергию электрона; 5) кинетическую энергию электрона; 6) полную энергию электрона на этой орбите.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$Z = 1$
$n = 3$
$r_3; \upsilon_3; \nu;\ E_P; E_K; E$ – ?

Решение

На электрон, движущийся в атоме по n-й орбите, действует кулоновская сила

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}, \tag{1}$$

где Z – порядковый номер элемента.

Эта сила сообщает электрону нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon_n^2}{r_n}, \tag{2}$$

где υ_n – скорость электрона на n-й орбите.

По второму закону Ньютона

$$F = m a_n. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим:

$$m\frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \tag{4}$$

С другой стороны, согласно правилу квантования момента импульса

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar. \tag{5}$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2 Z}; \tag{6}$$

$$[r_n] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{Кл}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{Кл}^2} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

$$\upsilon_n = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \cdot n}; \tag{7}$$

$$[\upsilon_n] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{Кл} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для третьей боровской орбиты $n = 3$, тогда

$$r_3 = 476{,}1 \cdot 10^{-12} \text{ м}, \qquad \upsilon_3 = 0{,}731 \cdot 10^6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Период обращения электрона по орбите

$$T = \frac{2r_n\pi}{\upsilon_n},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\upsilon_n}{2r_n\pi}.$$

Тогда, используя уравнения (6) и (7), получим:

$$\nu = \frac{me^4\mathrm{Z}^2}{32\varepsilon_0^2\pi^3\hbar^3n^3};$$

$$[\nu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4 \cdot \text{м}^2}{\text{Ф}^2 \cdot \text{Дж}^3 \cdot \text{с}^3} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{Кл}^2} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{Дж}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц};$$

для $n = 3$ частота вращения $\nu = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц.

Зная скорость движения электрона по n-й орбите (7), определим его кинетическую энергию:

$$E_K = \frac{m\upsilon_n^2}{2}$$

или

$$E_K = \frac{me^4\mathrm{Z}^2}{32\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}; \tag{8}$$

$$[E_K] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4 \cdot \text{м}^2}{\text{Ф}^2 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Кл}^4}{\text{Ф}^2 \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^4 \cdot \text{В}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{Кл}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

При $n = 3$ получим:

$$E_K = 2{,}43 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}5 \text{ эВ}.$$

Потенциальная энергия E_P – это энергия взаимодействия электрона с ядром; $E_P = -\dfrac{e^2\mathrm{Z}}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$ или, подставляя формулу (6) для r_n, запишем:

$$E_P = -\frac{me^4\mathrm{Z}^2}{16\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}. \tag{9}$$

При $n = 3$ получим:

$$E_P = -3{,}0 \text{ эВ}.$$

Полная энергия атома E является суммой кинетической энергии вращения электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = E_K + E_P. \tag{10}$$

Подставляя (8), (9) в (10), получим:

$$E = -\frac{me^4 Z^2}{32\varepsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2 n^2}$$

или

$$E = -1{,}5 \text{ эВ}.$$

Ответ: $r_3 = 476{,}1 \cdot 10^{-12}$ м; $\upsilon_3 = 0{,}731 \cdot 10^6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\nu = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц; $E_K = 1{,}5$ эВ; $E_K = 1{,}5$ эВ; $E_P = -3{,}0$ эВ; $E = -1{,}5$ эВ.

ЗАДАЧА 4.102

Определить частоту света, излучаемого возбужденным атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень, если радиус орбиты электрона изменится в 9 раз.

Дано:

$n = 2$

$\frac{r_n}{r_m} = 9$

$\nu - ?$

Решение

Согласно обобщенной формуле Бальмера частота света, излучаемого атомом водорода,

$$\nu = RcZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

где R – постоянная Ридберга; m – определяет номер орбиты, на которую переходит электрон; k – определяет номер орбиты, с которой переходит электрон.

Электрон движется по орбите радиусом r_n под действием кулоновской силы;

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \tag{1}$$

Из теории Бора момент импульса электрона, движущегося по орбите,

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}. \tag{2}$$

Умножив обе части уравнения (1) на mr_n^2, получим с учетом соотношения (2) радиус r_n *n*-й орбиты в атоме водорода:

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 r_Б,$$

где

$$r_Б = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0,053 \text{ нм}.$$

По условию задачи

$$\left(\frac{r_k}{r_n}\right) = \left(\frac{k^2}{n^2}\right) = 9.$$

Зная отношение радиусов орбит электрона при переходе с орбиты *m* на орбиту *n*, найдем частоту:

$$\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = RcZ^2\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)\frac{1}{n^2};$$

$$[\nu] = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{с}^{-1} = \text{Гц}; \quad \nu = 7,31 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 7,31 \cdot 10^{14}$ Гц.

ЗАДАЧА 4.103

Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4,86 \cdot 10^{-7}$ м. Насколько изменилась энергия электрона в атоме?

Дано:	**Решение**
$\lambda = 4,86 \cdot 10^{-7}$ м	По теореме Бора при переходе электрона из состояния с энергией E_k в состояние с энергией E_n излучается фотон с энергией, равной
ΔE – ?	

$$h\nu = E_k - E_n = \Delta E.$$

Учитывая, что $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$, получаем:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda};$$

$$[\Delta E] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{с}} = \text{Дж};$$

$$\Delta E = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{4,86\cdot 10^{-7}} \approx 4,09\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 2,56\ \text{эВ}.$$

Ответ: $\Delta E = 2,56$ эВ.

ЗАДАЧА 4.104

Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

Дано:	Решение
$n = 2$ $k = 6$ $R = 1,097\cdot 10^{7}$ м$^{-1}$	Длина волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера
$\lambda - ?$	

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где R – постоянная Ридберга; n и k – номера орбит, между которыми происходит переход электрона.

Из этой формулы следует, что

$$\lambda = \frac{1}{R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)}; \qquad \lambda = \frac{1}{1,097\cdot 10^{-7}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} = 4,1\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 4,1\cdot 10^{-7}$ м.

ЗАДАЧА 4.105

Найти длину волны λ фотона, соответствующую переходу электрона со второй орбиты на первую для двукратного ионизированного атома лития.

Дано:	Решение
$Z = 3$ L_i^{++} $m = 1$ $n = 2$	Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $$\hbar\omega = E_p - E_n,$$
$\lambda - ?$	где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, а $\omega = 2\pi\nu$;

тогда

$$h\nu = E_n - E_k.$$

В нашем случае $P = 2$, $n = 1$, т.е. $h\nu = E_2 - E_1$.

В водородоподобных ионах частоты излучаемых фотонов определяются формулой Бальмера:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

тогда

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = RZ^2\frac{3}{4}; \qquad \lambda = \frac{4}{3RZ^2}.$$

Для двукратно ионизированного атома лития $Z = 3$, тогда $\lambda = 13{,}5$ нм.

Ответ: $\lambda = 13{,}5$ нм.

ЗАДАЧА 4.106

Какую разность потенциалов прошел электрон, если, сталкиваясь с атомом ртути, переводит его в первое возбужденное состояние? Частота излучения фотона, соответствующая переходу атома ртути в нормальное состояние, равна $\nu = 5{,}63 \cdot 10^{14}$ Гц.

Дано:	**Решение**
$\nu = 5{,}63 \cdot 10^{14}$ Гц	Электрон, ускоренный электрическим полем, приобретает кинетическую энергию
U – ?	$\Delta E_K = eU.$

Эту энергию электрон передает атому, переводя его в возбужденное состояние:

$$\Delta E_K = h\nu.$$

Таким образом, $eU = h\nu$, откуда $U = \dfrac{h\nu}{e}$;

$$[U] = \frac{Дж \cdot с}{с \cdot Кл} = В; \qquad U = 2{,}3 В.$$

Ответ: $U = 2{,}3 В$.

ЗАДАЧА 4.107

Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Дано:	Решение
$Z = 1$ $n = 1$ $r_1, \upsilon - ?$	Радиус *n*-й орбиты в водородоподобном атоме, заряд ядра которого равен *Ze*, определяется по формуле

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{mZe^2} n^2 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi mZe^2} n^2,$$

где *n* – номер орбиты; *m* – масса электрона.

При $n = 1$ и $Z = 1$

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2};$$

$$[r_1] = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Ф}}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{Кл}^2}; \quad r_1 = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

По второму постулату Бора момент импульса электрона на *n*-й орбите равен

$$m\upsilon r_n = n\frac{h}{2\pi}.$$

Тогда $\upsilon = \dfrac{nh}{2\pi m r_n}$ и при $n = 1$ значение $\upsilon = \dfrac{h}{2\pi m r_1}$;

$$[\upsilon] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 2{,}2 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\text{м}$; $\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^6\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.108

Определить наибольшие и наименьшие длины волн фотонов, излучаемых при переходе электронов в сериях Лаймана, Бальмера и Пашена.

Дано:	Решение
$R = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$ $\lambda_{1\max}, \lambda_{1\min}, \lambda_{2\max},$ $\lambda_{2\min}, \lambda_{3\max}, \lambda_{3\min} - ?$	Обобщенная формула Бальмера позволяет определять длину волны λ при всевозможных переходах электрона в атоме водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{R\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2}\right)}.$$

В серии Лаймана переход осуществляется на первую орбиту со всех остальных, то есть $n=1$, $k=2, 3, 4, ...\infty$.

Следовательно,

$$\lambda_{1\max}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\left(1-0{,}25\right)}=0{,}128\text{ мкм};$$

$$\lambda_{1\min}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty}\right)}=\frac{1}{R}=0{,}091\text{ мкм}.$$

В серии Бальмера переход осуществляется на вторую орбиту со всех вышележащих, т.е. $n=2$, $k=2, 3, 4, ...\infty$;

$$\lambda_{2\max}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}=\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\left(0{,}25-0{,}11\right)}=0{,}656\text{ мкм};$$

$$\lambda_{2\min}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty}\right)}=\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\cdot 0{,}25}=0{,}365\text{ мкм}.$$

В серии Пашена переход осуществляется на третью орбиту со всех вышележащих, т.е. $n=3$, $k=4, 5, 6, ...\infty$;

$$\lambda_{3\max}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)}=\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)}=1{,}88\text{ мкм};$$

$$\lambda_{3\min}=\frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty}\right)}=\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\cdot 0{,}11}=0{,}82\text{ мкм}.$$

Ответ: $\lambda_{1\max}=0{,}128$ мкм; $\lambda_{1\min}=0{,}091$ мкм;
$\lambda_{2\max}=0{,}656$ мкм; $\lambda_{2\min}=0{,}365$ мкм;
$\lambda_{3\max}=1{,}88$ мкм; $\lambda_{3\min}=0{,}82$ мкм.

ЗАДАЧА 4.109

Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda=0{,}4\ldots0{,}76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

Дано:	Решение
$0,4 \le \lambda \le 0,76$ мкм	Длины волн спектра атома водорода определяются по формуле
$R = 1,097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$	
λ – ?	

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = n+1, n+2, \ldots$.

В видимой области спектра находятся первые четыре линии серии Бальмера ($n = 2$; $k = 3, 4, 5, 6$).

Длины волн этих линий будут равны:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^{-1} = 6,56 \cdot 10^{-7}\text{м}$$ – красная линия;

$$\lambda_2 = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)^{-1} = 4,86 \cdot 10^{-7}\text{м}$$ – голубая линия;

$$\lambda_3 = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)^{-1} = 4,34 \cdot 10^{-7}\text{м}$$ – фиолетовая линия;

$$\lambda_4 = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)^{-1} = 4,1 \cdot 10^{-7}\text{м}$$ – фиолетовая линия.

Ответ: $\lambda_1 = 6,56 \cdot 10^{-7}$м – красная линия; $\lambda_2 = 4,86 \cdot 10^{-7}$м – голубая линия; $\lambda_3 = 4,34 \cdot 10^{-7}$м – фиолетовая линия; $\lambda_4 = 4,1 \cdot 10^{-7}$м – фиолетовая линия.

ЗАДАЧА 4.110

На дифракционную решетку с периодом $d = 5$ мкм нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. В спектре дифракционный максимум пятого порядка, наблюдаемый под углом $\varphi = 7°$, соответствует одной из линий серии Лаймана. Определить главное квантовое число, соответствующее энергетическому уровню, с которого произошел переход.

Дано:	**Решение**
$d = 5\cdot 10^{-6}$м $k = 5$ $\varphi = 7°$ $Z = 1$ $n = 1$	Из условия главных максимумов для дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ можно определить длину световой волны:
k – ?	$$\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k}. \qquad (1)$$

Связь длины волны света с номером орбиты электрона в атоме водорода устанавливается формулой Бальмера:

$$\nu = cRZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Так как $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, то

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \qquad (2)$$

где Z – порядковый номер элемента (для водорода $Z = 1$).

Для серии Лаймана $n = 1$, и формула (2) примет вид

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (3)$$

Представив в (3) выражение (2), получим: $\dfrac{k}{d\sin\varphi} = R\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$,

откуда

$$k = \left(1 - \frac{k}{Rd\sin\varphi}\right)^{-1/2};$$

$$[k] = \frac{1}{\sqrt{[R][d]}} = \frac{1}{\sqrt{\text{м}^{-1}\cdot\text{м}}} = 1;$$

$$k = \left(1 - \frac{5}{1{,}097\cdot 10^7\cdot 5\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}122}\right)^{-1/2} = 2.$$

Переход произошел со второго энергетического уровня на первый.

Ответ: $k = 2$.

ЗАДАЧА 4.111

Найти наибольшую длину волны в ультрафиолетовой области спектра атомарного водорода. Какую наименьшую скорость должен иметь электрон, чтобы при возбуждении атома водорода ударом появилась эта линия?

Дано:	**Решение**
$n=1$ $k=2$ $R=1{,}097\cdot 10^{7}$ м$^{-1}$ $c=3\cdot 10^{8}$ м/с $m_e=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с	В ультрафиолетовой области спектра атома водорода электроны с более высоких уровней переходят на первый энергетический уровень, $n=1$. Для получения наибольшего значения длины волны электрон в атоме водорода должен переходить с уровня $k=2$ (энергия перехода наименьшая).
$\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ – ?	Из формулы Бальмера

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right);$$

$$\lambda=\frac{n^2k^2}{\left(k^2-n^2\right)};$$

$$\lambda=\frac{1^2\cdot 2^2}{1{,}097\cdot 10^{7}}=1{,}21\cdot 10^{-7}\text{ м}=121\text{ нм}.$$

Минимальная кинетическая энергия электрона, который ударом возбуждает атом водорода, чтобы тот испустил эту линию, должна быть равна энергии этого фотона. Покажем это, опираясь на законы сохранения энергии и импульса.

Минимальная кинетическая энергия электрона (так называемая пороговая энергия) определяется условием, что электрон после столкновения с атомом тратит почти всю энергию на возбуждение атома и не способен удалиться от атома. Иначе говоря, возбужденный атом и электрон движутся как одно целое, при этом импульс электрона $\vec{P}_e$ равен импульсу системы из атома с электроном $\vec{P}_{n+e}$, т.е. $\vec{P}_e=\vec{P}_{n+e}$.

Согласно закону сохранения энергии

$$E_{K_e}+E_{внутр.0}=E_{K_{n+e}}+E^{*}_{внутр.K},$$

где E_{K_e} – кинетическая энергия электрона; $E_{K_{n+e}}$ – кинетическая энергия атома и электрона; $E_{внутр.0}$ – внутренняя энергия атома до столкновения; $E^{*}_{внутр.K}$ – внутренняя энергия возбужденного атома.

Откуда находим:

$$\frac{\mathrm{P}_e^2}{2m_e} + E_{внутр\ 0} = \frac{P_e^2}{2(m_e + M_И)} + E^*_{внутр\ К} \Rightarrow \frac{P_e^2}{2m_e} = E_{\mathrm{K}_e} = \Delta E_{внутр}.$$

Поскольку $M_И >> m_e$, то кинетической энергией $E_{K_{n+e}}$ можно пренебречь:

$$\frac{m_e \upsilon_{\min}^2}{2} = h\frac{c}{\lambda_{\max}}.$$

Откуда

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{2hc}{m_e \lambda_{\max}}};$$

$$[\upsilon_{min}] = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-7}}} = 1{,}9 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\lambda_{\max} = 121$ нм; $\upsilon_{\min} = 1{,}9 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 4.112

Определить потенциал ионизации φ_i и первый потенциал возбуждения φ_1 атома водорода.

Дано:	**Решение**
$Z = 1$ $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$	Потенциалом ионизации φ_i называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем электрическом поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом ионизировать его.
φ_i, φ_1 – ?	

Работа по удалению электрона из атома A_i должна равняться работе сил электрического поля, ускоряющего электрон, поэтому

$$A_i = e\varphi_i. \quad (1)$$

С другой стороны, работа ионизации A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой орбиты на бесконечно удаленную.

Тогда, применив формулу Бальмера, при $n=1,\ k=\infty$ получим:

$$\mathrm{A}_i = h\nu = hcRZ^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty}\right) = hcRZ^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\varphi_i = \frac{hcRZ^2}{e};$$

$$\varphi_i = 13{,}6\ \text{В}.$$

Первый потенциал возбуждения φ_1 – это та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с возбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую.

Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля $e\varphi_1$ кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, при $n=1,\ k=2$ получим:

$$e\varphi_1 = h\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hcRZ^2.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{3hcRZ^2}{4e};$$

$$[\varphi_1] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

$$\varphi_1 = 10{,}2\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_i = 13{,}6$ В; $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

4.4.2. Описание движения в микромире. Уравнение Шредингера

Основные формулы

Формула де Бройля связывает длину волны λ, соответствующую микрочастице, с ее импульсом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Для *нерелятивистской* частицы $(\upsilon << c)$

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_к}},$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость; $E_к$ – кинетическая энергия частицы.

Для *релятивистской* частицы ($\upsilon \approx c$)

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_к\left(E_к + 2m_0c^2\right)}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; c – скорость света в вакууме; $E_к$ – кинетическая энергия частицы.

Иногда импульс частицы удобно выражать через ее кинетическую энергию $E_к$:

для *нерелятивистской* частицы $(\upsilon << c)$

$$p = \sqrt{2m_0E_к};$$

для *релятивистской* частицы ($\upsilon \approx c$)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)},$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы; c – скорость света в вакууме.

В случае *релятивистской частицы*, когда $pc \approx E_0 = m_0 c^2$, связь импульса p с полной энергией E частицы и длиной волны

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}; \qquad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}.$$

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = E_к + E_0,$$

где $E_к$ – кинетическая энергия частицы; E_0 – энергия покоя частицы.

В случае, когда $E << E_0$,

$$E = pc \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{E}.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга, сопряженных величин для координаты x и проекции импульса p_x на ось x:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

где Δx – неопределенность координаты x частицы, Δp_x – неопределенность проекции импульса частицы на ось x.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии ΔE и времени жизни состояния Δt:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Энергия свободно движущейся частицы массой m

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m},$$

где $p_x = \hbar k$ – импульс частицы; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны де Бройля.

Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2},$$

где l – ширина ямы; m – масса частицы; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Плотность вероятности нахождения частицы в соответствующем месте пространства

$$\omega = |\Psi|^2,$$

где Ψ – волновая функция частицы.

Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

где l – ширина ямы; x – координата частицы в яме ($0 < x < l$); n – квантовое число $(n = 1,\ 2,\ 3\ldots)$.

Вероятность нахождения частицы в объеме dV (для стационарных состояний)

$$dW = \left|\Psi^2\right| dV.$$

Вероятность обнаружения частицы в объеме V

$$W = \int_V dW = \int_V \left|\Psi^2\right| dV.$$

Условие нормировки вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, dV = 1.$$

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2:

$$P(x) = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi|^2 \, dx.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0,$$

где Ψ – волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа; U – потенциальная энергия частицы в данной точке поля; E – энергия частицы.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.113

Кинетическая энергия протона в 4 раза меньше его энергии покоя. Вычислить дебройлеровскую длину волны протона.

Дано:	Решение
$E_к = \dfrac{E_0}{4}$ $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж $\lambda - ?$	Длина волны де Бройля λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

Поскольку по условию задачи кинетическая энергия $E_к$ протона сравнима с его энергией покоя E_0,

$$E_к = \frac{E_0}{4}, \qquad (2)$$

то импульс p и кинетическая энергия связаны релятивистским соотношением

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) условие (2), найдем

$$p = \frac{3}{4}\frac{E_0}{c}. \qquad (4)$$

С учетом равенства (4) выражение (1) примет вид:

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{hc}{E_0}; \quad [\lambda] = \frac{Дж \cdot с \cdot м}{с \cdot Дж} = м; \quad \lambda = \frac{4 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-10}} = 1{,}77 \cdot 10^{-15} м.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}77 \cdot 10^{-15}$ м.

ЗАДАЧА 4.114

Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0{,}75c$ (c – скорость света в вакууме).

Дано:	Решение
$\upsilon = 0{,}75\ c$ $c = 3 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{м}{с}$ $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $\lambda - ?$	Длина волны де Бройля $$\lambda = \frac{h}{p}.$$ Импульс частицы, движущейся с релятивистской скоростью υ, равен

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}; \quad [\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}}\sqrt{\frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$\lambda = \frac{6,62\cdot 10^{-34}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 0,75\cdot 3\cdot 10^{8}}\sqrt{1-0,75^2} = 2,14\cdot 10^{-12}\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 2,14\cdot 10^{-12}$ м.

ЗАДАЧА 4.115

Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы его длина волны де Бройля равнялась комптоновской длине волны?

Дано:
$\lambda_D = \lambda_C$
$E_к$ – ?

Решение

Длина волны де Бройля λ_D и комптоновская λ_C длина волны определяются по формулам

$$\lambda_D = \frac{h}{p}; \qquad \lambda_C = \frac{h}{m_0 c}.$$

Импульс движущегося протона

$$p = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Так как

$$\lambda_D = \lambda_C,$$

то

$$p = m_0 c \qquad \text{и} \qquad m_0 c = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Откуда

$$\frac{\upsilon}{c} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}; \qquad \upsilon = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Зная, что

$$E_к = E - E_0,$$

где $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ – полная энергия; $E_0 = mc^2$ – энергия покоя,

получим:

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right); \qquad E_к = E_0\left(\sqrt{2}-1\right);$$

$$E_к = 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{-16}\cdot 0{,}41 = 6{,}23\cdot 10^{-11}\ \text{Дж} = 389\ \text{МэВ}.$$

Ответ: $E_к = 389$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.116

Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля для случаев: $U = 51$ В; $U = 510$ кВ.

Дано:	Решение
$U_1 = 51$ В $U_2 = 5{,}1\cdot 10^5$ В $E_0 = 8{,}2\cdot 10^{-14}$ Дж	Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Импульс выразим при условии, что кинетическая энергия электрона равна
λ_1, λ_2 – ?	

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m^2\upsilon^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

откуда $p = \sqrt{2E_к m}$.

С другой стороны, $E_{к_1} = eU_1$, где e – заряд электрона.

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2eU_1 m}};$$

$$[\lambda_1] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\sqrt{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}\cdot\text{кг}} =$$

$$= \frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$\lambda_1 = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 51\cdot 9,1\cdot 10^{-31}}} = 1,72\cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Во втором случае импульс p определяем по формуле

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\kappa_2}(E_{\kappa_2} + 2E_0)},$$

где E_0 – энергия покоя электрона,

$$E_{\kappa_2} = eU_2.$$

Тогда

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{\kappa_2}(E_{\kappa_2} + 2E_0)}}.$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5,1\cdot 10^5(1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5,1\cdot 10^5 + 2\cdot 8,2\cdot 10^{-14})}} = 1,4\cdot 10^{-12}\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1,72\cdot 10^{-10}$ м; $\lambda_2 = 1,4\cdot 10^{-12}$ м.

ЗАДАЧА 4.117

Найти длину волны де Бройля λ: 1) электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите; 2) нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К; 3) протона, движущегося в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом $R = 1,4$ м.

Дано:

1) $e = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл
   $m = 9,1\cdot 10^{-31}$ кг
   $n = 3$
2) $m = 1,675\cdot 10^{-27}$ кг
   $T = 290$ К
   $k = 1,38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
3) $B = 1,5\cdot 10^{-3}$ Тл
   $R = 1,4$ м
   $m = 1,673\cdot 10^{-27}$ кг

λ – ?

Решение

Длина волны де Бройля определяется соотношением

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}. \qquad (1)$$

1. Скорость электрона, находящегося на n-й боровской орбите, определяется из правила квантования орбит электрона:

$$m_e\upsilon_n r_n = n\hbar. \qquad (2)$$

На электрон, движущийся в атоме, действует кулоновская сила, сообщающая электрону центростремительное ускорение:

$$m_e \frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2},$$

откуда радиус орбиты

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e \upsilon_n^2}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$\upsilon_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}. \qquad (4)$$

Подсчитаем скорость электрона для $n = 3$:

$$\upsilon_3 = 7,28 \cdot 10^5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как $\upsilon_3 \ll c$, то по формуле (1) определяем длину волны: $\lambda = 1$ нм.

2. Средняя квадратичная скорость нейтрона

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_n}};$$

$$\langle \upsilon \rangle = 2,68 \cdot 10^3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

т.е. $\langle \upsilon \rangle \ll c$, поэтому длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m_n \langle \upsilon \rangle}; \qquad \lambda = 148 \text{ пм};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

3. На протон, движущийся по окружности в магнитном поле, действует сила Лоренца, которая сообщает частице центростремительное ускорение, т.е.

$$q\upsilon B = \frac{m_p \upsilon^2}{R},$$

откуда

$$\upsilon = \frac{qBR}{m_p}; \qquad \upsilon = 2 \cdot 10^7 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Здесь

$$\lambda = \frac{h}{m_p \upsilon}; \qquad \lambda = 0,197 \text{ пм}.$$

Ответ: 1) $\lambda = 1$ нм; 2) $\lambda = 148$ пм; 3) $\lambda = 0,197$ пм.

ЗАДАЧА 4.118

Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1,282$ пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить массу частицы.

Дано:	**Решение**
$U = 500$ В $\lambda = 1,282 \cdot 10^{-12}$ м $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл	Скорость частицы, прошедшей разность потенциалов U, можно определить из равенства
m – ?	$$eU = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} = E_к. \qquad (1)$$

Воспользуемся также формулами расчета длины волны де Бройля релятивистской частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{и} \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)},$$

тогда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{E_к^2}{c^2} + 2E_к m_0}}. \qquad (2)$$

Используя (1), запишем:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{(eU)^2}{c^2} + 2eUm_0}}. \qquad (3)$$

Пренебрегая величиной $\frac{(eU)^2}{c^2} = 7 \cdot 10^{-50}\, \text{Н}^2\text{с}^2$ ввиду ее малости, получим:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_0}};$$

$$m_0 = \frac{h^2}{2eU\lambda^2};$$

$$m_0 = 1,672 \cdot 10^{-27}\, кг;$$

$$[m_0] = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{кг}.$$

Ответ: $m_0 = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг.

ЗАДАЧА 4.119

Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии ($\lambda = 0,7$ мкм), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Дано:	**Решение**
$\tau = 10^{-8}$ с $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м	
$\Delta\lambda_{\min}$ – ?	

При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия, равная

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_к. \quad (1)$$

Из (1) следует, что неопределенность длины волны $\Delta\lambda$ излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и $\Delta E_к$ атома соотношением

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \Delta E_n + \Delta E_к. \quad (2)$$

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (3)$$

где Δt – неопределенность времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое.

Поскольку Δt не превышает среднее время жизни τ возбужденного состояния атома, то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней, согласно (3), равна

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \quad (4)$$

Из (2) с учетом (4) найдем минимальную неопределенность длины волны излучения, которая называется естественной шириной спектральной линии:

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_к}\right).$$

Если одно из состояний, между которыми совершается переход, является основным, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \tau},$$

поскольку для основного состояния $\tau = \infty$.

Для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $(\tau_n = \tau_к = \tau)$ имеем:

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}; \qquad [\Delta\lambda_{\min}] = \frac{м^2 \cdot с}{м \cdot с} = м;$$

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{(7\cdot 10^{-7})^2}{3{,}14\cdot 3\cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 5{,}2\cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta\lambda_{\min} = 5{,}2\cdot 10^{-14}$ м.

ЗАДАЧА 4.120

Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода.

Дано:	Решение
$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл	При $E = E_{\min}$ можно считать, что импульс электрона по порядку величины равен его неопределенности, т.е. $p \sim \Delta p$, а разброс расстояний электрона от ядра равен радиусу орбиты, или $\Delta r \sim r$.
$E_{\min}$ – ?	

Тогда в соответствии с принципом неопределенностей $(\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar)$

$$p \approx \frac{\hbar}{r}.$$

Энергия электрона в атоме может быть представлена выражением

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}, \qquad (1)$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Значение r, при котором $E = E_{\min}$, можно найти, приравняв производную $\dfrac{dE}{dr}$ к нулю:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{ke^2}{r^2} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{\hbar^2}{ke^2 m}. \qquad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получим:

$$E_{\min} = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}; \qquad E_{\min} = -21,76 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 13,6\ \text{эВ};$$

$$\left[E_{\min}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{Кл}^4}{\text{Кл}^4 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}^2} = \frac{\text{Дж}^3}{\text{Дж}^2} = \text{Дж}.$$

Ответ: $E_{\min} = -13,6$ эВ.

ЗАДАЧА 4.121

Кинетическая энергия электрона в атоме водорода – порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано:
$E = 1,6 \cdot 10^{-18}$ Дж
$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
r – ?

Решение

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \ge \hbar,$$

где Δx – неопределенность координаты; ΔP_x – неопределенность импульса; $\hbar$ – постоянная Планка.

Предполагая, что $\Delta x = r$ – линейному размеру атома, получим: $r = \dfrac{\hbar}{\Delta p}$.

Импульс электрона, обладающего кинетической энергией $E_к$, равен

$$p = \sqrt{2mE_к}.$$

Предполагая, что по порядку величины $\Delta p = p$, оценим r:

$$r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_к}};$$

$$[r] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\sqrt{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$r = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-18}}} = 0,62 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Ответ: $r = 0,62 \cdot 10^{-10}$ м.

ЗАДАЧА 4.122

Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны излучения $\lambda = 12$ мкм при переходе атома в основное состояние.

Дано:	**Решение**
$\Delta t = 1,2 \cdot 10^{-8}$ с $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-7}$ м	Энергия излучаемого фотона $$E = \frac{hc}{\lambda}.$$
$\Delta\lambda$ – ?	

Продифференцируем E по λ:

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad \text{или} \quad \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ выразим ΔE:

$$\Delta E = \frac{h}{\Delta t \cdot 2\pi},$$

здесь Δt и ΔE – неопределенности времени и энергии.

Приравняем выражения для ΔE:

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{h}{\Delta t \cdot 2\pi},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 h}{hc\Delta t 2\pi} = \frac{\lambda^2}{c\Delta t 2\pi}; \quad [\Delta\lambda] = \frac{\text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{м};$$

$$\Delta\lambda = \frac{1,2^2 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-8} \cdot 6,28} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta\lambda = 6,4 \cdot 10^{-16}$ м.

ЗАДАЧА 4.123

Среднее время жизни π°-мезона равно $1,9 \cdot 10^{-16}$ с. Какова должна быть энергетическая разрешающая способность прибора, с помощью которого можно зарегистрировать π°-мезон?

Дано:	**Решение**
$t = 1,9 \cdot 10^{-16}$ с	Разрешающая способность $\Delta E'$ должна быть не меньше неопределенности энергии ΔE в условиях поставленной задачи, т.е. $\Delta E' = \Delta E$.
$\Delta E'$ – ?	

Предполагая, что время жизни π°-мезона t примерно равно неопределенности времени Δt в соотношении неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени,

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi},$$

получим:

$$\Delta E' = \frac{h}{2\pi t}; \quad [\Delta E'] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{Дж};$$

$$\Delta E' = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{6,28 \cdot 1,9 \cdot 10^{-16}} = 5,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta E' = 5,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

ЗАДАЧА 4.124

Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода $E_к = 13,6$ эВ. Используя соотношение неопределенностей, найти наименьшую погрешность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Дано:
$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
$E_к = 21,76 \cdot 10^{-19}$ Дж
Δx – ?

Решение

Используем связь импульса с энергией:

$$E_к = \frac{p^2}{2m},$$

тогда

$$p = \sqrt{2mE_к} \tag{1}$$

Имеем в виду, что

$$P \sim \Delta P \sim \frac{\hbar}{\Delta x}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$\sqrt{2mE_к} = \frac{\hbar}{\Delta x},$$

откуда

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_к}}; \qquad \Delta x = 10^{-10} \text{ м};$$

$$[\Delta x] = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{Дж \cdot кг}} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{Н \cdot м \cdot кг}} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг^2 \cdot \frac{м^2}{с^2}}} = \frac{Н \cdot м \cdot с^2}{кг \cdot м} = \frac{кг \cdot м \cdot с^2}{кг \cdot с^2} м.$$

Ответ: $\Delta x = 10^{-10}$ м.

ЗАДАЧА 4.125

Определить (в электрон-вольтах) неопределенность кинетической энергии электрона, который находится внутри атома диаметром $d = 1$ нм.

Дано:	**Решение**
$d = 10^{-9}$ м	Кинетическая энергия $E_к$ и импульс p части-
$\Delta E_к$ – ?	цы массой m связаны соотношением $E_к = \frac{p^2}{2m}$.

Тогда неопределенность кинетической энергии

$$\Delta E_к = \frac{\Delta p^2}{2m}, \qquad (1)$$

где ΔP – неопределенность импульса.

Согласно соотношению неопределенностей

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar,$$

где неопределенность координаты электрона $\Delta x = d$ (порядка размеров самого атома, т.е. можно считать, что электрон принадлежит данному атому), имеем: $\Delta p = \frac{h}{d}$.

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую неопределенность кинетической энергии:

$$\Delta E_к = \frac{h^2}{2md^2};$$

$$\Delta E_к = 1{,}51 \text{ эВ};$$

$$[\Delta E_к] = \frac{Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot м^2} = \frac{Дж^2}{Дж} = Дж.$$

Ответ: $\Delta E_к = 1{,}51$ эВ.

ЗАДАЧА 4.126

Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ. Принимая, что неопределенность импульса равна $0,1\ \%$ от его числового значения, определить неопределенность координаты электрона.

Дано:	**Решение**
$U = 500$ В	Согласно соотношению неопределенностей
$\vartriangle p_x = 0,001 p_x$	
Δx – ?	

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \qquad (1)$$

где Δx – неопределенность координаты электрона; Δp_x – неопределенность его импульса; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$E_{\kappa} = eU = 0,5 \text{ кэВ},$$

а энергия покоя электрона

$$E_0 = mc^2 = 0,512 \text{ МэВ},$$

т.е. электрон при данных условиях является нерелятивистской частицей.

Импульс электрона

$$P = \sqrt{2mE_{\kappa}} = \sqrt{2meU}; \qquad P = 1,24 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Согласно условию задачи неопределенность импульса

$$\Delta P_x = 0,001 P_x = 1,24 \cdot 10^{-26} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

т.е. $\Delta p_x \ll p_x$, и электрон при данных условиях является классической частицей.

Из выражения (1) следует, что искомая неопределенность координаты электрона

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x};$$

$$[\Delta x] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$\Delta x = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{1,24 \cdot 10^{-26}} = 8,46 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 8,46 \text{ нм}.$$

Ответ: $\Delta x = 8,46$ нм.

ЗАДАЧА 4.127

Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, ширина которой $1{,}4\cdot10^{-9}$ м. Определить энергию, излучаемую при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй.

Дано:	**Решение**
$l=1{,}4\cdot10^{-9}$ м $n=2$ $n+1=3$	Энергия E_n электрона (масса m), находящегося на n-м энергетическом уровне в потенциальной яме шириной l, определяется по формуле
ΔE – ?	$$E_n=\frac{h^2n^2}{8ml^2}.$$

Энергия, излучаемая при переходе электрона с $(n+1)$-го уровня на n-й, равна

$$\Delta E=E_{n+1}-E_n=\frac{h^2}{8ml^2}(2n+1);\quad [\Delta E]=\frac{\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}}=\text{Дж};$$

$$\Delta E=\frac{\left(6{,}62\cdot10^{-34}\right)^2\cdot5}{8\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot1{,}4^2\cdot10^{-18}}=1{,}54\cdot10^{-19}\ \text{Дж}=1\ \text{эВ}.$$

Ответ: $\Delta E=1$ эВ.

ЗАДАЧА 4.128

Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l на втором энергетическом уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Дано:	**Решение**
l $\omega_n=\omega_\infty$ $n=2$	Волновая функция ψ, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l, имеет вид
x – ?	$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (1)$$

Согласно физическому смыслу волновой функции

$$\left|\psi^2\right|=\omega, \quad (2)$$

где ω – плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Если частица находится на втором энергетическом уровне $(n=2)$, то

$$\omega_2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \tag{3}$$

В соответствии с принципом соответствия Бора выражение для классической плотности вероятности получается при $n \to \infty$:

$$\omega_\infty = \frac{1}{l}. \tag{4}$$

Приравнивая по условию задачи выражения (3) и (4), получим:

$$\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Решая уравнение (5), найдем:

$$x = \left(k \pm \frac{1}{4}\right)\frac{l}{2} \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

В пределах ямы $(0 \le x \le l)$ таких точек будет четыре:

$$x = \left(\frac{l}{8},\ \frac{3l}{8},\ \frac{5l}{8},\ \frac{7l}{8}\right).$$

Ответ: $x = \left(\frac{l}{8},\ \frac{3l}{8},\ \frac{5l}{8},\ \frac{7l}{8}\right)$.

ЗАДАЧА 4.129

Определить ширину одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй излучается энергия 1 эВ.

Дано:
$i = 3$
$n = 2$
$\Delta E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
l – ?

Решение

Энергия электрона, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне, определяется по формуле

$$E = \frac{h^2}{8ml^2}n^2.$$

Разность энергий электрона ΔE на n-м и i-м уровнях

$$\Delta E = E_i - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}\left(i^2 - n^2\right).$$

Откуда

$$l = h\sqrt{\frac{i^2 - n^2}{8m\Delta E}};$$

$$l = 6,62\cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{9-4}{8\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}} = 1,37\cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Ответ: $l = 1,37\cdot 10^{-9}$ м.

ЗАДАЧА 4.130

Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $0 < x < \frac{l}{4}$ на втором энергетическом уровне.

Дано:

$0 < x < \frac{l}{4}$

$n = 2$

$\omega - ?$

Решение

Волновая функции $\psi(x)$ частицы в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом квадрата модуля волновой функции

$$\omega = \int_0^{l/4} |\psi(x)|^2\,dx = \int_0^{l/4}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)^2 dx = \frac{2}{l}\int_0^{l/4}\sin^2\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.$$

Известно, что $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

Тогда $\sin^2\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi n x}{l}\right)$;

$$\omega = \frac{1}{l}\int_0^{l/4}\left(1-\cos\frac{2\pi n x}{l}\right)dx = \frac{1}{l}\int_0^{l/4}dx - \frac{1}{l}\int_0^{l/4}\cos 2\pi n\frac{x}{l}\,dx = \frac{1}{l}x\Big|_0^{l/4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}\Big|_0^{l/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n\frac{1}{4}}{l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\omega = \frac{1}{4}$.

ЗАДАЧА 4.131

Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Пользуясь уравнением Шредингера, найти собственные значения энергии E_n частицы.

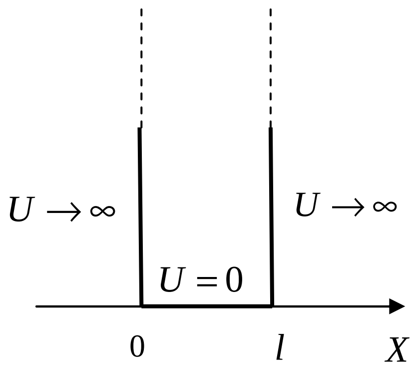
Дано:	**Решение**
$0 \le x \le l$ $U = 0$ $x < 0$ $U \to \infty$ $x > l$ $U \to \infty$	Уравнение Шредингера для стационарных состояний в случае одномерной задачи: $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$ По условию задачи (бесконечно высокие стенки, см. рис.) частица не проникает за пределы ямы, поэтому вероятность ее обнаружения (а, следовательно, и волновая функция) за пределами ямы равна нулю.
E_n – ?	

На границах ямы (при $x = 0$ и $x = l$) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль.

Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{1}$$

В пределах ямы ($0 \le x \le l$) уравнение Шредингера:



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \tag{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2):

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx.$$

Так как по (1) $\psi(0) = 0$, то $B = 0$.

Тогда

$$\psi(x) = A\sin kx$$

Условие (1) $\psi(l) = A\sin kl = 0$ выполняется только при $kl = n\pi$, где n – целые числа, т.е. необходимо, чтобы

$$k = \frac{\pi n}{l}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(n = 1,\ 2,\ 3, ...),$$

т.е. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, удовлетворяется только при собственных значениях E_n, зависящих от целого числа n. Следовательно, энергия E_n частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками принимает лишь определенные дискретные значения, т.е. квантуется.

Ответ: $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$.

ЗАДАЧА 4.132

Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить нормированную собственную волновую функцию $\psi_n(x)$, описывающую состояние частицы при данных условиях.

Дано:
$0 \le x \le l$
$U = 0$
$x < 0$
$U \to \infty$
$x > l$
$U \to \infty$
$\psi_n(x)$ – ?

Решение

Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеет вид (см. рис. к задаче 4.131)

$$\psi(x) = A \sin kx, \qquad (1)$$

где $k = \frac{\pi n}{l}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$.

Подставив это выражение в (1), получим собственную волновую функцию

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (2)$$

Постоянную A найдем из условия нормировки, которое для данного случая запишется (с учетом (2) в виде:

$$\int_0^l \left|\psi_n(x)\right|^2 dx = A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$$

В результате интегрирования получим

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Тогда искомая нормированная собственная волновая функция запишется в виде:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ответ: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

ЗАДАЧА 4.133

Электрон находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона.

Дано:
l
$\langle x \rangle$ – ?

Решение

Согласно общему правилу нахождения среднего значения

$$\langle x \rangle = \int_0^l x \left|\psi_n(x)\right|^2 dx, \tag{1}$$

где интеграл берется в той области, где функция $\psi_n(x)$ отлична от нуля ($0 < x < l$).

Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (см. задачу 4.131):

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), после соответствующих преобразований найдем искомое среднее значение координаты:

$$\langle x \rangle = \frac{2}{l}\int_0^l x \sin^2\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_0^l x(1 - \cos\frac{2n\pi}{l}x) dx = \frac{l}{2}.$$

Ответ: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$.

ЗАДАЧА 4.134

Определить ширину l одномерной прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, при которой дискретность энергетического спектра электрона, находящегося в возбужденном состоянии ($n=3$), вдвое больше его средней кинетической энергии при температуре $T=300$ К.

Дано:
$2\Delta E_n = \langle E_к \rangle$
$n=3$
$T=300$ К
l – ?

Решение

Собственные значения энергии E_n электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \left(n = 1, 2, 3, ...\right), \qquad (1)$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка; l – ширина ямы; m – масса электрона.

Энергетический интервал между двумя соседними уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = (2n+1)\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}; \qquad (2)$$

(учли формулу (1).

Согласно условию задачи

$$2\Delta E_n = \langle E_к \rangle. \qquad (3)$$

Средняя кинетическая энергия электрона

$$\langle E_к \rangle = \frac{3}{2}kT, \qquad (4)$$

где k – постоянная Больцмана.

Подставив в формулу (3) выражения (2) и (4), получим:

$$2(2n+1)\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = \frac{3}{2}kT.$$

Откуда искомая ширина ямы

$$l = \pi\hbar\sqrt{\frac{(2n+1)}{3kmT}}, \qquad l = 8{,}2 \text{ нм};$$

$$[l] = \text{Дж}\cdot\text{с}\sqrt{\frac{\text{К}}{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}} = \text{Дж}\cdot\text{с}\sqrt{\frac{1}{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}} = \text{Дж}\cdot\text{с}\sqrt{\frac{\text{с}^2}{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2}} =$$

$$= \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{м}.$$

Ответ: $l = 8{,}2$ нм.

4.4.3. Физика атомного ядра

Основные формулы

Радиус ядра атома

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где $R_0 = (1{,}3 - 1{,}7)$ Фм; A – массовое число.

Массовое число ядра (число нуклонов)

$$A = Z + N,$$

где Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

Энергия связи ядра атома

$$E_{св} = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_я \right]c^2 = \left[Zm_H + (A - Z)m_n - m_a \right]c^2,$$

где $m_p, m_n, m_я$ – соответственно, массы протона, нейтрона и ядра; Z – зарядовое число; A – массовое число; $m_H = m_p + m_e$ – масса атома водорода $\left({}_1^1H\right)$; m_a – масса атома.

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$$

или

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a.$$

Энергия связи нуклонов в ядре

$$\Delta E_{св} = \Delta mc^2, \text{ Дж}$$

или

$$\Delta E_{св} = 931{,}5\Delta m, \text{ МэВ},$$

где Δm – дефект массы ядра, измеренный в атомных единицах массы (а.е.м.); c – скорость света в вакууме.

Энергия, выделяемая или поглощаемая в ядерной реакции,

$$\Delta E = c^2\left(\sum m_i - \sum m_k\right), \text{ Дж};$$

$$\Delta E = 931\left(\sum m_i - \sum m_k\right), \text{ МэВ},$$

где $\sum m_i$ – сумма масс исходных частиц; $\sum m_k$ – сумма масс образовавшихся частиц.

Ядерный магнетон

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p},$$

где e – заряд электрона; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка; m_p – масса протона.

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число нераспавшихся ядер радиоактивного элемента к моменту времени t; N_0 – исходное число ядер; λ – постоянная распада.

Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Период полураспада (время, за которое распадается половина исходных ядер элемента)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau,$$

где $\tau = \frac{1}{\lambda}$ – среднее время жизни радиоактивного элемента; при этом исходное число ядер уменьшается в e раз.

Активность радиоактивного элемента (число ядер, распадающихся в единицу времени)

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N$$

или

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Считая $A_0 = \lambda N_0$ – активность радиоактивного вещества в начальный период времени $t = 0$,

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Правила смещения:

для α*-распада:*

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He;$$

для β^-*-распада*:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu;$$

для β^{+}*-распада*:

$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^{0}e + {}_{0}^{0}\nu .$$

Закон поглощения ионизирующего излучения веществом:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где I_0 – интенсивность падающего на вещество излучения; I – интенсивность излучения после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x; μ – линейный коэффициент поглощения.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 4.135

Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_{8}^{16}\mathrm{O}$.

Дано:

$m(_{1}^{1}\mathrm{H})$=1,00783 а.е.м.

m_n=1,00867 а.е.м.

$m(_{8}^{16}\mathrm{O})$=15,99492 а.е.м.

Z=8

A=16

Δm; $E_{св}$; $\varepsilon_{св}$ –?

Решение

Деффект массы Δm ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я . \qquad (1)$$

Формулу (1) можно также записать в виде

$$\Delta m = Zm(_{1}^{1}\mathrm{H}) + (A - Z)m_n - m_a , \qquad (2)$$

где m_a – масса атома, дефект массы ядра которого определяется.

Подставляя в (2) числовые данные, получим:

$$\Delta m = 0{,}13708 \text{ а.е.м.}$$

Энергия связи ядра $E_{св}$ определяется по формуле

$$E_{св} = c^2 \Delta m . \qquad (3)$$

Если дефект массы Δm выражать в а.е.м., а энергию связи $E_{св}$ – в МэВ, то формула (3) примет вид:

$$E_{св} = 931 \Delta m . \qquad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, получим:

$$E_{св} = 931 \cdot 0{,}13708 \approx 128 \text{ МэВ}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{св}$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A} . \qquad (5)$$

Произведя вычисления, получим:

$$\varepsilon_{св} = \frac{128}{16} = 8 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}13708$ а.е.м.; $E_{св} = 128$ МэВ; $\varepsilon_{св} = 8$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.136

Вычислить дефект массы и энергию связи ядра бора $^{11}_{5}\text{B}$ при распаде на свободные нуклоны.

Дано:	**Решение**
$m\left(^{11}_{5}\text{B}\right) = 11{,}00931$ а.е.м $m\left(^{1}_{1}\text{H}\right) = 1{,}00783$ а.е.м. 1 а.е.м.=931 МэВ $m_n = 1{,}00867$ а.е.м.	Дефект массы атомного ядра определяется формулой $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m$, где m – масса ядра $^{11}_{5}\text{B}$.
Δm; ΔE – ?	В таблицах масс даются массы нейтральных атомов, но не ядер.

Поэтому массу ядра $m\left(^{11}_{5}B\right)$ надо выразить через массу нейтрального атома за вычетом массы электронов:

$$m = m\left(^{11}_{5}\text{B}\right) - Zm_e,$$

тогда

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m\left(^{11}_{5}\text{B}\right) - Zm_e$$

или

$$\Delta m = Z\,(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m\left(^{11}_{5}\text{B}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta m = Zm\left(^{1}_{1}\text{H}\right) + (A - Z)m_n - m\left(^{11}_{5}\text{B}\right);$$

$$\Delta m = 5 \cdot 1{,}00783 + 6 \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931 = 0{,}08186 \text{ а.е.м.}$$

Энергия связи ядра

$$\Delta E = \Delta mc^2;$$

$$\Delta E = 931{,}44 \cdot 0{,}08186 = 76{,}25 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}08186$ а.е.м.; $\Delta E = 76{,}25$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.137

Найти энергию связи ядер урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ и ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Какое из этих ядер более устойчиво?

Дано:

$m_{{}^{235}_{92}\mathrm{U}} = 235{,}0493$ а.е.м.

$m_{{}^{238}_{92}\mathrm{U}} = 238{,}05353$ а.е.м.

$m_p = 1{,}007$ а.е.м.

$m_n = 1{,}008$ а.е.м.

$m_e = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.

$\Delta E_{св} - ?$

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением

$$\Delta E_{CB} = 931 \Delta m, \tag{1}$$

где Δm – дефект массы, определяемый соотношением

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я, \tag{2}$$

т.е. разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра; Z – порядковый номер изотопа; A – массовое число.

В нашем случае

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} - Z = 92, \quad A = 235; \quad {}^{238}_{92}\mathrm{U} - Z = 92, \quad M = 238. \tag{3}$$

Масса ядра изотопа

$$m_я = m_a - Zm_e, \tag{4}$$

где m_a – масса изотопа; m_e – масса электрона.

Подставляя (4) в (2), получим:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a + Zm_e. \tag{5}$$

Используя данные (3) и подставив их в (5), а затем в (1), получим:

$${}^{235}_{92}\mathrm{U}: \quad \Delta E_{св1} = 1786 \text{ МэВ};$$

$${}^{238}_{92}\mathrm{U}: \quad \Delta E_{св2} = 1799 \text{ МэВ}.$$

Теперь определим энергию связи, приходящуюся на один нуклон:

$$E_0 = \frac{\Delta E_{св}}{A}; \tag{6}$$

$${}^{235}_{92}\mathrm{U}: \quad \Delta E_{01} = 7{,}60 \text{ МэВ};$$

$${}^{238}_{92}\mathrm{U}: \quad \Delta E_{02} = 7{,}56 \text{ МэВ}.$$

Поскольку энергия связи ядра ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ больше, чем у ядра ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ядро ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ более устойчиво.

Ответ: $\Delta E_{св1} = 1786$ МэВ; $\Delta E_{св2} = 1799$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.138

Ядро атома бора ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ может захватывать нейтрон. В результате этого происходит расщепление ядра атома бора на ядра лития и гелия. Записать ядерную реакцию и определить энергию, освобождающуюся при этой реакции.

Дано:	**Решение**
$m_{{}^{10}_{5}\mathrm{B}}=10{,}012939$ а.е.м	Запишем уравнение реакции:
$m_{{}^{1}_{0}n}=1{,}008665$ а.е.м	${}^{10}_{5}\mathrm{B}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{7}_{3}\mathrm{Li}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$.
$m_{{}^{7}_{3}\mathrm{Li}}=7{,}016004$ а.е.м	Изменение энергии при ядерной реакции (МэВ) определяется формулой
$m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}}=4{,}002603$ а.е.м	$\Delta E=931(\sum m_i-\sum m_к)$. (1)
$\Delta E-?$	

Найдем сумму масс исходных частиц:

$$\sum m_i=(10{,}012939+1{,}008665)\text{ а.е.м.}=11{,}020939\text{ а.е.м.} \quad (2)$$

Теперь найдем сумму масс образовавшихся частиц:

$$\sum m_к=(7{,}016004+4{,}002603)\text{ а.е.м.}=11{,}018607\text{ а.е.м.} \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$\Delta E=2{,}17\text{ МэВ}.$$

Поскольку $\sum m_i>\sum m_к$, реакция сопровождается выделением энергии, если же $\sum m_i<\sum m_к$, то реакция сопровождается поглощением тепла.

Ответ: $\Delta E=2{,}17$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.139

При изменении периода полураспада короткоживущего радиоактивного вещества использован счетчик импульсов. В течение 1 мин было насчитано 250 импульсов, а спустя 1 ч после начала первого измерения – 92 импульса в минуту. Определить постоянную радиоактивного распада и период полураспада.

Дано:	**Решение**
$\Delta n_1 = 250$ $\Delta n_2 = 92$ $\Delta t_1 = 60$ с $t_2 = 3600$ с	Число импульсов Δn, регистрируемых счетчиком за время Δt, пропорционально числу распавшихся атомов ΔN. Таким образом, при первом измерении
$\lambda,\ T_{1/2} - ?$	$$\Delta n_1 = K\Delta N_1. \qquad (1)$$

Зная, что число атомов, распавшихся за время Δt_1,

$$\Delta N_1 = N_1(1 - e^{-\lambda \Delta t_1}),$$

получим

$$\Delta n_1 = KN_1(1 - e^{-\lambda \Delta t_1}), \qquad (2)$$

где N_1 – количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; Δt_1 – продолжительность отсчета импульсов; K – коэффициент пропорциональности, постоянный для данного прибора.

При повторном измерении

$$\Delta n_2 = KN_2(1 - e^{-\lambda \Delta t_1}). \qquad (3)$$

Разделив выражение (2) на (3), получим:

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{N_1}{N_2}. \qquad (4)$$

Согласно закону радиоактивного распада

$$N_2 = N_1 e^{-\lambda t_2}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим:

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{N_1}{N_1 e^{-\lambda t_2}} = e^{\lambda t_2}. \qquad (6)$$

Для нахождения λ прологарифмируем выражение (6):

$$\ln\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \lambda t_2,$$

тогда

$$\lambda = \frac{\ln\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}}{t_2}; \qquad \lambda = 1\ \text{ч}^{-1}.$$

Период полураспада определяется формулой

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \qquad T_{1/2} = 41{,}6\ \text{мин}.$$

Ответ: $\lambda = 1\ \text{ч}^{-1}$; $T_{1/2} = 41{,}6$ мин.

ЗАДАЧА 4.140

Определить период полураспада радиоактивного изотопа, если $5/8$ начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с.

Дано:	**Решение**
$t = 849$ с. $\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{5}{8}$	Задача решается с помощью закона радиоактивного распада:
$T_{1/2}$ – ?	

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda t}),$$

тогда $\quad \frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{\lambda t}, \quad$ откуда

$$e^{-\lambda t} = 1 - \frac{\Delta N}{N_0}.$$

Логарифмируя, получим:

$$-\lambda t = \ln\left(1 - \frac{\Delta N}{N_0}\right) = \ln\frac{3}{8};$$

$$\lambda = \frac{\ln\frac{8}{3}}{t}.$$

Период полураспада определим по формуле

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda};$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln\frac{3}{8}}; \qquad T_{1/2} = 10\ \text{мин}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 10$ мин.

ЗАДАЧА 4.141

Ядро полония в покое ${}^{200}_{84}\mathrm{Po}$ испускает α-частицу со скоростью 16 м/с. Зная, что масса ядра отдачи $m_я = 3,62 \cdot 10^{-25}$ кг, определить: 1) кинетическую энергию α-частицы; 2) кинетическую энергию ядра отдачи; 3) полную энергию, выделяющуюся при вылете α-частицы.

Дано:	**Решение**
$m_я = 3,62 \cdot 10^{-25}$ кг $m_\alpha = 6,6467 \cdot 10^{-27}$ кг $\upsilon_\alpha = 16 \cdot 10^6$ м/с	1. Кинетическая энергия α-частицы определяется по формуле $E_{K_\alpha} = \dfrac{m_\alpha \upsilon_\alpha^2}{2};$ $E_{K_\alpha} = 8,51 \cdot 10^{-17}$ Дж.
E_{K_α}; $E_{K_я}$; E – ?	

2. Чтобы определить кинетическую энергию ядра отдачи, найдем его скорость, полученную после вылета α-частицы, используя для этого закон сохранения импульса:

$$0 = m_\alpha \upsilon_\alpha - m_я \upsilon_я; \qquad \upsilon_я = \frac{m_\alpha \upsilon_\alpha}{m_я}.$$

Тогда

$$E_{K_я} = \frac{m_я \upsilon_я^2}{2} = \frac{m_\alpha E_{K_\alpha}}{m_я};$$

$$E_{K_я} = 1,56 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

3. Полная энергия E, выделяющаяся при вылете α-частицы, складывается из кинетической энергии α-частицы и кинетической энергии ядра отдачи, т.е

$$E = E_{K_\alpha} + E_{K_я}; \qquad E = 2,41 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Ответ: $E_{K_\alpha} = 8,51 \cdot 10^{-17}$ Дж; $E_{K_я} = 1,56 \cdot 10^{-18}$ Дж; $E = 2,41 \cdot 10^{-18}$ Дж.

ЗАДАЧА 4.142

Радиоактивный препарат, имеющий активность $a = 3,7 \cdot 10^9$ Бк, помещен в калориметр теплоемкостью $C = 4,19$ Дж/К. Найти повышение температуры в калориметре за 1 час, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α-частицы с энергией $E_\alpha = 5,3$ МэВ.

Дано:	Решение
$a = 3,7 \cdot 10^9$ Бк $C = 4,19$ Дж/К $t = 3600$ с $E_\alpha = 6,48 \cdot 10^{-13}$ Дж	По закону сохранения энергии количество тепла, которое выделяется при распаде радиоактивного вещества,
$\Delta T - ?$	

$$Q = NE_\alpha, \quad (1)$$

где N – число распадов за время t.

Зная активность a этого вещества, имеем:

$$N = \alpha t. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим:

$$Q = atE_\alpha.$$

С другой стороны,

$$Q = C\Delta T,$$

тогда

$$\Delta T = \frac{Q}{C} = \frac{atE_\alpha}{C}; \qquad \Delta T = 2,7 \text{ К};$$

$$[\Delta T] = \frac{\text{Бк} \cdot \text{с} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{с} \cdot \text{К}}{\text{с}} = \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T = 2,7$ К.

ЗАДАЧА 4.143

Мощность, выделяемая при распаде урана ${}^{238}_{92}\text{U}$, равна $P = 1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Определить число молей, участвующих в распаде, если уран выделяет молярное количество теплоты $Q_\mu = 5,21 \cdot 10^{12} \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ за среднее время жизни атомов урана.

Дано:	Решение
$P = 1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт $Q_\mu = 5,21 \cdot 10^{12} \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{17}$ с	Мощность, выделяемая при радиоактивном распаде элементом, $P = Q/t$, где Q – количество теплоты, которое выделяется при распаде за время t. В нашем случае дано количество теплоты, выделенной 1 молем урана за среднее время жизни его атомов, т.е.
$\nu - ?$	

$$Q_\mu = \frac{Q}{\nu} = \frac{Pt}{\nu}. \quad (1)$$

По условию задачи $t=\tau$ – среднему времени жизни; $\tau=\dfrac{1}{\lambda}$.

Используя формулу периода полураспада $\left(T_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}\right)$, получим:

$$\tau=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}, \tag{2}$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада атома урана $^{238}_{92}U$, значение которого берется из справочных таблиц.

Подставив (2) в (1) и учтя, что $t=\tau$, получим:

$$Q_\mu=\frac{PT_{1/2}}{\nu\ln 2},$$

откуда

$$\nu=\frac{PT_{1/2}}{Q_\mu\ln 2};\quad [\nu]=\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}\cdot\text{моль}}{\text{Дж}}=\text{моль};\qquad \nu=4\cdot 10^{-3}\,\text{моль}.$$

Ответ: $\nu=4\cdot 10^{-3}\,\text{моль}$.

ЗАДАЧА 4.144

Масса препарата радиоактивного магния ^{27}Mg равна 0,2 мкг. Определить: 1) активность изотопа; 2) удельную активность.

Дано:	Решение
$m=0{,}2\cdot 10^{-6}$ кг $T_{1/2}=600$ с $M=27\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$	1. Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, которое происходит в единицу времени и определяется формулой $$a=\frac{dN}{N}=\lambda N, \tag{1}$$
$a,\ a_m$ – ?	где λ – постоянная распада, определяется формулой

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}; \tag{2}$$

N – число атомов радиоактивного вещества.

Определим N по формуле

$$N = \frac{m}{M} N_A, \qquad (3)$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

Подставляя (2), (3) в (1), получим:

$$a = \frac{\ln 2m}{T_{1/2} M} N_A; \qquad [a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}} = \text{Бк};$$

$$a = 5 \cdot 10^{15}\ \text{Бк}.$$

Так как относительные атомные массы нуклидов выражаются целыми числами $M_{отн}$, то и молярные массы изотопов $M = M_{отн} \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ можно принять численно равными их массовым числам, т.е.

$$M = M' \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

В нашем случае $M' = 27$.

2. Удельная радиоактивность – это активность единицы массы вещества, т.е.

$$a_m = \frac{a}{m}; \qquad a_m = 25 \cdot 10^{21} \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}.$$

Ответ: $a = 5 \cdot 10^{15}$ Бк; $a_m = 25 \cdot 10^{21} \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}$.

ЗАДАЧА 4.145

В результате соударения дейтерия с ядром бериллия ${}^{9}_{4}\text{Be}$ образовались новое ядро и нейтрон. Определить порядковый номер и массовое число образовавшегося ядра, записать ядерную реакцию и определить ее энергетический выход.

Дано:	**Решение**
реакция ${}^{9}_{4}\text{Be} + {}^{2}_{1}\text{H} \to {}^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n$	Из законов сохранения электрического заряда и массовых чисел следует, что $Z = 5$, а $A = 10$, т.е. образовавшееся в результате ядерной реакции ядро – изотоп бора ${}^{10}_{5}\text{B}$.
Z; A; $\Delta E - ?$	

Поэтому ядерную реакцию можно записать в виде

$${}^{9}_{4}\text{Be} + {}^{2}_{1}\text{H} \to {}^{10}_{5}\text{B} + {}^{1}_{0}n.$$

Энергетический выход ядерной реакции определяется дефектом масс ядер – участников реакции (относительно рассматриваемой реакции):

$$\Delta E = c^2\left[m\left({}^{9}_{4}\text{Be}\right) + m\left({}^{2}_{1}\text{H}\right) - \left(m - \left({}^{10}_{5}\text{B}\right) + m_n \right)\right],$$

где в круглых скобках указаны, во-первых, массы исходных ядер, во-вторых – массы ядер продуктов реакции. При расчете вместо масс ядер используют массы нейтральных атомов, так как, согласно закону сохранения зарядовых чисел, в ядерной реакции (а зарядовое число Z нейтрального атома равно числу электронов в его оболочке) получаются одинаковые результаты:

$$m\left({}^{9}_{4}\text{Be}\right) = 1{,}4966\cdot 10^{-26}\ \text{кг}; \qquad m\left({}^{2}_{1}\text{H}\right) = 3{,}3446\ \text{кг};$$

$$m\left({}^{10}_{5}\text{B}\right) = 1{,}675\cdot 10^{-26}\ \text{кг}; \qquad m_n = 1{,}675\cdot 10^{-27}\ \text{кг};$$

$$\Delta E = 9\cdot 10^{16}\left[\left(1{,}4966\cdot 10^{-26} + 3{,}3446\cdot 10^{-27}\right) - \left(1{,}6627\cdot 10^{-26} + 1{,}675\cdot 10^{-27}\right)\right] =$$

$$= 7{,}74\cdot 10^{-13}\ \text{Дж} = 4{,}84\cdot 10^{6}\ \text{эВ} = 4{,}84\ \text{МэВ}.$$

Энергетический эффект положительный, следовательно, реакция экзотермическая, т.е. она идет с выделением тепла.

Ответ: $Z = 5$; $A = 10$; $\Delta E = 4{,}84$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.146

В какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\text{U}$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Дано:	**Решение**
$Z = 92$ $A = 238$ $X - ?$	Каждый α-распад сопровождается уменьшением зарядового числа Z на 2 и уменьшением массового числа A на 4.

Каждый β-распад сопровождается увеличением зарядового числа Z на 1, а массовое число A остается без изменения. Таким образом, зарядовое число Z' полученного элемента будет равно

$$Z' = Z - 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 92 - 6 + 2 = 88,$$

а массовое число

$$A' = A - 3\cdot 4 = 238 - 12 = 226,$$

т.е. получили элемент радий ${}^{226}_{88}\text{Ra}$.

Ответ: $X = {}^{226}_{88}\text{Ra}$.

ЗАДАЧА 4.147

Вычислить энергию ядерной реакции ${}_1^2\mathrm{H} + {}_3^7\mathrm{Li} \to 2 \cdot {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1 n$.

Дано:	Решение
$m\left({}_1^2\mathrm{H}\right) = 2{,}0141$ а.е.м. $m(\mathrm{Li}) = 7{,}01605$ а.е.м. $m(\mathrm{He}) = 4{,}0026$ а.е.м. $m_n = 1{,}00867$ а.е.м. $E - ?$	Энергия E ядерной реакции определяется по формуле $E = \Delta m c^2$, где Δm равно разности масс продуктов, вступающих в реакцию и полученных в результате реакции: $\Delta m = m\left({}_1^2\mathrm{H}\right) + m(\mathrm{Li}) - 2m(\mathrm{He}) - m_n$;

$$\Delta m = 2{,}0141 + 7{,}01605 - 2 \cdot 4{,}0026 - 1{,}00867 = 0{,}01628 \text{ а.е.м.};$$

$$1 \text{ а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Энергия ядерной реакции

$$E = \Delta m c^2;$$

$$E = 0{,}01628 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 2{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 15{,}2 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E = 15{,}2$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.148

Какое количество энергии освобождается при соединении одного протона и двух нейтронов в одно ядро?

Решение

Результатом ядерной реакции синтеза ${}_1^1 p + 2 \cdot {}_0^1 n \to {}_1^3\mathrm{H}$ является образование ядра трития.

Энергетический эффект ядерной реакции

$$E = \Delta m c^2;$$

$$\Delta m = m_p + 2m_n - m({}_1^3\mathrm{H}).$$

Масса протона

$$m_p = 1{,}00728 \text{ а.е.м.},$$

масса нейтрона

$$m_n = 1{,}00867 \text{ а.е.м.},$$

масса трития

$$m({}_1^3H) = 3,01605 \text{ а.е.м.}$$

Тогда

$$E = \Delta mc^2;$$

$$E = (1,00728 + 2 \cdot 1,00867 - 3,01605)1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 12,8 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 8 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E = 8$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.149

Первоначальная масса радиоактивного изотопа радона ${}_{86}^{222}\text{Rn}$ (период полураспада $T_{1/2} = 3,82$ суток) равна 1,5 г. Определить: 1) начальную активность препарата изотопа; 2) его активность через 5 суток.

Дано:	Решение
${}_{86}^{222}\text{Rn}$ $m_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ кг $T_{1/2} = 3,82 \cdot 24 \cdot 3600$ с $t = 5 \cdot 24 \cdot 3600$ с 1) A_0; 2) A – ?	Начальная активность препарата изотопа $A_0 = \lambda N_0$, где $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ – постоянная радиоактивного распада; N_0 – число ядер изотопа в начальный момент времени;

$$N_0 = \frac{m_0}{M} N_A,$$

где M – молярная масса радона;

$$\left(M = 222 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right);$$

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро;

$$A_0 = \frac{mN_A \ln 2}{MT_{1/2}};$$

$$[A_0] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}} = \text{с}^{-1} = \text{Бк};$$

$$A_0 = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 0,69}{222 \cdot 10^{-3} \cdot 3,82 \cdot 24 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = 8,5 \cdot 10^{15} \text{ Бк}.$$

Активность изотопа через 5 суток

$$A = \lambda N,$$

где согласно закону радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ – число нераспавшихся ядер в момент времени t.

Учитывая, что $\lambda N_0 = A$, найдем, что активность уменьшается со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\lambda t}; \qquad A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t},$$

откуда

$$A = 8{,}5 \cdot 10^{15} e^{-(0{,}695)/3{,}82} = 3{,}5 \cdot 10^{15} \text{ Бк}.$$

Ответ: $A_0 = 8{,}5 \cdot 10^{15}$ Бк; $A = 3{,}5 \cdot 10^{15}$ Бк.

ЗАДАЧА 4.150

Среднее время жизни атомов некоторого радиоактивного вещества 1 с. Определить вероятность P того, что ядро атома распадается за промежуток времени, равный 1 с.

Дано:	**Решение**
$\tau = 1$ с $\Delta t = 1$ с $P - ?$	Процесс радиоактивного распада носит статистический характер.

Это значит, что если многократно повторять опыты с радиоактивными препаратами, содержащими достаточно большое начальное число ядер N_0, то за промежуток времени от 0 до t распадается каждый раз одна и та же доля ядер $\Delta N / N_0$.

Эта величина, характеризующая относительную частоту события, – распада ядра, и принимается за вероятность P распада ядра в течение данного промежутка времени.

Таким образом,

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0},$$

где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t.

По закону радиоактивного распада

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Постоянная распада λ связана со средним временем жизни τ:

$$\lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Тогда

$$P = 1 - e^{t/\tau} = 1 - e^{-1} = 1 - {}^{1}\!/_{e} = 1 - 0,37 = 0,63.$$

Ответ: $P = 0,63$.

ЗАДАЧА 4.151

Каков кпд атомной электростанции мощностью $P = 5 \cdot 10^8$ Вт, если за $t = 1$ год было израсходовано $m = 965$ кг урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$? В каждом акте деления выделяется $\Delta E = 200$ МэВ энергии.

Дано:	Решение
$P = 5 \cdot 10^8$ Вт $t = 3{,}15 \cdot 10^7$ с $m = 965$ кг $\Delta E = 3,2 \cdot 10^{-11}$ Дж $M = 235 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$	Число атомов, содержащихся в массе m вещества, $$N = \frac{m}{M} N_A,$$ где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$ – число Авогадро. Полная энергия, выделяющаяся при распаде N атомов урана, $$E_n = N\Delta E = \frac{m}{M} N_A \Delta E. \qquad (1)$$
$\eta - ?$	

Полезная энергия, которую дает атомная электростанция за год,

$$E = Pt. \qquad (2)$$

Коэффициент полезного действия – это отношение полезной энергии к полной энергии.

Используя (1) и (2), получим:

$$\eta = \frac{E}{E_n} = \frac{MPt}{mN_A\Delta E}, \qquad \eta = 0,20;$$

$$[\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1.$$

Ответ: $\eta = 20$ %.

ЗАДАЧА 4.152

Радиоактивное ядро ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg}$ выбросило позитрон и нейтрино. Определить энергию Q β^+-распада ядра.

Дано:	Решение
$m_{{}^{23}_{12}\mathrm{Mg}} = 22{,}99414$ а.е.м. $m_{{}^{23}_{11}\mathrm{Na}} = 22{,}98977$ а.е.м. $m_e = 5{,}5\cdot 10^{-4}$ а.е.м.	Схема β^+-распада изотопа ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg}$: $${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu,$$ где ${}^{0}_{+1}e$ – символическое обозначение позитрона (его зарядовое число равно +1, а массовое число равно нулю); ${}^{0}_{0}\nu$ – электронное нейтрино, масса которого считается равной нулю.
$Q - ?$	

Согласно закону сохранения релятивистской энергии

$$c^2 m_{\mathrm{Mg}} = c^2 m_{\mathrm{Na}} + T_{\mathrm{Na}} + c^2 m_e + T_e + T_\nu,$$

где m_{Mg}, m_{Na} – соответственно, массы ядер магния и натрия; m_e – масса позитрона; T_{Na}, T_e, T_ν – кинетические энергии атома натрия, позитрона и нейтрино.

Энергия распада

$$Q = T_{\mathrm{Na}} + T_e + T_\nu = c^2\left(m_{\mathrm{Mg}} - m_{\mathrm{Na}} - m_e\right).$$

Выразим массы ядер магния и натрия через массы соответствующих нейтральных атомов:

$$Q = c^2\left(\left(m_{\mathrm{Mg}} - 12m_e\right) - \left(m_{\mathrm{Na}} - 11m_e\right) - m_e\right).$$

Так как массы электрона и позитрона одинаковы, то после упрощений получим:

$$Q = c^2\left(m_{\mathrm{Mg}} - m_{\mathrm{Na}} - m_e\right).$$

Сделав подстановку, найдем

$$Q = 3{,}05 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Q = 3{,}05$ МэВ.

ЗАДАЧА 4.153

Определить, какой изотоп образуется из изотопа урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ в результате трех α-распадов и двух β^--распадов. Представить общую схему распада.

Дано:	**Решение**
Уравнения реакций $^{238}_{92}\mathrm{U}$ 3α – распада $2\beta^-$ – распада	Схемы α- и β⁻-распадов можно представить согласно следующим правилам смещения: $^{A}_{Z}X \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; $^{A}_{Z}X \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e$,

т.е. в результате α-распада массовое число дочернего ядра уменьшается на 4, а зарядовое число – на 2 единицы. В результате β^--распада массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу.

Тогда общая схема распада:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{87}\mathrm{Fr} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{88}\mathrm{Ra}\cdot$$

Ответ: в результате указанных распадов образуется изотоп радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

ЗАДАЧА 4.154

Определить энергию E, которую необходимо затратить, чтобы оторвать нейтрон от ядра $^{10}_{4}\mathrm{Be}$. Масса нейтрального атома $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ равна $16{,}6225\cdot 10^{-27}$ кг.

Дано:	**Решение**
$m_{^{10}_{4}\mathrm{Be}} = 16{,}6225\cdot 10^{-27}$ кг $m_{^{9}_{4}\mathrm{Be}} = 14{,}9602\cdot 10^{-27}$ кг $m_n = 1{,}675\cdot 10^{-27}$ кг E – ?	В результате отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшается на единицу, а число протонов Z остается прежним, т.е. образуется ядро $^{9}_{4}\mathrm{Be}$. Ядро $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ можно считать образующимся в результате захвата свободного нейтрона ядром $^{9}_{4}\mathrm{Be}$.

Энергия отрыва нейтрона от ядра $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ равна энергии связи нейтрона с ядром $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, т.е. $E = E_{св}$.

Энергия связи ядра атома

$$E_{св} = \Delta m c^2 = \left(m_{^{9}_{4}Be} - m_n - m_{^{10}_{4}Be}\right)c^2.$$

Сделав подстановку, найдем:

$$E = 7{,}14 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E = 7{,}14$ МэВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л.Г. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; под ред. проф. Б.А. Струкова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 336 с.

2. Гладской, В.М. Сборник задач по физике с решениями: пособие для вузов / В.М. Гладской, П.И.Самойленко. – 2-е изд. – М.:Дрофа, 2004. – 288с.: ил.

3. Демков, В.П. Физика. Теория. Методика. Задачи / В.П. Демков, О.Н. Третьякова. – М.: Высш. шк., 2001. – 669 с.: ил.

4. Калашников, Н.П. Основы физики. Упражнения и задачи: учеб. пособие для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Дрофа, 2004. – 464 с.

5. Кириллов, В.М. Решение задач по физике: учеб. пособие / В.М. Кириллов [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.

6. Кирьянов, А.П. Общая физика. Сборник задач: учеб. пособие / А.П. Кирьянов [и др.]; под ред. И.П. Шапкарина. – М.: КНОРУС, 2008. – 304 с.

7. Курс физики: учебник для вузов: В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – Т. 1. – 576 с.; Т. 2. – 592 с.

8. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.

9. Новиков, С.М. Сборник заданий по общей физике: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство Оникс»; ООО «Издательство “Мир и образование”», 2006. – 512 с.: ил.

10. Решение задач по курсу общей физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. / под ред. Н.М. Рогачева. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 304 с.

11. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.

12. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 592 с.

13. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2003. – 640 с.

14. Макаренко, Г.М. Краткий справочник по общей физике / Г.М. Макаренко, Д.А. Антонович, Н.В. Вабищевич. – Новополоцк: ПГУ, 2011. – 128 с.

15. Физика: учеб. пособие. В 2 ч. / В.А. Груздев [и др.]; под ред. В.А. Груздева. – Минск: РИВШ, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Практикум

В двух частях

Часть вторая

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович
ВАБИЩЕВИЧ Наталья Вячеславовна

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
ОПТИКА
ФИЗИКА АТОМОВ

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 05.04.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 21,00. Уч.-изд. л. 20,2. Тираж 99 экз. Заказ 358.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.