Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

С. Г. Ехилевский, О. В. Голубева, Н. А. Гурьева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»

В двух частях

Часть 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.161я73
Е93

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета
информационных технологий в качестве учебно-методического комплекса
(протокол № 5 от 04.05.2010)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра математики и методики преподавания математики
УО «МГПУ им. И. П. Шамякина»
(зав. каф., канд. пед. наук, доц. В. В. ПАКШТАЙТЕ;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. М. И. ЕФРЕМОВА);
канд. техн. наук, доц. каф. технологий программирования УО «ПГУ»
А. Ф. ОСЬКИН

Ехилевский, С. Г.

Е93 Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. комплекс для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети». В 2 ч. Ч. 1. Теория вероятностей / С. Г. Ехилевский, О. В. Голубева, Н. А. Гурьева. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 256 с.

ISBN 978-985-531-100-4.

Изложены теоретические и практические основы изучаемого предмета. Представлены типовые задачи с решениями, задания для практических и домашних занятий, расчетно-графическая работа, вопросы к экзамену, рекомендуемая литература, приложения.

Для студентов технических специальностей вузов.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-531-100-4 (Ч. 1)
ISBN 978-985-531-099-1

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» соответствует учебной программе по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для технических специальностей высших учебных заведений, утвержденной Министерством образования РБ и ориентирован на семестровый лекционно-практический курс.

Комплекс состоит из двух частей. В первую часть включены:

– лекционный курс, состоящий из пяти разделов: «Случайные события», «Случайные величины», «Некоторые законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин», «Закон больших чисел», «Двумерные случайные величины»;

– практикум, содержащий решения типовых задач по каждому разделу и задания для самостоятельной аудиторной и домашней работ;

– индивидуальные задания расчетно-графической работы (20 вариантов);

– экзаменационные вопросы;

– рекомендуемая литература;

– приложения.

Структура первой части УМК следующая. Лекционный курс состоит из пяти тематических разделов. Каждый раздел включает в себя до пяти лекций, которые содержат основные понятия, определения и свойства, теоремы, а также поясняющие примеры.

В лекционном курсе УМК используется следующая система ссылок и нумераций. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, соотношений, рисунков, ссылок; нумерация лекций – сквозная. В каждой отдельной лекции используется двойная нумерация определений и теорем (например, выражение «теорема 3.1» означает, что эта теорема находится в третьей лекции под номером один).

Практикум также состоит из пяти разделов, соответствующих лекциям. Каждый раздел в соответствии с рабочей программой разбит на отдельные практические занятия, которые представлены стандартным набором: типовые решённые задачи; задачи для самостоятельного решения в аудитории и дома (основная масса этих задач приводится с ответами).

Коллектив авторов выражает глубокую благодарность рецензентам за ряд ценных советов и замечаний, способствующих улучшению содержания рукописи.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

РАЗДЕЛ I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ЛЕКЦИЯ 1. СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайном.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента (опыта). События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, … .

Опытом называется осуществление определённого комплекса условий.

Примеры:

– опытом является вытаскивание белого шара из урны с белыми и черными шарами, событиями – «извлечение белого шара», «извлечение чёрного шара», комплекс условий таков – шары одинаковы по размеру, массе, на ощупь, тщательно перемешаны, урна непрозрачна;

– опытом является подбрасывание монеты, событиями – «выпадение герба на её верхней стороне», «выпадение цифры на её верхней стороне», комплексом условий – симметричность монеты.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдёт в данном опыте. Например, если в ящике находятся только белые шары, то событие «из ящика извлечён белый шар» является достоверным.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в данном опыте. Например, событие «выпадение десяти очков при бросании игрального кубика» является невозможным.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же опыте. Если же появление одного события не исключает возможности появления других событий, то такие события называются *совместными*. Например, при извлечении из колоды одной игральной карты события «появление валета» и «появление дамы» несовместны. События «появление валета» и «появление пики» – совместны.

События называются *элементарными исходами* опыта, если он может завершиться одним и только одним из них. Например, при подбрасывании игральной кости (кубика) таких исходов шесть: во-первых, никаких других, кроме этих шести, нет и, во-вторых, никакие два (или больше) из них не могут наступить вместе. Элементарные исходы обозначают ω_i $(i=\overline{1,n})$, их совокупность (*пространство элементарных исходов*) – $\Omega=\{\omega_i\}$.

Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию. Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы, заключающиеся в выпадении двойки, четверки, шестерки, благоприятствуют событию «выпало чётное число очков». Достоверному событию благоприятствуют все элементарные исходы, поэтому будем обозначать это событие буквой Ω. Невозможному событию не благоприятствует ни один исход, поэтому такое событие обозначается символом пустого множества $\varnothing$.

►**Пример 1.** Подбрасываются два отличающихся игральных кубика. Записать пространство элементарных исходов этого опыта.

Решение. Исходы обозначим упорядоченной парой чисел, выпавших на первом и втором кубиках соответственно. Всего получится 36 пар. Ответ удобно записать в виде таблицы.

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Замечание. В опыте с двукратным подбрасыванием одного кубика пространство элементарных исходов будет таким же.◄

►**Пример 2.** Подбрасываются два одинаковых игральных кубика. Записать пространство элементарных исходов этого опыта.

Решение. Поскольку кубики неразличимы, пары чисел в данном опыте неупорядочены. То есть теперь исходы (2;1) и (1;2) (см. пример 1) совпадают. Значит, из Ω следует исключить все пары, расположенные ниже главной диагонали. При этом останется 21 исход.◄

►**Пример 3.** Регистрируется сумма очков, выпавших при подбрасывании двух игральных кубиков. Записать пространство элементарных исходов этого опыта.

Решение. Сумма может принимать значения 2, 3, 4, …, 11, 12. То есть имеется 11 исходов:

$$\Omega=\{\omega_1=2,\omega_2=3,\omega_3=4,\omega_4=5,\omega_5=6,\omega_6=7,\omega_7=8,\omega_8=9,$$
$$\omega_9=10,\omega_{10}=11,\omega_{11}=12\}.◄$$

►**Пример 4.** В урне находится 12 пронумерованных шаров. Опыт состоит в извлечении одного шара из урны. Требуется:

а) указать элементарные события (исходы), благоприятствующие событиям: A – «появление шара с нечётным номером», B – «появление шара с чётным номером», C – «появление шара с номером, большим, чем 3», D – «появление шара с номером, меньшим, чем 7»;

б) пояснить, что означают события $\overline{B}$ и $\overline{C}$;

в) указать, какие из пар событий A, B, C, D совместны, а какие – нет.

Решение. а) Пространство элементарных исходов представим в виде $\Omega = \{\omega_i\}$, где ω_i – появление шара с номером i, где $i = \overline{1,12}$.

Рассмотрим события A, B, C, D как подмножества пространства Ω. Элементарные события, входящие в эти подмножества, и являются благоприятствующими указанным событиям:

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}\},$$

$$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{12}\},$$

$$C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}\},$$

$$D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

б) Событие $\overline{B}$ означает, что событие B не происходит, то есть

$$\overline{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}\},$$

откуда следует, что $\overline{B} = A$.

Событие $\overline{C}$ является противоположным событию C, поэтому $\overline{C} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

в) События A и B несовместны; события A и C, A и D, B и C – совместны (остальные – тоже).◄

<u>*Действия над событиями.*</u> *Произведением* (или *пересечением*) *событий A и B* называется событие $A \cap B$, которое наступает при осуществлении A и B вместе.

Например, при бросании игральной кости событие «выпало 5» является произведением событий «выпало нечётное» и «выпало больше 3».

Очевидны соотношения

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \; A \cap \Omega = A, \; A \cap A = A.$$

Кроме того, $A \cap B = \varnothing$, если A и B – несовместны. В соответствие с определением элементарных исходов $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Суммой (или *объединением*) *событий A и B* называется событие $A \cup B$, которое наступает при осуществлении A или B (или A и B).

Пусть A – выпадение числа, меньшего пяти, B – выпадение четного числа. Тогда $A \cup B$ – выпадение любого из чисел, кроме пяти.

Очевидны соотношения

$$A \cup \varnothing = A,\ A \cup \Omega = \Omega,\ A \cup A = A.$$

Пусть A – выпадение чисел k и l при одновременном бросании двух неразличимых игральных костей. Тогда $A = (k,l) \cup (l,k)$, где использованы обозначения из примера 1.

Повторно применяя введенные операции, можно определить сумму и произведение большего числа событий.

Разностью событий A *и* B называется событие $A \setminus B$, которое наступает при осуществлении A и неосуществлении B.

Пусть A – выпадение числа, меньшего пяти, B – выпадение четного числа. Тогда $A \setminus B$ – выпадение единицы или тройки.

Событие $\overline{A}$, состоящее в том, что в результате опыта событие A не произойдёт, называется *противоположным* к A.

Например, события «выпало чётное число» и «выпало нечётное число» – противоположные.

Очевидны соотношения

$$A + \overline{A} = \Omega,\ A\overline{A} = \varnothing,\ \overline{\overline{A}} = A.$$

Рассмотренные действия над событиями имеют геометрическую интерпретацию. Пространство элементарных событий Ω представим в виде квадрата, каждой точке которого соответствует элементарное событие. Тогда случайные события будут изображаться в виде некоторых фигур, лежащих в квадрате Ω. На рис. 1 штриховкой указаны сумма, произведение и разность событий *A* и *B*, а также $\overline{A}$.

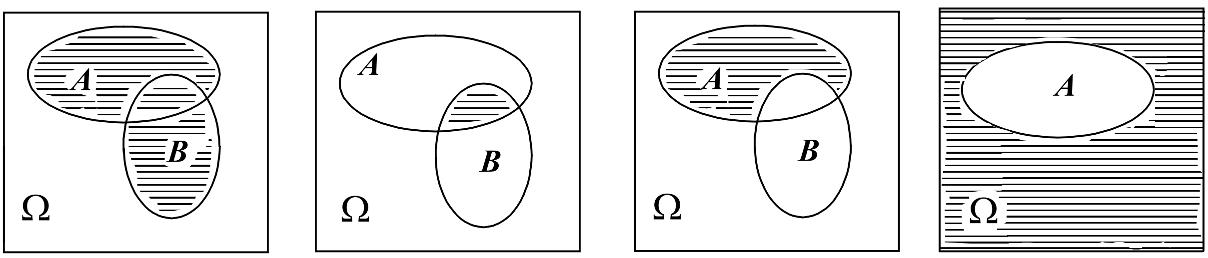


Рис. 1

►**Пример 5.** Производится два выстрела по цели. Событие A – «попадание при первом выстреле», B – «при втором». Выразить событие C – «поражение цели» через A и B.

Решение. События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ означают промах при первом и втором выстрелах соответственно.

Цель будет поражена в следующих случаях:

– попадание при первом выстреле и промах при втором,

– промах при первом выстреле и попадание при втором,

– попадание при первом и втором выстрелах.

Событие C заключается в наступлении или первого, или второго, или третьего вариантов, то есть

$$C = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

С другой стороны, $\overline{C} = \overline{A}\overline{B}$. Тогда $C = \overline{\overline{A}\overline{B}}$.◄

ЛЕКЦИЯ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическое определение вероятности. Элементарные исходы называют *равновозможными*, если нет объективных причин появления одного из них чаще других. Например, при подбрасывании игральной кости равновозможность исходов обеспечивается её симметрией и неконтролируемостью начальных условий движения. По этой причине все 36 исходов из примера 1 лекции 1 равновозможны.

Равновозможность исходов при повторении опыта позволяет ожидать, что событие, которому благоприятствует больше исходов, будет наступать чаще.

В качестве меры таких ожиданий используют понятие вероятности.

Определение 2.1. *Вероятностью* случайного события называется отношение числа элементарных исходов, ему благоприятствующих, к общему числу равновозможных элементарных исходов данного опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

В соответствии с данным определением, вероятность – это безразмерная величина, заключенная между нулём и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (1)$$

В частности, вероятность достоверного события (ему благоприятствуют все исходы) равна единице, а невозможного (ему не благоприятствует ни один исход) – нулю:

$$P(\Omega) = 1 \text{ (условие нормировки)}, \qquad P(\varnothing) = 0. \qquad (2)$$

Кроме того,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{3}$$

если события A и B несовместны (не пересекаются), и

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{4}$$

С помощью (4) определяется, например, вероятность промаха, если известна вероятность попадания, или наоборот (если вероятность попадания для орудия равна 0,9, то вероятность промаха для него 1-0,9=0,1).

Соотношения (1) – (4) отражают *основные свойства вероятности*.

►**Пример 1.** Пусть в урне имеется пять белых и три красных шара. Из неё наугад извлекается шар. Пусть событие A – появление белого шара, событие B – появление красного шара. Тогда полная группа событий состоит из восьми равновозможных, благоприятствуют событию A пять исходов, событию B – три. Значит,

$$P(A) = \frac{5}{8}, \quad P(B) = \frac{3}{8}. ◄$$

►**Пример 2.** Найти вероятности исходов $\omega_1 = 2$ и $\omega_3 = 4$ из примера 3 лекции 1.

Решение. Исходу $\omega_1 = 2$ благоприятствует одна комбинация (1;1) из 36 возможных, поэтому $P = \dfrac{1}{36}$. Исходу $\omega_3 = 4$ благоприятствуют три комбинации (1;3) (3;1) (2;2) из 36 возможных, поэтому $P = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

То есть элементарные исходы опыта из примера 3 лекции 1 неравновозможны. Тем не менее, их вероятности найдены с помощью классического определения и свойств вероятности благодаря симметрии игральной кости. ◄

Подход к вычислению вероятности, основанный на её классическом определении, несомненно, конструктивен, но не идеален. Обычно для обоснования равновозможности исходов используют соображения, основанные на симметрии. Имеет ли она место в действительности, априори (до опыта) не ясно. Например, при правильной геометрии игральная кость может оказаться неоднородной и будет чаще становиться на тяжелую грань. Более того, строгой симметрии не может быть в принципе (как и ничего идеального). Поэтому равновозможность есть некая идеализация, позволяющая строить теорию, с приемлемой точностью описывающую реальность.

Наконец классическое определение неприемлемо, если симметрия априори отсутствует (как при подбрасывании усеченной пирамидки). В такой ситуации вероятности исходов узнают из эксперимента.

Статистическое определение вероятности. Пусть в результате некоторого опыта может произойти или не произойти событие A. Повторим этот опыт n раз и пусть m – число опытов, в которых появилось событие A.

Определение 2.2. *Относительной частотой события* A в проведенной серии опытов $\nu(A)$ называется отношение числа m опытов, в которых появилось A, к числу n всех опытов:

$$\nu(A)=\frac{m}{n}.$$

Очевидно наличие у ν тех же свойств, что и у классически определенной вероятности:

$$0\le\nu(A)\le 1,\ \nu(\Omega)=1,\ \nu(\varnothing)=0,\ \nu(\overline{A})=1-\nu(A)$$

и

$$\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B),$$

если события A и B несовместны.

Относительная частота находится только после проведения серии опытов и может меняться от серии к серии. Однако замечено, что при увеличении числа опытов относительная частота приближается к некоторой постоянной. Эту постоянную считают вероятностью данного события, которая называется *статистической*.

Например, в опытах по бросанию монеты относительная частота появления герба при 12000 бросаний оказалось равной $0{,}5016$, а в опыте с 24000 бросаний – $0{,}5005$.

Статистическое определение вероятности также не лишено недостатков. Точное значение $P(A)$ (даже при идеальной равновозможности исходов) в рамках статистического подхода не может быть найдено, так как его определение связано с постановкой бесконечного числа опытов. Более того, при любом конечном числе повторений остается принципиальная возможность неприемлемо большой ошибки.

Отдельная проблема – воспроизведение всего комплекса условий при повторениях опыта. Представим себе полую игральную кость, по внутренней поверхности которой ползает улитка. Ясно, что в этом случае ни о каком повторении опытов не может быть и речи. Самое печальное, что мы об этом можем и не знать, если кубик непрозрачен. Только относительная частота при увеличении числа опытов не будет приближаться к некоторой постоянной.

В заключение ещё раз подчеркнем, что приведенные выше свойства вероятности имеют место независимо от использованного её определения.

Основные комбинаторные схемы. Часто количество благоприятствующих или всех элементарных исходов испытания определить непосредственно сложно, так как оно представляет, например, число способов, которыми можно выбрать некоторое множество объектов из имеющихся. Примером такой ситуации являются задачи, условие которых можно представить в виде «урновой схемы»: в урне имеется N шаров, из них M голубых, остальные $N-M$ – красные. Рассмотрим основные схемы вычисления количества исходов в таких случаях.

Правило произведения

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта a и b можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

►**Пример.** Бросают два кубика – белый и красный. Пусть на белом выпадает число a, на красном – b. Всего возможных комбинаций чисел (a,b): $6 \cdot 6 = 36$.◄

Правило суммы

Если из некоторого конечного множества элемент a можно выбрать n_1 способами, а элемент b – n_2 способами, причём способы n_1 и n_2 не пересекаются, то любой из элементов a или b можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

►**Пример.** Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих и 3 зелёных карандаша.

Решение. Один карандаш можно выбрать 5+7+3=15 способами.◄

Размещения

Имеются n различных элементов $a_1, a_2, ..., a_n$. Из них составляют всевозможные *расстановки длины* k. Например, $a_1\, a_2\, a_4$ – расстановка длины 3. Две расстановки *длины* k считаются различными, если они отличаются видом входящих в них элементов или порядком их следования в расстановке. Такие расстановки называются *размещениями без повторений* из n по k, а их число обозначают A_n^k.

При составлении размещений на первое место можно поставить любой из имеющихся n элементов. На второе место теперь можно поставить только любой из $n-1$ оставшихся. И, наконец, на k-тое – любой из $n-k+1$ оставшихся предметов. По правилу произведения получаем, что общее число размещений без повторений из n по k равно

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ и $0! = 1$.

►**Пример.** Сколькими способами можно набрать семизначный код, если все его цифры различны?

Решение. Первую цифру можно набрать 10 способами, вторую – 9, так как одна цифра уже использована, и т. д., седьмую – 4. Тогда общее число возможных размещений равно

$$A_{10}^{7} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800. ◄$$

Перестановки

При составлении размещений из n элементов по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Но если брать расстановки, которые включают все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком. Такие расстановки называются *перестановками из n элементов*, а их число обозначается P_n. Следовательно, число перестановок равно

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

►**Пример.** Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Решение. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.◄

Сочетания

В тех случаях, когда порядок элементов в расстановке не важен, то говорят о сочетаниях. *Сочетаниями из n различных элементов по k* называются все возможные расстановки длины k, образованные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Общее число сочетаний обозначают через C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Определим это число. Составим все сочетания из n по k. Затем переставим в каждом сочетании элементы всеми возможными способами. Теперь мы получим расстановки, отличающиеся либо составом, либо порядком, то есть это все размещения без повторений из n по k. Их число равно A_n^k. Учитывая, что каждое сочетание дает $k!$ размещений, по правилу произведения можно записать $C_n^k \cdot k! = A_n^k$. Тогда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для чисел C_n^k (они называются биномиальными коэффициентами) справедливы тождества (докажите их самостоятельно):

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (правило симметрии)},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ (правило Паскаля)},$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

►**Пример.** Составить различные сочетания по два из элементов множества $A = \{3, 4, 5\}$ и подсчитать их число.

Решение. Из трёх элементов можно составить следующие три сочетания по два элемента: $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$. Их число можно подсчитать и по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$C_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3. ◄$$

►**Пример.** Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. Поскольку несущественно, в каком порядке отобраны кандидатуры, число вариантов равно $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$.◄

►**Пример.** Сколько различных прямоугольников можно вырезать из клеток доски, размер которой равен $m \times n$?

Решение. Прямоугольник однозначно определяется положением его сторон. Горизонтальные стороны могут занимать любое из $m+1$ положений Тогда число способов их выбора равно C_{m+1}^2. Вертикальные стороны можно выбрать C_{n+1}^2 способами. По правилу произведения заключаем, что количество прямоугольников равно $C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2$.◄

При большом n подсчет числа вариантов по этим формулам требует громоздких вычислений $n!$. В таком случае пользуются *асимптотической формулой Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\Theta(n)}, \text{ где } |\Theta(n)| \le \frac{1}{12n}.$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов данного множества различны. Если некоторые элементы повторяются, то количество расстановок вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число *перестановок с повторениями* находится по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов равно n^m, то есть

$$(A_n^m)_{с\ повт.} = n^m.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно числу сочетаний без повторений из $n+m-1$ элементов по m элементов, то есть

$$(C_n^m)_{с\ повт.} = C_{n+m-1}^m.$$

Решим задачи с условием в виде «урновой схемы».

►**Пример.** В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наугад деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания n равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, то есть числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов: $n = C_{10}^6$. Определим число исходов, благоприятствующих событию A – «среди 6 взятых деталей 4 стандартных». 4 стандартные детали из 7 стандартных можно выбрать C_7^4 способами, при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{6! \cdot 4!}{10!} = 0{,}5.$$ ◄

►**Пример.** В коробке 105 красных и 15 чёрных шаров. Наугад извлекаются 10 шаров. Найти вероятность того, что среди них хотя бы один красный.

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что среди десяти наугад извлечённых шаров есть один красный, событие A_2 – два красных, и т. д., событие A_{10} состоит в том, что среди десяти наугад извлечённых шаров все десять красные. Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}$ или $A = \sum_{i=1}^{10} A_i$. События A_i $(i = 1, ..., 10)$ несовместны, поэтому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i),$$

где $\quad P(A_1) = \dfrac{C_{105}^1 \cdot C_{15}^9}{C_{120}^{10}}, \quad P(A_2) = \dfrac{C_{105}^2 \cdot C_{15}^8}{C_{120}^{10}}, \quad \ldots, \quad P(A_{10}) = \dfrac{C_{105}^{10} \cdot C_{15}^0}{C_{120}^{10}}.$

Теперь можно найти $P(A)$. Но вычисление всех десяти вероятностей $P(A_i)$ и последующее их суммирование – процесс трудоёмкий, поэтому рассмотрим другой подход к решению задачи.

Событие $\overline{A}$ – среди десяти наугад извлечённых шаров нет ни одного красного – противоположное к A. Его вероятность: $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{15}^{10}}{C_{120}^{10}}$. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{105}^{10} \cdot C_{15}^0}{C_{120}^{10}} \approx 1 - 0{,}025 = 0{,}975. ◄$$

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. Равновозможность исходов опыта следует из предполагаемой симметрии (как в случае игрального кубика или монеты). Задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются редко. К тому же, это определение предусматривает только конечное или счётное множество элементарных исходов и обязательное знание их вероятностей, что не всегда имеет место. Поэтому классическое определение вероятности события не является общим.

Аксиоматическое построение теории вероятностей. В настоящее время наиболее распространена логическая схема построения теории вероятностей А.Н. Колмогорова (1933 г.). Приведём её основные положения.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого опыта и в Ω выделена система событий F (*алгебра событий*), удовлетворяющая свойствам:

– $\Omega \in F$;

– $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;

– $A \in F$ и $B \in F \Rightarrow A + B \in F$ и $AB \in F$.

Предположим, что каждому событию $A \in F$ поставлено в соответствие число $P(A)$ – вероятность случайного события A и верны аксиомы:

1. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in F$;

2. $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки);

3. Если A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Введённая таким образом тройка (Ω, F, P) *называется вероятностным пространством*. Этот подход позволяет по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других, достаточно сложных событий, пользуясь только перечисленными аксиомами (при этом не обсуждается трудный вопрос о том, откуда известны первоначальные вероятности). Примером является *геометрическая схема* теории вероятностей.

Аксиоматический подход не указывает, как конкретно находить вероятность, поэтому для решения задач целесообразно использовать классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.[1]

Геометрическое определение вероятности. Рассмотрим опыт, состоящий в бросании случайным образом точки на отрезок $[0;l]$, предполагая, что попадания в любую точку равновозможны. Пространство элементарных событий в этом опыте – все точки отрезка $[0;l]$ – событие Ω. Поскольку множество элементарных исходов несчётно (бесконечно) и все они равновозможны, то для любого ω: $p(\omega) = 0$. То есть классическая схема неприменима. Припишем событию A – попаданию брошенной точки на отрезок $[a;b]$, входящий в $[0;l]$, – вероятность, пропорциональную его длине:

$$P(A) = k \cdot (b-a),$$

где $b-a$ – длина отрезка. Коэффициент k найдём из условия нормировки:

$$P(\Omega) = k \cdot (l-0) = k \cdot l = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{l},$$

тогда

$$P(A) = \frac{b-a}{l}.$$

Легко убедиться в справедливости всех аксиом.

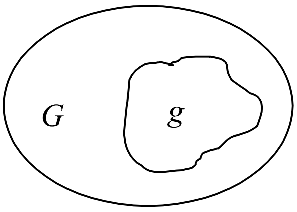


Рис. 1

Вместо отрезка можно говорить о плоской фигуре (рис. 1). Пусть на плоскости задана квадрируемая область (область, имеющая площадь) G. Её площадь обозначим S_G. В области G содержится область g площади S_g. В область G наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет в область g?

[1] Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учеб. пособие для вузов / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 400 с., ил.

Хотя каждое из множеств G и g содержит бесконечное множество точек, однако «вместимость» множества G больше во столько раз, во сколько S_G превышает S_g. Принимая равновозможность всех вариантов, можно считать, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

Аналогично поступают и в трёхмерном случае:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G}.$$

►**Пример.** На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусами 5 см и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наугад в большой круг, попадет в кольцо (рис. 2), образованное концентрическими окружностями (событие A).

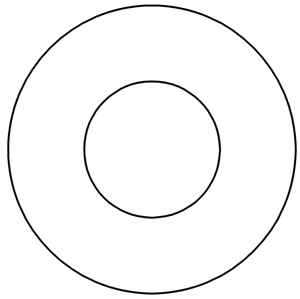


Рис. 2

Решение. Найдём площадь меньшего круга (области g):

$$S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi.$$

Найдём площадь большего круга (области G):

$$S_G = \pi 10^2 = 100\pi.$$

Отсюда искомая вероятность равна:

$$P = \frac{75\pi}{100\pi} = 0{,}75.$$ ◄

ЛЕКЦИЯ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2

Рассмотрим ряд теорем, которые позволят выразить вероятность одного события через вероятности других.

Пусть A и B являются исходами одного и того же опыта. Эти исходы могут осуществиться как:

1) сумма событий A, B, где A и B несовместные;

2) сумма событий A, B, где A и B совместные;

3) произведение событий A, B, где одно из этих событий зависит от наступления другого;

4) произведение событий A, B, где A и B независимые.

<u>Вероятность суммы событий.</u> Рассмотрим первый случай. Пусть общее число равновозможных несовместных исходов данного опыта равно N, причем n из них благоприятствуют событию A, m – событию B, то есть $P(A)=\frac{n}{N}$, $P(B)=\frac{m}{N}$. Так как события A и B несовместны, то их сумме благоприятствуют все $n+m$ событий. Согласно классическому определению вероятности:

$$P(A+B)=\frac{n+m}{N}=\frac{n}{N}+\frac{m}{N}=P(A)+P(B).$$

(Формула справедлива и для случая нескольких событий.)

Из приведённых рассуждений следует

Теорема 3.1 (*о вероятности суммы двух несовместных событий*). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

(Это утверждение есть свойство вероятности.)

Следствие 1. Если A_1, A_2, …, A_n – попарно несовместные события, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Следствие 2. Вероятность суммы попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна 1:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Следствие 3. События A и $\overline{A}$ несовместны и образуют полную группу событий, поэтому

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Отсюда

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

►**Пример.** Спортсмен стреляет по мишени, разделённой на три сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. События A – «попадание в первый сектор» и B – «попадание во второй сектор» несовместны, поэтому применима теорема 3.1. Тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7.◄$$

►**Пример.** Завод производит 85% продукции первого сорта и 10% – второго. Остальные изделия считаются браком. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие будет бракованным.

Решение. $P = 1-(0{,}85+0{,}1) = 0{,}05$.◄

Рассмотрим второй случай. В результате опыта могут произойти события AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}$. Первое из них состоит в том, что произошли оба события A и B, второе – в том, что произошло событие A, а событие B не произошло, и т. д. Эти события образуют пространство элементарных исходов опыта, так как они несовместны и при проведении испытания одно из них обязательно произойдёт.

Пусть общее число равновозможных исходов испытания равно N, причём n_1 из них благоприятствуют событию AB, n_2 – событию $A\overline{B}$, n_3 – событию $\overline{A}B$, n_4 – событию $\overline{A}\overline{B}$. Так как эти события являются пространством элементарных исходов, то $n_1+n_2+n_3+n_4=N$. Найдём вероятность каждого элементарного исхода:

$$P(AB)=\frac{n_1}{N},\quad P(A\overline{B})=\frac{n_2}{N},\quad P(\overline{A}B)=\frac{n_3}{N},\quad P(\overline{A}\overline{B})=\frac{n_4}{N}.$$

Событию A благоприятствуют n_1+n_2 равновозможных исходов, событию B – n_1+n_3 равновозможных исходов, то есть

$$P(A)=\frac{n_1+n_2}{N},\quad P(B)=\frac{n_1+n_3}{N}.$$

Событию $A+B$ благоприятствуют $n_1+n_2+n_3$ равновозможных исходов, поэтому

$$P(A+B)=\frac{n_1+n_2+n_3}{N}$$

или

$$P(A+B)=\frac{n_1+n_2}{N}+\frac{n_1+n_3}{N}-\frac{n_1}{N}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема 3.2 (*о вероятности суммы двух совместных событий*). Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, то есть

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Выведите самостоятельно теорему сложения вероятностей трёх совместных событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Указание. Свести сумму трёх событий $A+B+C$ к сумме двух событий $(A+B)+C$:

$$A+B+C=(A+B)+C.$$

►**Пример.** Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,85, для второго – 0,8. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один стрелок.

Решение. Пусть событие A – «попадание первого стрелка», B – «попадание второго стрелка», C – «попадание хотя бы одного из стрелков». Тогда $C = A + B$, где A и B – совместные и независимые события, поэтому применима теорема 3.2:

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}85 + 0{,}8 - 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}97\,.◄$$

►**Пример.** Из группы студентов 10 % знают английский язык, 5 % – французский и 1 % – оба языка. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент не знает ни одного иностранного языка?

Решение. $P = 1 - (0{,}1 + 0{,}05 - 0{,}01) = 0{,}86$.◄

Иногда вероятность наступления какого-либо из событий зависит от того, произошло или не произошло другое событие.

►**Пример.** В коробке 20 шаров. Из них 5 красных и 15 чёрных. Наудачу извлекается один шар и не возвращается в коробку. Затем из коробки снова извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар красный? Найти вероятность того, что оба извлечённых шара красные?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что первым вынули красный шар, событие B – вторым вынули красный шар. Понятно, что вероятность события B зависит от того, какого цвета был первый извлечённый шар, то есть

$$P(B/A) = \frac{5-1}{20-1} = \frac{4}{19}.$$

Событие «извлечённые подряд два шара – красные» состоит в наступлении событий A и B, причём вероятность события B зависит от наступления или не наступления события A, поэтому

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}.◄$$

Определение 3.1. Вероятность события B, вычисленная при условии, что произошли события A_1, A_2, …, A_n, называется **условной** и обозначается $P(B/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)$ (событие B в таком случае называется *зависимым* от событий A_1, A_2, …, A_n). Если же вероятность события B не связана с осуществлением событий A_1, A_2, …, A_n, то она называется **безусловной** (событие B в этом случае называется *независимым* от событий A_1, A_2, …, A_n).

По определению событие B *зависит* от события A, если $P(B/A) \neq P(B)$. Если же $P(B/A) = P(B)$, то событие B *не зависит* от события A.

<u>*Вероятность произведения событий.*</u> Рассмотрим третий и четвёртый случаи. Пусть в результате некоторого опыта может произойти событие B, но только в том случае, если произойдёт событие A. Допустим, что событию A благоприятствуют $m(A)$ исходов опыта ($m(A) \neq 0$) из n равновозможных элементарных, а событию AB – $m(AB)$ исходов. По классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n},\ P(AB) = \frac{m(AB)}{n}.$$

Если A произошло, то реализован один из $m(A)$ исходов, и событие B может произойти, только если произойдёт один из исходов, благоприятствующих AB. Таких исходов $m(AB)$. Поэтому естественно положить *условную вероятность события B при условии, что A произошло, равной отношению*

$$P(B/A) = \frac{m(AB)}{m(A)} = \frac{m(AB)}{n} : \frac{m(A)}{n} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Полученное равенство можно записать в виде

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Теорема 3.3 (*о вероятности произведения двух событий*). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие уже произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Эту теорему можно обобщить на случай, когда событий больше двух. Например, для трёх она имеет вид

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Понятно, что если два события независимые, то $P(B/A) = P(B)$ и формула из теоремы 3.3 принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема 3.4 (*о вероятности произведения двух независимых событий*). Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Чтобы обобщить это равенство на случай трёх и более событий, рассмотрим понятие *независимых в совокупности событий*.

Определение 3.2. События A_i $(i=\overline{1,n})$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого события A_k из их числа и произвольных событий A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_r} $(i_r \neq k)$ из их числа, события A_k и A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_r} взаимно независимы, то есть

$$P(\bigcap_{m=1}^{r} A_{i_m}) = \prod_{m=1}^{r} P(A_{i_m}).$$

Если это равенство справедливо для случая, когда событий два, то они называются *попарно независимыми*.

Попарной независимости недостаточно для независимости в совокупности. Это иллюстрирует

►**Пример** С.Н. Бернштейна. На плоскость бросается тетраэдр. Три грани его окрашены в красный, синий и зелёный цвета, а на четвёртую нанесены все три цвета. Пусть событие A означает выпадение грани, содержащей красный цвет, событие B – выпадение грани, содержащей синий цвет, событие C – выпадение грани, содержащей зелёный цвет.

Так как каждый из трёх цветов имеется на двух гранях, то $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$. Любая пара цветов присутствует только на одной грани, поэтому вероятность пересечения любых двух событий $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. Это означает попарную независимость событий A, B, C. Три цвета присутствуют на одной грани, поэтому $P(ABC)=\frac{1}{4}$, а $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{8}$, и, следовательно, $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$, то есть события A, B, C зависимы в совокупности. ◄

Теперь обобщим теорему 3.4 так: для трёх независимых в совокупности событий

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

►**Пример.** Пусть из полной колоды карт (52 карты) вынимают наугад последовательно три карты без возврата. Найти вероятность того, что среди них не будет ни одного туза.

Решение. Пусть событие A_i – вынутая i-тая карта не туз $(i=\overline{1,3})$, событие A – среди трёх последовательно вынутых наугад карт нет туза.

Тогда

$$A = A_1 A_2 A_3$$

и

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2).$$

Так как среди 52 карт имеются 4 туза, то

$$P(A_1) = \frac{48}{52}, \quad P(A_2 / A_1) = \frac{47}{51}, \quad P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{46}{50},$$

следовательно

$$P(A) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} = \frac{4324}{5525} \approx 0{,}78.$$

Если карты вынимаются сразу, то вероятность изменится, так как порядок появления карт уже не имеет значения:

$$P = \frac{48}{52} = \frac{4324}{5525} \approx 0{,}92. \blacktriangleleft$$

ЛЕКЦИЯ 4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула полной вероятности. Во многих ситуациях то или иное событие A может появиться лишь как случайное следствие одного из попарно несовместных событий H_1, H_2, …, H_n, образующих *полную группу событий* Ω ($H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$). События H_i, $i = 1, ..., n$ назовём *гипотезами*. При этом термин «случайное следствие» означает, что каждая из гипотез может повлечь за собой не только исход A, но и какие-то другие исходы. Предполагается, что вероятности гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ и условные вероятности события A при каждой из гипотез, то есть вероятности $P(A / H_i)$, известны.

Найдём вероятность события A, принимая во внимание все случаи его появления. Понятно, что событие A появляется тогда и только тогда, когда осуществляется одно из событий AH_1, AH_2, …, AH_n. События AH_1, AH_2, …, AH_n несовместны так же, как и сами гипотезы H_1, H_2, …, H_n. Поэтому, согласно теореме сложения вероятностей, можно записать

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + ... + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n).$$

Вероятность событий AH_i, $i = 1, ..., n$ определяем, применив теорему о вероятности произведения событий:

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A / H_i),\ i = 1, ..., n.$$

В результате получим формулу

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i),$$

которая называется *формулой полной вероятности*.

Эта формула применяется тогда, когда можно разбить всё пространство элементарных исходов на несколько разнородных областей. Например, на складе может лежать продукция с трёх разных заводов в разном количестве ($P(H_i)$ – доля продукции каждого завода) с разной долей брака ($P(A / H_i)$ – доля брака в продукции i-того завода) и т. п.

►**Пример.** Пусть однотипная продукция трёх рабочих упакована в три одинаковых на вид ящика. Из одного выбранного произвольно ящика наугад вынимается одна деталь. Чему равна вероятность того, что деталь окажется бракованной, если есть основания считать, что в первом ящике из 100 деталей негодных 4, во втором из 120 деталей негодных 6, в третьем из 80 – негодных 8?

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – деталь взята из первого ящика, H_2 – деталь взята из второго ящика, H_3 – деталь взята из третьего ящика. Из условия задачи следует, что все гипотезы равновозможные, то есть

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Найдём условные вероятности события A при верности одной из возможных гипотез:

$$P(A / H_1) = \frac{4}{100}, \quad P(A / H_2) = \frac{6}{120}, \quad P(A / H_3) = \frac{8}{80}.$$

Подставляя полученные значения $P(H_i)$ и $P(A / H_i)$ в формулу полной вероятности, находим

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{120} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{80} = \frac{19}{300} = 0{,}063. ◄$$

►**Пример.** Определить вероятность того, что путник, вышедший из пункта A, попадет в пункт B, если на развилке дорог он наугад выбирает любую дорогу, кроме обратной (рис. 1).

Решение. Пусть гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 – приход путника в соответствующий пункт. Очевидно, что они образуют полную группу событий и по условию задачи

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Согласно схеме дорог условные вероятности попадания в пункт B при условии, что путник прошел через H_i, $H_i = 1, ..., 4$, равны

$$P(B/H_1) = 0,\ P(B/H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(B/H_3) = 1,\ P(B/H_4) = \frac{1}{3}.$$

Применяя формулу полной вероятности, находим

$$P(B) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{24}. ◄$$

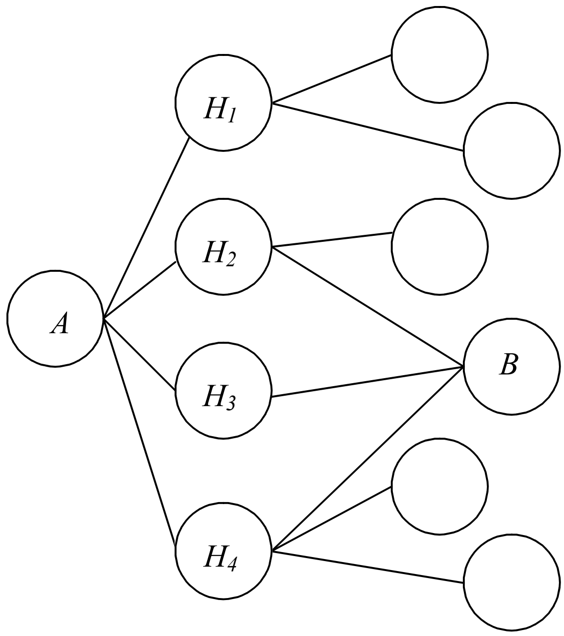


Рис. 1

<u>*Формулы Байеса.*</u> Предположим, что выполняются условия предыдущего пункта и дополнительно известно, что событие A произошло. Возникает вопрос: с какой из гипотез следует вероятнее всего связывать появление события A?

Для ответа на этот вопрос нужно вычислить условную вероятность каждой гипотезы при условии, что событие A произошло, и той из гипотез, которая будет иметь наибольшую вероятность $P(H_i/A)$, отдать предпочтение.

Выразим условные вероятности гипотез $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, …, $P(H_n/A)$ из равенств, которые можно записать по теореме о вероятности произведения события A и гипотезы H_i:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},\text{ где } P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k),$$

следовательно,

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Получили *формулу Байеса* (*формулу вероятности гипотезы после испытания*). Она позволяет по известным (до проведения опыта) *априорным* вероятностям гипотез $P(H_i)$ и условным вероятностям $P(A/H_i)$ определить условную вероятность $P(H_i/A)$, которую называют *апостериорной* (то есть полученной при условии, что в результате опыта событие A уже произошло).

►**Пример.** В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. Имеется 20 вопросов, причем: отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10 и плохо подготовленный – на 5. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сможет ответить на доставшийся ему вопрос, и вероятность того, что этот студент плохо подготовлен и ему просто повезло с вопросом.

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 – студент подготовлен отлично, H_2 – студент подготовлен хорошо, H_3 – студент подготовлен удовлетворительно, H_4 – студент подготовлен плохо. Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{3}{10}=0{,}3,\ P(H_2)=\frac{4}{10}=0{,}4,\ P(H_3)=\frac{2}{10}=0{,}2,\ P(H_4)=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

Из условия следует, что условные вероятности события A – вопрос «хороший» – при каждой из гипотез составляют

$$P(A/H_1)=\frac{20}{20}=1, \qquad P(A/H_2)=\frac{16}{20}=0{,}8,$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}=0{,}5, \qquad P(A/H_4)=\frac{5}{20}=0{,}25.$$

Найдем $P(A)$ по формуле полной вероятности и $P(H_4/A)$ по формуле Байеса:

$$P(A)=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}25=0{,}745,$$

$$P(H_4/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}25}{0{,}745}=0{,}034.$$ ◄

Ответьте самостоятельно на вопрос следующего примера.

►**Пример.** Обнаружен факт сброса в водоем неочищенных стоков. Пусть известно, что потенциальными источниками загрязнения являются два предприятия, причем исходно вероятность того, что сброс произведен первым предприятием, оценивается в 90%, а вторым в – 10%. Известно, что в 16% стоков первого предприятия и в 89% второго ртуть превышает предельно допустимую концентрацию (ПДК). Определить, какому предприятию может принадлежать обнаруженный сброс, если взятая проба показывает превышение ПДК по ртути. ◄

ЛЕКЦИЯ 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВЫХ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Схема Бернулли. Пусть *последовательно* проводятся n *независимых* и *одинаковых* испытаний в одних и тех же условиях, в результате каждого из которых наступает или не наступает некоторый исход. Исход любого испытания не зависит от предыдущих. Если испытание может закончиться ровно двумя исходами:

– либо событием A с одной и той же вероятностью p,

– либо событием $\overline{A}$ с одной и той же вероятностью $q \overset{\substack{\text{по свойству 4} \\ \text{вероятности}}}{=} 1-p$,

то подобная последовательность испытаний называется *схемой Бернулли.*

Пример такого эксперимента – многократное подбрасывание монеты, когда с вероятностью $p = 0{,}5$ выпадает герб (событие A) и с вероятностью $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – цифра (событие $\overline{A}$).

Как найти вероятность $P_n(k)$ события A, состоящего в том, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз и не появится $n-k$ раз? Например, нужно найти вероятность того, что при десяти подбрасываниях монеты цифра выпадет ровно два раза: $P_{10}(2)$.

Обозначим появление A в i-том испытании событием A_i, $i = 1, ..., n$. Понятно, что событие A может произойти k раз не одним способом. Запишем несколько возможных комбинаций появления исхода A ровно k раз:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n,$$
$$\ldots,$$
$$A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n,$$
$$\ldots,$$
$$\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-k} \cdot A_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Событие A произойдет, когда произойдет первая, вторая, … или последняя комбинация, поэтому

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n + \ldots +$$
$$+ A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n + \ldots +$$
$$+ \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-k} \cdot A_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot A_n .$$

Слагаемые в правой части – несовместные, непересекающиеся события, поэтому вероятность события A равна сумме вероятностей каждого слагаемого:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) + \ldots +$$
$$+ P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \overline{A}_{m+2} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) + \ldots +$$
$$+ P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-k} \cdot A_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot A_n) .$$

Множители в скобках – события независимые, поэтому вероятность каждого произведения равна произведению вероятностей каждого множителя:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_k) \cdot P(\overline{A}_{k+1}) \cdot P(\overline{A}_{k+2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) + \ldots +$$
$$+ P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_m) \cdot P(\overline{A}_{m+1}) \cdot P(\overline{A}_{m+2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) + \ldots +$$
$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_{n-k}) \cdot P(A_{n-k+1}) \cdot \ldots \cdot P(A_n) .$$
$$= \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k \text{ раз}} + \ldots + \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k \text{ раз}} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} =$$
$$= p^k \cdot q^{n-k} + \ldots + q^{n-k} \cdot p^k .$$

Возникает вопрос: сколько слагаемых вида $p^k \cdot q^{n-k}$? Для k элементов вида A (или $n-k$ элементов вида $\overline{A}$) можно выбрать адреса на n позициях $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ разными способами. Так как элементы между собой не различаются, то комбинаций на самом деле во столько раз меньше, сколькими способами можно перемешать k элементов между собой. Всего таких способов $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1$. Поэтому в сумме имеется $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (или C_n^{n-k}) слагаемых, то есть

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{, где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Полученное равенство называется *формулой Бернулли.*

При выводе этой формулы мы попутно показали, что

$$C_n^k = C_n^{n-k} .$$

Рассмотрим формулу, которая называется *биномом Ньютона*:

$$(p+q)^n = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \ldots + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \ldots + C_n^n \cdot p^n \cdot q^0 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} .$$

Очевидно, что вероятность $P_n(k)$ равна соответствующему слагаемому в разложении бинома. Учитывая, что $(p+q)^n = 1^n = 1$, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1.$$

Таким образом, *вероятность того, что в серии независимых одинаковых испытаний событие A появится любое число раз от 0 до n равна единице*. Понятно, что $P_n(0)$ и $P_n(n)$ малы, а значение $P_n(k)$ находится между ними где-то посередине.

Вероятность события, состоящего в том, что при n испытаниях событие A появится *не менее k_1 и не более k_2 раз* ($0 \le k_1 \le k_2 \le n$), находится по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится *менее k_1 раз*, находится по формуле

$$P_n\left(0 \le k < k_1\right) = \sum_{k=0}^{k_1} P_n\left(k\right) = \sum_{k=0}^{k_1} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится *хотя бы один раз*, находится по формуле

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - q^n.$$

►**Пример.** Вероятность заболевания гриппом во время эпидемии равна 0,4. Найти вероятность того, что из шести сотрудников фирмы заболеет ровно четыре; не более четырех.

Решение. В данной задаче применима схема Бернулли, где $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 0{,}6$, $n = 6$, $k = 4$ ($k \le 4$), поэтому

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^2 = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}14.$$

На второй вопрос можно ответить двумя способами:

1. $P_6(0 \le k \le 4) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) \approx 0{,}96$;
2. $P_6(0 \le k \le 4) = 1 - P_6(5 \le k \le 6) = 1 - P_6(5) - P_6(6) \approx 0{,}96$.◄

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Определение 5.1. Число k_0, которому соответствует вероятность $P_n(k_0)$, наибольшая из всех $P_n(k)$, называется **наивероятнейшим числом появлений события A**.

Как определить k_0? Конечно, чтобы найти k_0, можно вычислить все $P_n(k)$ и выбрать из них наибольшую. Но этот способ неудобный. Попробуем получить другой способ определения k_0.

По определению 5.1:

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1), \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1). \end{cases}$$

Применим формулы Бернулли к обеим частям неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{k_0!(n-k_0)!} \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0} \geq \dfrac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} \cdot p^{k_0+1} \cdot q^{n-k_0-1}, \\ \dfrac{n!}{k_0!(n-k_0)!} \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0} \geq \dfrac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!} \cdot p^{k_0-1} \cdot q^{n-k_0+1}. \end{cases}$$

Разделим обе части первого неравенства на выражение

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0-1)!} \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0-1},$$

обе части второго – на выражение

$$\frac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0)!} \cdot p^{k_0-1} \cdot q^{n-k_0}.$$

Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{n-k_0} \geq \dfrac{p}{k_0+1}, \\ \dfrac{p}{k_0} \geq \dfrac{q}{n-k_0+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} qk_0 + q \geq pn - k_0 p, \\ pn - pk_0 + p \geq qk_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} k_0(\underbrace{q+p}_{1}) \geq pn - q, \\ -k_0(\underbrace{q+p}_{1}) \geq -p(n+1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_0 \geq np - q, \\ k_0 \leq np + p. \end{cases}$$

Таким образом,

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Длина отрезка, в который попадает k_0, равна

$$|np + p - np + q| = 1.$$

Если число $np+p$ не является целым, то k_0 равно целой части числа $np+p$:

$$k_0 = [np + p],$$

если $np+p$ – целое, то k_0 имеет два значения:

$$k_0' = np - q \qquad \text{и} \qquad k_0'' = np + p.$$

►**Пример.** Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий.

Решение. По условию $n = 75$, $p = 0{,}3$, поэтому $q = 1 - p = 0{,}7$. Составляем двойное неравенство

$$75 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le k_0 \le 75 \cdot 0{,}3 + 0{,}3,$$

$$21{,}8 \le k_0 \le 22{,}8.$$

Следовательно,

$$k_0 = [22{,}8] = 22. ◄$$

<u>*Асимптотические формулы.*</u> Применение формулы Бернулли при больших значениях n приводит к произведению очень больших ($n!$) и очень малых чисел (p^k и p^{n-k}), что плохо с вычислительной точки зрения, поэтому приходится пользоваться приближенными *асимптотическими формулами*.

Формула Пуассона

Рассмотрим случай, когда n (число независимых одинаковых испытаний) достаточно большое ($n >> 1$), p (вероятность исхода A в одном испытании) – малая ($p << 1$). Обозначим произведение $np = \lambda$. Тогда формула Бернулли принимает вид

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ – второй замечательный предел. Поэтому

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ при } n \to \infty,$$

то есть

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Полученное приближённое равенство называется *формулой Пуассона*.

Вероятность события, заключающегося в том, что событие A появится *не более* k_1 раз, очевидно, вычисляется по формуле

$$P_n(k \le k_1) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{k_1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

►**Пример.** При транспортировке и разгрузке керамической отделочной плитки повреждается 2,5%. Найти вероятность того, что в партии из 200 плиток поврежденными окажутся: а) ровно 4; б) не более 6.

Решение. Поскольку вероятность $p = 0{,}025$ повреждения плитки мала, число плиток $n = 200$ – достаточно большое и $\lambda = np = 5$, можно воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_{200}(4) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} \approx 0{,}18;$$

$$P_{200}(k \le 6) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{k_1} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-5} \cdot \sum_{k=0}^{6} \frac{5^k}{k!} \approx 0{,}76. \blacktriangleleft$$

Локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа

При достаточно большом n и не слишком малых p и q ($p \ge 0{,}1$) формула Пуассона дает значительную погрешность и применяется другое приближение формулы Бернулли – *локальная формула Муавра – Лапласа*, которую можно получить из формулы Бернулли, совершая предельный переход и применяя формулу Стирлинга для вычисления $n!$:

$$n! = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\Theta(n)}, \text{ где } |\Theta(n)| \le \frac{1}{12n}.$$

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(-x),\ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эта формула табулирована (приложение 1), причём в силу четности функции $\varphi(-x) = \varphi(x)$ таблица ее значений составлена для $x \ge 0$.

Если при сохранении условий предыдущего пункта нас интересует вероятность того, что при n испытаниях событие A появится *не менее* k_1 *и не более* k_2 *раз*, то формула Бернулли с учетом предельного перехода превращается в *интегральную формулу Муавра – Лапласа*.

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$=\left| x(k)-x(k-1)=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}-\frac{k-1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}=\Delta x \right| =$$

$$=\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Delta x \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

где

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Обозначим $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\Phi(x)$ (интеграл от чётной функции – функция нечётная). Тогда

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ (интеграл от $\varphi(x)$) называется *функцией Лапласа* и представляет собой не выражающийся через элементарные функции интеграл. Поскольку функция Лапласа нечетная ($\Phi(-x)=-\Phi(x)$) и быстро приближается к своему асимптотическому значению 0,5, то таблица ее значений (приложение 2) составлена для $0\le x\le 5$. Для больших значений аргумента ($x>5$) с большой точностью можно брать $\Phi(x)=0{,}5$.

►**Пример.** Вероятность того, что зашедший в ресторан посетитель сделает заказ, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 зашедших не менее 75 сделают заказ.

Решение. Так как $n=100$ велико, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$ не малы, $k_1=75$, $k_2=100$, применяем интегральную формулу Муавра – Лапласа. Определяем x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}2,\quad x_2=\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа находим

$$\Phi(x_1)=\Phi(-1{,}2)=-\Phi(1{,}2)=-0{,}385,\ \Phi(x_2)=\Phi(5)=0{,}5.$$

Наконец, получаем искомую вероятность

$$P_{100}(75\le k\le 100)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0{,}5+0{,}385=0{,}885.$$◄

Оценим *вероятность того, что относительная частота события отклоняется от его статистической вероятности не более чем на* ε, то есть найдём $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$.

Рассмотрим неравенство $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$:

$$-\varepsilon<\frac{m}{n}-p<\varepsilon,$$

$$\underbrace{(p-\varepsilon)n}_{k_1}<m<\underbrace{(p-\varepsilon)n}_{k_2},$$

$$x_1=\frac{(p-\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}},$$

$$x_2=\frac{(p+\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Отсюда

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

для $\varepsilon>0$.

►**Пример.** В среднем число солнечных дней в году для данной местности равно 100. Найти вероятность того, что в данном году их число отклонится от среднего не более чем на 10.

Решение. По условию $n=365$, $k=100$, $p=\frac{100}{365}$, $q=\frac{265}{365}$, $\varepsilon=\frac{10}{365}$.

Тогда

$$x=\frac{10}{365}\cdot\sqrt{\frac{365}{\frac{100}{365}\cdot\frac{265}{365}}}=10\cdot\sqrt{\frac{365}{100\cdot 265}}=\sqrt{\frac{365}{265}}\approx 1{,}17,$$

$$P_{365}(90<k<110)=2\Phi(1{,}17)=2\cdot 0{,}319=0{,}758.$$◄

РАЗДЕЛ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ЛЕКЦИЯ 6. ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ФОРМЫ

Дискретные и непрерывные случайные величины

Определение 6.1. **Случайной** называется **величина** (СВ), которая в результате опыта может принять одно значение из нескольких возможных, причем заранее неизвестно, какое именно.

Примеры случайных величин: число очков, которое выпадет при бросании игральной кости; число попаданий при трёх выстрелах; число вызовов, поступивших на АТС за час. В двух первых примерах случайные величины могут принимать отдельные значения, которые можно заранее перечислить. Число этих значений конечно. В последнем случае множество возможных значений счётное (бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать).

Определение 6.2. Случайная величина, принимающая конечное или счётное множество значений, называется **дискретной** (ДСВ).

Возможные значения ДСВ соответствуют изолированным точкам на числовой оси.

Приведём примеры случайных величин другого типа: координата точки, случайно брошенной на отрезок; дальность полёта снаряда; вес наугад взятого зерна; возможное время безотказной работы какого-либо прибора. Множество значений этих величин заранее перечислить невозможно.

Определение 6.3. Случайная величина, принимающая несчётное множество значений, называется **непрерывной** (НСВ).

Другими словами, НСВ может принимать любые значения из некоторого числового интервала.

Случайная величина и случайное событие связаны следующим образом: некоторому событию A взаимно однозначно соответствует случайная величина, которая при появлении события A принимает значение 1, при не появлении события A – значение 0.

Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами, их значения – малыми латинскими буквами. Например, СВ X – число появлений герба при трёх бросаниях монеты – может принять одно из четырёх возможных значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Описание случайных величин. Закон распределения ДСВ. Для описания случайной величины недостаточно знать её возможные значения.

Нужно ещё знать вероятность того, что она примет данное возможное значение. Например, в группе 27 студентов. В какой-то день регистрируется число студентов, пришедших на занятия, – СВ X. Её возможные значения: 0, 1, 2, 3, …, 27. Понятно, что у значений, например, $x_1 = 0$, $x_{27} = 26$, $x_{28} = 27$ вероятности разные.

Рассмотрим ДСВ X со всеми её возможными значениями x_1, x_2, …, x_n. В результате опыта ДСВ X может принять одно из этих значений с соответствующей вероятностью:

$$p_1 = P(X = x_1),\ p_2 = P(X = x_2),\ \dots,\ p_n = P(X = x_n).$$

События

$$X = x_1,\ X = x_2,\ \dots,\ X = x_n \tag{1}$$

образуют полную группу попарно несовместных случайных событий, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ (\textit{условие нормировки}).}$$

Если множество значений ДСВ X бесконечно, то условие нормировки заменяется следующим: бесконечный ряд p_i должен быть сходящимся, и его сумма должна быть равной 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

ДСВ X полностью описана с вероятностной точки зрения, если указана вероятность каждого из событий (1).

Определение 6.4. Законом распределения случайной величины называется любое соответствие, устанавливающее связь между её возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения ДСВ X может иметь различные формы.

1) *Таблица* (называется *рядом распределения* ДСВ X).

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Например, ряд распределения выпавших очков на игральном кубике имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) *График.* Ось абсцисс – возможные значения ДСВ X, ось ординат – их вероятности. Полученные точки соединяют ломаной линией, которая называется *многоугольником распределения* (рис. 1).

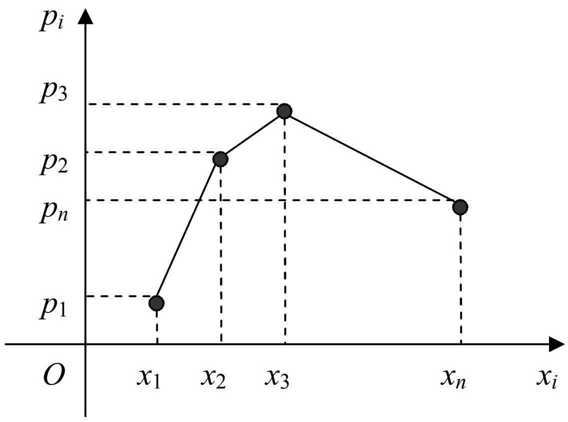


Рис. 1

3) *Формула* вида $p_i = P(X = x_i)$.

►**Пример.** Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея четыре патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд и многоугольник распределения боезапаса, оставшегося неизрасходованным.

Решение. Пусть ДСВ X – число неизрасходованных патронов. Возможные значения ДСВ X:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$$

Вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = x_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064,$$

$$p_2 = P(X = x_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096,$$

$$p_3 = P(X = x_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24,$$

$$p_4 = P(X = x_4) = 0{,}6.$$

Проверим выполнимость условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}064 + 0{,}096 + 0{,}24 + 0{,}6 = 1.$$

Ряд распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,096	0,24	0,6

Построим многоугольник распределения ДСВ X (рис. 2).

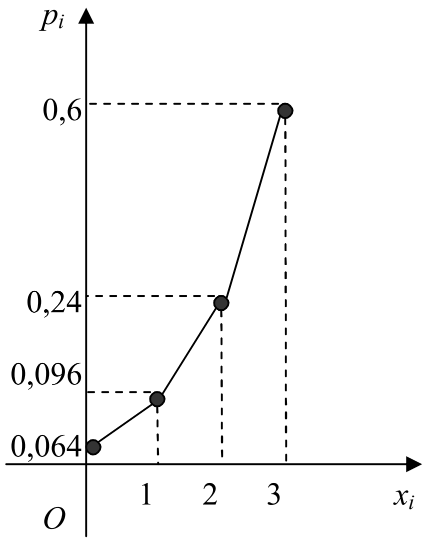


Рис. 2

◄

Операции над случайными величинами

Определение 6.5. Суммой двух случайных величин X и Y называется случайная величина Z такая, что:

1) возможные значения Z есть суммы возможных значений СВ X и СВ Y;

2) вероятности возможных значений Z есть произведения соответствующих вероятностей значений СВ X и СВ Y.

Определение 6.6. Произведением двух случайных величин X и Y называется случайная величина N такая, что:

1) возможные значения N есть произведения возможных значений СВ X и СВ Y;

2) вероятности возможных значений N есть произведения соответствующих вероятностей значений СВ X и СВ Y.

►**Пример.** Дискретные случайные величины X и Y имеют следующие ряды распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

y_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти: а) $A = X + 2$; б)

$B = X + Y$.

Решение.

а)

a_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

a_i	0-1	0+0	0+1	1-1	1+0	1+1	2-1	2+0	2+1	3-1	3+0	3+1
p_i	0,02	0,03	0,05	0,08	0,12	0,2	0,06	0,09	0,15	0,04	0,06	0,1

Одинаковые значения случайной величины можно записать один раз, предварительно сложив соответствующие вероятности:

a_i	-1	0	1	2	3	4
p_i	0,02	0,03	0,05	0,08	0,12	0,2

◄

Плотность вероятности. Рядом распределения удобно описывать дискретные случайные величины. Для непрерывных случайных величин эта форма закона распределения не подходит. Во-первых, нельзя перечислить одно за другим все её возможные значения. Во-вторых, вероятность отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Действительно, если каждому её отдельному значению сопоставить ненулевую вероятность, то при суммировании всех вероятностей можно получить число, отличное от единицы, так как множество всех значений непрерывной случайной величины несчётно.

Пусть, например, наугад разрезается нить некоторой длины L. Поскольку точек, в которых можно сделать разрез, бесконечно много, то вероятность совпадения разреза с некоторой конкретной точкой будет исчезающе малой. Поэтому уместно рассматривать вероятность попадания значения непрерывной случайной величины не в конкретную точку, а в малый интервал.

Определение 6.7. Плотностью вероятности [1] $f(x)$ **НСВ** X называется предел отношения вероятности попадания значений НСВ X в малый интервал $[x, x+\Delta x]$ к длине этого интервала Δx при $\Delta x \to 0$:

[1] Плотность вероятности ещё называют *дифференциальной функцией распределения случайной величины*.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(X=x+\Delta x)-P(X=x)}{\Delta x}.$$

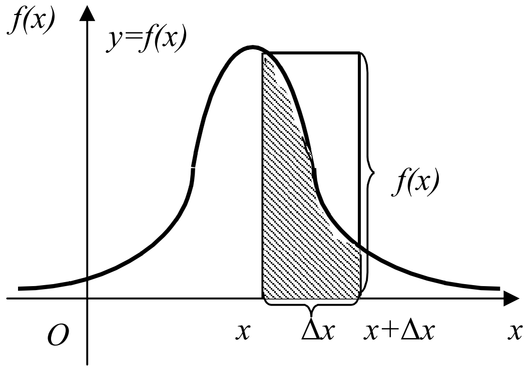


Рис. 3

Плотность вероятности $f(x)$ является *формой* закона распределения непрерывной случайной величины, она может иметь вид, как на рис. 3.

Из определения 6.7 следует, что

$$P(x\le X<x+\Delta x)=f(x)\Delta x+\text{o}(\Delta x),$$

где $\text{o}(\Delta x)$ – величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Значит, вероятность того, что случайная величина попадет в маленький интервал, приблизительно равна плотности вероятности $f(x)$, умноженной на длину этого интервала Δx. Величина $f(x)\Delta x$ называется *элементом вероятности*. Геометрически – это площадь прямоугольника со сторонами Δx и $f(x)$ (рис. 3). Тогда вероятность попадания значений НСВ X на отрезок $[a;b]$ будет равна сумме элементов вероятности на всём этом отрезке, то есть площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$:

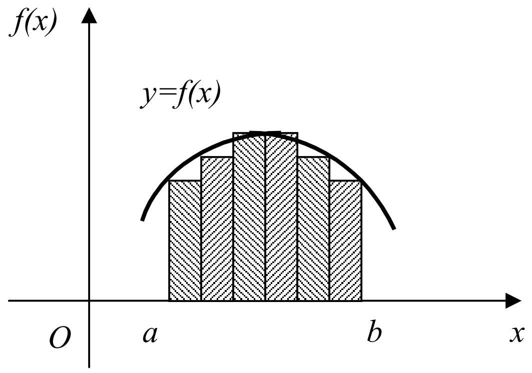


Рис. 4

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx,$$

так как площадь заштрихованной фигуры будет стремиться к площади криволинейной трапеции при $\Delta x\to 0$ (рис. 4).

Свойства плотности вероятности случайной величины

1) Плотность вероятности – неотрицательная функция (что следует из неотрицательности предела $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}$), то есть

$$f(x)\ge 0.$$

2) Для плотности вероятности выполняется условие нормировки (интеграл в бесконечных пределах плотности вероятности равен единице):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Это свойство отражает достоверность события «$-\infty \le X \le \infty$».

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

3) Плотность вероятности – непрерывная или кусочно-непрерывная функция.

►**Пример.** Плотность вероятности СВ X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и вероятность попадания значений СВ X в интервал $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$; построить график плотности вероятности $f(x)$ распределения случайной величины.

Решение. Так как все возможные значения СВ X принадлежат отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = a\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2a = 1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{2}.$$

Если $-\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x.$$

При $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ имеем

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{1}{2}\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Изобразим график полученной плотности вероятности (рис. 5).

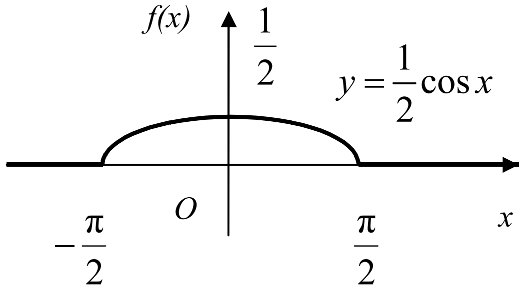


Рис. 5

◄

Функция распределения. Ряд распределения является исчерпывающей характеристикой для дискретной случайной величины. Для непрерывной случайной величины ряд распределения построить нельзя. Для количественной характеристики как дискретной, так и непрерывной случайной величины удобно пользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X < x$. Вероятность этого события есть некоторая функция от x, которая называется *функцией распределения СВ* X и обозначается $F(x)$, то есть $F(x) = P(X < x)$.

Определение 6.8. Функцией распределения[2] $F(x)$ **случайной величины** X называется вероятность того, что СВ X в результате опыта примет значение, меньшее заданного.

Обозначение:

$$F(x) = P(X < x),\ -\infty < x < \infty.$$

Если рассматривать СВ X как случайную точку на оси Ox, то функция распределения $F(x)$ есть вероятность попадания точки X левее точки x в результате реализации опыта.

Свойства функции распределения случайной величины

1) $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из определения функции распределения и из свойства (1) вероятности (лекция 1).

2) $F(x)$ – монотонно неубывающая функция, то есть для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $F(x_1) \le F(x_2)$.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Тогда

[2] Функцию распределения ещё называют *интегральной функцией распределения случайной величины*.

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$$

или

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Так как вероятность $P(x_1 \le X < x_2)$ не может быть отрицательной величиной, из последнего соотношения имеем

$$F(x_1) \le F(x_2) \text{ при } x_1 < x_2.$$

3) Вероятность попадания значений СВ X в интервал от x_1 до x_2 равна разности значений функции распределения в точках x_1 и x_2:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

По свойству 2 имеем

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

4) Вероятность того, что НСВ X примет одно определённое значение, например, x_0, равна нулю:

$$P(X = x_0) = 0.$$

Действительно,

$$P(X = x_0) \le P(x_0 \le X < x_0 + \Delta x) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

При $\Delta x \to 0$ $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \to 0$. Значит, $P(X = x_0) = 0$. Поэтому выполняются равенства

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2).$$

5) $F(-\infty) = 0$.

Действительно, СВ X не может иметь значений, которые были бы меньше отрицательной бесконечности.

6) $F(\infty) = 1$.

Это свойство отражает тот факт, что событие «СВ X принимает значение, меньшее положительной бесконечности» – достоверно. Таким образом, все значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$.

7) $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x и имеет предел справа в любой точке.

То, что функция распределения имеет предел слева и справа в любой точке, следует из монотонности и ограниченности $F(x)$ (свойства 2 и 1 соответственно). Для доказательства непрерывности слева осталось показать, что

$$\lim_{x_n \to x_0 - 0} F(x_n) = F(x_0).$$

Пусть $\{x_n\}$ – любая возрастающая последовательность чисел, сходящаяся к x. Тогда

$$\{X < x\} = \{X < x_1\} \cup \{x_1 \le X < x_2\} \cup \ldots \cup \{x_{n-1} \le X \le x_n\} \cup \ldots.$$

По аксиоме 3 лекции 2 имеем

$$P(X < x) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) + \ldots + P(x_{n-1} \le X \le x_n) + \ldots .$$

Так как ряд справа состоит из положительных чисел и сходится к $P(X < x)$, то остаток ряда, начиная с некоторого номера N, будет меньше ε, $\varepsilon > 0$ (теорема об остатке сходящегося ряда):

$$P(X < x) \le P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) + \ldots + P(x_{n-1} \le X \le x_n) + \varepsilon .$$

Используя свойство 3, выразим вероятности событий через функцию распределения:

$$F(x) \le F(x_1) + (F(x_2) - F(x_1)) + \ldots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) + \varepsilon ,$$

откуда

$$F(x) \le F(x_n) + \varepsilon ,$$

или

$$| F(x) - F(x_n) | < \varepsilon .$$

Это значит, что

$$\lim_{\substack{x_n \to x-0 \\ n \to \infty}} F(x_n) = F(x) .$$

Функция распределения ДСВ. Рассмотрим построение функции распределения для ДСВ X, заданной многоугольником распределения (рис. 6).

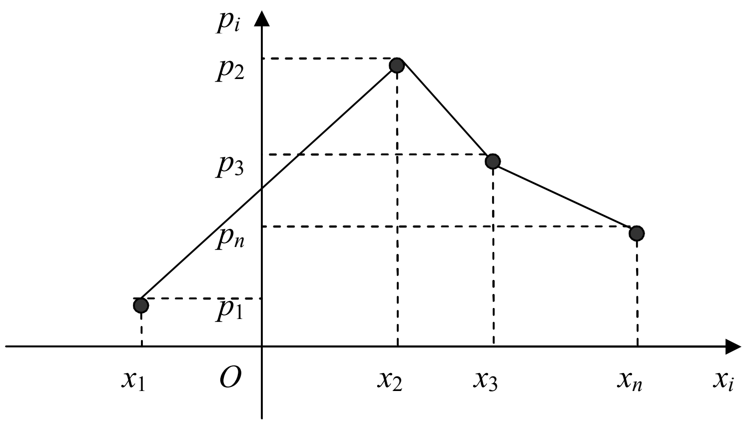


Рис. 6

Пока аргумент функции $F(x)$ остаётся меньшим или равным x_1, функция распределения $F(x)$ равна нулю (рис. 7), так как нет ни одного значения x, которое было бы меньше x_1.

В точке $x_1 + 0$ функция $F(x)$ скачком принимает значение p_1 и остаётся постоянной в интервале от x_1 до x_2.

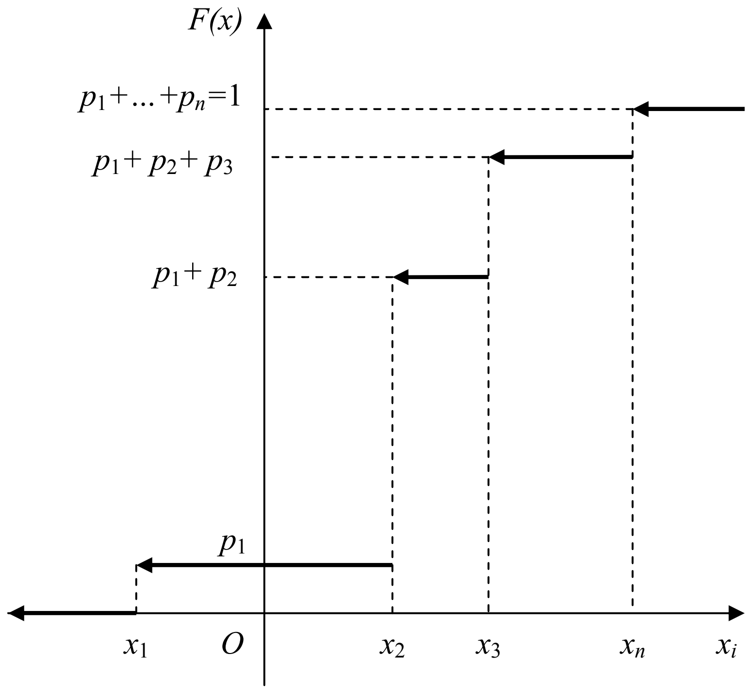


Рис. 7

В точке x_2+0 функция $F(x)$ скачком принимает значение p_1+p_2, так как событие «ДСВ X приняла значение, меньшее x_2+0» состоит из двух несовместных событий «ДСВ X приняла значение x_1» с вероятностью p_1 и «ДСВ X приняла значение x_2» с вероятностью p_2.

Аналогично вычисляются значения $F(x)$ для остальных x. Поэтому для ДСВ X функция распределения равна сумме вероятностей тех ее значений x_k, которые меньше x:

$$F(x)=\sum_{x_k<x} P(X=x_k).$$

Из-за такого способа вычисления функцию распределения ДСВ X называют *накопленной* или *кумулятивной вероятностью*.

Как видно из рисунка 7, график $F(x)$ для ДСВ X имеет ступенчатый вид. Скачки совершаются в точках возможных значений. Длина скачка равна соответствующей вероятности.

►**Пример.** Построим функцию распределения и её график для ДСВ X из примера пункта «Описание случайных величин».

Решение. Если $x \le 0$, то

$$F(x)=P(X<0)=0.$$

Если $0<x\le 1$, то

$$F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}064\,.$$

Если $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16\,.$$

Если $2 < x \le 3$, то

$$F(x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}4\,.$$

Если $x > 3$, то

$$F(x) = P(X > 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1\,.$$

Таким образом, функция распределения данной ДСВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}064 \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}16 \quad \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}4 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Изобразим график функции распределения (рис. 8).

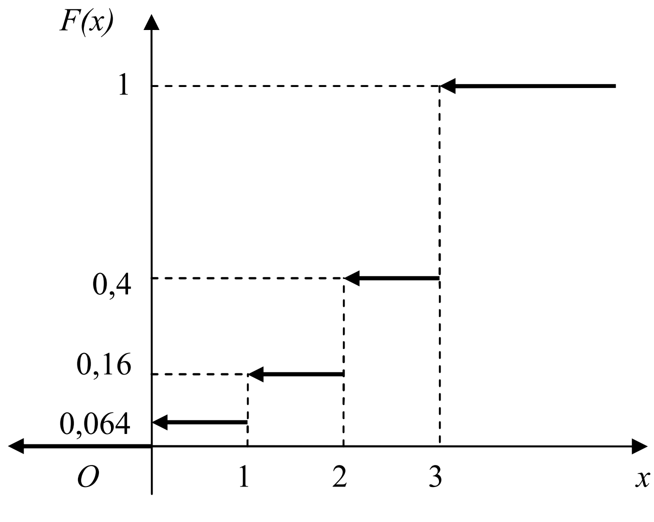


Рис. 8

◀

При увеличении числа возможных значений случайной величины и уменьшении интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки – меньше. В пределе функция распределения становится непрерывной. Непрерывная функция распределения используется для описания НСВ.

<u>Функция распределения НСВ.</u> Функция распределения СВ X – это функция действительной переменной x, определяющая вероятность того,

что случайная величина принимает значения, меньшие некоторого фиксированного числа x:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x).$$

Тогда из формулы

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

следует, что для любых $x \in R$

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Геометрически функция распределения есть площадь фигуры, лежащей левее точки x, ограниченной кривой распределения $y = f(x)$ и осью абсцисс. Из последней формулы и теоремы Барроу для случая, когда $f(x)$ непрерывна, следует, что производная от функции распределения равна плотности распределения:

$$F'(x) = f(x).$$

Таким образом, функция распределения является универсальной характеристикой случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

►**Пример.** Функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти её плотность вероятности $f(x)$.

Решение. Плотность вероятности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением

$$F'(x) = f(x).$$

В соответствии с этим равенством имеем

$$f(x) = F'(x) = 0' = 0 \text{ при } x \le 0;$$

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ при } x > 0.$$

Таким образом, плотность вероятности определяется функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$ ◄

►**Пример.** Найти функцию распределения $F(x)$ НСВ X, плотность вероятности которой определена функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0 \quad \text{и} \quad x>2,\\ x & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 2-x & \text{при} \quad 1<x\le 2.\end{cases}$$

Решение.

При $x\le 0$ получаем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dx=0.$$

При $0<x\le 1$ находим

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} tdt=0+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x=\frac{x^2}{2}.$$

При $1<x\le 2$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{x} f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1} tdt+\int_{1}^{x}(2-t)dt=$$

$$=0+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x=\frac{1}{2}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{x^2}{2}+2x-1.$$

При $x>2$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} f(t)dt=$$

$$=F(2)+\int_{2}^{x} 0dt=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad 1<x\le 2.\end{cases}$$

Изобразим графики функций $f(x)$ (рис. 9) и $F(x)$ (рис. 10).

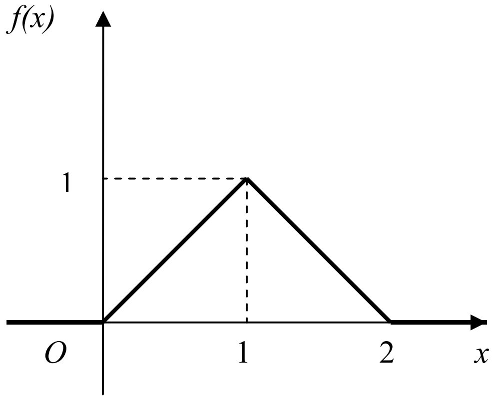


Рис. 9

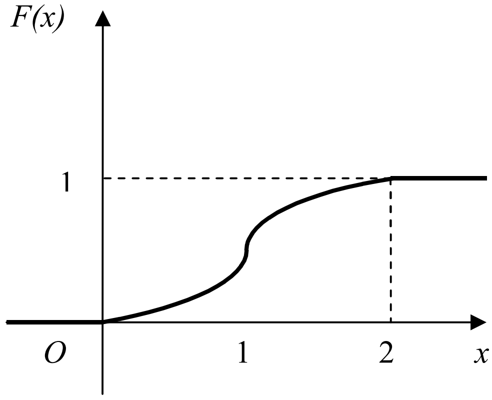


Рис. 10

◄

ЛЕКЦИЯ 7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание. Полное описание случайной величины дается её законом распределения или плотностью вероятности, или функцией распределения. Но иногда достаточно знать более простые характеристики. Например, среднее значение всех возможных значений случайной величины.

►**Пример.** Два стрелка стреляют по мишени. Первый выбил одну десятку, три восьмерки, четыре шестерки и две четверки; второй – две десятки, одну восьмерку, три шестерки и две четверки. Кто из них стреляет лучше?

Решение. Средний результат первого стрелка:

$$\overline{X_1} = \frac{1\cdot 10 + 3\cdot 8 + 4\cdot 6 + 2\cdot 4}{10} = 6{,}6\,.$$

Средний результат второго стрелка:

$$\overline{X_2} = \frac{2\cdot 10 + 1\cdot 8 + 3\cdot 6 + 2\cdot 4}{8} = 6{,}75\,.$$

Понятно, что второй стрелок более меткий. ◄

В общем случае, когда одно и то же испытание производится в неизменных условиях N раз, при этом СВ X принимает m_1 раз значение x_1 (статистический вес x_1), m_2 раз принимает значение x_2, …, m_n раз принимает значение x_n и $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = N$, средневзвешенное значение случайной величины $\overline{X}$ находится по формуле

$$\overline{X}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{N}=x_1\frac{m_1}{N}+...+x_n\frac{m_n}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{m_i}{N}.$$

При большом числе испытаний относительная частота $\frac{m_i}{N}$, $i=\overline{1,n}$ группируется около вероятности p_i того, что СВ X примет значение x_i. Следовательно, средние арифметические значения $\overline{X}$ СВ X в достаточно длинной серии испытаний будут группироваться вокруг величины

$$x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=M(X),$$

которая называется *математическим ожиданием* СВ X.

Математическое ожидание еще называют *центром распределения* случайной величины. Это название возникло по следующей причине: если в точках x_1, x_2, …, x_n на оси Ox находятся соответственно массы p_1, p_2, …, p_n, то координата x центра тяжести такой системы материальных точек находится по формуле

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i},$$

которая совпадает с предыдущей формулой в силу условия нормировки $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

Определение 7.1. Математическим ожиданием ДСВ X называется сумма произведений всех её возможных значений на соответствующие вероятности.

Обозначение: $M(X)$, m_x, a.

Если множество значений ДСВ X бесконечно, то её математическое ожидание равно сумме бесконечного ряда:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$$

при условии, что ряд абсолютно сходится. Иначе математического ожидания не существует.

Математическое ожидание ДСВ X может не совпадать ни с одним из её значений, то есть может находиться между этими значениями. Отметим, что математическое ожидание – это постоянное число, то есть величина неслучайная, а среднее арифметическое $\overline{X}$ может изменяться при дублировании опыта, то есть является величиной случайной.

Математическое ожидание НСВ X введём по аналогии с определением 6.1.

Пусть НСВ X с плотностью вероятности $f(x)$ принимает значения из отрезка $[a;b]$ (рис. 1).

Разобьем этот отрезок на n элементарных отрезков

$$[x_0 = a; x_1],\ [x_1; x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}; x_n = b].$$

Длины этих отрезков равны

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

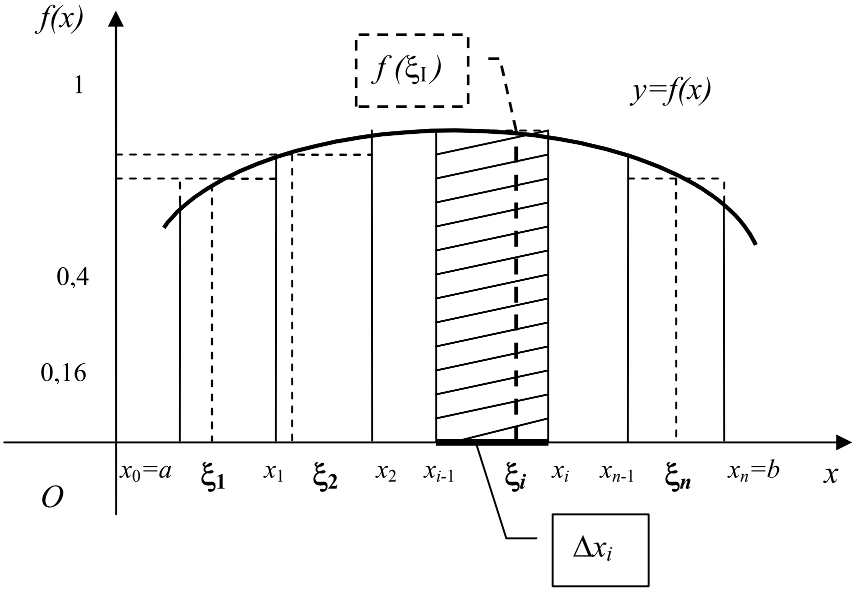


Рис. 1

На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ произвольно выберем точку ξ_i и составим произведение

$$f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которое приближенно равно вероятности p_i попадания значений НСВ X в интервал $(x_{i-1}; x_i)$, то есть

$$f(\xi_i)\Delta x_i \approx p_i.$$

Просуммируем эти произведения:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i.$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше $\max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i$.

Значит, $$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b x f(x)dx.$$

Полученный определенный интеграл называется *математическим ожиданием НСВ* X, то есть

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx\,.$$

Если все возможные значения НСВ X принадлежат интервалу $(-\infty;+\infty)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\,.$$

Если в последней формуле несобственный интеграл является абсолютно сходящимся, то математическое ожидание не существует.

Механическая интерпретация последней формулы такова. Пусть масса стержня x бесконечной длины меняется пропорционально плотности распределения $f(x)$. Тогда $M(X)$ дает координаты центра тяжести этого стержня.

►**Пример.** Цементацией называется насыщение стальной поверхности атомами углерода. Пусть НСВ X – глубина проникновения данного атома. Её плотность вероятности равна

$$f(x)=\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Найти среднюю глубину проникновения атомов углерода.

Решение.

$$M(X)=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}dx=$$

$$=\left|\ t=\frac{x}{a},\quad x=at,\quad dx=adt\ \right|=a\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-t}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} t=u & e^{-t}dt=dv \\ du=dt & v=\int dv=\int e^{-t}dt=-e^{-t}\end{array}\right|=$$

$$=a\lim_{b\to+\infty}\left(-te^{-t}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-t}dt\right)=a\lim_{b\to+\infty}\left(-te^{-t}-e^{-t}\right)\Big|_0^b=-a\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}+\frac{1}{e^t}\right)\Big|_0^b=$$

$$=-a\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^b}+\frac{1}{e^b}-0-1\right)=a\,.$$ ◄

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C\,.$$

Доказательство. Постоянная величина C есть значение СВ X, которое оно принимает с вероятностью, равной единице, то есть

$$p = P(X = C) = 1.$$

По определению математического ожидания получаем

$$M(X) = C \cdot 1 = C.$$

2) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Доказательство. Пусть ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	x_1	x_2
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$

Пусть СВ Y также принимает одно значение из двух возможных. Причём их вероятности, вообще говоря, зависят от того, какое значение приняла СВ X:

y_i	y_1	y_2
$P(Y = y_i / X = x_1)$	$P(Y = y_1 / X = x_1)$	$P(Y = y_2 / X = x_1)$
$P(Y = y_i / X = x_2)$	$P(Y = y_1 / X = x_2)$	$P(Y = y_2 / X = x_2)$

Из условия нормировки следует, что

$$P(Y = y_1 / X = x_1) + P(Y = y_2 / X = x_1) = 1,$$

$$P(Y = y_1 / X = x_2) + P(Y = y_2 / X = x_2) = 1.$$

По формуле полной вероятности получаем, что

$$P(Y = y_1) = \underbrace{P(X = x_1)}_{\substack{\textit{вероятность} \\ \textit{гипотезы}}} \underbrace{P(Y = y_1 / X = x_1)}_{\substack{\textit{условная вероятность} \\ \textit{события}}} + \underbrace{P(X = x_2)}_{\substack{\textit{вероятность} \\ \textit{гипотезы}}} \underbrace{P(Y = y_1 / X = x_2)}_{\substack{\textit{условная вероятность} \\ \textit{события}}},$$

$$P(Y = y_2) = \underbrace{P(X = x_1)}_{\substack{\textit{вероятность} \\ \textit{гипотезы}}} \underbrace{P(Y = y_2 / X = x_1)}_{\substack{\textit{условная вероятность} \\ \textit{события}}} + \underbrace{P(X = x_2)}_{\substack{\textit{вероятность} \\ \textit{гипотезы}}} \underbrace{P(Y = y_2 / X = x_2)}_{\substack{\textit{условная вероятность} \\ \textit{события}}}$$

Используя теорему умножения вероятностей, запишем ряд распределения СВ $X+Y$:

$(x+y)_i$	p_i
$x_1 + y_1$	$P(X = x_1)P(Y = y_1 / X = x_1) = p_{11}$
$x_1 + y_2$	$P(X = x_1)P(Y = y_2 / X = x_1) = p_{12}$
$x_2 + y_1$	$P(X = x_2)P(Y = y_1 / X = x_2) = p_{21}$
$x_2 + y_2$	$P(X = x_2)P(Y = y_2 / X = x_2) = p_{22}$

По определению математического ожидания имеем

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}=$$
$$=x_1p_{11}+y_1p_{11}+x_1p_{12}+y_2p_{12}+x_2p_{21}+y_1p_{21}+x_2p_{22}+y_2p_{22}=$$
$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})=$$
$$=x_1(\underbrace{p_{11}+p_{12}}_{=1})+x_2(\underbrace{p_{21}+p_{22}}_{=1})+y_1(\underbrace{p_{11}+p_{21}}_{=P(Y=y_1)})+y_2(\underbrace{p_{12}+p_{22}}_{=P(Y=y_2)})=$$
$$=M(X)+M(Y).$$

Аналогично это свойство доказывается для суммы двух случайных величин не только с двумя, но и с большим числом возможных значений, а также для суммы нескольких случайных величин.

3) Математическое ожидание произведения двух взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий их сомножителей, то есть

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

Доказательство. Рассмотрим СВ X и СВ Y из предыдущего доказательства. При этом возможными значениями случайной величины XY будут x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 с соответствующими вероятностями p_1q_1, p_1q_2, p_2q_1, p_2q_2.

По определению математического ожидания имеем

$$M(XY)=x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2=$$
$$=y_1q_1(\underbrace{x_1p_1+x_2p_2}_{=M(X)})+y_2q_2(\underbrace{x_1p_1+x_2p_2}_{=M(X)})=$$
$$=M(X)(y_1q_1+y_2q_2)=$$
$$=M(X)M(Y).$$

Аналогично это свойство доказывается для произведения двух случайных величин не только с двумя, но и с большим числом возможных значений, а также для произведения нескольких случайных величин.

4) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X).$$

Доказательство. По свойству 3) имеем

$$M(CX)=M(C)M(X)=CM(X).$$

5) Математическое ожидание разности случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y).$$

Доказательство. По свойствам 2) и 4) имеем

$$M(X-Y)=M(X+(-Y))=M(X)+M(-Y)=M(X)-M(Y).$$

6) Математическое ожидание случайной величины имеет размерность самой случайной величины. Докажите это свойство самостоятельно.

<u>*Дисперсия.*</u> Математическое ожидание случайной величины дает центр распределения значений. Но иногда требуется знать степень разброса этих значений относительно центра распределения. Может быть, для этого нужно вычислить все возможные значения *отклонения* $X-M(X)$ СВ X от своего математического ожидания и затем найти их среднее значение? Рассмотрим пример, иллюстрирующий такую ситуацию.

►**Пример.** Законы распределения попаданий в мишень двух зенитных орудий имеют вид:

x_i	-1	1
p_i	0,5	0,5

y_i	-10	10
p_i	0,5	0,5

Какое из орудий стреляет лучше?

Решение. Найдём математические ожидания попаданий каждой из зениток:

$$M(X)=-1\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}5=0, \qquad M(Y)=-10\cdot 0{,}5+10\cdot 0{,}5=0.$$

Математические ожидания одинаковые, но кучность стрельбы первого орудия выше (отклонение от центра меньше). Значит, лучшим следует признать первое орудие. ◄

Как показывает пример, среднее арифметическое отклонений может быть равным нулю. Это объясняется тем, что значения имеют противоположные знаки и взаимно погашаются при нахождении среднего арифметического.

Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0,$$

то есть математическое ожидание отклонения равно нулю. Поэтому отклонение нельзя принимать за меру рассеяния значений случайной величины вокруг центра распределения. Обычно используют модули отклонений или их квадраты.

Определение 7.2. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M((X-M(X))^2).$$

Преобразуем последнюю формулу:

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(XM(X))+M((M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины X равна разности математического ожидания квадрата этой величины и квадрата ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Эту формулу удобно применять в практических вычислениях.

Если СВ X дискретная с законом распределения $P(X=x_i)=p_i$, $i=\overline{1,n}$, то СВ $Y=(X-M(X))^2$ имеет закон распределения

$$P(Y=(x_i-M(X))^2)=p_i,\quad i=\overline{1,n},\quad \sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

По определению математического ожидания получаем ещё одну формулу

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}((x_i-M(X))^2p_i$$

для вычисления дисперсии ДСВ X *с конечным числом значений.*

Если ДСВ X *принимает счётное множество значений, то ее дисперсия находится по формуле*

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}((x_i-M(X))^2p_i$$

при условии, что ряд сходится, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

Дисперсия НСВ X*, принимающей значения из отрезка* $[a;b]$*, определяется формулой*

$$D(X)=\int_a^b(x-M(X))^2f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятности этой величины.

В этом же случае можно использовать другую формулу:

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-(M(X))^2.$$

Докажите ее самостоятельно.

В *общем случае дисперсия НСВ* X *определяется формулой*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2f(x)dx,$$

если интеграл сходится,
или

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Доказательство. По определению и свойствам математического ожидания получаем

$$D(C)=M((C-M(C))^2)=M((C-C)^2)=M(0)=0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Доказательство. По определению и свойствам математического ожидания получаем

$$D(CX)=M((CX-M(CX))^2)=M((CX-CM(X))^2)=$$
$$=M(C^2(X-M(X))^2)=C^2M((X-M(X))^2)=C^2D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-(M(X+Y))^2=$$
$$=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)+M(2XY)+M(Y^2)-((M(X))^2+2M(X)M(Y)+(M(Y))^2)=$$
$$=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-((M(X))^2-2M(X)M(Y)-(M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)-((M(X))^2+M(Y^2)-(M(Y))^2=$$
$$=D(X)+D(Y).$$

Это свойство справедливо для любого числа попарно независимых случайных величин.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство. Для доказательства применим второе и третье свойства дисперсии:

$$D(X-Y) = D(X+(-Y)) = D(X) + D(-Y) =$$
$$= D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Среднее квадратическое отклонение. Размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины, поэтому в случае, когда желательно получить оценку рассеяния случайной величины в тех же единицах измерения, что и сама величина, находят корень квадратный из дисперсии.

Определение 7.3. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение дают ориентировочное представление о пределах возможных значений случайной величины.

Мода и медиана. Математическое ожидание характеризует положение случайной величины – «центр» закона распределения. Существуют еще две числовые характеристики случайной величины такого рода – *медиана* x_{Me} и *мода* x_{Mo}.

Определение 7.4. Модой ДСВ X называется значение x_{Mo}, соответствующее её наиболее вероятному значению, а **модой НСВ** X – значение, при котором плотность распределения вероятности максимальна.

На рис. 2 и 3 указаны значения моды для ДСВ X и НСВ Y. Вообще случайные величины могут иметь несколько модальных значений.

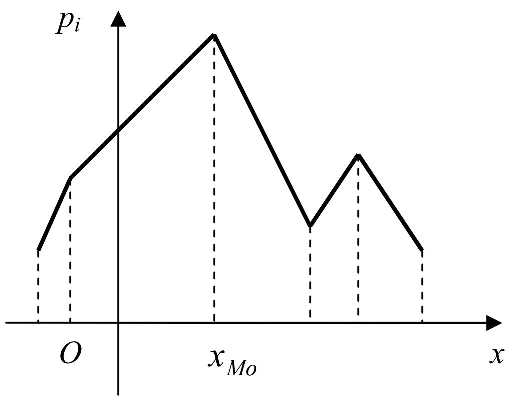


Рис. 2

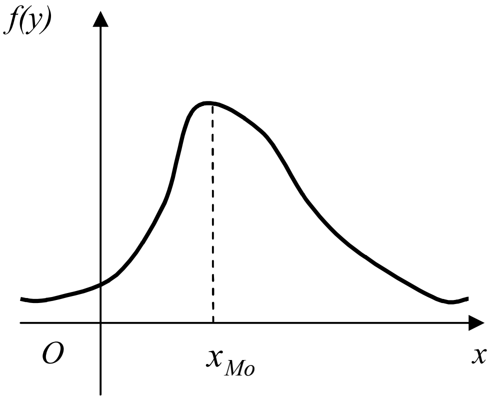


Рис. 3

Определение 7.5. Медианой случайной величины X называется такое её значение x_{Me}, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше x_{Me}, то есть

$$P(X < x_{Me}) = P(X > x_{Me}).$$

С геометрической точки зрения медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам (рис. 4). В случае симметричности кривой распределения медиана совпадает с модой и математическим ожиданием (рис. 5).

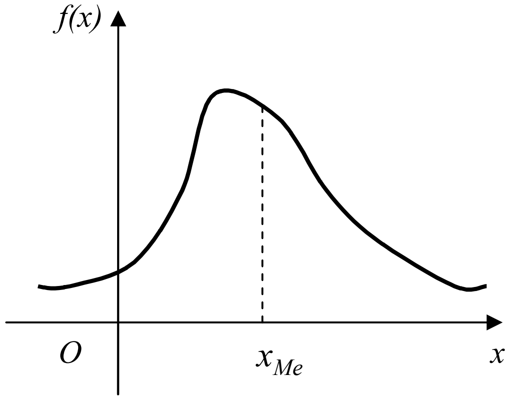


Рис. 4

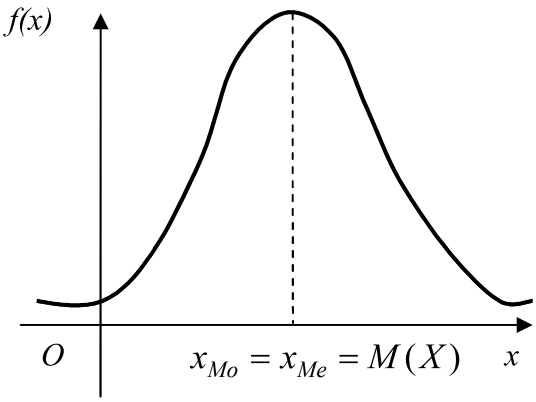


Рис. 5

Медиана является корнем уравнения $F(x_{Me}) = 0{,}5$. Математического ожидания у случайной величины может и не быть, а медиана существует всегда. Медианой необязательно является одна точка. Если на $[a;b]$ $F(x) = 0{,}5$, то любая точка этого интервала является медианой.

Соотношения между математическим ожиданием, медианой и модой для некоторых плотностей распределения вероятностей показаны на рис. 6. Математическое ожидание «чувствительно» к «хвостам» закона распределения, медиана менее чувствительна к ним, а на моду крайние значения вообще не влияют.

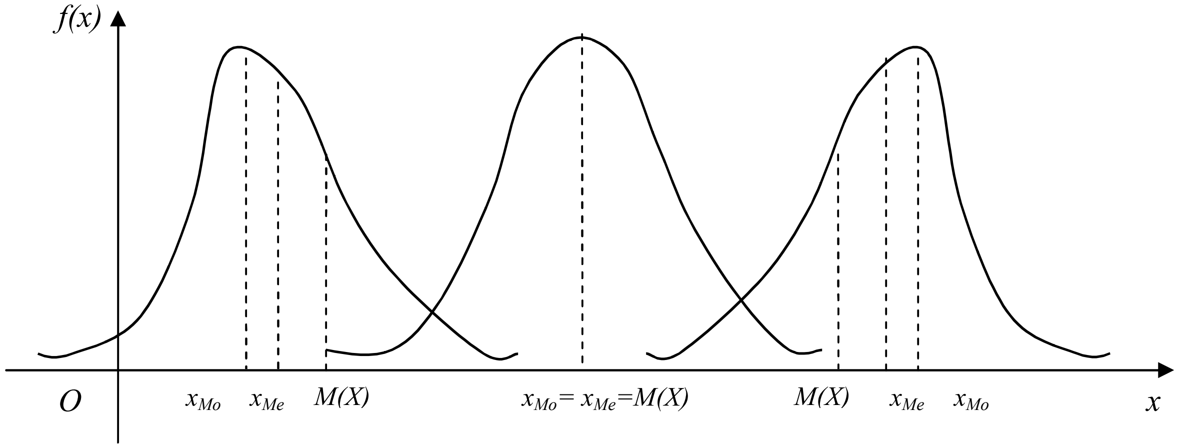


Рис. 6

Моменты распределения случайных величин. Обобщают основные числовые характеристики случайных величин, описывающих центр распределения (математическое ожидание, мода, медиана) и рассеивание (дисперсия и среднее квадратическое отклонение), *моменты*. Их ценное свойство состоит в том, что моменты более низкого порядка несут больше информации о случайной величине, чем моменты более высокого порядка.

Определение 7.6. Начальным моментом k-того порядка СВ X называется математическое ожидание k-той степени этой величины, то есть

$$\nu_k = M(X^k).$$

Для ДСВ X с возможными значениями x_1, …, x_n, … и с соответствующими вероятностями p_1, …, p_n, … имеем

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i$$

при условии, что этот ряд сходится абсолютно.

Для НСВ X с плотностью вероятности $f(x)$:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx,$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Запишем формулы, выражающие начальные моменты k-того порядка при $k = 0, 1, 2$ для дискретной и непрерывной случайных величин:

$$\nu_0 = M(X^0) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad \nu_0 = M(X^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\nu_1 = M(X^1) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = M(X), \qquad \nu_1 = M(X^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = M(X);$$

$$\nu_2 = M(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i, \qquad \nu_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Определение 7.7. Центральным моментом k-того порядка СВ X называется математическое ожидание k-той степени отклонения этой величины от ее математического ожидания, то есть

$$\mu_k = M((X - M(X))^k) = M(X - a)^k.$$

Для ДСВ X с возможными значениями x_1, …, x_n, … и с соответствующими вероятностями p_1, …, p_n, … имеем

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^k p_i$$

при условии, что ряд сходится абсолютно.

Для НСВ X с плотностью вероятности $f(x)$

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x)dx,$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Запишем формулы, выражающие центральные моменты k-того порядка при $k = 0, 1, 2$ для дискретной и непрерывной случайных величин:

$$\mu_0 = M(X-a)^0 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad \mu_0 = M(X-a)^0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\mu_1 = M(X-a)^1 = 0;$$

$$\mu_2 = M(X-a)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 p_i = D(X), \qquad \mu_2 = M(X-a)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = D(X).$$

Центральный момент порядка $k \geq 2$ можно выразить через начальные моменты:

$$\mu_2 = M(X-a)^2 = M(X^2 - 2aX + a^2) =$$
$$= M(X^2) - 2aM(X) + M(a^2) = M(X^2) - 2a^2 + a^2 =$$
$$= M(X^2) - a^2 = \nu_2 - \nu_1^2 = D(X).$$

$$\mu_3 = M(X-a)^3 = M(X^3 - 3X^2a + 3Xa^2 - a^3) =$$
$$= M(X^3) - 3aM(X^2) + 3a^2 M(X) - M(a^3) =$$
$$= M(X^3) - 3aM(X^2) + 3a^2 M(X) - a^3 =$$
$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1^3 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Аналогично выводится формула

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Центральный момент третьего порядка характеризует *асимметрию* («скошенность») *распределения* случайной величины. Для получения безразмерной характеристики μ_3 делят на σ^3.

Отношение $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется *коэффициентом асимметрии*. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все моменты нечётного порядка равны нулю.

Если кривая распределения непрерывной случайной величины такова, что справа от моды расположена её «длинная часть», а слева – «короткая часть», то коэффициент асимметрии положителен. Коэффициент асимметрии отрицателен, когда «длинная часть» кривой распределения расположена слева от моды.

На рис. 7 показаны кривые распределения с положительной и отрицательной асимметриями.

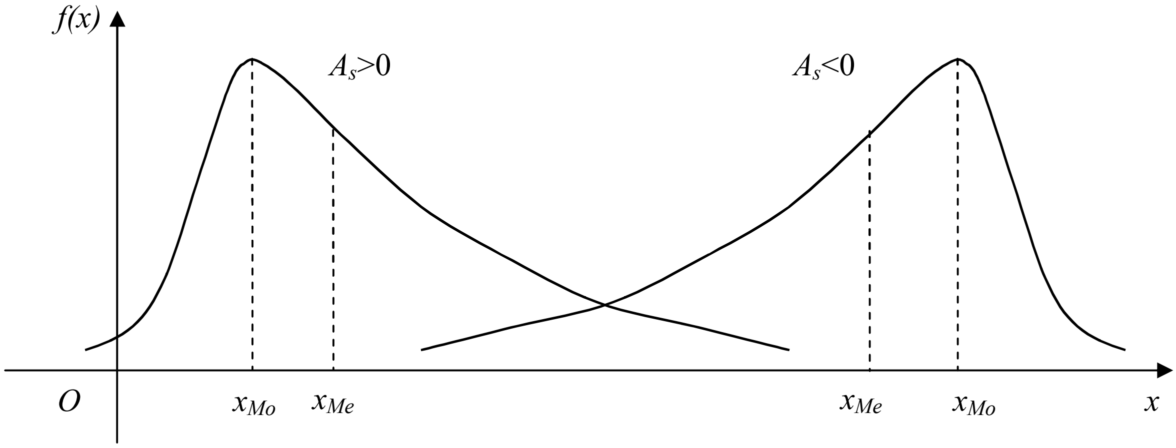


Рис. 7

Четвёртый центральный момент является характеристикой «крутости», то есть *островершинности* или *плосковершинности* распределения. Эти свойства описываются с помощью *эксцесса*, то есть величины

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 .$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ потому, что все распределения сравниваются с нормальным распределением (его рассмотрим позже), для него $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Кривые, более островершинные по сравнению с нормальной, обладают положительным эксцессом. Кривые более плосковершинные – отрицательным эксцессом (рис. 8).

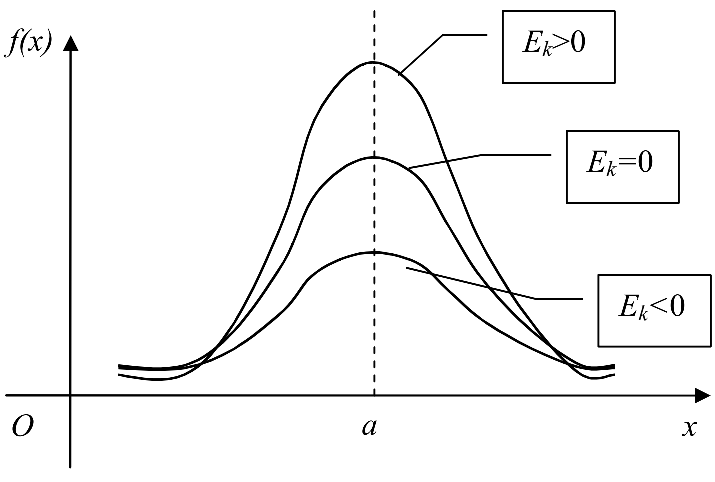


Рис. 8

РАЗДЕЛ III. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЛЕКЦИЯ 8. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальный закон распределения. Пусть в одинаковых условиях производится n *независимых* испытаний. В результате каждого испытания может произойти событие A с одной и той же вероятностью p или событие $\overline{A}$ с вероятностью $q=1-p$. В каждой серии из n испытаний событие A может не появиться (появиться 0 раз) или появиться 1 раз, или 2 раза, … или n раз.

Например, положим в урну n одинаковых шаров, пометив предварительно m шаров меткой A. Вероятность вынуть шар с этой меткой равна $\frac{m}{n}=p$. Вынув из урны наугад один шар, запишем, есть на нём метка или нет. Вернём шар в урну, перемешаем шары и повторим этот процесс до получения n записей наличия метки A. Такую последовательность испытаний называют последовательностью независимых испытаний *по схеме Бернулли*.

Свяжем эту последовательность с ДСВ X – числом появлений события A при n испытаниях. Её возможные значения: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, …, $x_n=n$. Найдём вероятность каждого из этих значений, то есть вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится ровно k раз. Обозначим её $p_k=P(X=x_k)=P_n(k)$.

Порядок, в котором появляется событие A, может быть различным. В частности, если при пяти испытаниях A появилось четыре раза, то возможны следующие комбинации:

$$AAAA\overline{A},\quad AAA\overline{A}A,\quad AA\overline{A}AA,\quad A\overline{A}AAA,\quad \overline{A}AAAA.$$

Количество подобных комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k C_n^k. Каждая такая комбинация есть случайное событие, вероятность которого равна $p^k q^{n-k}$. Поскольку число всех таких событий равно C_n^k и эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий находится искомая вероятность

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Закон распределения ДСВ, определяемый формулой Бернулли, называется *биномиальным*. Название «биномиальный» связано с тем, что вероятности $P_n(k)$ совпадают с соответствующими членами разложения бинома Ньютона $(p+q)^n$ по степеням p:

$$(p+q)^n = q^n + npq^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Отсюда сразу видно, что сумма всех вероятностей $P_n(k)$ равна единице, так как $p+q=1$, то есть выполняется условие нормировки биномиального закона распределения.

Постоянные n и p называются *параметрами биномиального распределения*.

Биномиальный закон распределения ДСВ можно представить рядом распределения:

x_k	0	1	…	k	…	n
p_k	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

►**Пример.** Производится четыре независимых выстрела по мишени, причём вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,1. Найти вероятность промаха и вероятности одного, двух, трёх, четырёх попаданий.

Решение. Пусть ДСВ X – число попаданий. Возможные значения ДСВ X:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4.$$

Вероятности этих значений:

$$p_1=P_4(0)=C_4^0 p^0 q^{4-0}=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=0{,}6561,$$

$$p_2=P_4(1)=C_4^1 p^1 q^{4-1}=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916,$$

$$p_3=P_4(2)=C_4^2 p^2 q^{4-2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486,$$

$$p_4=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^1=0{,}0036,$$

$$p_5=P_4(4)=C_4^4 p^4 q^{4-4}=\frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001.$$

Проверим выполнимость условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}6561 + 0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036 + 0{,}0001 = 1.$$

Ряд распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Построим многоугольник распределения ДСВ X (рис. 1).

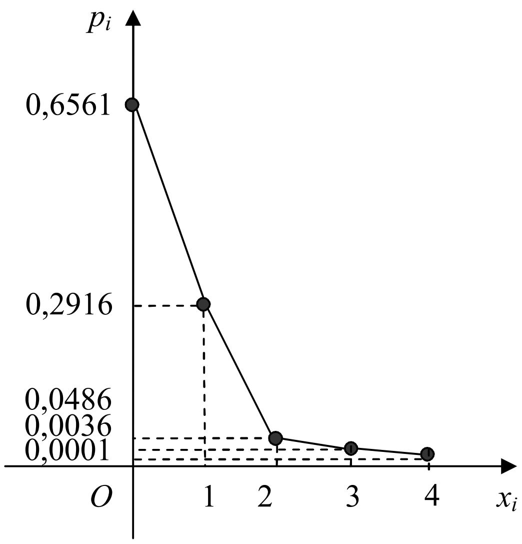


Рис. 1

◄

Найдём математическое ожидание и дисперсию ДСВ X – числа появлений события A в n испытаниях.

Пусть X_i ($i = 1, 2, ..., n$) – случайная величина, показывающая, сколько раз появляется случайное событие A в одном испытании по схеме Бернулли.

Тогда СВ X – число появлений A при n испытаниях – можно представить в виде суммы

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Ряд распределения СВ X_i имеет вид:

x_i	0	1
p_i	q	p

$$M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \overset{\substack{\text{свойство 2}\\ \text{матожидания}}}{=} M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) =$$

$$= \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ раз}} = np\,.$$

Таким образом,

$$M(X) = np\,.$$

Найдём дисперсию СВ X_i по формуле

$$D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X_i))^2 p_i\,.$$

Имеем

$$D(X_i) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq \cdot 1 = pq\,.$$

Следовательно,

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \overset{\substack{\text{по 3 свойству}\\ \text{дисперсии}}}{=} D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) =$$

$$= \underbrace{pq + pq + \ldots + pq}_{n \text{ раз}} = npq\,.$$

Таким образом,

$$D(X) = npq\,.$$

Понятно, что среднее квадратическое распределение биномиально распределённой СВ X равно

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}\,.$$

►**Пример.** Проволока с вероятностью 0,9 рвётся усилием более 45 кг. В канате 100 проволок. Определить математическое ожидание, дисперсию и СКО числа проволок с разрывным усилием более 45 кг.

Решение.

$$M(X) = 100 \cdot 0{,}9 = 90,$$

$$D(X) = 90 \cdot 0{,}1 = 9,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{9} = 3. \qquad ◄$$

Интересно посмотреть поведение биномиального закона распределения при одном и том же числе испытаний (например $n = 8$) и различных вероятностях p (например, 0,1, 0,3, 0,5) (рис. 2). Для этих случаев $M(X)$ и $\sigma(X)$ соответственно равны:

$$p = 0{,}3:\ M(X) = 2{,}4,\ \sigma(X) = 1{,}30;$$

$$p = 0{,}1:\ M(X) = 0{,}8,\ \sigma(X) = 0{,}85;$$

$$p = 0{,}5:\ M(X) = 4{,}0\,,\ \sigma(X) = 1{,}41\,.$$

Приведённые на рис. 2 значения вероятностей $P_n(k)$ являются округлёнными.

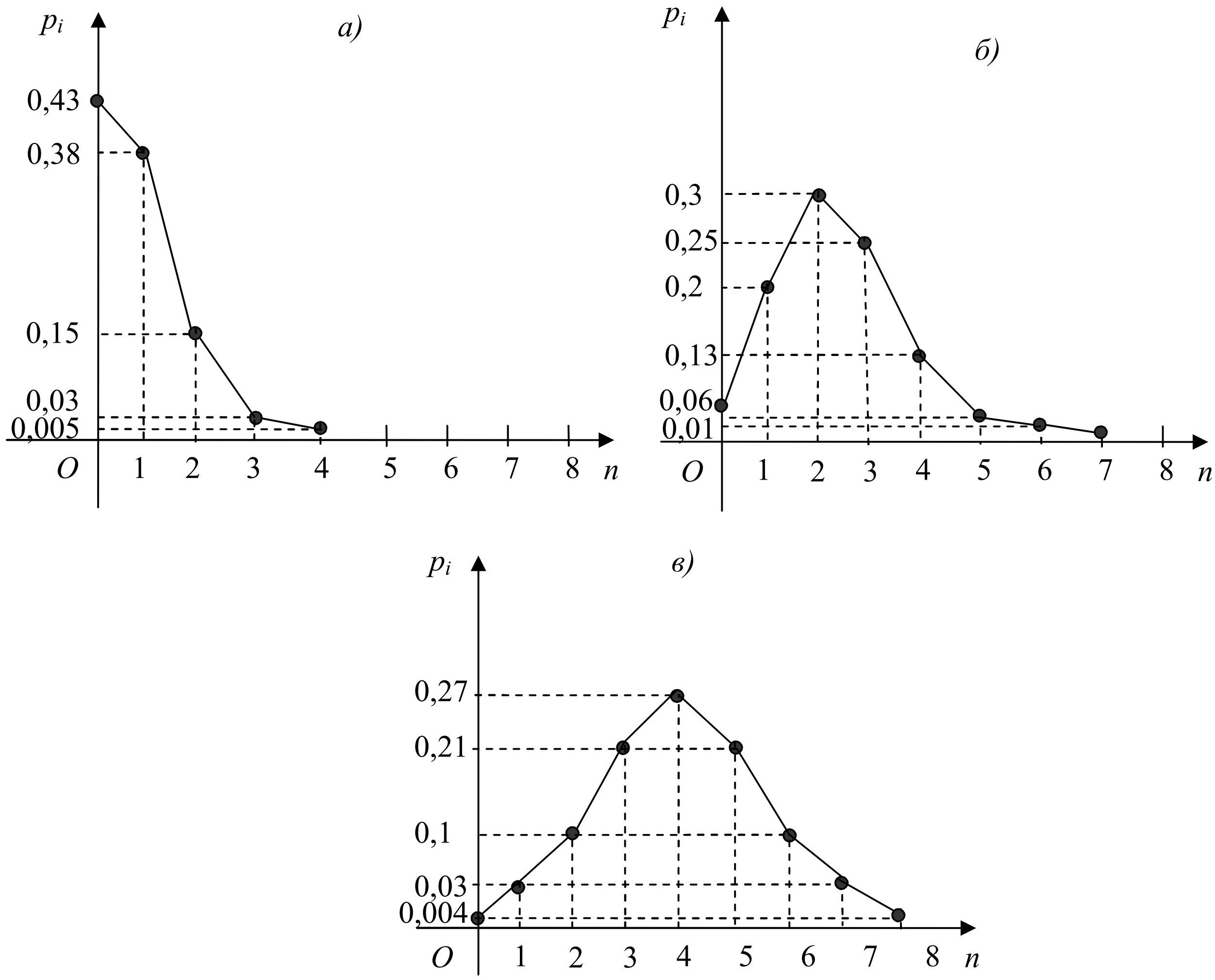


Рис. 2

Иногда биномиальный закон нужно применять в условиях, когда число независимых испытаний велико. Вычисления вероятностей по формуле Бернулли усложняются. Поэтому представляет интерес асимптотическое приближение для биномиального закона, справедливое при больших n. Здесь возможны два случая:

1) когда $n \to \infty$, число $\lambda = np$ тоже неограниченно возрастает (при постоянном p);

2) при $n \to \infty$ произведение $\lambda = np$ остается конечным (это значит, что вероятность события $p = \dfrac{\lambda}{n} \to 0$).

<u>Распределение Пуассона.</u> Рассмотрим второй случай асимптотического приближения биномиального распределения, когда $n \to \infty$, а $\lambda = np$ имеет конечное значение. Подставим в формулу Бернулли $p = \dfrac{\lambda}{n}$, получим

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Найдем предел правой части при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right)=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Воспользуемся известными из теории пределов формулами:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1.$$

Тогда окончательно получаем распределение вероятностей, называемое *распределением Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Постоянная $\lambda = np$ называется *параметром распределения Пуассона*.

Закон распределения Пуассона ДСВ X можно представить рядом распределения вида:

x_k	0	1	2	…	k	…
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

Проверим выполнимость условия нормировки для полученного ряда распределения:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+...+\frac{\lambda^k}{k!}+...\right) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

►**Пример.** Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0{,}01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P не меньшей, чем 0,95?

Решение. Вероятность выигрыша мала, а число билетов, которое нужно купить, очевидно, велико, поэтому случайное число выигрышных билетов имеет приближённое распределение Пуассона.

События «ни один из купленных билетов не является выигрышным» и «хотя бы один билет – выигрышный» – противоположные. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$P_n(k=0)+P=1,$$

откуда

$$P=1-P_n(k=0).$$

В формуле Пуассона $P_n(k)\approx\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ положим $k=0$, тогда

$$P_n(k=0)=e^{-\lambda}.$$

Тогда

$$P=1-e^{-\lambda}.$$

По условию $P\ge 0{,}95$ или $1-e^{-\lambda}\ge 0{,}95$. Отсюда

$$e^{-\lambda}\le 0{,}05,$$

$$e^{-3}\approx 0{,}05.$$

Функция e^{-x} – убывающая, поэтому неравенство $e^{-\lambda}\le 0{,}05$ выполняется при $\lambda\ge 3$ или при $np\ge 3$. Значит, $n\ge\dfrac{3}{p}=\dfrac{3}{0{,}01}=300$.

Следовательно, надо купить не менее 300 билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них. ◄

Величина np в биномиальном распределении имеет смысл математического ожидания. Распределение Пуассона – частный случай биномиального, поэтому

$$M(X)=np=\lambda,\ D(X)=npq=np(1-\underbrace{p}_{<<1})\cong np=\lambda.$$

В этом нетрудно убедиться непосредственно.

$$M(X)=0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\lambda e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}+3\cdot\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}+\ldots\cong\lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

$$D(X)=(0-\lambda)^2e^{-\lambda}+(1-\lambda)^2\lambda e^{-\lambda}+(2-\lambda)^2\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}+(3-\lambda)^2\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}+\ldots=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i-\lambda)^2\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(i^2-2i\lambda+\lambda^2)\frac{\lambda^i}{i!}=$$

$$=e^{-\lambda}\left(\sum_{i=1}^{\infty}i\lambda\frac{\lambda^{i\text{-}1}}{(i-1)!}-2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^2\frac{\lambda^{i\text{-}1}}{(i-1)!}+\lambda^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\right)=$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(i-1+1)\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}_{e^{\lambda}} + e^{-\lambda}\lambda^2\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}}_{e^{\lambda}} - \lambda^2 =$$

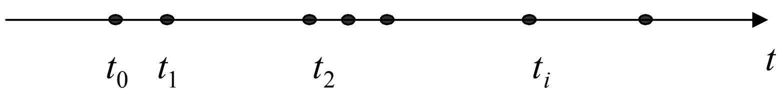
$$= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda .$$

Отметим, что при малых λ наблюдается асимметрия закона распределения. С ростом λ имеется тенденция к симметрии.

В ряде задач распределение Пуассона выступает не как асимптотическое, а как совершенно точное. Например, часто приходится иметь дело с распределением событий во времени (появление импульсов, электронов и т.п.). В этой связи рассмотрим еще один вывод распределения Пуассона, который позволит конкретизировать условия его возникновения и пределы применимости.

Сначала введём некоторые понятия.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Примером может служить поток вызовов на скорой помощи, число отказов при работе некоторой системы. Геометрически поток событий можно изобразить в виде точек на оси времени:



Если в потоке вероятность наступления некоторого числа событий в течение заданного отрезка времени t зависит только от величины этого отрезка и не зависит от начала отсчета времени, то он называется *стационарным*. В геометрической трактовке имеет значение только длина отрезка t и не имеет значения, далеко или близко он расположен к началу отсчета.

Если отдельные события в нем происходят независимо одно от другого, так что «сгущения» событий на одном интервале не приводят к обязательным их «разрежениям» на другом, то в потоке *отсутствует последействие.* Другими словами, для любых неперекрывающихся отрезков времени число событий на одном из них не зависит от числа событий на другом.

Наконец, поток обладает свойством *ординарности*, если вероятность наступления двух событий на достаточно малом интервале времени является исчезающе малой по сравнению с вероятностью наступления одного события. Другими словами, ординарным считается поток относительно редких событий.

Простейшим (*пуассоновским*) называют поток событий, который обладает тремя свойствами:

– стационарностью,

– отсутствием последействия,

– ординарностью.

Найдём $P_{t+\Delta t}(k=0)$ – вероятность того, что за малый интервал времени Δt не произойдёт ни одного события. Пусть $P_t(k=0)$ – вероятность отсутствия событий на интервале t. Отсутствие точек на отрезке $t+\Delta t$ есть произведение двух событий: A – отсутствие точек на интервале t, B – отсутствие точек на интервале $t+\Delta t$. В силу независимости этих событий (отсутствия последействия в потоке) имеем

$$P_{t+\Delta t}(k=0)=P_t(k=0)\cdot P_{\Delta t}(k=0).$$

Но

$$P_{\Delta t}(k=0)=1-P_{\Delta t}(k=1)-P_{\Delta t}(k=2)-...\approx 1-P_{\Delta t}(k=1),$$

так как в силу ординарности потока вероятностью наступления за время Δt двух или более событий можно пренебречь.

Найдём $P_{\Delta t}(k=1)$. Для этого вычислим математическое ожидание числа точек на интервале Δt. С одной стороны,

$$M_{\Delta t}(k=n)=\nu\Delta t,$$

где ν – среднее число событий в потоке за единицу времени (*интенсивность*), с другой –

$$M_{\Delta t}(k=n)=0\cdot P_{\Delta t}(k=0)+1\cdot P_{\Delta t}(k=1)+2\cdot P_{\Delta t}(k=2)+...\approx P_{\Delta t}(k=1).$$

Отсюда

$$P_{\Delta t}(k=1)=\nu\Delta t.$$

Значит,

$$P_{t+\Delta t}(k=0)=P_t(k=0)\cdot(1-\nu\Delta t),$$

откуда

$$\frac{P_{t+\Delta t}(k=0)-P_t(k=0)}{\Delta t}=-\nu P_t(k=0).$$

При $\Delta t\to 0$ имеем

$$\frac{dP_t(k=0)}{d\,t}=-\nu P_t(k=0).$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка. Его решение относительно $P_t(k=0)$ при начальном условии $P_{t=0}(k=0)=1$ имеет вид

$$P_t(k=0)=e^{-\nu t}.$$

Аналогично получаются формулы для других значений k.

Таким образом,

$$P_t(k=n)=\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}.$$

►**Пример.** Будем считать поток сбоев в работе ЭВМ простейшим. Его интенсивность в сутки $\nu=2$. Найти вероятность того, что:

1) в течение суток не будет ни одного сбоя;

2) в течение суток произойдёт хотя бы один сбой.

Решение. ДСВ X – число сбоев ЭВМ за время работы. Так как поток сбоев считаем простейшим, то вероятность того, что за некоторое время работы произойдёт k сбоев, вычислим по формуле

$$P_t(k)\approx\frac{(\nu t)^k}{k!}e^{-\nu t}, \text{ где } \nu=2.$$

Тогда вероятность того, что в течение суток не будет ни одного сбоя ЭВМ, равна

$$P_{t=1}(k=0)\approx\frac{(2\cdot 1)^0}{0!}e^{-2\cdot 1}=e^{-2}\approx 0{,}135. \quad ◄$$

Геометрическое распределение. Рассмотрим игру с набрасыванием кольца на стержень. Обозначим через X число бросаний до первого попадания на стержень при условии, что вероятность попадания при каждом бросании не зависит от результатов предыдущих бросаний и имеет одно и то же значение p ($0<p<1$). Величина X будет ДСВ, значениями которой являются натуральные числа. Найдем закон распределения этой ДСВ.

Событие $X=1$ означает попадание с первого бросания, его вероятность равна p, то есть $P(X=1)=p$. Событие $X=2$ означает попадание при втором бросании и, значит, промах при первом бросании. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получаем $P(X=2)=qp$, где $q=1-p$. Событие $X=3$ означает попадание при втором бросании и, следовательно, промахи при первых двух бросаниях, поэтому $P(X=3)=qqp=q^2p$. Продолжая аналогичные рассуждения, находим общую формулу

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\ k=1,2,\ldots.$$

Геометрическим называется распределение ДСВ X, определяемое формулой

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ 0<p<1,\ k=1,2,\dots\ .$$

Название связано с тем, что этот ряд вероятностей есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1-p$, сумма этого ряда равна единице:

$$p+qp+q^2p+\dots+q^{k-1}p+\dots=p\frac{1}{1-q}=1.$$

ЛЕКЦИЯ 9. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Равномерное распределение. Рассмотрим непрерывную случайную величину X, которая принимает равновозможные значения только на отрезке $[a;b]$. Всюду, кроме $[a;b]$, $f(x)=0$.

Примеры НСВ такого рода:

а) время ожидания на остановке автобуса;

б) ошибка округления результата измерения до ближайшего целого числа.

Плотность вероятности НСВ X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x<a,\\ C & \text{при}\quad a\le x\le b,\\ 0 & \text{при}\quad x>b.\end{cases}$$

Так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице: $C(b-a)=1$ (рис. 1), то $C=\dfrac{1}{b-a}$ и

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при}\quad a\le x\le b,\\ 0 & \text{при}\quad x>b.\end{cases}$$

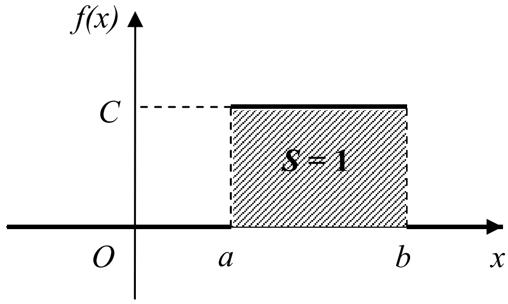


Рис. 1

Эта функция выражает закон *равномерной плотности* на отрезке $[a;b]$. Найдём функцию распределения $F(x)$, учитывая, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

Пусть $x < a$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Если $a \le x \le b$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

При $x > b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{x} 0dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

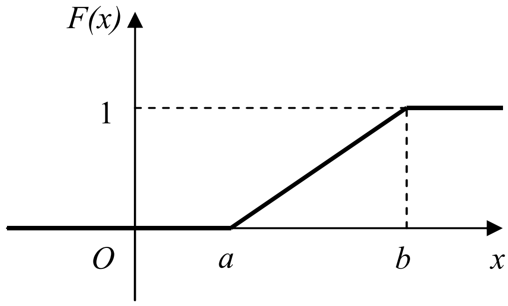


Рис. 2

Запишем функцию равномерного распределения и изобразим её график (рис. 2):

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Вычислим основные числовые характеристики равномерно распределённой случайной величины.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{1}{2(b-a)}\cdot(b^2-a^2) =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Так как равномерное распределение симметрично, медиана НСВ X равна $\frac{a+b}{2}$, моды нет.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx =$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \left(x^2 - (a+b)x + \frac{(a+b)^2}{4}\right)dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + \frac{(a+b)^2 x}{4}\right)\Bigg|_{a}^{b} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{(a+b)b^2}{2} + \frac{(a+b)^2 b}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{(a+b)a^2}{2} - \frac{(a+b)^2 a}{4}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В силу симметричности распределения его асимметрия равна нулю.

►**Пример.** Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

Решение. Время ожидания автобуса можно рассматривать как НСВ X, которая распределена равномерно на отрезке времени $[0,5]$. Тогда

$$P(0 \le X < 3) = F(3) - F(0) = \frac{3-0}{5-0} - \frac{0-0}{5-0} = \frac{3}{5} = 0{,}6. \blacktriangleleft$$

<u>*Показательное распределение.*</u> Рассмотрим интервалы времени t между двумя последовательными событиями в простейшем потоке событий. Вероятность того, что за промежуток времени t от предыдущего события следующее событие не произошло, а за малый дополнительный промежуток времени Δt событие произошло один раз, равна

$$P_{t+\Delta t}(k=1) = P_t(k=0)\cdot P_{\Delta t}(k=1) = \frac{(\nu t)^0}{0!}e^{-\nu t}\cdot\frac{(\nu\Delta t)^1}{1!}e^{-\nu\Delta t} = = e^{-\nu(t+\Delta t)}\nu\Delta t.$$

Отсюда найдём плотность вероятности

$$f(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{t+\Delta t}(k=1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\nu\Delta t}{(e^{t+\Delta t})^{\nu}\,\Delta t} = \nu e^{-\nu t} \text{ при } t>0.$$

Если $t<0$, то $f(t)=0$.

Таким образом, плотность вероятности временного интервала между двумя соседними событиями описывается выражением

$$f(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t} & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Распределение непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $f(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t} & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$ (рис. 3) называется *экспоненциальным* (*показательным*).

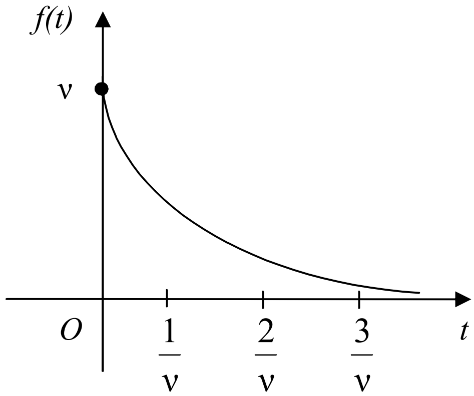


Рис. 3

Проверим выполнимость условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = 0 + \int_{0}^{+\infty}\nu e^{-\nu t}dt =$$

$$= -\nu\frac{1}{\nu}e^{-\nu t}\Big|_0^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1.$$

Найдем $F(t)$ с помощью формулы

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt=1.$$

При $t<0$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt=\int_{-\infty}^{t} 0dt=0.$$

При $t\ge 0$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{t} f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{t} \nu e^{-\nu t}dt=-e^{-\nu t}\Big|_{0}^{t}=-(e^{-\nu t}-e^{0})=1-e^{-\nu t}.$$

Функция распределения показательного закона имеет вид

$$F(t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ 1-e^{-\nu t} & \text{при} \quad t\ge 0. \end{cases}$$

Можно показать, что

$$M(T)=\frac{1}{\nu}, \qquad D(T)=\frac{1}{\nu^2}.$$

►**Пример.** НСВ T распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$$f(t)=\begin{cases} 2e^{-2t} & \text{при} \quad t\ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad t<0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений НСВ T в интервал $(0{,}1;0{,}7)$.

Решение.

$$P(0{,}1<X<0{,}7)=\int_{0{,}1}^{0{,}7} 2e^{-2t}dt=-e^{-2t}\Big|_{0{,}1}^{0{,}7}=-(e^{-2\cdot 0{,}7}-e^{-2\cdot 0{,}1})\approx$$

$$\approx 0{,}8187-0{,}2466=0{,}5721. ◄$$

В теории надёжности показательный закон распределения является одной из возможных математических моделей.

Элементом назовём некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное». Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а в момент времени t происходит отказ.

Обозначим через T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, через ν – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Часто время безотказной работы элемента распределяется по показательному закону с функцией распределения вида $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\nu t}$, где $\nu>0$. Эта функция есть *вероятность отказа элемента за время* t.

Тогда понятно, что *вероятность безотказной работы элемента за время* t определяется *функцией надёжности* $R(t)=e^{-\nu t}$.

►**Пример.** Время безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}01t}$, $t>0$. Найти вероятность того, что за время $t=50$ ч:

а) элемент откажет;

б) элемент не откажет.

Решение. а) Так как функция распределения $F(t)=1-e^{-0{,}01t}$ есть вероятность отказа элемента за время t, то, подставив $t=50$ в функцию распределения, получим вероятность отказа:

$$F(t=50)=1-e^{-0{,}01\cdot 50}=1-e^{-0{,}5}=1-0{,}606=0{,}394.$$

б) События «элемент откажет» и «элемент не откажет» – противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет равна

$$P=1-0{,}394=0{,}606. \blacktriangleleft$$

Нормальное распределение. Рассмотрим биномиальное распределение в случае, когда число независимых испытаний велико, то есть $n\to\infty$. При этом число $a=np$ тоже неограниченно возрастает (при постоянном p). В таком случае биномиальное распределение сходится к *нормальному* (*гауссовскому*) *распределению* с плотностью вероятности

$$f(x)=Ce^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } -\infty<x<\infty.$$

Числа a и σ^2 – параметры распределения, C – некоторая постоянная. Чтобы найти C, пронормируем плотность вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1.$$

Пусть $\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}=t$, тогда $dt=d\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx$. Интеграл имеет вид

$$C\sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=1.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона)[1], то $C\sigma\sqrt{2\pi} = 1$. Откуда

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Таким образом, нормальное распределение имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ при } -\infty < x < \infty.$$

Смысл параметров a и σ выясним позже.

График функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ называется *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*. Построим её график.

Область определения $-\infty < x < \infty$. Функция принимает только положительные значения, поэтому график находится выше оси Ox. Найдем экстремум функции $f(x)$.

Производная

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2}\right) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

равна нулю при $x = a$, меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Значит, $x = a$ – точка максимума функции $f(x)$, $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

Чем больше σ, тем меньше максимум, а так как площадь, ограниченная всей кривой и осью Ox, равна единице, то с увеличением σ кривая как бы растягивается вдоль оси Ox. При уменьшении σ кривая вытягивается вверх вдоль прямой $x = a$, но сжимается в горизонтальном направлении, сохраняя форму.

Следовательно, параметр σ характеризует форму кривой, параметр a – её положение (рис. 4).

---

[1]

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dt = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+x^2)}dxdt = \left| \begin{matrix} dxdt = \rho d\rho d\varphi \\ t^2 + x^2 = \rho^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

Вторая производная

$$f(x)=\left(-\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\right)'=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}-\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$$

равна нулю при $x=a-\sigma$ и при $x=a+\sigma$, меняет знак при переходе через эти точки. Значит, точки перегиба имеют координаты

$$\left(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right),\quad \left(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Ось Ox – горизонтальная асимптота.

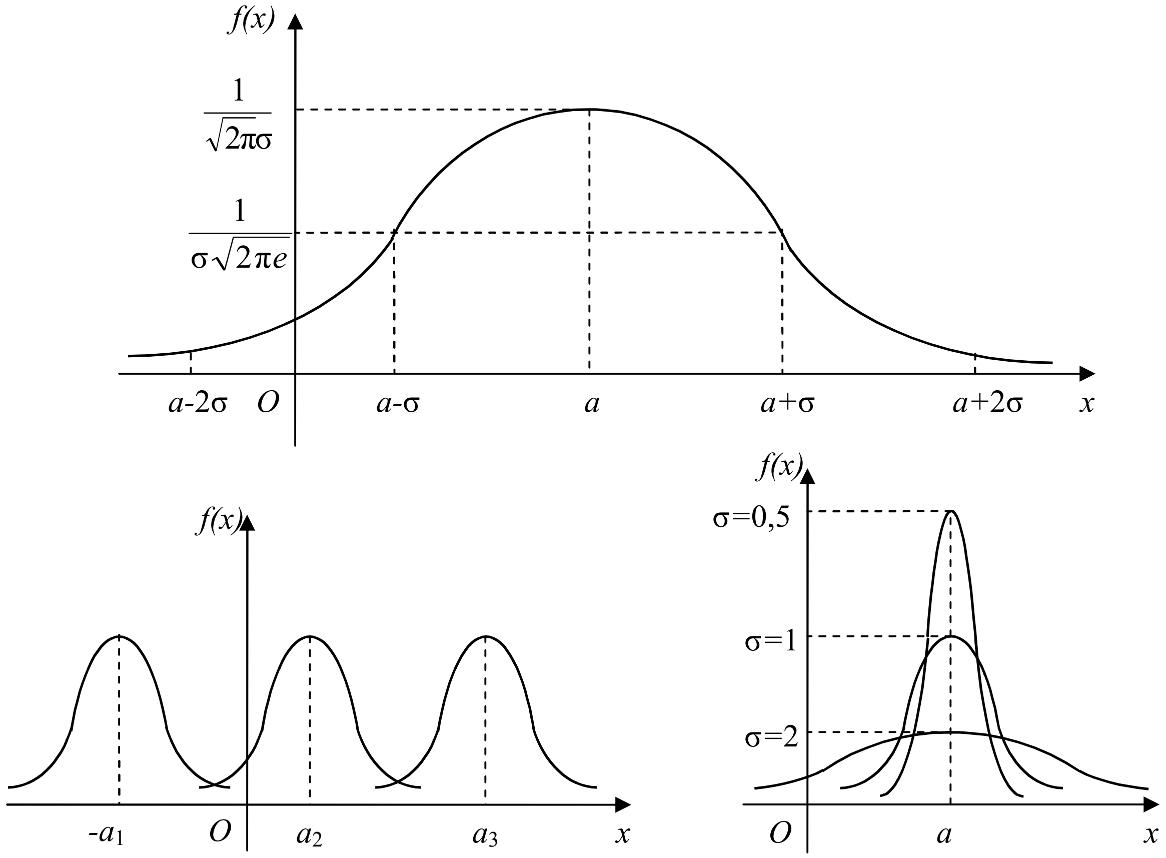


Рис. 4

В случае, когда $a=0$, $\sigma=1$, функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

и нормальное распределение называется *нормированным*.

Найдём матожидание и дисперсию нормально распределённой случайной величины.

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку заменой переменной $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=t$ сводится к интегралу, у которого под знаком интеграла стоит нечётная функция, а интегрирование осуществляется в симметричных пределах. Второй интеграл равен единице по условию нормировки. Имеем

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=0+a\cdot 1=a .$$

$$D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\ \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=t,\quad x=a+\sqrt{2}\sigma t,\quad dx=\sqrt{2}\sigma dt\ \right|=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2t^2e^{-t^2}dt=\begin{vmatrix} t=u, & 2te^{-t^2}dt=dv, \\ du=dt, & v=-e^{-t^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dx\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(-\frac{t}{e^{t^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\sqrt{\pi}\right)=\sigma^2 .$$

Таким образом, параметр a имеет смысл матожидания, параметр σ^2 – дисперсии.

Так как нормальное распределение случайной величины симметрично относительно $x=a$, то все центральные моменты нечётного порядка равны нулю. Это значит, что $\mu_3=0\Rightarrow A_S=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0$.

Для центральных моментов чётного порядка имеем

$$\mu_{2k}=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^{2k}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^{2k}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\ \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=t,\quad x=a+\sqrt{2}\sigma t,\quad dx=\sqrt{2}\sigma dt\ \right|=$$

$$= \frac{\sigma^{2k} 2^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \left| \begin{matrix} t^{2k-1} = u, & te^{-t^2} dt = dv, \\ du = (2k-1)t^{2k-2} dt, & v = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\sigma^{2k} 2^k}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} t^{2k-1} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2k-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-2} e^{-t^2} dt \right) = \frac{(2\text{k - 1})\sigma^{2k} 2^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-2} e^{-t^2} dt,$$

так как

$$\lim_{t \to \pm\infty} t^{2k-1} e^{-t^2} = 0.$$

$$\mu_{2k} = \frac{(2\text{k - 1})\sigma^{2k} 2^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-2} e^{-t^2} dt = (2k-1)\sigma^2 \left(\frac{(2\text{k - 1})\sigma^{2k-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-2} e^{-t^2} dt \right) =$$

$$= (2k-1)\sigma^2 \mu_{2k-2},$$

откуда следуют соотношения:

$$\mu_2 = \sigma^2, \ \mu_4 = 3\sigma^4, \ \mu_6 = 15\sigma^6 \text{ и т.д.}$$

Эксцесс $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0$. Это объясняется тем, что эксцесс характеризует крутость исследуемого закона распределения по сравнению с нормальным.

Вероятность попадания значений нормально распределённой НСВ X в заданный интервал. Вероятность попадания значений НСВ X в интервал равна определенному интегралу от ее плотности на этом интервале:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \frac{x-a}{\sigma} = t, \quad x = a + \sigma t, \quad dx = \sigma dt, \quad t_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}, \quad t_2 = \frac{\beta - a}{\sigma} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Выражение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$ является функцией Лапласа (см. лекцию 5). Значит, искомую вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ можно найти по формуле $$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma} \right).$$

Правило трёх сигм. Найдём вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределённой НСВ X от своего математического ожидания меньше положительного числа δ, или вероятность неравенства $|X-a|<\delta$:

$$P(-\delta < X-a < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Положим $\delta = \sigma t$, тогда

$$P(|X-a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

Если $t=3$, то есть $\sigma t = 3\sigma$, то

$$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Это равенство означает, что событие, состоящее в осуществлении неравенства $|X-a|<3\sigma$, является почти достоверным. То есть среди 10000 значений нормально распределённой случайной величины в среднем только 27 выйдут за пределы интервала $(a-3\sigma; a+3\sigma)$.

Приближённое равенство

$$P(|X-a| < 3\sigma) \approx 1$$

называется *правилом трёх сигм.*

►**Пример.** Производится измерение вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения (СВ X) подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Положив $\delta = 15$, $\sigma = 10$, находим

$$P(|X| < 15) = 2\Phi(1{,}5).$$

По таблице приложения 2 находим

$$\Phi(1{,}5) = 0{,}4332.$$

Искомая вероятность

$$P(|X| < 15) = 2\cdot 0{,}4332 = 0{,}8664. \blacktriangleleft$$

Функция распределения нормальной случайной величины. Согласно формуле $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$ и определению нормального распределения, имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{t-a}{\sigma} \\ t = a + u\sigma \\ dt = \sigma du \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Таким образом, функция распределения нормальной НСВ X имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) \text{ – функция Лапласа.}$$

Вариационный подход к получению дифференциальной функции распределения. Рассмотрим альтернативный подход к получению наиболее популярных распределений случайных величин, основанный на экстремальности энтропии.

К понятию энтропии естественным образом приводит следующая

Задача. Имеются рычажные весы без гирь и 25 внешне одинаковых монет, одна из которых несколько тяжелее остальных. Требуется гарантированно определить ее минимальным числом взвешиваний.

Решение. Очевидно, взвешивать монеты нужно одинаковыми по численному составу группами. Правильный численный состав обеспечивает извлечение из каждого взвешивания максимальной информации для локализации тяжелой монеты.

Таким образом, встал вопрос о мере информации, извлекаемой из эксперимента с несколькими возможными исходами.

В качестве такой меры можно взять среднюю длину сообщения об итогах эксперимента с несколькими возможными расходами (усреднение производится по всем исходам).

(В частности, взвешивание может закончиться тремя исходами: перетягиванием левой чаши, правой или их балансом).

Очевидно, однако, что длина сообщения определяется не только содержанием эксперимента, но и используемой системой записи самих сообщений. Например, итог можно описать словами (перевесила левая чаша, перевесила правая чаша, осуществился баланс) а можно и перенумеровать (закодировать) исходы и по окончании опыта указывать лишь код реализовавшегося исхода.

По техническим причинам в электронных средствах записи цифровой информации наибольшее распространение получила двоичная система исчисления. Т.е. код исхода представляет последовательность нулей и единиц. Их количество и есть длина сообщения.

Чтобы объективно сравнивать количества информации, извлекаемые из разных экспериментов (например, отличающиеся численным составом взвешиваемых групп), при кодировании нужно соблюсти очевидные требования:

1) максимально лаконично кодировать исходы сравниваемых опытов (например, нельзя использовать длинные номера, пока не заняты все более короткие);

2) чтобы средняя длина сообщения была короче, более вероятным исходом нужно присваивать самые короткие номера.

Указанным требованиям отвечает следующая система кодирования:

Разобьем все исходы на две группы с примерно равными суммарными вероятностями (по 1/2 на группу). Одной из групп поставим в соответствие 0, второй – 1. Затем каждую из групп (если в ней более одного исхода) снова разобьем на две части с примерно равными суммарными вероятностями (по 1/4 на каждую часть). Первой подгруппе первой группы будет соответствовать код 00, второй 01. Аналогично для 1-й и 2-й подгрупп второй группы имеем 10 и 11 соответственно. Указанную процедуру будем продолжать до тех пор, пока в каждой из подгрупп не останется по одному исходу.

Заметим, что исходу с вероятностью $P = 1/2$ соответствует код из одной цифры, исходу с $P = 1/4$ – из двух цифр, с $P = 1/8$ – из трех и т. д. То есть

$$n_i = -\log_2 P_i,$$

где n_i – число цифр (длина сообщения об i-том исходе).

При этом

$$\overline{n} = -\sum_i P_i \log_2 P_i \equiv I. \qquad (1)$$

Последнее равенство определяет информативность опыта с данным распределением вероятности по исходам. Покажем, что I максимальна, если распределение равномерно, то есть $P_i = \frac{1}{N}(i = 1, 2, \dots, N)$, где N – число исходов. Пусть для простоты $N = 2$:

$$I = x\ln x + (1-x)\ln(1-x);$$

$$-I' = \ln x + \frac{x}{x} - \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} = \ln\frac{x}{1-x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, возвращаясь к задаче о монетах, перед взвешиванием их нужно делить на три по возможности равные кучки, чтобы вероятности попадания в них тяжелой монеты были примерно равны. В этом случае возможны исходы (левая, правая, баланс) будут равновероятны.

То есть на каждую чашку положим по 8 монет. В случае баланса тяжелая среди оставшихся девяти. Вторым взвешиванием локализуем ее среди трех, и третьим определяем.

Общее количество взвешиваний можно найти, не конкретизируя результат каждого из них.

Вначале введем энтропию S как меру неопределенности результата эксперимента с несколькими возможными исходами. Очевидно, извлекая I, мы уменьшаем S:

$$\Delta S = -\Delta I.$$

До опыта $I = 0$, после – I равно сумме, фигурирующей в (1), а S – наоборот.

Энтропия задачи из 25 монет (тяжелая с равной вероятностью может оказаться любой из 25) равна

$$S = -\sum_{i=1}^{25}\frac{1}{25}\cdot\log_2\frac{1}{25} = \log_2 25.$$

А максимум информации, извлекаемой при одном взвешивании:

$$I = -\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\cdot\log_2\frac{1}{3} = \log_2 3.$$

Чтобы исчерпать всю неопределенность (решить задачу), нужно обеспечить неравенство

$$m\cdot\log_2 3 \geq \log_2 25,$$

в котором m – минимальное число взвешиваний, т.е. $m = 3$.

Возрастание энтропии – фундаментальный закон природы. Не вдаваясь в подробности и механизм его реализации, приведем лишь один пример.

Капнем чернила в банку с водой. Вначале вероятность обнаружить чернила локализована в том месте, куда упала капля. Но по мере растворения чернил, эта вероятность равномерно распределяется по всему объему банки. Энтропия, как мы уже выяснили, при этом стремится к своему максимальному значению. Обратный процесс невозможен по законам статистики. Сколько бы мы ни ждали, чернила не соберутся вновь в каплю. Т.е. состояние с максимальной энтропией является равновесным. По этой причине распределения вероятности, наиболее часто встречающиеся в окружающем нас мире, могут быть получены из условия экстремальности энтропии.

Обобщив (1) на случай непрерывных законов распределения, получим

$$P_i = f(\xi_i)\Delta x_i;\ S = -\sum_i f(\xi_i)[\log_2 f(\xi_i) + \log_2 \Delta x_i]\cdot\Delta x_i, \qquad (2)$$

где $f(x)$ – дифференциальная функция распределения;

P_i – вероятность попадания СВ в интервал Δx_i;

ξ_i – внутренняя точка этого интервала.

Ничто не мешает сделать Δx_i одинаковыми, после чего второе слагаемое в (2) не зависит от вида $f(x)$.

$$\sum_i (f(\xi_i)\log_2 \Delta x)\cdot\Delta x = \log_2 \Delta x \sum_i (f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{по условию нормировки}}{=} \log_2 \Delta x \cdot 1.$$

Поэтому, если интересоваться изменением S при вариации $f(x)$, второе слагаемое в (2) можно опустить. Кроме того, фигурирующие в (2) логарифмы можно заменить натуральными, выбирая таким образом новый масштаб измерения энтропии ($\log_2 P_i = \dfrac{\ln P_i}{\ln 2}$). В результате перехода к бесконечно малым Δx_i получим

$$S = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)dx\,. \qquad (3)$$

Экстремум функционала (3) будем искать при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = m, \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\, f(x)dx = \sigma^2, \qquad (6)$$

обеспечивающих реалистичность распределений, где (1) – условие нормировки, а (5) и (6) – требование конечности математического ожидания и дисперсии.

Домножим (4) – (6) соответственно на α, β, γ и прибавим к (3).

$$S+\alpha+\beta m+\gamma\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,f(x))dx, \tag{7}$$

где

$$F(x,t)=-f\ \ln f+\alpha f+\beta\times f+\gamma(x-m)^2 f. \tag{8}$$

Так как слева в (7) все, кроме *S*, есть константы, экстремальность интеграла в правой части (7) будет означать условный экстремум *S*. Чтобы интеграл в (7) был максимальным, нужно каждому *x* поставить в соответствие такое значение *f*, чтобы *F*(*x, f*) была максимальной. Из необходимого условия экстремума

$$F_f^{'}=-\ln f-1+\alpha+\beta x+\gamma(x-m)^2=0 \tag{9}$$

найдем

$$f=c\cdot e^{\beta x+\gamma(x-m)^2}=f(x). \tag{10}$$

Подставив (10) в (4) – (6), выразим c, β, γ через m и σ:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

Подчеркнем, что нормальное распределение (11) возникло не по определению, а как следствие закона возрастания энтропии. При этом смысл параметров m, σ не надо устанавливать. Он ясен из соотношений (5), (6).

Если СВ X положительно определена, из конечности матожидания следует конечность дисперсии, т. к. слева от m интервал конечен ($x > 0$), а справа – бесконечен. Бесконечность дисперсии означала бы бесконечное смещение m вправо по числовой оси. Поэтому от условия (6) следует отказаться, а соотношения (4), (5) и (10) примут вид:

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)dx=1, \tag{4$'$}$$

$$\int\limits_0^{\infty}x\cdot f(x)dx=m, \tag{5$'$}$$

$$f(x)=c\cdot e^{\beta x}. \tag{10$'$}$$

Подставив (10′) в (4′), выразим c через β:

$$1=\int\limits_0^{\infty}c\cdot e^{\beta x}dx=\frac{c}{\beta}e^{\beta x}\Big|_0^{\infty}\Rightarrow\beta<0;\quad 1=-\frac{c}{\beta}\Rightarrow f(x)=c\cdot e^{-cx}.$$

Подставив последнее выражение в (5′), найдем c:

$$
\begin{gathered}
c\cdot\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-cx}dx}_{du}=\left|\begin{aligned} du&=dx\\ V&=-\frac{1}{c}e^{-cx}\end{aligned}\right|=c\left[-\frac{x}{c}e^{-cx}\Big|_0^\infty+\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-cx}dx\right]=\\
=-\frac{1}{c}e^{-cx}\Big|_0^\infty=\frac{1}{c}=m\Rightarrow f(x)=\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}
\end{gathered}
\qquad (12)
$$

– экспоненциальное распределение.

Если возможные значения СВ $\in$ отрезку $[a,\ b]$, ее математическое ожидание не может не быть конечным. Отбросив в этом случае условие (5′), получим:

$$\int_a^b f(x)dx=1, \qquad (4'')$$

$$f(x)=c, \qquad (10'')$$

откуда $c=\dfrac{1}{b-a}$, т.е. максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение

$$f(x)=\frac{1}{b-a}. \qquad (13)$$

Свернув плоскость *OXY* с нарисованной на ней Гауссовой кривой в цилиндр радиуса r и образующей, параллельной *OY*, можно непосредственно проследить, как нормальное распределение по мере уменьшения r трансформируется в равномерное.

Пусть $m = 0$. Считая поворот на угол 2π возвратом в исходную точку и применив теорему сложения вероятностей, получим

$$f^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2\pi r\cdot n)^2}{2\sigma^2}},\ x\in[-\pi r;\pi r] \qquad (14)$$

Если $\sigma \geq \pi r$, то разброс случайной величины сравним с длиной отрезка, на котором определена $f*(x)$. Это не позволяет при составлении прогноза одно возможное значение предпочесть другому. То есть $f*(x)$ в такой ситуации должна описывать равномерное распределение. В обратной ситуации ($\sigma << \pi r$) в (14) всеми слагаемыми можно пренебречь, и $f^*(x)$ с $n \neq 0$ будет аппроксимироваться нормальным законом на отрезке $[-\pi r, \pi r]$. Графики $f^*(x)$, построенные численными методами для πr, полностью подтверждают предсказанную эволюцию функции распределения. Там же, для сравнения, дана часть Гауссовой кривой, принадлежащая рассматриваемому отрезку.

Подставив (11), (12) и (13) в (3), найдем энтропии полученных распределений:

$$S_p = \ln(b-a), \tag{15}$$

$$S_э = 1 + \ln m, \tag{16}$$

$$S_н = \frac{1}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma), \tag{17}$$

или, связав в первых двух случаях параметры распределений со среднеквадратическим отклонением

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}};\ \sigma = m,$$

$$S_p = +\ln\sqrt{12} + \ln\sigma = 1{,}242 + \ln\sigma,$$

$$S_э = 1 + \ln\sigma,$$

$$S_н = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2\pi} + \ln\sigma = 1{,}419 + \ln\sigma.$$

Видно, что с увеличением разброса во всех случаях энтропия (как это и должно быть) растет. При одинаковых разбросах имеет место двойное неравенство

$$S_н > S_p > S_э$$

Подставив (14) в (3), можно проследить (рис. 2), как при увеличении отрезка зависимость (15) переходит в (17). (Для простоты расчеты выполнялись с σ = 1). Значит, $S_н(1) = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2\pi} = 1{,}419 = y$ – уравнение горизонтальной асимптоты.

Дополнение 1

Получение нормального закона

После замены $\xi = x - m;\quad d\xi = dx\quad \frac{x\,|-\infty\,|\,\infty}{\xi\,|-\infty\,|\,\infty}$ выражения (4) – (6), (8) примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = 1; \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi)d\xi = 0; \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f(\xi)d\xi = \sigma^2; \tag{3}$$

$$F(f,\xi) = -f\ln f + \alpha f + \beta\xi f + \gamma\xi^2 f\ ;$$

$$F_f^1 = -\ln f - 1 + \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 = 0\ ;$$

$$f = c\cdot e^{\beta\xi+\gamma\xi^2} = f(\xi);$$

из (1) $\Rightarrow \gamma < 0 \Rightarrow \lambda = -|\gamma|$;

из (2) $\Rightarrow$ что $f(\xi)$ – четная $\Rightarrow \beta = 0$;

из (1) $\Rightarrow$ $c\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\gamma|\xi^2}d\xi = \dfrac{c}{\sqrt{|\gamma|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\gamma|\xi^2}d\xi\sqrt{|\gamma|} = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right| =$

$$= \left|\begin{matrix} t = \xi\sqrt{|\gamma|} \\ df = \sqrt{|\gamma|\,d\xi} \end{matrix}\right| = \frac{c}{\sqrt{|\gamma|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_{df}^{-t^2} = c\sqrt{\frac{\pi}{|\gamma|}} = 1 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{\sqrt{\pi}}.$$

$\otimes$ $f(\xi) = \dfrac{\sqrt{|\gamma|}}{\sqrt{\pi}}e^{-|\gamma|\xi^2}$; из (3) $\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-|\gamma|\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{d}{d|\gamma|}e^{-|\gamma|\xi^2}d\xi = \frac{-\sqrt{|\gamma|}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d|\gamma|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\gamma|\xi^2}d\xi =$$

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d|\gamma|}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{|\gamma|}} = -\sqrt{|\gamma|}\left(-\frac{1}{2}(|\gamma|)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{|\gamma|} = \sigma^2 \Rightarrow |\gamma| = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \text{(см. } \otimes\text{)}\ f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}};\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Дополнение 2

Вычисление энтропии

Равномерное распределение $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$,

$$x\in[a,b] \Rightarrow S = -\int\limits_a^b \frac{1}{b-a}\ln|b-a|^{-1}dx = \boxed{\ln(b-a) = S}\ ;$$

свяжем S со среднеквадратическим отклонением

$$\sigma^2=\int_a^b (x-m)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-m)^3}{3}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{(b-a)\cdot 3}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]=\frac{(b-a)^2}{12}=\sigma^2\Rightarrow b-a=\sigma\cdot\sqrt{12}$$

$S=\ln(\sqrt{12}\sigma)=\boxed{\ln\sqrt{12}+\ln\sigma=S}$.

Экспоненциальное распределение $f(x)=\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}$;

$$S=-\frac{1}{m}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{m}}\ln\left[\frac{e^{-\frac{x}{m}}}{m}\right]dx=-\frac{1}{m}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{m}}\underbrace{\left[-\frac{x}{m}-\ln m\right]}_{u}dx=\left|\begin{matrix}du=-\frac{1}{m}dx\\ V=-me^{-\frac{x}{m}}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{m}\left[m\left[\frac{x}{m}+\ln m\right]\cdot e^{-\frac{x}{m}}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\frac{x}{m}}dx\right]=\ln m+\left(-\frac{1}{m}\right)me^{-\frac{x}{m}}\Big|_0^\infty=\boxed{\ln m+1=S};$$

свяжем S со среднеквадратическим отклонением

$$\sigma^2=\int_0^\infty (x-m)^2\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}dx=\left|\begin{matrix}u=(x-m)^2,\ du=2(x-m)dx\\ V=\int du=\int\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}dx=-e^{-\frac{x}{m}}\end{matrix}\right|=$$

$$=-e^{-\frac{x}{m}}(x-m)^2\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty\underbrace{(x-m)}_{u}\underbrace{e^{-\frac{x}{m}}dx}_{du}=$$

$$=\left|\begin{matrix}du=dx\\ V=-me^{-\frac{x}{m}}\end{matrix}\right|=m^2+2\left[-(x-m)me^{-\frac{x}{m}}\Big|_0^\infty+m\int_0^\infty e^{-\frac{x}{m}}dx\right]=$$

$$m^2+2\left[-m^2-m^2e^{-\frac{x}{m}}\Big|_0^\infty\right]=m^2+2\left[-m+m^2\right]=m^2$$

$\Rightarrow\sigma=m;\ \boxed{S=\ln\sigma+1}$.

Нормальное распределение $-S=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]dx=$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}-\ln\sqrt{2\pi}\sigma\right]dx=$ (см. условие нормировки) =

$$=-\ln\sqrt{2\pi}\sigma+Y_1;\ Y_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}-\frac{x^2}{2\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma} \\ dx=\sqrt{2}\sigma dt \end{array}\right|=$$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}-t^2e^{-t^2}dt=Y_1,$ введем $Y(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\sqrt{\pi}$

$$Y'(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}-t^2\,e^{-\alpha t}dt=-\frac{1}{2}\alpha^{-3/2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Очевидно, $Y_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot Y'(1)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right);\qquad \sqrt{\pi}=-\frac{1}{2};$ т.о.

$$-S=-\ln\sqrt{2\pi}\sigma-\frac{1}{2};\ \boxed{S=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2\pi}+\ln\sigma}.$$

РАЗДЕЛ IV. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ЛЕКЦИЯ 10. НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА. ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Под законом больших чисел понимают общий принцип, в силу которого совместное действие случайных факторов приводит при определённых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Этот принцип выражается рядом теорем. В их числе – теорема Бернулли, теорема Чебышева. Для доказательства этих теорем используются

Неравенства Чебышева.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения СВ X от своего математического ожидания меньше положительного числа, не меньше разности $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$*:*

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ или } P\left(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Докажем теорему для ДСВ X, имеющей закон распределения $P(x_i)=p_i$, $i=\overline{1,n}$.

События $\left|X-M(X)\right|<\varepsilon$ и $\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon$ являются противоположными, поэтому сумма их вероятностей равна единице, то есть

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)+P(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon)=1,$$

откуда

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)=1-P(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon).$$

Дисперсия ДСВ X равна

$$D(X)=(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+\ldots+(x_n-M(X))^2p_n.$$

Предположим, что значения случайной величины занумерованы так, что

$$\left|x_1-M(X)\right|<\varepsilon,\ \left|x_2-M(X)\right|<\varepsilon,\ \ldots,\ \left|x_k-M(X)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|x_{k+1}-M(X)\right|\ge\varepsilon,\ \left|x_{k+2}-M(X)\right|\ge\varepsilon,\ \ldots,\ \left|x_n-M(X)\right|\ge\varepsilon.$$

Поскольку обе части каждого из последних неравенств положительны, то

$$(x_{k+1}-M(X))^2\ge\varepsilon^2,\ (x_{k+2}-M(X))^2\ge\varepsilon^2,\ \ldots,\ (x_n-M(X))^2\ge\varepsilon^2.$$

Понятно тогда, что

$$D(X)\ge(x_{k+1}-M(X))^2p_{k+1}+(x_{k+2}-M(X))^2p_{k+2}+\ldots+(x_n-M(X))^2p_n\ge$$

$$\ge\varepsilon^2(p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_n).$$

В соответствии с теоремой сложения вероятностей независимых событий сумма $p_{k+1}+p_{k+2}+...+p_n$ выражает вероятность того, что ДСВ X примет одно из значений x_i, $i=k+1,k+2,...,n$, для которого $|x_i-M(X)|\geq\varepsilon$, то есть

$$p_{k+1}+p_{k+2}+...+p_n=P(|X-M(X)|\geq\varepsilon).$$

Поэтому

$$D(X)\geq\varepsilon^2P(|X-M(X)|\geq\varepsilon),$$

откуда

$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ – *первое неравенство Чебышева*.

Найдем $P(|X-M(X)|<\varepsilon)$:

$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\geq1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ – *второе неравенство Чебышева*.

Доказательство для непрерывных случайных величин аналогичное. Дисперсия НСВ X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2f(x)dx.$$

Разобьем область интегрирования на три части:

$$(-\infty;M(X)-\varepsilon),\quad (M(X)-\varepsilon;M(X)+\varepsilon),\quad (M(X)+\varepsilon;+\infty).$$

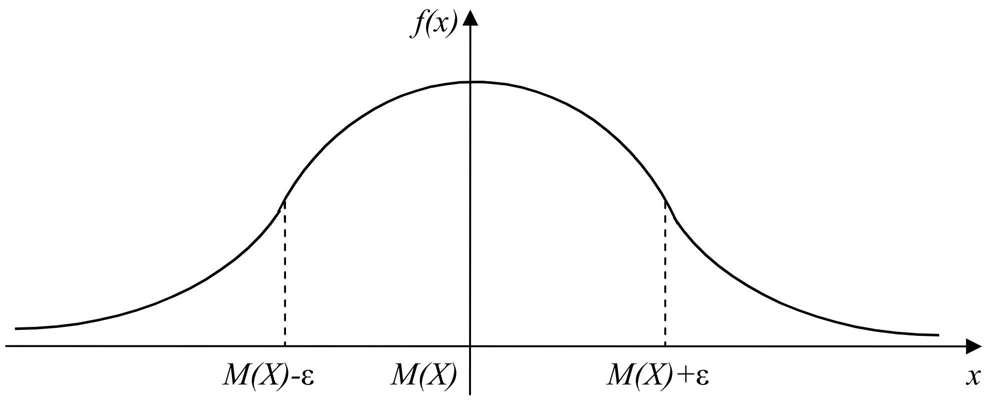


Рис. 1

Тогда

$$D(X)=\int_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}(x-M(X))^2f(x)dx+\int_{M(X)-\varepsilon}^{M(X)+\varepsilon}(x-M(X))^2f(x)dx+$$

$$+\int\limits_{M(X)+\varepsilon}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Опустив средний интеграл, получаем неравенство

$$D(X)\ge\int\limits_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}(x-M(X))^2 f(x)dx+\int\limits_{M(X)+\varepsilon}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

В пределах каждой из областей интегрирования

$$(x-M(X))^2\ge\varepsilon^2.$$

Значит,

$$D(X)\ge\varepsilon^2\left(\int\limits_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}f(x)dx+\int\limits_{M(X)+\varepsilon}^{+\infty}f(x)dx\right)=$$

$$=\varepsilon^2 P(-\infty<X\le M(X)-\varepsilon;M(X)+\varepsilon\le \mathrm{X}<+\infty)=$$

$$=\varepsilon^2 P(|X-M(X)|\ge\varepsilon).$$

Отсюда следует

$$P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева имеет прежде всего теоретическое значение. Но когда о законе распределения случайной величины мало информации, оно находит практическое применение.

►**Пример.** Оценить вероятность того, что отклонение какой-либо случайной величины от её математического ожидания по модулю будет меньше трёх среднеквадратических отклонений этой величины.

Решение. Пусть X – случайная величина и $D(X)=\sigma^2$. Тогда

$$P(|X-M(X)|<3\sigma)\ge 1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=1-\frac{1}{9}=0{,}8889.$$

В случае нормально распределённой случайной величины эта вероятность равна 0,9973, что не противоречит полученному результату. ◄

Второе неравенство Чебышева даёт верхнюю границу для вероятности того, что будет превышение некоторого заданного числа среднеквадратических отклонений независимо от вида закона распределения.

Теорема Чебышева. Случайная величина принимает значения, зависящие от многих причин. Учесть эти причины полностью невозможно. Поэтому и невозможно заранее указать значение, которое случайная величина примет в результате данного опыта. На первый взгляд кажется, что поведение суммы достаточно большого числа случайных величин не обладает закономерностью, как и каждая случайная величина в отдельности. Но это не так. Поведение суммы достаточно большого числа случайных величин при некоторых условиях перестает быть случайным и становится закономерным. Эти условия указаны в теореме Чебышева.

Рассмотрим случайную величину X, закон распределения которой меняется от опыта к опыту. Тогда появляются несколько (n) случайных величин.

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *независимы, имеют математические ожидания и дисперсии, каждая из которых ограничена одним и тем же числом* C*, то для любого положительного числа* ε *выполняется неравенство*

$$P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Среднее арифметическое данных случайных величин имеет вид

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Тогда

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i).$$

Применяя второе неравенство Чебышева к СВ $\overline{X}$, получаем

$$P(\left| \overline{X} - M(\overline{X}) \right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Учитывая условие $D(X_i) \le C$ $(i = \overline{1,n})$ и свойства дисперсии, находим

$$D(X) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2} \le$$

$$\le \frac{C + C + \ldots + C}{n^2} = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n},$$

$$D(X) \le \frac{C}{n}.$$

Из последнего неравенства и второго неравенства Чебышева следует неравенство

$$P(\left| \overline{X} - M(\overline{X}) \right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Рассмотрим понятие *сходимости по вероятности*. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к СВ X, если для любого числа $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| X_n - X \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Обозначение сходимости по вероятности

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n удовлетворяют условиям теоремы Чебышева, то

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,\right| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,\right| < \varepsilon) \geq 1,$$

но так как вероятность не может быть больше единицы, то

$$\lim_{n\to\infty} P\ (\left|\ \overline{X} - M(\overline{X})\ \right| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Чебышева лежит в основе выборочного метода в статистике. Результат каждого измерения – случайная величина с матожиданием, равным истинному значению измеряемой величины (если нет систематической погрешности). Теорема Чебышева говорит о том, что при большом числе измерений в качестве истинного можно принять среднее арифметическое (вероятность ошибиться при этом тем меньше, чем больше n).

►**Пример.** Сколько раз нужно измерить величину с истинным значением a, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a по модулю меньше, чем на 2, если СКО измерений меньше 10?

Решение. Нужно найти число n, удовлетворяющее неравенству

$$P\left(\ \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\ \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где $\varepsilon = 2$, $C = 100$. Тогда

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 0{,}95, \qquad \frac{n\varepsilon^2 - C}{n\varepsilon^2} = 0{,}95, \qquad n\varepsilon^2 = C + 0{,}95 n\varepsilon^2,$$

$$n = \frac{C}{\varepsilon^2} + 0{,}95n, \qquad 0{,}05n = \frac{C}{\varepsilon^2},$$

$$n = \frac{C}{0{,}05\varepsilon^2} = \frac{100}{0{,}05 \cdot 2^2} = 500.$$

Таким образом, измерять нужно не менее 500 раз. ◄

Если $D(X_i) = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$, то есть X – среднее арифметическое случайной величины с равными дисперсиями, то $D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ и из неравенства Чебышева следует, что

$$P(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma}{n\varepsilon^2}.$$

Например, в схеме Бернулли

$$\overline{X}=\frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{n}=\frac{k}{n}, \text{ где } k_i=0 \text{ или } 1,$$

$$\sigma^2=D(k_i)=pq, \qquad M(\overline{X})=\frac{\sum_{i=1}^{n}M(k_i)}{n}=\left|\ M(k_i)=p\ \right|=p,$$

тогда

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Оценкой можно пользоваться, если под рукой нет таблицы значений функции $\Phi(X)$ (интегральная теорема Лапласа).

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\Rightarrow 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \text{ для } n\to\infty.$$

Пусть, например, $n=100$, $p=\frac{1}{2}=q$, $\varepsilon=0{,}1$. Тогда

$$1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=1-\frac{\frac{1}{4}}{100\cdot 0{,}01}=\frac{3}{4},\ \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=0{,}1\sqrt{\frac{100}{\frac{1}{4}}}=2,$$

$$\Phi(2)=0{,}4772,\ 2\Phi(2)=0{,}9544>\frac{3}{4}.$$

►**Пример.** При штамповке деталей брак в среднем составляет 3%. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 деталей число бракованных отклонится от своего среднего значения не более чем на 1%.

Решение. Имеем $n=1000$, $p=0{,}03$, $q=0{,}97$, $\varepsilon=0{,}01$. Тогда

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{0{,}03\cdot 0{,}97}{1000\cdot(0{,}01)^2}=0{,}71.◄$$

Теорема Бернулли. В статистическом определении вероятности наступления события использовалось свойство устойчивости относительной частоты наступления этого события при увеличении числа испытаний. Теоретическим обоснованием этого свойства является теорема Бернулли.

Если k – число появлений события A в n независимых испытаниях и p – вероятность появления события A в каждом испытании, то вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты от веро-

ятности меньше любого числа $\varepsilon > 0$*, больше чем разность* $1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$*, то есть*

$$P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что *при достаточно больших* n *вероятность* $P\left(\left| \dfrac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right)$ *как угодно близка к единице, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Пусть X_i – число появлений события A при i-том испытании, $i = \overline{1,n}$. Каждая из случайных величин X_i может принимать лишь два возможных значения: $x_1 = 1$ с вероятностью p (событие A наступило) и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$ (событие A не наступило). Поэтому все они имеют одно и то же математическое ожидание

$$M(X_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

одну и ту же дисперсию

$$D(X_i) = M((X_i - M(X_i))^2) = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q =$$
$$= q^2 p + p^2 q = pq(q+p) = pq.$$

Поскольку

$$D(X_i) = pq \leq \frac{1}{4},$$

(так как произведение pq принимает наибольшее значение при $p = q = 0{,}5$), к случайным величинам X_i применима теорема Чебышева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - M(X_i) \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Так как $M(X_i) = p$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} X_i = m$, где m – число появлений события A при n испытаниях, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Заметим, что теорема Бернулли не позволяет утверждать, что неравенство

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$$

будет выполнятся для всех достаточно больших n. Она лишь утверждает, что выполнение такого неравенства при достаточно больших n будет очень вероятно.

►**Пример.** Начиная с какого числа n независимых испытаний выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}1\right)>0{,}97,$$

если в отдельном испытании $p=0{,}8$?

Решение. Неравенство

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

в данном случае имеет вид

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<0{,}1\right)\geq 1-\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{n\cdot 0{,}01}.$$

Поэтому

$$1-\frac{0{,}16}{0{,}01n}>0{,}97.$$

Отсюда находим

$$1-0{,}97>\frac{0{,}16}{0{,}01n}, \qquad 0{,}03>\frac{0{,}16}{0{,}01n}, \qquad n>\frac{0{,}16}{0{,}03\cdot 0{,}01}=\frac{0{,}16}{0{,}0003}\approx 533{,}33.$$

Таким образом,

$$n\geq 534.$$ ◄

Неравенство Маркова

Если СВ X принимает только положительные значения и существует её математическое ожидание, то для любого числа $\delta>0$ справедливо неравенство

$$P(X\leq\delta)>1-\frac{M(X)}{\delta}.$$

►**Пример.** Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов.

Решение. Имеем $M(X)=200$, $\delta=220$. Тогда

$$P\left(X \le 200\right) \ge 1-\frac{200}{220}=1-0{,}091,$$

$$P\left(X \le 200\right) \ge 0{,}909. \blacktriangleleft$$

<u>*Теорема Пуассона.*</u> Пусть производится n независимых испытаний, причем вероятности появления события A в каждом из них различны и равны $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$, тогда средняя вероятность имеет вид $P_{cp}=\dfrac{P_1+\ldots+P_n}{n}$. Теорема Пуассона утверждает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\ \left|\frac{k}{n}-P_{cp}\right|<\varepsilon\right)=1,$$

где k – число испытаний, в которых появилось событие A.

<u>*Центральная предельная теорема Ляпунова.*</u> Многие задачи теории вероятностей связаны с изучением суммы независимых случайных величин. В соответствии с этой теоремой *плотность вероятности суммы независимых или слабо зависимых, равномерно малых (играющих одинаковую роль) слагаемых при неограниченном увеличении их числа как угодно близко приближается к нормальному закону распределения независимо от того, какие законы распределения имеют эти слагаемые.*

Из теоремы Ляпунова следует локальная теорема Лапласа. Пусть СВ X – число появлений события A при n независимых опытах. Её можно представить так:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

где X_i – число появлений события A при i-том испытании, $i=1,\ldots,n$. При всех i

$$M(X_i)=p, \qquad D(X_i)=pq \qquad \text{(см. лекцию 7)},$$

то есть величины X_i, $i=1,\ldots,n$ удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова. Их сумма $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ имеет распределение, близкое к нормальному. Оно определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Известно, что

$$M(X)=np, \qquad D(X)=npq \qquad \text{(см. лекцию 7)}.$$

Тогда при $x=k$, $a=np$, $\sigma = \sqrt{npq}$ получаем

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Поэтому верна локальная теорема Лапласа: *если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближённо выражается формулой*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

или

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad \text{при} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приведём без доказательства интегральную теорему Лапласа: если вероятность появления события *A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что в этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2, приближённо выражается формулой*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad \text{где} \qquad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Эта формула имеет другой вид:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

или

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

РАЗДЕЛ V. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ЛЕКЦИЯ 11. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Понятие о системе случайных величин. Иногда в практических задачах результат опыта описывается не одной случайной величиной (её возможные значения определяются одним числом), а двумя или более случайными величинами, образующими *систему* (их возможные значения определяются несколькими числами).

Например:

– точка попадания снаряда описывается абсциссой и ординатой. Получаем систему двух случайных величин;

– осколок, образовавшийся при разрыве снаряда, характеризуется весом, размерами, начальной скоростью, направлением полета. Получаем систему четырех случайных величин.

Система двух случайных величин X и Y обозначается (X,Y) – *двумерная случайная величина*.

Геометрически её можно изобразить случайной точкой на плоскости с координатами (X,Y) или случайным радиус-вектором с координатами конца (X,Y) (рис. 1).

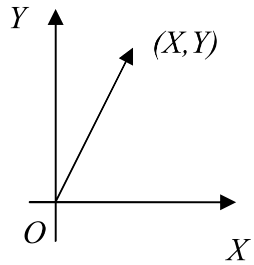


Рис. 1

Свойства системы случайных величин включают в себя свойства отдельных составляющих, а также взаимные связи между ними.

Системы случайных величин могут быть *дискретными*, *непрерывными* или *смешанными* в зависимости от типа их одномерных составляющих.

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины

Как и в случае одномерной случайной величины, полной вероятностной характеристикой двумерной случайной величины является закон распределения – соотношение, устанавливающее связь между областями её возможных значений и вероятностями её появления в этих областях.

Определение 11.1. Законом распределения двумерной ДСВ (X,Y) называется множество всех её возможных значений с их вероятностями.

Этот закон записывается в виде таблицы с двойным входом:

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1k}	$\dots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2k}	$\dots$	p_{2n}	p_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ik}	$\dots$	p_{in}	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mk}	$\dots$	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	q_2	$\dots$	q_k	$\dots$	q_n	1

Графическая форма задания закона распределения двумерной ДСВ (X,Y) приведена на рис. 2.

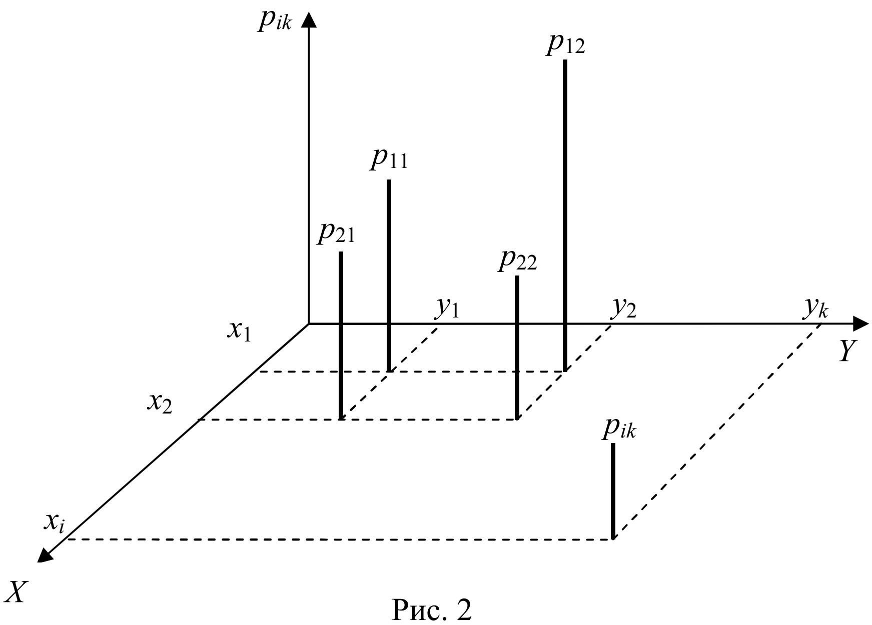


Рис. 2

►**Пример.** Двумерная ДСВ (X,Y) задана законом распределения

$X \diagdown Y$	2	3	4
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,10	0,05
4	0,05	0,05	0,05
5	0,05	0	0

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений ДСВ X:

$$P(X=2)=0{,}3+0{,}15+0{,}05=0{,}5,$$
$$P(X=3)=0{,}15+0{,}10+0{,}05=0{,}30,$$
$$P(X=4)=0{,}05+0{,}05+0{,}05=0{,}15,$$
$$P(X=5)=0{,}05.$$

Закон распределения составляющей X:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,50	0,30	0,15	0,05

$0{,}5+0{,}3+0{,}15+0{,}05=1$ – условие нормировки выполнено.

Сложив вероятности по строкам, аналогично найдём распределение составляющей Y:

y_i	2	3	4
p_i	0,55	0,30	0,15

$0{,}55+0{,}3+0{,}15=1$ – условие нормировки выполнено. ◄

Функция распределения двумерной случайной величины. Универсальной характеристикой многомерных случайных величин – дискретных и непрерывных – является функция распределения.

Определение 11.2. Функцией распределения двумерной случайной величины (X,Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X<x$ и $Y<y$:

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y).$$

Геометрически функция распределения есть вероятность попадания точки (X,Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке $(x;y)$, лежащий левее и ниже ее (рис. 3).

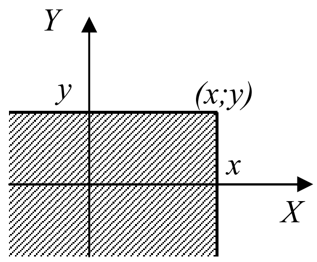


Рис. 3

Из определения $F(x,y)$ следует, что для двумерной ДСВ (X,Y):

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i<x\\ y_j<y}}P(X=x_i\cap Y=y_j)=\sum_{\substack{x_i<x\\ y_j<y}}p(x_i,y_j)=\sum_{\substack{x_i<x\\ y_j<y}}p_{ij},$$

где суммирование выполняется по всем точкам (x_i,y_j), для которых одновременно $x_i<x$ и $y_j<y$.

►**Пример.** Передаются два сообщения, каждое из которых может быть независимо от другого принято с искажением или без искажения. Вероятность того, что первое (второе) сообщение принято с искажением, равна 0,1 (0,15). Рассмотрим двумерную случайную величину (X,Y), составляющие которой имеют следующие множества значений:

$$X=\begin{cases}1, & \text{первое сообщение принято с искажением;}\\ 0, & \text{первое сообщение принято без искажения,}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{второе сообщение принято с искажением;}\\ 0, & \text{второе сообщение принято без искажения.}\end{cases}$$

Найти распределение двумерной случайной величины (X,Y) и её функцию распределения $F(x,y)$.

Решение. Составляющие двумерной случайной величины (X,Y) дискретны, поэтому вероятности возможных пар значений равны:

$$p_{00}=P(X=0\cap Y=0)=(1-p_1)(1-p_2)=0{,}9\cdot 0{,}85=0{,}765,$$

$$p_{10}=P(X=1\cap Y=0)=p_1(1-p_2)=0{,}1\cdot 0{,}85=0{,}085,$$

$$p_{01}=P(X=0\cap Y=1)=(1-p_1)p_2=0{,}9\cdot 0{,}15=0{,}135,$$

$$p_{11}=P(X=1\cap Y=1)=p_1p_2=0{,}1\cdot 0{,}15=0{,}015.$$

Соответствующая таблица имеет вид:

X \ Y	0	1	$\sum$
0	0,765	0,085	0,85
1	0,135	0,015	0,15
$\sum$	0,9	0,1	1

Тогда

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\\ 0{,}765, & \text{при } 0<x\le 1 \text{ или } 0<y\le 1;\\ 0{,}85, & \text{при } x>1 \text{ или } 0<y\le 1;\\ 0{,}9, & \text{при } 0<x\le 1 \text{ или } y>1;\\ 1, & \text{при } x>1 \text{ или } y>1.\end{cases}$$

◄

Свойства функции распределения двумерной случайной величины

1. Функция распределения $F(x,y)$ – неубывающая:
если $x_1<x_2$, то $F(x_1;y)\le F(x_2;y)$, если $y_1<y_2$, то $F(x;y_1)\le F(x;y_2)$.

Докажем, что $F(x,y)$ – неубывающая функция по x, то есть, что при $x_1<x_2$ $F(x_1;y)\le F(x_2;y)$ или $F(x_2;y)-F(x_1;y)\ge 0$.

Событие $X<x_2$ при $Y<y$ состоит из суммы двух событий: «X принимает значение, меньшее x_1 при $Y<y$» с вероятностью $P(X<x_1\cap Y<y)$

и «X принимает значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X < x_2$ при $Y < y$» с вероятностью $P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y)$. Эти события несовместны, поэтому

$$P(X < x_2 \cap Y < y) = P(X < x_1 \cap Y < y) + P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y)$$

$$\Downarrow$$

$$P(X < x_2 \cap Y < y) - P(X < x_1 \cap Y < y) = P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y)$$

$$\Downarrow$$

$$F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y).$$

Так как вероятность – число положительное, то

$$F(x_2; y) - F(x_1; y) \ge 0.$$

2. Повсюду на $-\infty$ $F(x, y) = 0$.

При $x = -\infty$ $F(-\infty, y)$ – вероятность события $X < -\infty \cap Y < y$. Это событие невозможное, поэтому $F(-\infty, y) = 0$ и т.д.

3. Если оба аргумента равны $+\infty$, то $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Действительно, событие $X < +\infty \cap Y < +\infty$ – достоверное, поэтому $P(X < +\infty \cap Y < +\infty) = F(+\infty, +\infty) = 1$.

4. При одном из аргументов, равном $+\infty$, функция распределения равна функции распределения другого аргумента:

$$F(x, +\infty) = F(x), \; F(+\infty, y) = F(y).$$

Действительно, событие $Y < +\infty$ достоверное, поэтому

$$F(x, +\infty) = P(X < x) = F(x).$$

Аналогично, событие $X < +\infty$ достоверное, поэтому

$$F(+\infty, y) = P(Y < y) = F(y).$$

Геометрически функция $F(x)$ есть вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой x (рис. 4), а $F(y)$ – вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой y (рис. 5).

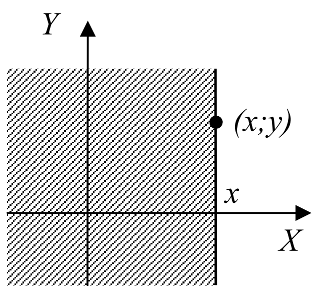


Рис. 4

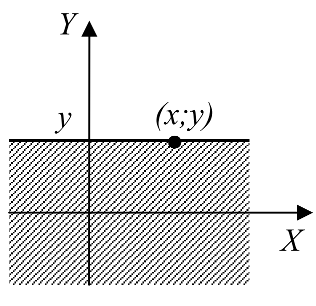


Рис. 5

5. Функция распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y) непрерывна слева по каждому аргументу.

С помощью свойств двумерной функции распределения можно вычислить вероятность попадания двумерной случайной величины (X,Y) в любую прямоугольную область, поэтому справедливы следующие теоремы.

Теорема 11.1. Вероятность попадания случайной точки в бесконечную полуполосу равна приращению функции распределения по одному из аргументов (рис. 6, 7):

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y),$$
$$P(X < x \cap y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

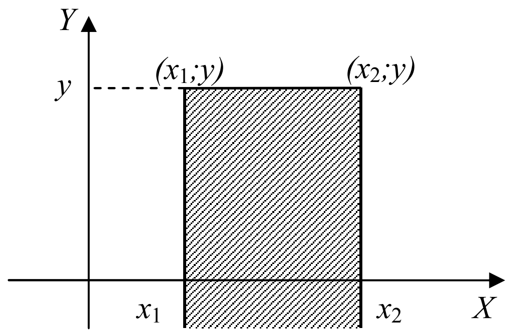


Рис. 6

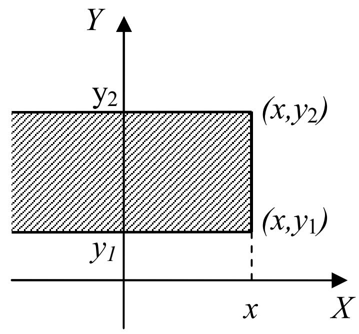


Рис. 7

Доказательство. Из геометрической интерпретации двумерной функции распределения видно, что

$$P(X < x_2 \cap Y < y) = P(X < x_2 \cap Y < y) + P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y)$$

или по определению 12.2

$$F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y),$$

откуда следует, что

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y).$$

Аналогично доказывается равенство

$$P(X < x \cap y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

Теорема 11.2. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 8) равна

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap y_1 \le Y < y_2) =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Эта вероятность находится вычитанием из вероятности попадания случайной точки в полуполосу AB вероятности попадания случайной точки в полуполосу CD (рис. 8).

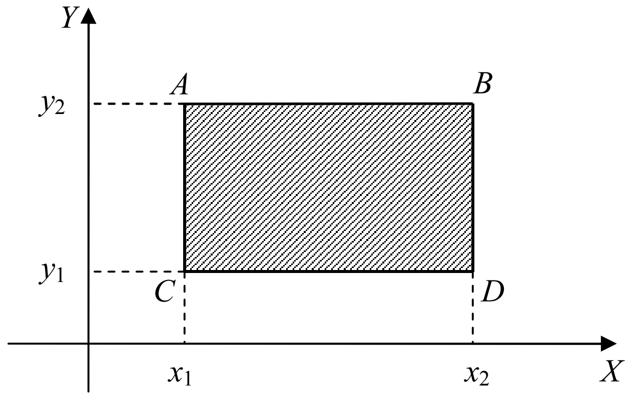


Рис. 8

►**Пример.** Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y & \text{при} \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Положив $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$, $y_1=\dfrac{\pi}{6}$, $y_2=\dfrac{\pi}{3}$, получим

$$P\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\cap\frac{\pi}{6}\le X<\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0{,}26. \blacktriangleleft$$

Двумерная непрерывная случайная величина. Плотность вероятности двумерной случайной величины. Функция распределения характеризует как дискретные, так и непрерывные двумерные случайные величины. Но последние ещё удобно задавать плотностью вероятности.

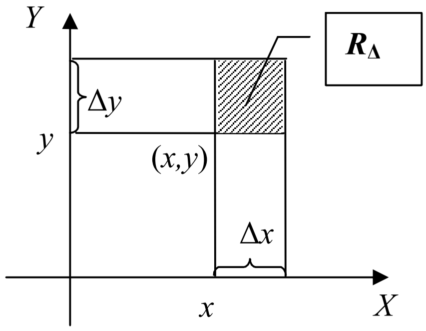


Рис. 9

Плотность вероятности одномерной случайной величины есть предел отношения вероятности попадания её значений на малый участок к длине этого участка при неограниченном уменьшении этой длины. Для системы двух случайных величин (X,Y) определение плотности вероятности аналогичное: вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник R_Δ со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке (x,y) (рис. 9).

Найдём вероятность попадания случайной точки (X,Y) в R_{Δ}:

$$P((X,Y)\in R_{\Delta}) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y).$$

Разделим вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник R_{Δ} на его площадь и найдём предел этого выражения при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$:

$$P(x \le X < x+\Delta x \cap y \le Y < y+\Delta y) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Предполагая, что $F(x,y)$ непрерывна и дифференцируема, и применив теорему Лагранжа, получим

$$P(x \le X < x+\Delta x \cap y \le Y < y+\Delta y) = \frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y,$$

где точка ξ расположена между x и Δx, точка η – между y и Δy.

Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)) - (F(x+\Delta x, y) - F(x,y))}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F_x'(x, y+\Delta y) - F_x'(x,y)}{\Delta x \Delta y} = F_{xy}''(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y),$$

так как при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\xi \to x$, $\eta \to y$.

Определение 11.3. Функция $f(x,y)$, равная пределу отношения вероятности попадания двумерной случайной величины (X,Y) в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, называется **плотностью вероятности**.

Таким образом,

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F_{xy}''(x,y)$$

во всех точках, где существует смешанная производная.

Геометрически функция $z = f(x,y)$ изображается некоторой поверхностью, которая аналогична по смыслу кривой распределения и называется *поверхностью распределения*.

Если её пересечь плоскостью, параллельной плоскости Oxy и спроецировать полученное сечение на Oxy, то получится кривая, в каждой точке которой плотность вероятности постоянна (*кривая равной плотности*).

По аналогии с одномерным случаем рассмотрим понятие *элемента вероятности*. Из определения предела следует, что

$$P(x \le X < x + \Delta x \cap y \le Y < y + \Delta y) = (f(x, y) + \varepsilon)\Delta x \Delta y = (f(x, y) + \varepsilon)dxdy,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Определение 11.4. **Элементом вероятности двумерной случайной величины** (X, Y) называется выражение $f(x, y)\Delta x \Delta y$, которое даёт вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке (x, y).

Эта вероятность равна объёму элементарного параллелепипеда, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и опирающегося на элементарный прямоугольник R_Δ.

Найдём теперь вероятность попадания двумерной НСВ (X, Y) в произвольную область $D \subseteq \Omega_{XY}$. Для этого разобьем D на n элементарных прямоугольников R_{Δ_i} и выберем в каждом из них точку (ξ_i, η_i) (рис. 2).

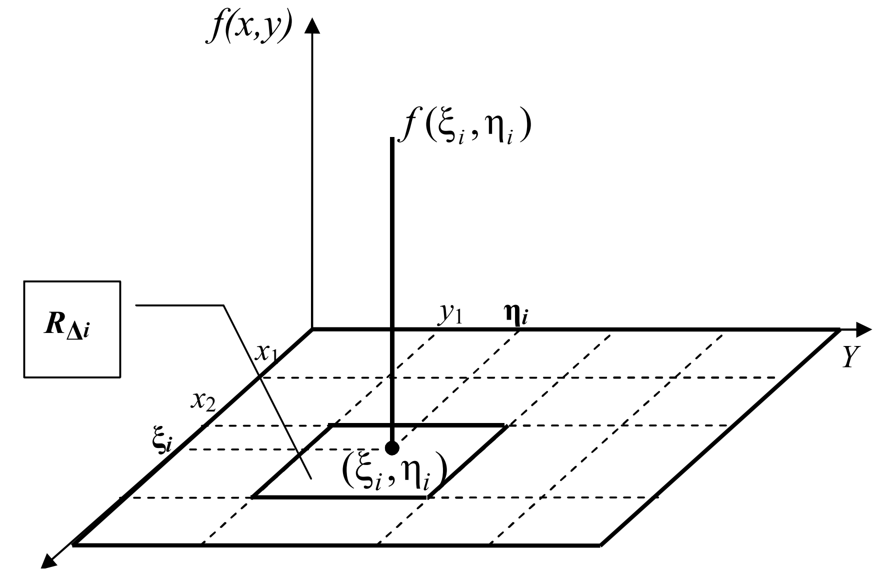


Рис. 2

Тогда

$$P((X, Y) \in R_{\Delta_i}) \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta x \Delta y.$$

Поэтому

$$P((X, Y) \in D) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

При $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$ получаем

$$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) *в область* D *численно равна объёму цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью* $z = f(x,y)$ *и опирающегося на область* D.

Из последней формулы следует, что *вероятность попадания случайной точки* (X,Y) *в прямоугольник* $R: \alpha \le X < \beta \cap \gamma \le Y < \delta$ равна

$$P((X,Y) \in R) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dxdy.$$

Так как функция распределения есть вероятность попадания в бесконечный квадрат, то

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Отсюда следует, что плотность вероятности и функция распределения однозначно выражаются одна через другую. Значит, они полностью определяют двумерную НСВ (X,Y).

Свойства двумерной плотности вероятности непрерывной случайной величины

1. $f(x,y) \ge 0$.

Действительно, $f(x,y)$ равна пределу отношения двух неотрицательных величин, поэтому она не может быть отрицательной.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ (условие нормировки).

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$ есть вероятность попадания случайной точки (X,Y) на всю плоскость Oxy, что является достоверным событием.

►**Пример.** Двумерная случайная величина (X,Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;0)$, $(2;2)$. Найти:

а) плотность вероятности $f(x,y)$

б) функцию распределения $F(x,y)$.

Решение. а) По условию задачи плотность вероятности имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} C=\text{const}, & (x,y)\in R;\\ 0, & (x,y)\overline{\in} R.\end{cases}$$

Постоянную C найдём с помощью свойства 2 плотности вероятности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{R} Cdxdy=C\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{2}dy=C\cdot 4=1,\text{ откуда } C=\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & (x,y)\in R;\\ 0, & (x,y)\overline{\in} R.\end{cases}$$

б) Функцию распределения $F(x,y)$ найдём с помощью формулы

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Пусть $x\le 0$ или $y\le 0$, тогда

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\eta=0,$$

так как $f(\xi,\eta)=0$ при $(\xi,\eta)\overline{\in} R$.

Пусть $0<x\le 2$ и $0<y\le 2$, тогда

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\eta=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{4}d\eta=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} yd\xi=\frac{xy}{4}.$$

Пусть $x>2$ и $0<y\le 2$, тогда

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\eta=\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{4}d\xi=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{y}2d\eta=\frac{1}{2}y.$$

Пусть $0<x\le 2$ и $y>2$, тогда

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\eta=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{0}^{2}d\eta=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{y}2d\eta=\frac{1}{2}x.$$

Пусть $x>2$ и $y>2$, тогда

$$F(x,y)=P(X<x\cap Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}d\xi\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\eta=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2}d\xi\int\limits_{0}^{2}d\eta=1.$$

Функция распределения $F(x,y)$ имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ и } y\le 0;\\ \dfrac{xy}{4} & \text{при} \quad 0<x\le 2 \text{ и } 0<y\le 2;\\ \dfrac{y}{2} & \text{при} \quad x>2 \text{ и } 0<y\le 2;\\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2 \text{ и } y>2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2 \text{ и } y>2.\end{cases}$$

◄

►**Пример.** Функция распределения двумерной случайной величины задана выражением

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)} & \text{при} \quad x\ge 0 \text{ и } y\ge 0;\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Вычислить вероятность $P(0\le X\le 1\cap 0\le Y\le 1)$.

Решение. Найдём эту вероятность по формуле

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

где

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y).$$

Вычислим $f(x,y)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & \text{при} \quad x\ge 0 \text{ и } y\ge 0;\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Тогда

$$P(0\le X\le 1\cap 0\le Y\le 1)=\int_0^1 dy\int_0^1 e^{-(x+y)}dx=\int_0^1 e^{-y}dy\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{(1-e)^2}{e^2}\approx 0{,}4.$$ ◄

ЛЕКЦИЯ 12. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Законы распределения составляющих двумерной случайной величины. Зная закон распределения системы двух величин, можно определить законы распределения её составляющих (свойство 4 двумерной функции распределения).

Если двумерная случайная величина (X,Y) – непрерывная и

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\eta)d\eta,$$

то функции распределения составляющих X и Y определяются по формулам

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\eta, \qquad F(y)=\int_{-\infty}^{x}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\xi.$$

Дифференцируя эти выражения по соответствующим переменным (с помощью теоремы о дифференцировании определённого интеграла по переменному верхнему пределу), получим выражение плотности вероятности для X и Y:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{\partial\left(\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\eta\right)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\eta,$$

$$f(y)=\frac{dF(y)}{dy}=\frac{\partial\left(\int_{-\infty}^{x}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\xi\right)}{\partial y}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)d\xi.$$

Зная законы распределения отдельных величин, входящих в систему, не всегда в общем случае можно найти закон распределения системы. Для этого нужно знать вид зависимости между величинами, входящими в систему, которая описывается с помощью условных законов распределения.

Условные законы распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины

Определение 12.1. Распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая приняла определённое значение, называется **условным**.

Найдём *условные распределения плотности вероятности составляющих X и Y двумерной НСВ (X,Y)*:

$$\underset{\text{(ппр условии)}}{f(x/y)}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x\le X<x+\Delta x/y\le Y<y+\Delta y)}{\Delta x}.$$

По теореме умножения вероятностей:

$$P(x\le X<x+\Delta x\cap y\le Y<y+\Delta y)=$$
$$=P(y\le Y<y+\Delta y)\cdot P(x\le X<x+\Delta x/y\le Y<y+\Delta y)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x/y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x\le X<x+\Delta x\cap y\le Y<y+\Delta y)}{\Delta x\cdot P(y\le Y<y+\Delta y)}=$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\dfrac{P(x \le X < x + \Delta x \cap y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}}{\dfrac{P(y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta y}} = \frac{f(x,y)}{f(y)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Следовательно, } f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)}. \\ \text{Аналогично, } \quad f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}. \\ \text{Таким образом, доказана} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x/y)\cdot f(y) \equiv f(y/x)\cdot f(x) = \\ = f(x,y) \end{array}$$

Теорема 12.1. Плотность вероятности двумерной НСВ (X,Y) равна плотности вероятности одной из величин, входящих в систему, умноженной на условную плотность вероятности другой величины, вычисленную при условии, что первая величина приняла заданное значение:

$$f(x,y) = f(x)\cdot f(y/x) \text{ или } f(x,y) = f(y)\cdot f(x/y).$$

Для двумерных непрерывных случайных величин вводить условную функцию распределения составляющей нет смысла, так как

$F(x/y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)dx = \dfrac{1}{f(y)} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)dx}_{\equiv 0}$ (объём цилиндра конечной высоты, но без основания, вместо него – полубесконечная прямая (луч)).

Если по Y величина (X,Y) – дискретная, то есть смысл рассматривать $F(x/y)$.

<u>Условные распределения составляющих двумерной дискретной случайной величины.</u> Рассмотрим двумерную ДСВ (X,Y) со множеством возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$

Пусть составляющая Y приняла некоторое значение y_j; при этом другая составляющая X может принимать любое из значений x_1, x_2, …, x_n, …

Найдём условную вероятность события $X = x_i$, если наблюдалось событие $Y = y_j$. Для этого воспользуемся теоремой о вероятности произведения зависимых событий, которая в данном случае имеет вид

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(Y = y_j)\cdot P(X = x_i / Y = y_j).$$

Откуда $$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

Обозначая эту вероятность $p(x_i / y_j)$, получаем

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}.$$

Совокупность условных вероятностей $p(x_1 / y_j)$, $p(x_2 / y_j)$, …, $p(x_i / y_j)$, …, отвечающих условию $Y = y_j$, называется *условным распределением составляющей* X *при* $Y = y_j$ *двумерной ДСВ* (X, Y).

Аналогично *условное распределение составляющей* Y *при* $X = x_i$ *двумерной ДСВ* (X, Y) – это совокупность условных вероятностей $p(y_1 / x_i)$, $p(y_2 / x_i)$, …, $p(y_j / x_i)$, … при $X = x_i$, где

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Проверим выполнимость условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i / y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1,$$

так как

$$p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + ... + p(x_i, y_j) + ... = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = p(y_j).$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(y_j / x_i) = 1.$$

Условная функция распределения $F(x / y)$ *или* $F(y / x)$ *двумерной ДСВ* (X, Y)*, заданной таблицей*

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_k	…	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1k}	…	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2k}	…	p_{2n}	p_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ik}	…	p_{in}	p_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mk}	…	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	q_2	…	q_k	…	q_n	1

имеет вид

$$F(x / y) = P(X < x / Y = y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j = y}} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j = y}} p(x_i, y_j) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j = y}} p(x_i).$$

Аналогично $F(y/x) = \sum\limits_{\substack{x_i < x \\ y_j = y}} p(y_i)$.

►**Пример.** Случайная величина (X,Y) распределена с постоянной плотностью $p(x,y) = \mathrm{const} = C$ внутри квадрата R с вершинами $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;0)$, $(0;-2)$ (рис. 1). Найти плотность вероятности случайной величины (X,Y) и условные плотности вероятности $f(x/y)$, $f(y/x)$.

Решение. Плотность вероятности двумерной СВ (X,Y) по свойству 2 (условие нормировки) равна (рис. 1):

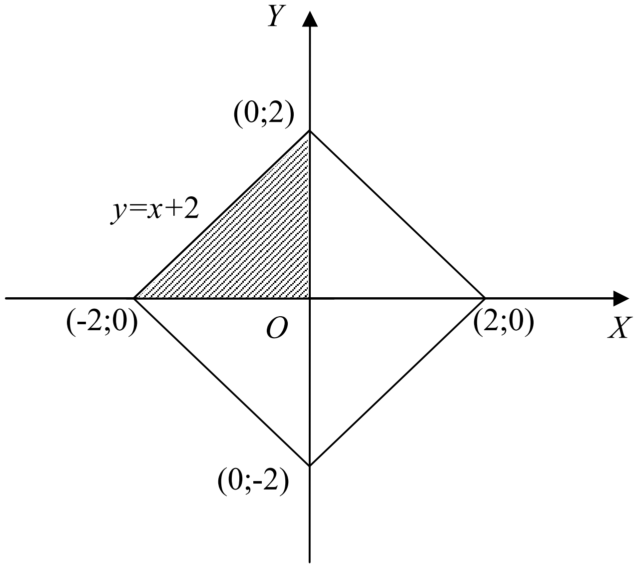


Рис. 1

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow 4C\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{2+x} dy = 4C\int\limits_{-2}^{0}(2+x)\,dx = 8C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{8},$$

то есть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \text{при} \quad (x;y) \in R; \\ 0 & \text{при} \quad (x;y) \overline{\in} R. \end{cases}$$

Найдём плотности $f(x)$ и $f(y)$ составляющих:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\int\limits_{-(2+x)}^{2+x} dy = \dfrac{1}{4}(2+x), & -2 < x < 0; \\ \dfrac{1}{8}\int\limits_{-(2-x)}^{2-x} dy = \dfrac{1}{4}(2-x), & 0 < x < 2; \\ 0, & x < -2 \quad \text{или} \quad x > 2. \end{cases}$$

Аналогично

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\int\limits_{-(2+y)}^{2+y} dx=\dfrac{1}{4}(2+y), & -2<y<0;\\ \dfrac{1}{8}\int\limits_{-(2-y)}^{2-y} dx=\dfrac{1}{4}(2-y), & 0<y<2;\\ 0, & y<-2 \quad \text{или} \quad y>2.\end{cases}$$

Запишем $f(x)$ и $f(y)$ компактно:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(2-|x|, & |x|<2;\\ 0, & |x|>2;\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(2-|y|, & |y|<2;\\ 0, & |y|>2.\end{cases}$$

Пусть $|y|<2$, тогда

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\begin{cases}\dfrac{4}{8(2-|y|)}=\dfrac{1}{2(2-|y|)}, & |x|<2-|y|;\\ 0, & |x|<2-|y|.\end{cases}$$

Если $|x|<2$, то

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(2-|x|)}, & |y|<2-|x|;\\ 0, & |y|<2-|x|.\end{cases}$$ ◄

ЛЕКЦИЯ 13. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Интуитивно независимыми можно считать случайные величины, не связанные причинно, то есть если никакая информация об одной из них не изменяет распределение другой.

Определение 13.1. Случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

Укажем следующие критерии независимости случайных величин.

Теорема 13.1. Для того, чтобы составляющие X и Y двумерной СВ (X,Y) были независимы, необходимо и достаточно, чтобы двумерная функция распределения была равной произведению функций распределений составляющих:

$$F(x,y)=F(x)F(y).$$

Теорема 13.2. Для того, чтобы *непрерывные* составляющие X и Y двумерной СВ (X,Y) были независимы, необходимо и достаточно, чтобы двумерная плотность вероятности была равной произведению плотностей вероятности составляющих:

$$f(x,y)=f(x)f(y).$$

Сравнив эти теоремы, можно сделать вывод, что для независимости составляющих X и Y необходимо и достаточно выполнение условий:

$$f(x/y)=f(x) \text{ и } f(y/x)=f(y).$$

Теорема 13.3. Для того, чтобы *дискретные* составляющие X и Y двумерной СВ (X,Y) были независимы, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j).$$

►**Пример.** Пусть выполняются условия примера из лекции 12. Определить, будут ли составляющие X и Y зависимыми или независимыми.

Решение. Для исследования зависимости случайных величин X и Y проверим выполнимость одного из равенств

$$f(x/y)=f(x) \text{ и } f(y/x)=f(y).$$

Так как $f(x/y)\neq f(x)$, то случайные величины X и Y зависимы. ◄

Числовые характеристики системы двух СВ. Закон распределения есть исчерпывающая характеристика двумерной случайной величины. Но его экспериментальное определение часто оказывается сложным. Чтобы получить некоторое представление о законе распределения двумерной случайной величины без него самого, используют её числовые характеристики. В основе их получения лежат *моменты начальные и центральные.*

Определение 13.2. Начальным моментом $\nu_{k,s}$ порядка $k+s$ двумерной СВ (X,Y) называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s:

$$\nu_{k,s}=M(X^k\cdot Y^s).$$

Для двумерной ДСВ (X,Y)

$$\nu_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k\cdot y_j^s p_{ij},$$

где $p_{ij}=P(X=x_i\cap Y=y_j)$ – вероятность того, что ДСВ (X,Y) примет значение (x_i,y_j), а суммирование ведется по всем возможным значениям составляющих X и Y.

Для двумерной НСВ (X,Y)

$$\nu_{k,s} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy,$$

где $f(x,y)$ – двумерная плотность вероятности.

Определение 13.3. Центральным моментом $\mu_{k,s}$ **порядка** $k+s$ **двумерной СВ** (X,Y) называется математическое ожидание произведения соответствующих центрированных величин:

$$\mu_{k,s} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{k} \cdot \overset{\circ}{Y}{}^{s}\right), \text{ где } \overset{\circ}{X}{}^{k} = X - m_x, \quad \overset{\circ}{Y}{}^{s} = Y - m_y.$$

Для двумерной ДСВ (X,Y)

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k \cdot (y_j - m_y)^s p_{ij}.$$

Для двумерной НСВ (X,Y)

$$\mu_{k,s} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)dxdy.$$

Из *начальных* на практике наиболее часто используются *моменты первого порядка*:

$$\nu_{1,0} = M(X^1 \cdot Y^0) = M(X) = m_x,$$

$$\nu_{0,1} = M(X^0 \cdot Y^1) = M(Y) = m_y.$$

Их совокупность является характеристикой положения системы: геометрически это точка на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание значений двумерной СВ (X,Y).

Из центральных наиболее употребительны *моменты второго порядка*. Два из них представляют собой дисперсии составляющих:

$$\mu_{2,0} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{2} \cdot \overset{\circ}{Y}{}^{0}\right) = M((X - m_x)^2 (Y - m_y)^0) = M((X - m_x)^2) = D(X),$$

$$\mu_{0,2} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{0} \cdot \overset{\circ}{Y}{}^{2}\right) = M((X - m_x)^0 (Y - m_y)^2) = M((Y - m_y)^2) = D(Y).$$

Эти моменты характеризуют рассеивание составляющих в направлении осей Ox и Oy.

<u>*Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.*</u> Особую роль играет центральный момент второго порядка

$$\mu_{1,1} = M\left(\overset{\circ}{X} \cdot \overset{\circ}{Y}\right) = M((X - m_x)(Y - m_y)) = M(XY) - M(X)M(Y) = K_{xy},$$

который называется *корреляционным моментом* (*моментом связи*, *ковариацией*) и является *математическим ожиданием центрированной двумерной случайной величины*.

Из определения следует, что корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей величин X и Y.

Для двумерной ДСВ (X,Y)

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x) \cdot (y_j - m_y) p_{ij} .$$

Для двумерной НСВ (X,Y)

$$K_{xy} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y) dxdy .$$

Корреляционный момент характеризует *связь между составляющими двумерной СВ*, а также их *рассеяние*.

Рассмотрим двумерную СВ (X,Y), составляющие которой X и Y независимы. Тогда $f(x,y) = f(x) f(y)$. Отсюда

$$K_{xy} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x) f(y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f(x) dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y) f(y) dy .$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - m_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = m_x - m_x = 0 .$$

Следовательно, для независимых составляющих X и Y двумерной СВ (X,Y) $K_{xy} = 0$. Поэтому отличный от нуля коэффициент корреляции является признаком наличия зависимости между составляющими X и Y двумерной СВ (X,Y).

Корреляционный момент характеризует также рассеяние двумерной СВ (X,Y). Если одна из величин мало отклоняется от своего математического ожидания (почти не случайна), то корреляционный момент будет маленьким, даже если составляющие X и Y тесно связаны.

Поэтому для характеристики связи между X и Y в чистом виде переходят от момента K_{xy} к безразмерной величине $r_{xy} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Эта характеристика называется *коэффициентом корреляции*. Понятно, что для независимых составляющих $r_{xy}=0$. В таком случае они называются *некоррелированными*.

Из независимости двух составляющих всегда следует их некоррелированность. Обратное не всегда верно, так как коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только линейную. Линейная статистическая зависимость составляющих заключается в том, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию возрастать или убывать по линейному закону.

Если случайные величины X и Y связаны точной функциональной линейной зависимостью $y=ax+b$, то $r_{xy}=\pm 1$ (знак r_{xy} берется в зависимости от знака a). В общем случае, когда X и Y связаны произвольной линейной стохастической зависимостью, $-1 \le r_{xy} \le 1$. В случае $r_{xy}>0$ имеем положительную корреляцию. В случае $r_{xy}<0$ имеем отрицательную корреляцию.

Пример положительной корреляции: вес и рост человека.

Пример отрицательной корреляции: время, потраченное на подготовку к экзамену, и время, потраченное на его сдачу.

Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин, то есть является безразмерной величиной.
2. Модуль коэффициента корреляции не превышает единицу.
3. Если $r_{xy}=\pm 1$, то между составляющими СВ (X,Y) существует линейная функциональная связь $y=ax+b$.
4. Если $r_{xy}=0$, то составляющие СВ (X,Y) некоррелированы.
5. Если $r_{xy}\ne 0$, то составляющие СВ (X,Y) зависимы.

О наличии или отсутствии существенной связи между X и Y, а также о ее виде можно судить по *полю корреляции*.

Рис. 1

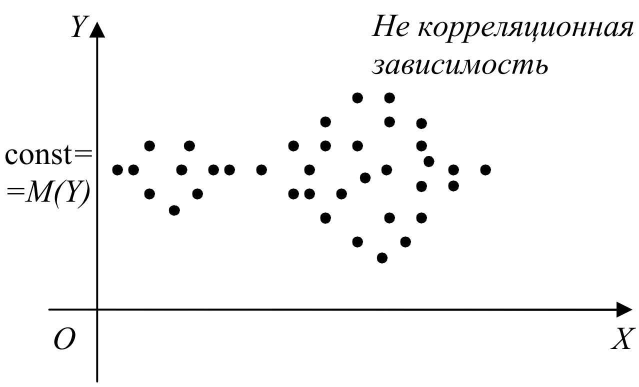


Рис. 2

ЛЕКЦИЯ 14. ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Функциональная и статистическая зависимости. Две случайные величины могут быть связаны:

1) функционально (изменение одной из них влечёт соответствующее изменение другой),

2) статистически (изменение одной из них влечёт изменение закона распределения другой)

или могут быть независимыми.

Статистическую зависимость, при которой изменение одной случайной величины вызывает изменение среднего значения другой, называют *корреляционной* или *регрессионной*.

Например, пусть СВ X – посещаемость студентами учебных занятий, Y – успеваемость. Понятно, что Y не является функцией от X. Но, как показывает опыт, результаты экзаменационной сессии лучше у тех студентов, которые систематически посещали учебные занятия. Это значит, что Y связана с X корреляционно.

Чтобы уточнить определение корреляционной зависимости, рассмотрим *условные моменты*.

Определение 14.1. **Условным математическим ожиданием Y при $X = x$** называется выражение вида:

$$M(Y/X = x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p(y_j/x) \text{ – для ДСВ } Y,$$

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y/x)dy \text{ – для НСВ } Y.$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание X при $Y = y$:

$$M(X/Y = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i/y) \text{ – для ДСВ } X,$$

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y)dx \text{ – для НСВ } X.$$

Определение 14.2. **Корреляционной зависимостью СВ Y от СВ X** называется функциональная зависимость условного матожидания $M(Y/X = x)$ от x:

$$M(Y/X = x) = f_y(x) \text{ – } \textit{функция регрессии } Y \textit{ на } X,$$

$$y = f(x) \text{ – } \textit{уравнение регрессии } Y \textit{ на } X,$$

график функции $y = f(x)$ – *линия регрессии Y на X*.

Аналогично определяется корреляционная зависимость X от Y, функция регрессии $M(X/Y=y)=\varphi_x(y)$ СВ X на СВ Y и уравнение регрессии $x=\varphi(y)$ СВ X на СВ Y.

Примеры корреляционной зависимости:

1) вес и рост человека – с увеличением роста вес *в среднем* также увеличивается (рост является фактором веса);

2) надёжность автомобиля и срок его эксплуатации – чем больше срок эксплуатации, тем меньше надёжность (срок эксплуатации автомобиля – фактор его надёжности).

Для полного анализа корреляционной зависимости между двумя случайными величинами X и Y нужно выяснить:

1) её *вид* и *параметры* (например, линейная регрессия $y=ax+b$ с параметрами a и b, квадратичная регрессия $y=ax^2+bx+c$ с параметрами a, b и c и т.п.);

2) *тесноту* (силу).

Вид корреляционной зависимости определяют исходя из анализа расположения точек $(x_i;y_i)$, $i=\overline{1,n}$ на *корреляционном поле* (рис. 1, 2).

Определение 14.3. Корреляционное поле – это изображение полученных в результате опыта данных $(x_i;y_i)$, $i=\overline{1,n}$ в виде точек в декартовой системе координат, где на оси абсцисс откладывают значения независимой переменной, а на оси ординат – значения зависимой переменной.

Параметры корреляционной зависимости можно находить, например, методом наименьших квадратов, который усредняет, сглаживает опытные данные.

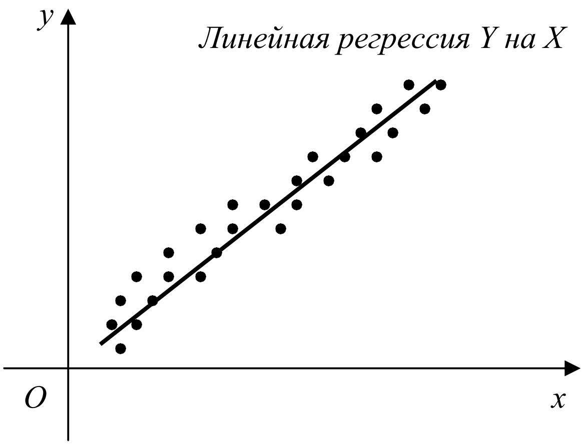


Рис. 1

Рис. 2

Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается рассеиванием значений Y около $M(Y/X=x)$. Большое рассеивание означает слабую зависимость Y от X либо отсутствие зависимости. Малое рассеивание указывает на существование достаточно сильной зависимости.

Важной в приложениях является ситуация, когда обе функции регрессии $M(Y/X=x)=f_y(x)$ и $M(X/Y=y)=\varphi_x(y)$ являются линейными. Тогда случайные величины X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью* (*линейной корреляцией*). Так будет, если двумерная СВ (X,Y) имеет совместное нормальное распределение.

Корреляционное отношение. Пусть СВ Y зависит в основном от фактора X и некоторого остаточного (небольшого по величине) фактора в виде СВ ε, которая влияет на Y, но не на X.

Характеристикой общей изменчивости СВ Y является её дисперсия $D(Y)=M((Y-M(Y))^2)$. В эту величину вносят вклад фактор X и СВ ε. При фиксированном $X=x$ дисперсия

$$D(Y/X=x)=M((Y\setminus X=x-M(Y/X=x))^2)$$

характеризует влияние на Y остатка ε, а её среднее значение

$$\overline{D(Y/X=x)}$$

характеризует влияние в целом остатка ε на Y. Обозначим

$$\overline{D(Y/X=x)}=D(Y,\text{ост.}).$$

Математическое ожидание $M(Y/X=x)$ – это центр группирования значений СВ Y при $X=x$, $M(Y)$ – общий центр группирования Y. Поэтому разброс групповых центров относительно общего центра определяется дисперсией

$$D(M(Y)/X)=M((M(Y)/X-M(Y))^2),$$

которая характеризует изменчивость значений Y под влиянием фактора X. Обозначим

$$D(M(Y)/X)=D(Y,\text{факт.}).$$

Можно показать, что

$$D(Y)=D(Y,\text{факт.})+D(Y,\text{ост.}).$$

Обозначим

$$\eta^2_{Y/X}=\frac{D(Y,\text{факт.})}{D(Y)}=1-\frac{D(Y,\text{ост.})}{D(Y)}.$$

Величина $\eta^2_{Y/X}$ показывает, какая доля вариации значений СВ Y обусловлена вариацией значений фактора X, и называется *коэффициентом детерминации*, а $\eta_{Y/X}=\sqrt{\eta^2_{Y/X}}$ – *корреляционным отношением*.

Свойства корреляционного отношения

1. $0 \le \eta_{Y/X} \le 1$.

2. Условие $\eta_{Y/X} = 1$ необходимо и достаточно для функциональной зависимости Y от X.

Действительно, при $\eta_{Y/X} = 1$ имеем $D(Y, \text{ост.}) = \overline{D(Y/X = x)} = 0$. Так как $D(Y/X = x) \ge 0$, то $D(Y/X = x) = 0$ при любом x. Это значит, что Y есть константа при любом значении фактора X, то есть Y есть функция от X.

Наоборот, если Y есть функция от X, то $D(Y/X = x) = 0$ для любого x, поэтому $\overline{D(Y/X = x)} = 0 \Rightarrow \eta_{Y/X} = 1$.

3. Условие $\eta_{Y/X} = 0$ необходимо и достаточно для отсутствия регрессионной зависимости Y от X.

Действительно, при $\eta_{Y/X} = 0$ имеем

$$D(Y, \text{факт.}) = 0 \Rightarrow M(Y/X = x) = M(Y).$$

Поэтому $M(Y/X = x)$ есть константа при любом x и, значит, нет регрессионной зависимости Y от X. Обратное очевидно.

4. Чем ближе $\eta_{Y/X}$ к единице, тем ближе статистическая зависимость Y от X к функциональной, и наоборот – чем ближе зависимость Y от X к функциональной, тем ближе $\eta_{Y/X}$ к единице.

►**Пример.** Двумерная СВ (X,Y) имеет следующий закон распределения

$X \backslash Y$	-3	0	3
-2	0,4	0,1	0
2	0	0,1	0,4

Найти коэффициент детерминации и корреляционное отношение между X и Y.

Решение. Найдём ряд распределения СВ Y и $M(Y)$, $D(Y)$:

y_j	-3	0	3
p_j	0,4	0,2	0,4

$M(Y) = -3 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 = 0$.

$D(Y) = (-3-0)^2 \cdot 0{,}4 + (0-0)^2 \cdot 0{,}2 + (3-0)^2 \cdot 0{,}4 = 7{,}2$.

Найдём условные законы распределения $Y/X = -2$ и $Y/X = 2$.

Вычислим вероятности значений СВ Y при $X = -2$:

$$p(y_1=-3/x=-2)=\frac{p(x=-2,y=-3)}{p(x=-2)}=\frac{0,4}{0,4+0,1}=0,8,$$

$$p(y_1=0/x=-2)=\frac{p(x=-2,y=0)}{p(x=-2)}=\frac{0,1}{0,4+0,1}=0,2,$$

$$p(y_1=3/x=-2)=\frac{p(x=-2,y=3)}{p(x=-2)}=\frac{0}{0,4+0,1}=0.$$

Условие нормировки: $0,8+0,2+0=1$.

$y_j/X=-2$	-3	0	3
p_j	0,8	0,2	0

Вычислим вероятности значений СВ Y при $X=2$:

$$p(y_1=-3/x=2)=\frac{p(x=2,y=-3)}{p(x=2)}=\frac{0}{0,4+0,1}=0,$$

$$p(y_1=0/x=2)=\frac{p(x=2,y=0)}{p(x=2)}=\frac{0,1}{0,4+0,1}=0,2,$$

$$p(y_1=3/x=2)=\frac{p(x=2,y=3)}{p(x=2)}=\frac{0,4}{0,4+0,1}=0,8.$$

Условие нормировки: $0+0,2+0,8=1$.

$y_j/X=2$	-3	0	3
p_j	0	0,2	0,8

Найдём условные математические ожидания:

$$M(Y/X=-2)=\sum_{j=1}^{3}y_j p(y_j/x=-2)=-3\cdot 0,8+0\cdot 0,2+3\cdot 0=-2,4;$$

$$M(Y/X=2)=\sum_{j=1}^{3}y_j p(y_j/x=2)=-3\cdot 0+0\cdot 0,2+3\cdot 0,8=2,4.$$

Вычислим условные дисперсии:

$$D(Y/X=-2)=\sum_{j=1}^{3}(y_j-M(Y/X=-2))^2 p(y_j/x=-2)=(-3-(-2,4))^2\cdot 0,8+$$
$$+(0-(-2,4))^2\cdot 0,2+(3-(-2,4))^2\cdot 0=1,44,$$

$$D(Y/X=2)=\sum_{j=1}^{3}(y_j-M(Y/X=2))^2 p(y_j/x=2)=(-3-(-2,4))^2\cdot 0+$$
$$+(0-(-2,4))^2\cdot 0,2+(3-(-2,4))^2\cdot 0,8=1,44.$$

Получаем

$$\overline{D(Y/X=x)} = D(Y,\text{ост.}) =$$
$$= D(Y/X=-2)\cdot P(X=-2) + D(Y/X=2)\cdot P(X=2) = 0{,}64\,.$$

Значит, коэффициент детерминации равен

$$\eta^2_{Y/X} = 1 - \frac{D(Y,\text{ост.})}{D(Y)} = 1 - \frac{0{,}64}{3{,}2} = \frac{4}{5},$$

корреляционное отношение

$$\eta_{Y/X} = \sqrt{\eta^2_{Y/X}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0{,}9\,.$$

Поскольку $\eta_{Y/X}$ близко к единице, то зависимость Y от X близка к функциональной. Действительно, из таблицы, в которой дан закон распределения СВ (X,Y), видно, что при данном значении X с большой вероятностью соблюдается равенство $Y = \frac{3}{2}X$. ◄

ЛЕКЦИЯ 15. ЛИНЕЙНАЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ РЕГРЕССИЯ. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Линейная среднеквадратичная регрессия. Рассмотрим двумерную СВ (X,Y), в которой составляющие X и Y зависимые. Предположим, что *вид зависимости Y от X неизвестен*.

Построим линейную аппроксимацию зависимости СВ Y от СВ X. Подберём параметры b и $\rho_{Y/X}$ линейной функции

$$y = b + \rho_{Y/X}\cdot x = f(x)$$

так, чтобы

$$F(b;\rho_{Y/X}) = M((Y - b - \rho_{Y/X}\cdot X)^2) \to \min\,.$$

Функция $y = b + \rho_{Y/X}\cdot x$ называется *линейной среднеквадратичной регрессией Y на X*.

Исследуем функцию $F(b;\rho_{Y/X})$ на минимум. Сначала преобразуем её:

$$F(b;\rho_{Y/X}) = M(Y^2 - 2bY + b^2 - 2\rho_{Y/X}XY + 2\rho_{Y/X}bX + \rho^2_{Y/X}X^2) =$$
$$= M(Y^2) - 2bM(Y) + b^2 - 2\rho_{Y/X}M(XY) + 2\rho_{Y/X}bM(X) + \rho^2_{Y/X}M(X^2)\,.$$

Затем найдём частные производные по b и $\rho_{Y/X}$:

$$F_b'(b;\rho_{Y/X}) = -2M(Y) + 2b + 2\rho_{Y/X}M(X),$$
$$F_{\rho_{Y/X}}'(b;\rho_{Y/X}) = -2M(XY) + 2bM(X) + 2\rho_{Y/X}M(X^2)\,.$$

Приравнивая их нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} b+\rho_{Y/X}M(X)=M(Y), \\ bM(X)+\rho_{Y/X}M(X^2)=M(XY). \end{cases}$$

Решив её, получаем

$$\rho_{Y/X}=\frac{K_{XY}}{D_Y},\ b=M(Y)-\frac{M(X)\cdot K_{XY}}{D_X}.$$

С учётом того, что ковариация

$$K_{XY}=r_{XY}\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y,$$

где r_{XY} – коэффициент корреляции, $\sigma_X=\sqrt{D_X}$, $\sigma_Y=\sqrt{D_Y}$, получаем искомую линейную зависимость

$$y=f(x)=M(Y)+\frac{(x-M(X))r_{XY}\sigma_Y}{\sigma_X}b.$$

Полученное уравнение задаёт *среднеквадратичную регрессию* Y *на* X.

Можно показать, что при полученных значениях b и $\rho_{Y/X}$ величина $F(b;\rho_{Y/X})$ (*ошибка приближения линейной среднеквадратичной регрессии*) равна

$$M(Y-f(X))^2=\sigma_Y^2\cdot(1-r_{XY}^2),$$

а ошибка регрессии

$$M(M(Y/X)-f(X))^2=\sigma_Y^2\cdot(\eta_{Y/X}^2-r_{XY}^2).$$

Отсюда следует, что:

1) если $|r_{XY}|\to 1$, то уменьшается ошибка приближения, то есть возрастает концентрация значений СВ (X,Y) около среднеквадратичной зависимости Y на X. Обратное также верно. Поэтому r_{XY} показывает степень линейной функциональной зависимости между случайными величинами X и Y.

2) если $|r_{XY}|\to\eta_{Y/X}$, то уменьшается ошибка регрессии, то есть неизвестная функция регрессии приближается к среднеквадратичной зависимости Y на X. Верно и обратное. В частности, в случае линейной корреляции $\eta_{Y/X}^2=r_{XY}^2$, то есть ошибка регрессии равна 0. Поэтому разность $\eta_{Y/X}^2-r_{XY}^2$ можно использовать в качестве меры отклонения функции регрессии от линейной.

Допустим, распределение СВ (X,Y) неизвестно, но имеются результаты наблюдений, то есть выборка значений (x,y) СВ (X,Y). Тогда все рассмотренные величины заменим их выборочными аналогами и найдём b^* и $\rho^*_{Y/X}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} b^* + \rho^*_{Y/X}\overline{X} = \overline{Y}, \\ b^*\overline{X} + \rho^*_{Y/X}\overline{X^2} = \overline{XY}, \end{cases}$$

где $\overline{X} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\overline{Y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$ – выборочные средние; $\overline{X^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n}$, $\overline{XY} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$.

Решив систему, получим

$$\rho^*_{Y/X} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \frac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{X}},$$

$$b^* = \frac{\overline{Y}\cdot\overline{X^2} - \overline{X}\cdot\overline{XY}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \overline{Y} - \overline{X}\frac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{X}}.$$

где $K^*_{XY} = \overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}$, $\sigma^{*\,2}_{X} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ – выборочные аналоги корреляционного момента K_{XY} и дисперсии σ^2_X соответственно.

Следовательно, выборочное уравнение прямой среднеквадратичной регрессии Y на X имеет вид

$$y = \overline{Y} + \frac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{X}}(x - \overline{X}).$$

Это уравнение наилучшим образом в классе линейных моделей описывает опытную зависимость Y от X. Его можно использовать для прогнозирования значений Y как функции X.

Коэффициент $\rho^*_{Y/X} = \dfrac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} = \dfrac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{X}}$ в выборочном уравнении среднеквадратичной регрессии Y на X называется *статистическим коэффициентом регрессии Y на X*. Он является мерой, которая на основании выборочных данных в среднем указывает влияние изменения независимой переменной X (или Y) на зависимую переменную Y (или X).

Аналогично получается уравнение прямой среднеквадратичной регрессии X на Y:

$$x = \overline{X} + \frac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{X}}(y - \overline{Y}),$$

где статистический коэффициент регрессии X на Y определяется формулой

$$\rho^*_{X/Y} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2} = \frac{K^*_{XY}}{\sigma^{*\,2}_{Y}}.$$

►**Пример.** Определить выборочное уравнение прямой среднеквадратичной регрессии Y на X, если СВ X – обеспеченность рабочей силой, СВ Y – производство продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий в 15 сельскохозяйственных предприятиях Витебской области на основании данных, приведенных в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Средняя численность работников на 100 га сельхозугодий, чел. (X)	Валовая продукция на 100 га сельхозугодий, млн руб. (Y)
1	7,2	199
2	16,9	513
3	10,7	178
4	6,9	212
5	9,5	271
6	11,6	215
7	8,9	145
8	10,2	336
9	7,8	251
10	4,8	195
11	7,4	275
12	10,0	319
13	9,6	375
14	6,6	232
15	5,8	242
Сумма	133,9	3958

Решение. Составляем расчётную таблицу 2.

Таблица 2

i	Средняя численность работников на 100 га сельхозугодий, чел. (x_i)	Валовая продукция на 100 га сельхозугодий, млн руб. (y_i)	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	2	3	4	5	6
1	7,2	199	1432,8	51,84	39601
2	16,9	513	86692,7	285,61	263169
3	10,7	178	1904,6	114,49	31684
4	6,9	212	1462,8	47,61	44944
5	9,5	271	2574,5	90,25	73441
6	11,6	215	2494,0	134,56	46225
7	8,9	145	1290,5	79,21	21025
8	10,2	336	3427,2	104,04	112896
9	7,8	251	1957,8	60,84	63001

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6
10	4,8	195	936,0	23,04	38025
11	7,4	275	2035,0	54,76	75625
12	10,0	319	3190,0	100,0	101761
13	9,6	375	3600,0	92,16	140625
14	6,6	232	1531,2	43,56	53824
15	5,8	242	1403,6	33,64	58564
Сумма	133,9	3958	37909,7	1315,61	1164410

Найдём $\overline{x}$, $\overline{y}$, ${\sigma^*}^2_X$, K^*_{XY}:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{133{,}9}{15} \approx 8{,}9267,$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{3958}{15} \approx 263{,}8667,$$

$${\sigma^*}^2_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\overline{x})^2 = \frac{1315{,}61}{15} - 8{,}9267^2 \approx 8{,}0202,\ \sigma^*_X = 2{,}832,$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} = \frac{37909{,}7}{15} = 2527{,}3133,$$

$$K^*_{XY} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 2527{,}3133 - 8{,}9267 \cdot 263{,}8667 \approx 171{,}8544,$$

Уравнение прямой среднеквадратичной регрессии Y на X имеет вид

$$y = \overline{y} + \frac{K^*_{XY}}{{\sigma^*}^2_X}(x - \overline{x}) = 263{,}8667 + \frac{171{,}8544}{8{,}0202}(x - 8{,}9267)$$

или

$$y = 21{,}4277x + 72{,}5881.$$

Статистический коэффициент корреляции Y на X $\rho_{Y\setminus X} = a = 21{,}4277$ показывает, что при увеличении численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий на одного человека валовая продукция с этой площади в среднем по совокупности предприятий возрастает на $\approx 21{,}4$ млн руб. ◄

Сглаживание опытных данных. Выборочное уравнение линейной регрессии

Определение 15.1. Регрессия называется **линейной**, когда функции регрессии $y = f(x) = ax + b$ и $x = \varphi(y) = cy + d$ являются линейными.

Пусть СВ X и СВ Y связаны линейной корреляционной зависимостью, тогда обе линии регрессии будут прямыми, поэтому параметры a и b, c и d этих зависимостей найдём методом наименьших квадратов.

Допустим, что проведено n независимых опытов, в результате которых получены последовательные значения СВ X: x_1, x_2, …, x_n и соответствующие им значения СВ X: y_1, y_2, …, y_n. Пары чисел

$$(x_i; y_i),\ i = \overline{1,n}$$

можно считать случайным набором (*выборкой*) из множества возможных значений двумерной СВ (X,Y). Поэтому уравнение регрессии, полученное по данным выборки, называется *выборочным*.

Предположим, что, исходя из теоретических соображений и расположения точек $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1,n}$ на поле корреляции, можно определить вид выборочного уравнения регрессии Y на X:

$$y = f(x, a_1, a_2, ..., a_m),$$

где a_1, a_2, …, a_m $(m < n)$ – неизвестные параметры, которые нужно определить.

Найдём на основании опытных данных значения этих параметров так, чтобы заданная функция наилучшим образом описывала изучаемую зависимость (то есть наилучшим образом «вложим» известные n пар значений $(x_i; y_i)$ в формулу $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_m)$). Для этого сумма квадратов отклонений эмпирических данных y_i, $i = \overline{1,n}$ от вычисленных по формуле $y_i = f(x_i, a_1, a_2, ..., a_m)$, должна быть наименьшей. Следовательно, нужно исследовать на минимум функцию

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i)^2 .$$

Согласно необходимому условию существования экстремума функции нескольких переменных, составляем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ ...., \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{cases}$$

Эта система называется *нормальной системой МНК*. Решив её, находим неизвестные параметры a_1, a_2, …, a_m.

Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью

$$y = ax + b,$$

то частные производные функции

$$S = \sum_{i=1}^{n}((ax_i + b) - y_i)^2$$

по параметрам a, b имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot 1,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i.$$

Приравняем их нулю и преобразуем. Получаем нормальную систему МНК, из которой находим параметры a, b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum_{i=1}^{n}y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i. \end{cases}$$

Полученная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} b^* + \rho^*_{Y/X}\overline{x} = \overline{y}, \\ b^*\overline{x} + \rho^*_{Y/X}\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}$$

из предыдущей лекции. Поэтому полученные там выражения для коэффициента $\rho^*_{Y/X} = a$ остаются в силе.

Таким образом, выборочное уравнение линейной среднеквадратичной регрессии

$$y = \overline{y} + \frac{K^*_{XY}}{{\sigma^*_X}^2}(x - \overline{x})$$

можно получить методом наименьших квадратов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

РАЗДЕЛ I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ. ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

Классификация событий

Пример 1. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию «на обоих кубиках выпало одинаковое число очков» при подбрасывании двух игральных кубиков?

Решение. Пространство элементарных исходов этого опыта представим в виде таблицы:

Таблица 1

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Событию «на обоих кубиках выпало одинаковое число очков» благоприятствуют 6 элементарных исходов:

$$(1;1),\ (2;2),\ (3;3),\ (4;4),\ (5;5),\ (6;6).$$

Пример 2. Подбрасывается два игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: «сумма выпавших очков равна 7» или «сумма выпавших очков равна 8»?

Решение. Событию «сумма выпавших очков равна 7» благоприятствуют 6 исходов (см. табл. 1):

$$(1;6),\ (2;5),\ (3;4),\ (4;3),\ (5;2),\ (6;1).$$

Событию «сумма выпавших очков равна 8» благоприятствуют 5 исходов (см. табл. 1):

$$(2;6),\ (3;5),\ (4;4),\ (5;3),\ (6;2).$$

Значит, первому событию благоприятствует больше элементарных исходов.

Задания для самостоятельной работы

1. Являются ли несовместными следующие события?

а) Опыт – подбрасывание симметричной монеты. События: A – появление герба, B – появление цифры.

б) Опыт – два выстрела по мишени. События: A – хотя бы одно попадание, B – хотя бы один промах.

в) Опыт – подбрасывание двух симметричных монет. События: A – появление двух гербов, B – появление двух цифр.

г) Опыт – три выстрела по мишени. События: A – хотя бы одно попадание, B – хотя бы один промах.

д) Опыт – бросание двух игральных костей. События: A – хотя бы на одной кости выпало три очка, B – выпадение чётного числа очков на каждой кости.

е) Опыт – извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и чёрные шары. События: A – извлекли два белых шара, B – оба извлеченных шара одного цвета.

ж) Опыт – покупка двух лотерейных билетов. События: A – выиграют два билета, B – выиграет хотя бы один билет.

з) Опыт – лифт отправляется с десятью пассажирами и останавливается на пяти этажах. События: A – на первых четырёх остановках вышло не более 9 человек, B – на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2. Являются ли равновозможными следующие события?

а) Опыт – подбрасывание симметричной монеты. События: A – появление герба, B – появление цифры.

б) Опыт – подбрасывание гнутой монеты. События: A – появление герба, B – появление цифры.

в) Опыт – выстрел по мишени. События: A – попадание, B – промах.

г) Опыт – бросание двух игральных костей. События: A – произведение очков на верхних гранях равно 12, B – сумма очков на верхних гранях равна 9.

д) Опыт – бросание двух монет. События: A – появление двух гербов, B – появление двух цифр, C – появление одного герба и одной цифры.

Элементарные исходы: $Г_1$, $Г_2$, P_1, P_2 – появление гербов и решек при бросании первой и второй монеты соответственно.

Замечание. В этом пункте возможно несколько подходов, связанных с различными статистическими моделями физических частиц.

1. Модель (статистика) Больцмана – Максвелла (частицы различимы, хотя известно, что таких частиц в природе не существует). Для опыта с монетами: $Г_1 Г_2$, $Г_1 P_2$, $Г_2 P_1$, $P_1 P_2$ (монеты различимые).

2. Модель Бозе – Эйнштейна (частицы неразличимые, например, фотоны, атомные ядра, атомы с чётным числом частиц). Для опыта с монетами: $Г_1 Г_2$, $Г_1 P_2$, $P_1 P_2$ (монеты неразличимые).

3. Модель Ферми – Дирака (частицы не могут принимать одинаковые значения, например, электроны нейтроны, протоны). Для опыта с монетами: $Г_1 P_2$, $Г_2 P_1$.

Опыты с монетами показывают, что здесь выполняется статистика Больцмана-Максвелла, поэтому нельзя заранее, до проведения опыта, утверждать истинность той или иной модели.

3. Образуют ли пространство элементарных событий следующие события?

а) Опыт – подбрасывание симметричной монеты. События: A – выпадение герба, B – выпадение цифры.

б) Опыт – подбрасывание двух симметричных монет. События: A – выпадение двух гербов, B – выпадение двух цифр.

в) Опыт – два выстрела по мишени. События: A – два попадания в мишень, B – хотя бы один промах.

г) Опыт – бросание двух игральных костей. События: A – сумма очков на верхних гранях больше трёх, B – сумма очков на верхних гранях равна трём.

г) Опыт – посажено четыре зерна. События: A – взошло одно зерно, B – взошло два зерна, C – взошло три зерна, D – взошло четыре зерна.

д) Опыт – покупатель посещает три магазина. События: A – покупатель купит товар хотя бы в одном магазине, B – покупатель не купит товар ни в одном магазине.

4. Приведите примеры:

а) трёх событий, образующих пространство элементарных событий;

б) трёх событий, равновозможных и несовместных, но не образующих пространство элементарных событий;

в) двух событий, несовместных и образующих пространство элементарных событий, но не равновозможных.

5. Брошены три кубика. Опишите пространство элементарных исходов этого опыта. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию – на трёх кубиках выпало очков: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12? Каково наибольшее значение суммы выпавших очков?

Действия над событиями

Пример 3. Пусть A, B, C – произвольные события. Что означают следующие события: $\overline{A}BC$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$?

Решение. В соответствии с определением, $\overline{A}BC$ – произведение трёх событий $\overline{A}$, B и C, которые происходят одновременно. $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A. Следовательно, $\overline{A}BC$ означает, что событие A не произошло, а события B и C произошли. Рассуждая аналогично, заключаем, что $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ – ни одно из трёх данных событий не произошло; $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ – хотя бы одно из трёх событий не произошло; $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$ – произошло ровно одно из трёх событий; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$ – произошло не более одного из трёх событий.

Пример 4. Стрелок произвёл 3 выстрела по мишени, элементарные события этого опыта:

A – попал при первом выстреле, $\overline{A}$ – промахнулся при первом выстреле;

B – попал при втором выстреле, $\overline{B}$ – промахнулся при втором выстреле;

B – попал при третьем выстреле, $\overline{B}$ – промахнулся при третьем выстреле.

Выразите через эти элементарные исходы следующие события:

а) A_1 – одно попадание;

б) A_2 – три промаха;

в) A_3 – три попадания;

г) A_4 – хотя бы один промах;

д) A_5 – не менее двух попаданий;

е) A_6 – не более одного попадания;

ж) A_7 – попадание в мишень после первого выстрела.

Решение.

а) $A_1=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$;

б) $A_2=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

в) $A_3=ABC$;

г) $A_4=A_1+A_2+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ или $A_4=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$;

д) $A_5=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A_3$;

е) $A_6 = A_1 + A_2$;

ж) $A_7 = \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C} + BC)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A_1 – попадание при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле, A_3 – попадание при третьем выстреле. Описать события, которым соответствуют следующие формулы:

а) $A_1 + A_2 + A_3$,

б) $A_1 A_2 A_3$,

в) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$,

г) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

д) $\overline{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}}$,

е) $A_1 + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$,

ж) $(\overline{A_1} + \overline{A_2}) A_3$.

2. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события – появление герба при i-том подбрасывании ($i = 1, 2, 3$). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i следующие события: A – выпали три герба, B – выпали три цифры, C – выпал хотя бы один герб, D – выпала хотя бы одна цифра, E – выпал только один герб, F – выпала только одна цифра.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СХЕМЫ

Пример 1. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых цветов. Сколькими способами можно выбрать из неё:

а) 3 цветка;

б) 6 цветков одного цвета;

в) 4 красных и 3 розовых цветка?

Решение. а) Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из вазы, в которой 16 цветов, можно C_{16}^{3} способами. Поэтому

$$C_{16}^3=\frac{16!}{3!(16-3)!}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}=560.$$

б) Выбрать 6 цветков красного цвета можно $C_9^6=84$ способами, а 6 цветков розового цвета $C_7^6=7$ способами.

По правилу сложения выбрать 6 цветков одного цвета (красного или розового) можно

$$C_9^6+C_7^6=84+7=91 \text{ способами.}$$

В) Выбрать 4 красных цветка из 9 имеющихся можно C_9^4 способами, а 3 розовых из 7 – C_7^3 способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых цветков можно составить по правилу умножения:

$$C_9^4\cdot C_7^3=\frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{7!}{3!4!}=4410 \text{ способами.}$$

Пример 2. Сколько существует трёхзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр, кроме нуля. На втором месте – любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте – любая из оставшихся 8 цифр.

По правилу произведения $9\cdot 9\cdot 8=648$ трёхзначных чисел имеют разные цифры.

Пример 3. В соревнованиях участвуют 10 человек, трое из них займут первое, второе и третье места. Сколько существует различных вариантов?

Решение. $A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}=8\cdot 9\cdot 10=720$.

Пример 4. Сколько существует способов расстановки десяти книг на полке?

Решение. Общее число способов расстановки определяется как число перестановок из 10 элементов и равно $P_{10}=10!=3\ 628\ 800$.

Пример 5. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

Решение. $C_{12}^5=\frac{12!}{5!(12-5)!}=\frac{12!}{5!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792$.

Пример 6. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями. При $k = 2$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n = 6$ имеем $P_6(3;3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

Пример 7. В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырёх человек. Сколько существует вариантов размещения прибывших четырёх гостей?

Решение. Каждый следующий гость из 4 может быть помещён в любую из 10 комнат, поэтому общее число размещений с повторениями равно

$$(A_{10}^4)_{с\ повт.} = 10^4 = 10000.$$

Пример 8. В магазине продаётся 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов.

Решение. Число равновозможных заказов равно

$$(C_n^m)_{с\ повт.} = C_{n+m-1}^m = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из десяти вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из десяти вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.
2. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по три предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?
3. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трёх горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?
4. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?
5. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?
6. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?
7. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трёх нападающих, трех полузащитников, четырёх

защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

8. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причём каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

9. Из группы студентов инженерно-строительного факультета в 16 человек формируются две строительные бригады по 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады?

10. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)?

11. Сколькими способами можно расположить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они «не били» друг друга?

Ответы

1. 100000
2. 1320
3. 60
4. 5040
5. 28
6. 66
7. 300
8. 10
9. 8008
10. 15120
11. 40320

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. Общее число возможных исходов $6 \cdot 6 = 36$, так как при бросании одной кости возможны шесть исходов, при бросании второй – также шесть исходов. Эти исходы равновозможные (в силу предполагаемой симметрии игральной кости) и образуют полную группу событий. Благоприятствующими исходами являются следующие пять (первым записано число очков, выпавших на первой кости, вторым – число очков, выпавшим на второй кости, далее – сумма очков):

1) 6, 2; 6+2=8, 2) 6, 4; 6+4=10, 3) 6, 6; 6+6=12, 4) 2, 6; 2+6=8, 5) 4, 6; 4+6=10.

Искомая вероятность: $P = \frac{5}{36}$.

Пример 2. При перевозке ящика, в котором содержались *21* стандартная и *10* нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение. Вероятность того, что была утеряна стандартная деталь:

$$P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что была утеряна нестандартная деталь:

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. $P = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$.

Пример 4. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Решение. $P = \frac{C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = 0{,}1$.

Пример 5. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что из ящика будут извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

Решение. В ящике всего 30 шаров. При данном испытании число всех равновозможных элементарных исходов будет $n = C_{30}^6$. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A – шары вынуты в заданном составе. Три красных шара из 15 можно выбрать C_{15}^3 способами, два голубых шара из 9 можно выбрать C_9^2 способами, один зеленый из 6 – C_6^1 способами. Следовательно (в силу правила произведения в комбинаторике), число исходов, благоприятствующих событию A, будет $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1$. Используя классическое определение вероятности, находим вероятность события A:

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}}=\frac{15!}{3!(15-3)!}\cdot\frac{9!}{2!(9-2)!}\cdot\frac{6!}{1!(6-1)!}\cdot\frac{6!(30-6)!}{30!}=\frac{24}{145}\approx 0{,}17\,.$$

Пример 6. На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова «*талант*» – по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово «*талант*».

Решение. Занумеруем карточки с буквами:

1	2	3	4	5	6
а	*а*	*л*	*н*	*т*	*т*

Слово «$\underset{5}{т}\,\underset{1}{а}\,\underset{3}{л}\,\underset{2}{а}\,\underset{4}{н}\,\underset{6}{т}$» не изменится, если буквы «*а*» переставить местами, но по расположению карточек получится другая комбинация «$\underset{5}{т}\,\underset{2}{а}\,\underset{3}{л}\,\underset{1}{а}\,\underset{4}{н}\,\underset{6}{т}$». Если в каждой из этих комбинаций сделать то же самое с буквой «*т*», то получим ещё две различные комбинации карточек со словом «*талант*». Значит, появлению слова «*талант*» благоприятствуют четыре элементарных исхода. Общее число равновозможных элементарных исходов равно числу перестановок из шести элементов: $n=P_6=6!=720$. Тогда искомая вероятность

$$P=\frac{m}{n}=\frac{4}{720}=\frac{1}{180}\,.$$

Пример 7. Лифт начинает движение с четырьмя пассажирами и останавливается на десятом этаже. Какова вероятность, что никакие два пассажира не выйдут на одном этаже?

Решение. Пусть все возможные случаи выхода пассажиров равновероятны, тогда первый пассажир имеет 10 возможностей выхода на 10 этажах, второй – 9 на 9 оставшихся этажах, третий – 8 на 8 оставшихся этажах, четвёртый – 7. По правилу произведения, общее число исходов, благоприятствующих событию A, – никакие два пассажира не выйдут на одном этаже:

$$m=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=A_{10}^{4}\,.$$

Общее число вариантов выхода четырёх пассажиров на десяти этажах равно числу размещений с возвращениями из 10 элементов по 4:

$$(A_{10}^{4})_{с\ повт.}=10^4=10000\,.$$

Отсюда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^4}=0{,}504\,.$$

Пример 8. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путём жеребьёвки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

Решение. Число всех равновозможных случаев определения двух соперников из 20 участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, то есть C_{20}^2. Число групп по два человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^2. Число групп, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_6^2. Из 4 мастеров может быть составлено C_4^2 пар. Сумма $C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории. Следовательно, искомая вероятность

$$P = \frac{C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 5?
2. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырёхзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.
3. На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, С, М, Н. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность получить слово «Минск»?
4. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Витебским телезаводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Витебского телезавода.
5. Подбрасывается два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?
6. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?
7. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных, 5 голубых. Наудачу извлечены три шара. Найти вероятность того, что все три шара разного цвета.

8. В клетке содержится 18 кур. Из них 6 не вакцинированы. Партию делят на две равные части. Какова вероятность того, что не вакцинированные куры разделятся поровну?

9. В колоде 36 карт четырёх мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Какова вероятность того, что обе извлечённые карты одной масти?

10. Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что две определённые книги окажутся рядом.

11. Устройство состоит из пяти элементов, два из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются два элемента. Найти вероятность того, что включёнными окажутся неизношенные элементы.

12. В коробке пять одинаковых изделий, причём три из них окрашенные. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлечённых изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Ответы

1. 0,2
2. $\frac{1}{5^4}$
3. $\frac{1}{120}$
4. 0,4
6. $\frac{5}{9}$
7. 0,25
8. 0,38
9. 0,25
10. 0,25
11. 0,3
12. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пример 1. В круг, в который вписан квадрат (рис. 1), наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в квадрат?

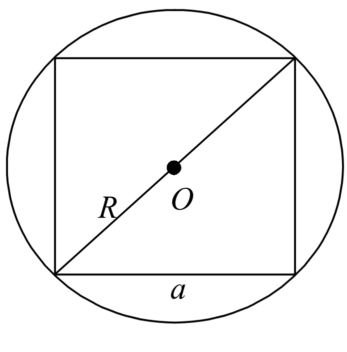


Рис. 1

Решение. Пусть R – радиус круга, a – сторона вписанного квадрата, событие A – попадание точки в квадрат, S – площадь круга, S_1 – площадь вписанного квадрата.

Известно, что $S = \pi R^2$. Сторона вписанного квадрата, выраженная через радиус круга R, равна $a = R\sqrt{2}$. Значит, $S_1 = 2R^2$.

Полагая в формуле $P(A) = \dfrac{S_g}{S_G}$ $S_g = S_1$, $S_G = S$, найдём искомую вероятность

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637\,.$$

Пример 2. На отрезок единичной длины бросают наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник?

Решение. Заданный отрезок рассматриваем как отрезок $[0;1]$ числовой прямой (рис. 2). Координаты брошенных точек обозначим через x и y. Эти числа принадлежат отрезку $[0;1]$.

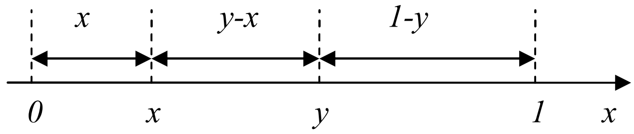


Рис. 2

Число x и число y в паре соответствуют координатам точки на плоскости. Так как $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, то точка $(x; y)$ наудачу брошена в квадрат со стороной 1 (рис. 3).

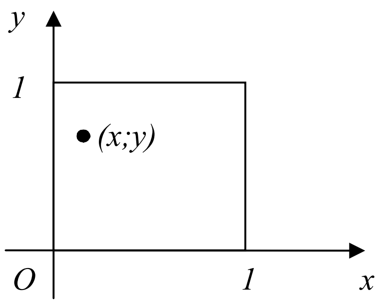


Рис. 3

Чтобы из отрезков можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы каждая сторона треугольника была меньше суммы двух других его сторон. При $x \le y$ (рис. 2) получаем неравенства:

$$x < (y - x) + (1 - y),$$
$$y - x < x + (1 - y),$$
$$1 - y < x + (y - x),$$

откуда после преобразований получаем систему неравенств вида

$$\begin{cases} x < 0{,}5, \\ y < x + 0{,}5, \\ y > 0{,}5, \\ y \ge x. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет на плоскости треугольник (верхний – на рис. 4).

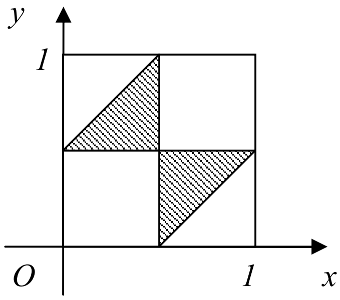


Рис. 4

При $x > y$ (рис. 5)

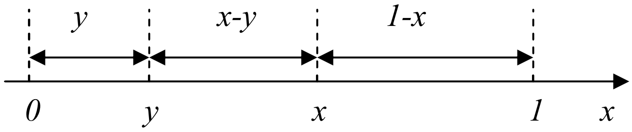


Рис. 5

получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0{,}5, \\ y < x - 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ y < x. \end{cases}$$

Эта система определяет на плоскости второй треугольник (нижний – на рис. 4).

Площадь квадрата равна 1, площадь треугольников равна 0,25. Тогда искомая вероятность равна 0,25.

Пример 3. Два человека договорились встретиться в некоторый промежуток времени длительностью T мин, причем каждый из пришедших на место встречи должен ждать другого не более τ мин. Найти вероятность встречи.

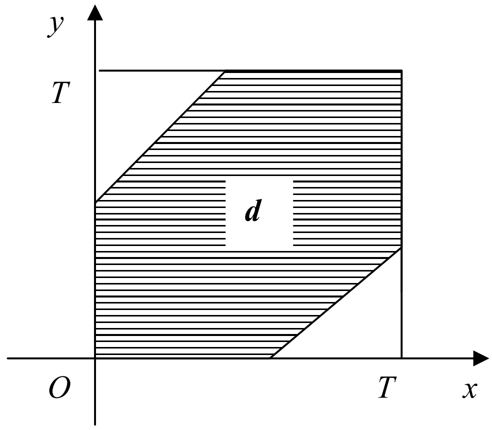


Рис. 6

Решение. Пусть x и y – моменты прихода каждого из встречающихся. Тогда возможные значения x и y: $0 \le x \le T$ и $0 \le y \le T$. Благоприятствующие значения для встречи: $y - x \le \tau$ и $x - y \le \tau$. Откуда $y \le x + \tau$ и $y \ge x - \tau$. Эти неравенства определяют область d, заштрихованную на рис. 6.

Площадь области d: $S_d = T^2 - (T - \tau)^2$. Поскольку $S_D = T^2$, то

$$P = \frac{S_d}{S_D} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Пример 4. (*Задача Бюффона*). Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно a. На эту плоскость наудачу бросается отрезок длины l, $l < a$. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из семейства прямых?

Решение. Расстояние от верхнего конца отрезка до ближайшей снизу прямой обозначим y (рис. 7). Угол между отрезком и лучом, параллельным прямым семейства, начало которого совпадает с верхним концом отрезка, обозначим через x. Ясно, что $0 \le y \le a$, $0 \le x \le \pi$. Для того, чтобы отрезок пересекал хотя бы одну из прямых, необходимо и достаточно, чтобы $y = a$ или $y \le l \sin x$.

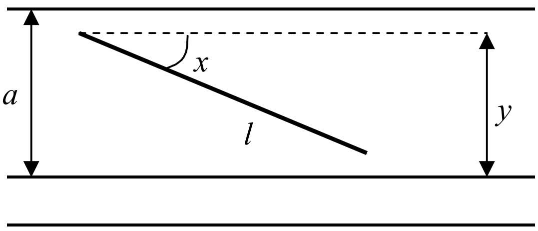


Рис. 7

Выражение «отрезок брошен наудачу» будем понимать так: точка $(x; y)$ наудачу брошена в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = a$ (рис. 8).

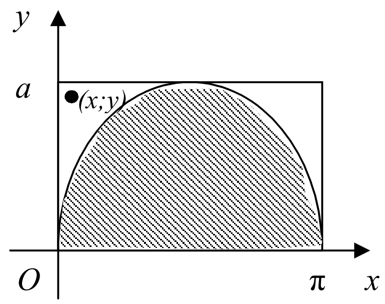


Рис. 8

Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \le l \sin x$, образуют фигуру, заштрихованную на рис. 8. Площадь этой фигуры

$$S_1 = \int_0^{\pi} l \sin x dx = -l \cos x \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Площадь всего прямоугольника равна $S = a\pi$. Тогда искомая вероятность

$P(A) = \frac{S_1}{S} = \frac{2l}{a\pi}$, где A – событие «отрезок пересекается хотя бы с одной прямой».

Пример 5. Наугад взяли два положительных числа, каждое из которых не больше единицы. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет единицы, а произведение будет не больше $\frac{2}{9}$?

Решение. Обозначим взятые числа через x и y. Их возможные значения удовлетворяют неравенствам $0 < x \le 1$, $0 < y \le 1$, которые на плоскости определяют единичный квадрат с площадью $S_G = 1$.

Благоприятствующие значения x и y определены условиями:

$$x+y\le 1,\ x\cdot y\le \frac{2}{9}.$$

Область g ограничена отрезками прямой $x+y=1$ и дугой гиперболы $x\cdot y=\frac{2}{9}$.

Абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы:

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Прямая $x+y=1$ делит квадрат пополам, причём область $x+y\le 1$ представляет собой нижний треугольник (рис. 9). Область g состоит из трапеции, криволинейной трапеции и треугольника, её площадь

$$S_g=S_1+S_2+S_3,$$

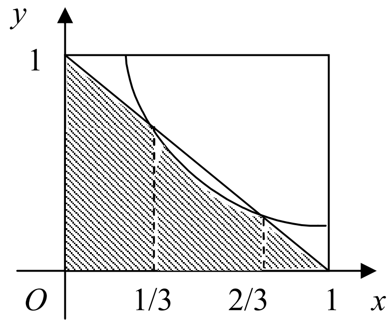


Рис. 9

причём

$$S_1=\frac{5}{18},\quad S_3=\frac{1}{18},\quad S_2=\frac{2}{9}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x}=\frac{2}{9}\ln 2\approx 0{,}154;$$

$$S_g=\frac{1}{3}+0{,}154\approx 0{,}467.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{S_g}{S_G}\approx 0{,}467.$$

Пример 6. Два судна должны подойти к одному и тому же причалу. Время их прихода независимо и равновозможно в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному судну придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого судна равно одному часу, а второго – двум часам.

Решение. Пусть x и y – время прибытия в течение суток первого судна и второго судна соответственно. Возможные значения x и y:

$$0\le x\le 24,\ 0\le y\le 24.$$

Благоприятствующие значения x и y:

$$y-x\le 1,\ x-y\le 2.$$

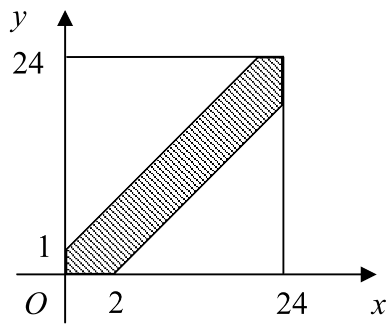


Рис. 10

Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рис. 10. Площадь этой области

$$S_g = 24 \cdot 24 - 0{,}5 \cdot 23 \cdot 23 - 0{,}5 \cdot 22 \cdot 22 = 69{,}5.$$

Поскольку

$$S_G = 24 \cdot 24 = 576,$$

то

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{69{,}5}{576} \approx 0{,}121.$$

Задания для самостоятельной работы

1. В квадрат с вершинами в точках $O(0;0)$, $K(0;1)$, $L(1;1)$, $M(1;0)$ наудачу брошена точка $Q(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \frac{1}{2}x$.

2. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадёт в куб.

3. На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$, а область g – эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область g?

4. Точка брошена в область G, ограниченную эллипсом $x^2 + 4y^2 = 8$. Какова вероятность того, что она попадёт в область g, ограниченную этим эллипсом и параболой $x^2 - 4y = 0$?

5. На отрезке $[0;2]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

6. В прямоугольник с вершинами в точках $K(-1;0)$, $L(-1;5)$, $M(2;5)$, $N(2;0)$ наудачу брошена точка $Q(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенствам $x^2 + 1 \le y \le x + 3$.

7. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадёт в данный треугольник.

8. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.

9. Стержень длиной l произвольным образом сломан на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?

10. Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждёт второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в заданном временном промежутке.

11. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

12. Найти вероятность того, что из трёх наудачу взятых отрезков длиной не более L можно построить треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в пространственную фигуру пропорциональна объёму фигуры и не зависит от её расположения.

13. Расстояние от M до N автобус проходит за две минуты, а пешеход – за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из M в N пешком. Найти вероятность того, что его в пути догонит автобус.

14. Какой толщины должна быть монета радиуса r, чтобы вероятность падения на ребро была равной $\frac{1}{3}$. (Указание. Необходимо рассмотреть монету как прямой круговой цилиндр, вписанный в шар радиусом R. Монета бросается на клейкую поверхность.)

Ответы

1. 0,75.
2. $\approx 0{,}368$.
3. $\approx 0{,}714$.
4. $\approx 0{,}303$.
5. $\frac{1}{3}$.
6. 0,3.
7. $\approx 0{,}414$.
8. $\approx 0{,}123$.
9. 0,25.
10. $\frac{7}{16}$.
11. $P = \frac{1+3\ln 2}{8} \approx 0{,}38$.
12. 0,5.
13. $\frac{13}{25}$.
14. $0{,}354r$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример 1. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень, веро-
2 ятность попадания первого равна 0,8, второго – 0,6. Найти вероятности следующих событий: а) A – оба попали в мишень; б) B – попал один; в) C – попал хотя бы один.

Решение. Пусть событие A_1 – первый стрелок попал в мишень, A_2 – второй попал. Тогда $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}6$.

а) Событие A наступит, если первый стрелок попадёт в мишень и второй также попадёт в мишень, поэтому $A = A_1 A_2$. Так как события A_1 и A_2 независимые, то $P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$.

б) Событие B наступит, если первый стрелок попадёт в мишень и второй промахнётся или первый промахнётся и второй попадёт в мишень, поэтому $B = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2$. Имеем

$$P(B) = P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A}_1)P(A_2) =$$
$$= (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44.$$

в) Событие C наступит, если первый стрелок попадёт в мишень или второй попадёт в мишень, или оба попадут в мишень, то есть $C = A_1 + A_2$. Имеем

$$P(C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92.$$

С другой стороны,

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) =$$
$$= (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6) = 0{,}08.$$

Отсюда

$$P(C) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Пример 2. В урне 10 шаров, из которых два белые, а остальные чёр-
2 ные. Наудачу взяли 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара чёрные.

Решение. Пусть событие A_1 – первый шар чёрный, A_2 – второй шар чёрный, A – оба шара чёрные. Тогда $A = A_1 A_2$.

Вероятность того, что второй шар чёрный, зависит от того, какого цвета первый шар. Если первый шар чёрный, то вероятность того, что второй шар чёрный, равна условной вероятности события A_2 при условии, что A_1 произошло:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{7}{9},$$

так как после наступления события A_1 всего шаров останется 9, из них 7 чёрных. Отсюда

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 / A_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

Пример 3. Условие примера 2, но после первого извлечения шар
2 возвращается в урну.

Решение. В этом случае события A_1 и A_2 независимые, поэтому

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{16}{25}.$$

Пример 4. Вероятности попадания в цель каждым из трех стрелков
2 соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.

Решение. а) Пусть A_i, $i = \overline{1,3}$ – события, означающие попадание в цель каждым из трёх стрелков. Тогда $\overline{A_i}$, $i = \overline{1,3}$ – события, означающие промах каждого из трёх стрелков. Событие A, означающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

Тогда, применяя теоремы сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий, находим вероятность A:

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3).$$

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}9$. Тогда

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2, \qquad P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \qquad P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Следовательно,

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

б) Событие B, означающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$B = A_1 + A_2 + A_3.$$

Так как попадания в цель каждым стрелком – события независимые, то

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Пример 5. В магазине «Книга – почтой» отослали по заданным ад-
2 ресам три различные книги, случайным образом надписав бандероли. Найти вероятность того, что хотя бы одна книга попала по назначению.

Решение. Пусть A_i, $i=\overline{1,3}$ – события, означающие правильный адрес на i-той бандероли. События $\overline{A_i}$ – совместны. Событие A – хотя бы одна книга попала по назначению – записывается в виде

$$A = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Тогда вероятность A

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) .$$

Вычисляя вероятности

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3} ,$$

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3!} = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) ,$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{3!} ,$$

получим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Искомую вероятность можно вычислить и иначе. Так как событие A – хотя бы одна книга попала по назначению – противоположно событию $\overline{A_1}$ – ни одна книга не попала по назначению, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Пример 6. Электрическая цепь MN сконструирована по схеме, представленной на рис. 1. Все элементы цепи 1 – 5 работают независимо друг от друга, и вероятности выхода их из строя за данный промежуток времени соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}3$, $p_5 = 0{,}5$.

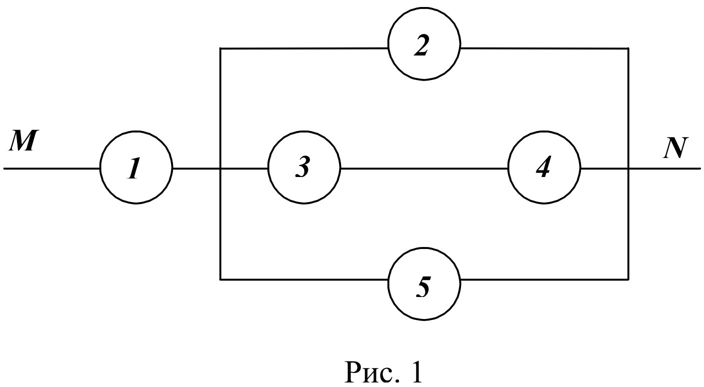


Рис. 1

Найти вероятность нормальной работы цепи в данный промежуток времени.

Решение. Пусть A_i, $i=\overline{1,5}$, – события, означающие нормальную работу i-того элемента цепи в данный промежуток времени. Цепь исправна (событие A) в данный промежуток времени, если наступают события A_1 и $A_2+A_5+A_3A_4$. Так как A_1 и $A_2+A_5+A_3A_4$ независимые, то

$$P(A)=P(A_1\cdot(A_2+A_5+A_3A_4))=P(A_1)\cdot P(A_2+A_5+A_3A_4).$$

Противоположным событию $A_2+A_5+A_3A_4$ является событие $\overline{A_2}\cdot\overline{A_5}\cdot\overline{A_3A_4}$. Поэтому

$$P(A_2+A_5+A_3A_4)=1-P(\overline{A_2}\cdot\overline{A_5}\cdot\overline{A_3A_4})=1-P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_5})\cdot P(\overline{A_3A_4}).$$

Противоположным событию $\overline{A_3A_4}$ является событие A_3A_4, поэтому

$$P(\overline{A_3A_4})=1-P(A_3A_4)=1-P(A_3)P(A_4),$$

тогда

$$P(A_2+A_5+A_3A_4)=1-P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_5})\cdot(1-P(A_3)P(A_4)).$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2+A_5+A_3A_4)=P(A_1)\cdot(1-P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_5})\cdot(1-P(A_3)P(A_4)))=$$
$$=0{,}9(1-0{,}2\cdot 0{,}1(1-0{,}5\cdot 0{,}7))=0{,}9(1-0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}65)=0{,}8883.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Студент разыскивает нужную ему формулу в трёх справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,6, во втором – 0,7, в третьем – 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трёх справочниках; г) хотя бы в одном справочнике; д) ни в одном справочнике.

2. На складе 30 изделий первого сорта и 20 – второго. Найти вероятность того, что три взятых наугад изделия первого сорта.

3. Используя условие предыдущей задачи, найти вероятность появления трёх изделий первого сорта, если производится проверка качества каждого взятого изделия и его возврат на склад.

4. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность, равна 0,8, а второй – 0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправят на ремонт. Найти вероятность того, что: а) автомобиль будет выпущен на линию; б) автомобиль не будет выпущен на линию.

5. Из урны, содержащей 4 красных и 6 чёрных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты: а) два шара чёрного цвета; б) красный и чёрный в любой последовательности; в) второй шар будет чёрным; г) оба шара одного цвета?

6. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

7. Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1, №5, №7. Какова вероятность того, что нужный ему автобус будет одним из первых трёх, подошедших к остановке?

8. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

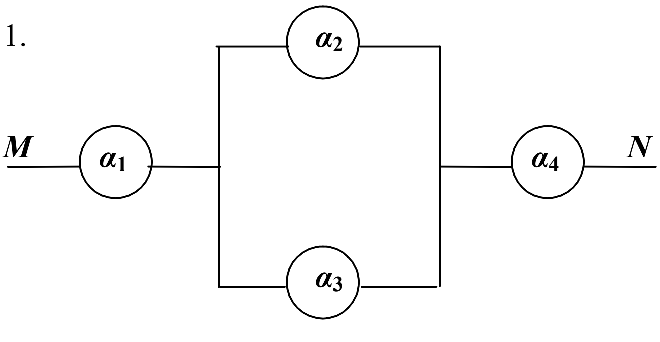
9. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним из студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

10. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырёх очков?

11. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному из трёх приобретённых билетов?

12. Электрическая цепь *MN* сконструирована по схемам, представленным на рис. 2 – 4. Все элементы цепи работают независимо друг от друга, и вероятности выхода их из строя за данный промежуток времени даны в соответствующих таблицах. Найти вероятность разрыва цепи в данный промежуток времени.

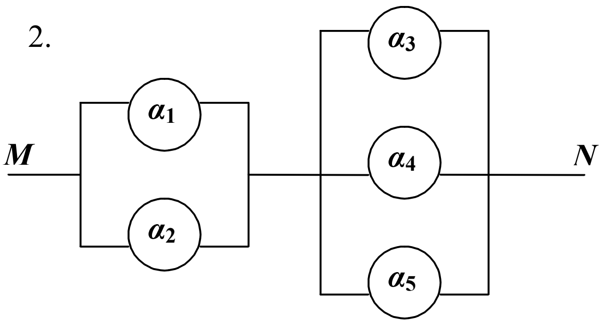
1.



α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

Рис. 2

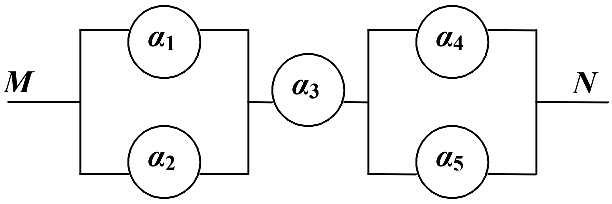
2.



α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,3	0,6	0,5	0,4	0,2

Рис. 3

3.



α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3

Рис. 4

Ответы

1. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336; г) 0,976; д) 0,024.
2. $\approx 0{,}207$.
3. 0,216.
4. а) 0,902; б) 0,098.
5. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{7}{15}$.
6. 0,271.
7. $\frac{31}{35}$.
8. а) 0,0105; б) 0,4265; в) 0,558.
9. а) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096.
10. 4.
11. 0,059.
12. 1. 0,4624 2. 0,2128 3. 0,3232.

Вероятность появления хотя бы одного события

Пример 1. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}15$, $p_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Элементы включены последовательно, поэтому тока в цепи не будет (событие A), если откажет хотя бы один из элементов. Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 1 - (1-0{,}1)(1-0{,}15)(1-0{,}2) = 0{,}388.$$

Пример 2. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причём каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.

Решение. Для получения приза достаточно, чтобы хотя бы одна из четырёх попыток была успешной. Вероятность успешной попытки $p = 0{,}5$, а неуспешной $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Искомая вероятность

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0{,}5^4 = 0{,}9375.$$

Пример 3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трёх выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение. Вероятность попадания в мишень хотя бы при одном из трёх выстрелов (событие A) равна

$$P(A) = 1 - q^3,$$

где q – вероятность промаха.

По условию, $P(A) = 0{,}875$. Следовательно,

$$0{,}875 = 1 - q^3 \text{ или } q^3 = 1 - 0{,}875 = 0{,}125.$$

Отсюда

$$q = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5.$$

Искомая вероятность

$$p = 1 - q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Пример 4. Сколько раз нужно подбросить два игральных кубика, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестёрок была бы больше $\frac{1}{2}$? (Эту задачу впервые поставил французский математик и писатель де Мере (1610 – 1684), поэтому задача называется его именем).

Решение. Пусть событие A_i – выпадение двух шестёрок при i-том подбрасывании. Так как с каждой из шести граней первого кубика может выпасть любая из шести граней второго, то всего равновозможных и попарно несовместных событий $6 \cdot 6 = 36$. Только одно из них – выпадение шестёрки и на первом, и на втором кубиках – благоприятствует событию A_i. Следовательно,

$$P(A_i) = \frac{1}{36},$$

откуда

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Подбрасывания игральных кубиков – независимые испытания, поэтому

$$1 - q^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2},$$

или

$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Из этого неравенства найдём n. Логарифмируя, получаем

$$n \ln \frac{35}{36} < \ln \frac{1}{2},$$

откуда

$$n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = \frac{0{,}69311}{0{,}0284} = 24{,}4.$$

Итак, чтобы вероятность выпадения двух шестёрок была больше $\frac{1}{2}$, нужно подбросить кубик не менее 25 раз.

Задания для самостоятельной работы

1. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

2. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

3. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый должен сделать по два

выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

4. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

5. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой, если она содержит 5% неисправных деталей.

6. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Ответы

1. 0,126.
2. $\approx 0{,}95$.
3. $\approx 0{,}76$.
4. 0,8.
5. 0,23. Указание. Сначала найти вероятность q противоположного события A, которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Это событие является произведением пяти событий $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, где A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) означает, что k-тая проверенная деталь является стандартной. Далее $P(A_1) = \dfrac{95}{100}$, $P(A_2 / A_1) = \dfrac{94}{99}$ и т.д.
6. $n \geq 2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пример 1. На участке, изготавливающем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из этих станков брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что

а) взятый наугад болт – с дефектом;

б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

Решение. а) Пусть событие H_1 состоит в том, что взятый наугад болт изготовлен на первом станке, тогда $P(H_1)=0{,}25$; событие H_2 – взятый наугад болт изготовлен на втором станке, тогда $P(H_2)=0{,}35$; событие H_3 – взятый наугад болт изготовлен на третьем станке, тогда $P(H_3)=0{,}4$. Гипотезы H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий.

Пусть событие A состоит в том, что взятый наугад болт окажется с дефектом. Тогда $P(A/H_1)=0{,}05$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на первом станке; $P(A/H_2)=0{,}04$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на втором станке; $P(A/H_3)=0{,}02$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на третьем станке. Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}4\cdot 0{,}02=0{,}0297.$$

б) Вероятность того, что случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)},$$

где $P(A)$ – полная вероятность события A.

Тогда

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}03}\approx 0{,}27.$$

Пример 2. Команда стрелков состоит из пяти человек. Трое из них попадают в цель с вероятностью 0,8, а двое – с вероятностью 0,6. Наудачу из команды берётся стрелок и производит выстрел.

а) Какова вероятность того, что стрелок попадёт в цель?

б) Стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это один из трёх (один из двух)?

Решение. а) Событие A – наудачу выбранный стрелок попадёт в цель – может произойти, если произойдёт одно из несовместных событий (гипотез): H_1 – наудачу взятый стрелок один из трёх, H_2 – наудачу взятый стрелок один из двух. Найдём вероятности этих гипотез:

$$P(H_1)=\frac{3}{5},\qquad P(H_2)=\frac{2}{5}.$$

Из условия задачи известны условные вероятности события A при верности одной из возможных гипотез:

$$P(A/H_1)=0{,}8, \quad P(A/H_2)=0{,}6.$$

Подставляя полученные значения $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$ ($i=1,2$) в формулу полной вероятности, находим

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{25}.$$

б) Применяя формулу Байеса, найдём условную вероятность гипотезы H_1:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{18}{25}}=\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Каждый билет экзамена по теории вероятностей и математической статистике содержит один вопрос. Всего имеется 30 билетов. Студент Павлов выучил 20 вопросов. Каким по счёту ему выгоднее зайти на экзамен – первым или вторым?

Решение. Событие A – студент Павлов заходит первым, тогда

$$P(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

Событие B – студент Павлов заходит вторым. Оно может произойти только с одним из попарно несовместных событий: H_1 – первый студент вытащит один из двадцати билетов, которые Павлов знает, H_2 – первый студент вытащит один из десяти остальных билетов.

Тогда

$$P(B)=P(H_1)P(B/H_1)+P(H_2)P(B/H_2)=$$

$$=\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}=\frac{2}{3}.$$

Пример 4. Батарея из трёх орудий произвела залп, причём два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в цель попали два орудия. Сделаем два предположения (гипотезы): H_1 – первое орудие попало в цель, H_2 – первое орудие не попало в цель.

По условию,

$$P(H_1) = 0{,}4\,;$$

следовательно (событие H_2 противоположно событию H_1)

$$P(H_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6\,.$$

Найдём условную вероятность $P(A/H_1)$, то есть вероятность того, что в цель попало два снаряда, причём один из них послан первым орудием и, следовательно, второй – либо вторым орудием (при этом третье орудие дало промах), либо третьим (при этом второе орудие дало промах). Эти два события несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(A/H_1) = p_2q_3 + p_3q_2 = 0{,}3\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}5\,.$$

Найдём условную вероятность $P(A/H_2)$, то есть вероятность того, что в цель попало два снаряда, причём первое орудие дало промах. Другими словами, найдём вероятность того, что второе и третье орудия попали в цель. Эти два события независимы, поэтому применима теорема умножения:

$$P(A/H_2) = p_2p_3 = 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}15\,.$$

Искомая вероятность того, что первое орудие дало попадание, по формуле Байеса равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}5}{0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}6\cdot 0{,}15} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69\,.$$

Пример 5. Два из трёх независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}3$.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что отказали два элемента. Сделаем два предположения (гипотезы):

H_1 – отказали первый и второй элементы, а третий элемент исправен, причём (поскольку элементы работают независимо, применима теорема умножения)

$$P(H_1) = p_{12}q_3 = 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}056\,;$$

H_2 – отказали первый и третий элементы, а второй элемент исправен, причём

$$P(H_2) = p_1p_3q_2 = 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 = 0{,}036\,;$$

H_3 – отказали второй и третий элементы, а первый исправен, причём

$$P(H_3) = p_2p_3q_1 = 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}096\,;$$

H_4 – отказал только один элемент;

H_5 – отказали все три элемента;

H_6 – ни один из элементов не отказал.

Вероятности последних трёх гипотез не вычислены, так как при этих гипотезах событие A – отказали два элемента – невозможно и, значит, условные вероятности $P(A/H_4)$, $P(A/H_5)$, $P(A/H_6)$ равны нулю, следовательно, равны нулю и произведения $P(H_4)P(A/H_4)$, $P(H_5)P(A/H_5)$, $P(H_6)P(A/H_6)$ при любых значениях вероятностей гипотез H_4, H_5, H_6.

Поскольку при гипотезах H_1, H_2, H_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице:

$$P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности найдём вероятность того, что отказали два элемента:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) +$$
$$+ P(H_4)P(A/H_4) + P(H_5)P(A/H_5) + P(H_6)P(A/H_6) =$$
$$= 0{,}056 \cdot 1 + 0{,}036 \cdot 1 + 0{,}096 \cdot 1 = 0{,}188.$$

По формуле Байеса найдём вероятность того, что отказали первый и второй элементы:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}056}{0{,}188} = 0{,}3.$$

Задания для самостоятельной работы

1. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из неё наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе (по цвету) шаров.

2. В лаборатории имеется шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчёта автомат выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчёт на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчёта машина не выйдет из строя.

3. В первой урне содержится десять шаров, из них восемь белых; во второй – двадцать шаров, из них четыре белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

4. В каждой из трёх урн содержится шесть чёрных и четыре белых шара. Из первой урны наудачу извлечён один шар и переложен во вторую, после чего из второй наудачу извлечён один шар и переложен в третью. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлечённый из третьей урны, окажется белым.

5. В пирамиде десять винтовок, из которых четыре снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

6. Имеются три партии деталей по двадцать деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

7. Три стрелка произвели залп, причём две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5, 0,4.

8. Две из четырёх независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа первой, второй, третьей и четвёртой ламп соответственно равны 0,1, 0,2, 0,3, 0,4.

9. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов – по 20 вопросов и 3 – по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность того, что он из тех трёх студентов, которые подготовили по 10 вопросов.

10. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной, для первой бригады равна 0,7, для второй – 0,8. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. Какова вероятность того, что взятая наугад стандартная единица продукции произведена второй бригадой?

Ответы

1. $\frac{2}{3}$.
2. 0,89.
3. 0,5.
4. 0,4.
5. Вероятнее то, что винтовка была без оптического прицела.
6. $\frac{4}{29}$.
7. $\frac{10}{19}$.
8. 0,039.
9. 0,02.
10. 0,725; 0,276.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Пример 1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трёх дней; в) не более трёх дней.

Решение. Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября

$$p = \frac{12}{30} = 0{,}4,$$

а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n наблюдениях событие наступит k раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

а) По условию задачи $n = 8$, $k = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тогда

$$P_8(3) = C_8^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^5 \approx 0{,}279.$$

б) Поскольку $n = 8$, $3 \le k \le 8$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(3 \le k \le 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$$

$$=1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2)==1-0{,}6^8-8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^7-28\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6\approx 0{,}625.$$

в) Так как $n=8$, $0\le k\le 3$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$, то

$$P_8(0\le k\le 3)=P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)+P_8(3)=$$
$$=0{,}6^8+8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^7+28\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6+56\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^5\approx 0{,}594.$$

Пример 2. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

Решение. По условию $n=75$, $p=0{,}3$, поэтому $q=1-p=0{,}7$. Составляем двойное неравенство:

$$75\cdot 0{,}3-0{,}7\le k_0\le 75\cdot 0{,}3+0{,}3,$$
$$21{,}8\le k_0\le 22{,}8.$$

Отсюда следует, что

$$k_0=[22{,}8]=22.$$

Пример 3. Сколько раз нужно подбросить игральный кубик, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32?

Решение. По условию $k_0=32$, $p=\frac{1}{6}$, поэтому $q=\frac{5}{6}$. Составляем двойное неравенство:

$$n\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\le 32\le n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.$$

Имеем

$$n\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\le 32 \text{ или } 32\le n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.$$

Отсюда следует, что

$$191\le n\le 197.$$

Пример 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при пяти выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Поскольку $np+p=5\cdot 0{,}8+0{,}8=4{,}8$ – не целое число, то $k_0=[4{,}8]=4$. Вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_5(4)=C_5^4(0{,}8)^4\cdot 0{,}2=0{,}4096.$$

Пример 5. На факультете 730 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна $\frac{1}{365}$. Вычислить вероятность того, что найдутся три студента, у которых дни рождения совпадают.

Решение. В данном случае $n = 730$, $k = 3$, $p = \frac{1}{365}$, $q = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Определяем x:

$$x = \frac{3 - 730 \cdot \frac{1}{365}}{\sqrt{730 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}}} = 0{,}71.$$

С помощью таблицы значений функции $\varphi(x)$ находим

$$\varphi(0{,}71) = 0{,}3101.$$

Тогда

$$P_{730}(3) \approx 0{,}2210.$$

Пример 6. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших заключено между 790 и 830.

Решение. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа:

$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, то есть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

значения x_1 и x_2 определяются равенствами $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Из условия следует, что $n = 900$, $k_1 = 790$, $k_2 = 830$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Определяем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{790 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{790 - 810}{\sqrt{81}} = -\frac{20}{9} \approx -2{,}22;$$

$$x_2 = \frac{830 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{830 - 810}{\sqrt{81}} = \frac{20}{9} \approx 2{,}22.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа находим:

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}22) \approx 0{,}4868,$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(-2{,}22) \approx -0{,}4868.$$

Наконец, получаем искомую вероятность

$$P_{900}(790{,}830)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0{,}4868+0{,}4868=0{,}9736.$$

Пример 7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение времени t обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n=1000$, $k>3$, $p=0{,}002$. Так как n достаточно велико, а p достаточно мало, воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \text{где}\ \lambda=np.$$

В нашем случае при $\lambda=1000\cdot 0{,}002=2$ искомая вероятность равна

$$P_{1000}(k>3)=1-P_{1000}(k\le 3)=1-P_{1000}(0)-P_{1000}(1)-P_{1000}(2)-P_{1000}(3)=$$

$$=1-e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!}-e^{-2}\cdot\frac{2}{1!}-e^{-2}\cdot\frac{2^2}{2!}-e^{-2}\cdot\frac{2^3}{3!}=$$

$$=1-0{,}1353-0{,}2707-0{,}2707-0{,}1805=0{,}1428.$$

Пример 8. В каждом из 10000 независимых испытаний вероятность успеха равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n=10000$, $p=0{,}75$, $q=1-p=1-0{,}75=0{,}25$, $\varepsilon=0{,}001$. Тогда

$$x=0{,}001\cdot\sqrt{\frac{10000}{0{,}75\cdot 0{,}25}}=0{,}001\cdot 200\cdot\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}=0{,}2\cdot\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}\approx 0{,}231,$$

$$P_{10000}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}75\right|<0{,}001\right)=2\Phi(0{,}231)=0{,}182.$$

Вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности в независимых испытаниях не превысит 0,001, равна 0,182.

Задания для самостоятельной работы

1. Монета подброшена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) от 4 до 6 раз; б) хотя бы один раз.

2. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а имеется их десять. Вероятность невыхода каждой авто-

машины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

3. Всхожесть семян составляет в среднем 80%. Найти наивероятнейшее число всхожих среди девяти семян.

4. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырёх? б) выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

5. Проверка качества выпускаемых деталей показала, что в среднем брак составляет 7,5%. Найти наиболее вероятное число стандартных деталей в партии из 39 штук, отобранных наудачу.

6. При стрельбе по мишени вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число испытаний равно 16?

7. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырёх раз?

8. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия?

9. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов.

а) Какова вероятность отказа двух элементов за год?

б) Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

10. Стрелок выполнил 400 выстрелов. Найти вероятность 325 попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

11. Вероятность появления события в каждом независимом испытании равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности может быть с вероятностью 0,9128 при 5000 повторениях независимых испытаний по схеме Бернулли.

12. Установлено, что виноградник поражён вредителями в среднем на 10%. Определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов виноградника один будет поражён. Вычислить по формулам Бернулли, Лапласа, Пуассона. Сравнить результаты, сделать выводы.

13. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеют: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.

14. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определённый момент времени.

Ответы

1. а) $\frac{21}{32}$; б) $\frac{1023}{1024}$.
2. 0,9298.
3. 0,302.
5. 36 или 37.
6. 22 или 23.
7. 0,541.
8. 0,0613.
9. а) 0,1831; б) 0,2642.
10. 0,041.
11. 0,00967.
13. а) 0,9938; б) 0,9937.

РАЗДЕЛ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пример 1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

x_i	2	4	7	8
p_i	0,3	0,1	0,1	0,6

б)

x_i	-2	-1	0	2
p_i	0,4	0,05	0,5	0,05

Решение. Проверим выполнимость условия нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

для обеих таблиц:

а) 0,3+0,1+0,1+0,6=1,1≠1, поэтому первая таблица не задаёт закон распределения;

б) 0,4+0,05+0,5+0,05=1, поэтому вторая таблица задаёт закон распределения.

Пример 2. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

x_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5^2}$	$\frac{1}{5^3}$	$\dots$	$\frac{1}{5^k}$	$\dots$
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\dots$	$\frac{1}{2^k}$	$\dots$

б)

x_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\dots$	$\frac{1}{4^k}$	$\dots$
p_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\dots$	$\frac{1}{k}$	$\dots$

Решение. Проверим выполнимость условия нормировки

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

для обеих таблиц.

а) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Имеем геометрический ряд вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} aq^{k-1}$ с первым членом $a = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Этот ряд сходится, так как $q = \frac{1}{2} < 1$, а его сумма равна единице:

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Поэтому условие нормировки для первой таблицы выполнено. Она задаёт ряд распределения.

б) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Имеем гармонический расходящийся ряд, поэтому условие нормировки для второй таблицы не выполнено. Значит, она рядом распределения не является.

Пример 3. Закон распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p_i	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность p_4? Постройте многоугольник распределения.

Решение. Из выполнимости условия нормировки следует, что

$p_4 = 1-(p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1-(0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}1) = 1-0{,}8 = 0{,}2$.

Построим многоугольник распределения (рис. 1).

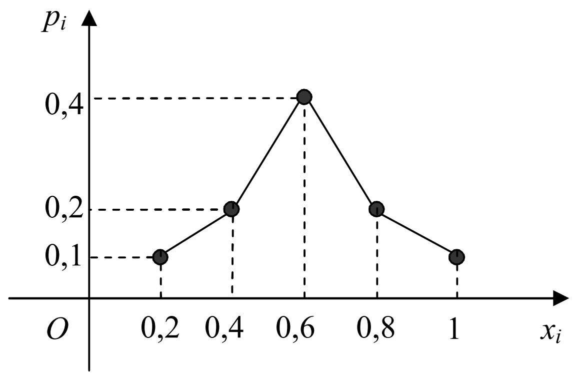


Рис. 1

Пример 4. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число выпавших гербов. Найти закон распределения ДСВ X – числа выпадений гербов на обеих монетах.

Решение. В данном опыте четыре равновозможных элементарных исхода: (Г, Г), (Г, Ц), (Ц, Г), (Ц, Ц) (здесь Г – герб, Ц – цифра). Герб может выпасть один раз, два раза или не появиться ни разу. Поэтому случайная величина X может принимать одно из трёх значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Найдём вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = x_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$p_2 = P(X = x_2) = \frac{2}{4} = 0{,}5,$$

$$p_3 = P(X = x_3) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Проверим выполнимость условия нормировки:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1.$$

Запишем закон распределения данной ДСВ X в виде ряда распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Пример 5. Монета подбрасывается пять раз. Найти закон распределения ДСВ X – числа выпадений гербов.

Решение. В данном опыте герб может появиться один раз, два раза, три, четыре, пять раз или не появиться ни разу. Поэтому случайная величина X может принимать одно из шести значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$.

Данная последовательность независимых и одинаковых испытаний, в результате каждого из которых наступает или не наступает событие A – выпадение герба с одной и той же вероятностью $p = \frac{1}{2}$, является схемой Бернулли.

Поэтому

$$p_1 = P(X = x_1) = C_5^0 p^0 q^{5-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32},$$

$$p_2 = P(X = x_2) = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32},$$

$$p_3 = P(X = x_3) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{10}{32},$$

$$p_4 = P(X = x_4) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32},$$

$$p_5 = P(X = x_5) = C_5^4 p^4 q^{5-4} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32},$$

$$p_6 = P(X = x_6) = C_5^5 p^5 q^{5-5} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}.$$

Проверим выполнимость условия нормировки: $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Запишем закон распределения данной ДСВ X в виде ряда распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Пример 6. Из двух орудий поочерёдно ведётся стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудиями.

Решение. Пусть события A_i и B_i – попадание в цель соответственно первым и вторым орудиями при i-том выстреле; $\overline{A_i}$ и $\overline{B_i}$ – промахи.

Найдём закон распределения случайной величины X – числа снарядов, израсходованных первым орудием. Первое орудие израсходует один снаряд в одной из двух возможных ситуаций:

1) если оно попадёт в цель при первом выстреле;

2) если оно промахнётся, а второе орудие при первом выстреле попадёт в цель:

$$p_1 = P(X = x_1) = P(X = 1) = P(A_1 + \overline{A}_1 B_1) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 B_1) =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(B_1) = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}79.$$

Первое орудие израсходует два снаряда, если оба орудия при первом выстреле промахнутся, а при втором выстреле первое орудие попадёт в цель, или если оно промахнётся, а второе орудие при втором выстреле попадёт в цель:

$$p_2 = P(X = x_2) = P(X = 2) = P(\overline{A}_1 \overline{B}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 B_2) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}21 \cdot (0{,}3 + 0{,}49) = 0{,}79 \cdot 0{,}21.$$

Аналогично получим

$$p_k = P(X = x_k) = P(X = k) = 0{,}79 \cdot 0{,}21^{k-1}.$$

Искомый закон распределения дискретной случайной величины X – числа снарядов, израсходованных первым орудием:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,79	$0{,}79 \cdot 0{,}21$	$0{,}79 \cdot 0{,}21^2$	…	$0{,}79 \cdot 0{,}21^{k-1}$	…

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \frac{0{,}79}{1-0{,}21} = \frac{0{,}79}{0{,}79} = 1.$$

Найдём закон распределения случайной величины Y – числа снарядов, израсходованных вторым орудием. Если первое орудие при первом выстреле попадёт в цель, то стрельбы из второго орудия не будет:

$$p_1 = P(Y = y_1) = P(Y = 0) = P(A_1) = 0{,}3.$$

Второе орудие израсходует лишь один снаряд, если при первом выстреле оно попадёт в цель, или если оно промахнётся, а первое орудие попадёт в цель при втором выстреле:

$$p_2 = P(Y = y_2) = P(Y = 1) = P(\overline{A}_1 B_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}553.$$

Вероятность того, что второе орудие израсходует два снаряда, равна

$$p_3 = P(Y = y_3) = P(Y = 2) = P(\overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 A_3) = 0{,}553 \cdot 0{,}21.$$

Аналогично получим

$$p_k = P(Y = y_k) = P(Y = k-1) = 0{,}553 \cdot 0{,}21^{k-1}.$$

Искомый закон распределения дискретной случайной величины Y:

y_i	0	1	2	…	k	…
p_i	0,3	0,553	$0{,}553 \cdot 0{,}21$	…	$0{,}553 \cdot 0{,}21^{k-1}$	…

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 0{,}3 + \left(\frac{0{,}553}{1} - 0{,}21 \right) = 0{,}3 + \frac{0{,}553}{0{,}79} = 0{,}3 + 0{,}7 = 1.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте в виде таблицы и многоугольника.

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Найти закон распределения дискретной случайной величины X –

числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

3. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

4. Два бомбардировщика поочерёдно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым – 0,8. Вначале сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками (то есть ограничиться возможными значениями X, равными 1, 2, 3, 4).

5. Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролёр берёт из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролёр берёт следующее и так далее, но всего проверяет не более пяти изделий. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа проверяемых изделий.

6. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, остальные – красные. Из этой урны извлекаются 3 шара. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа голубых шаров в выборке.

Ответы

1.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

2.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

3.

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,2	0,16	0,128	…	$0{,}2\cdot 0{,}8^{k-1}$	…

4.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,7	0,24	0,042	0,0144

5.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,06	0,056	0,053	0,050	0,781

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Функция распределения непрерывной случайной величины

Пример 1. Дана функция

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Показать, что она является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность того, что эта случайная величина примет значения из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right)$.

Решение. Все значения этой величины принадлежат отрезку $[0;1]$, так как $|\cos x| \le 1$. Функция $F(x)$ является неубывающей: в промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ она постоянная, равная нулю, в промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right]$ возрастает, в промежутке $(0;+\infty)$ также постоянная, равная единице (рис. 1).

Функция непрерывна в каждой точке x_0 области её определения – промежутка $(-\infty;+\infty)$, поэтому непрерывна слева и справа. Также выполняются равенства $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$.

Следовательно, $F(x)$ удовлетворяет всем свойствам, характерным для функции распределения.

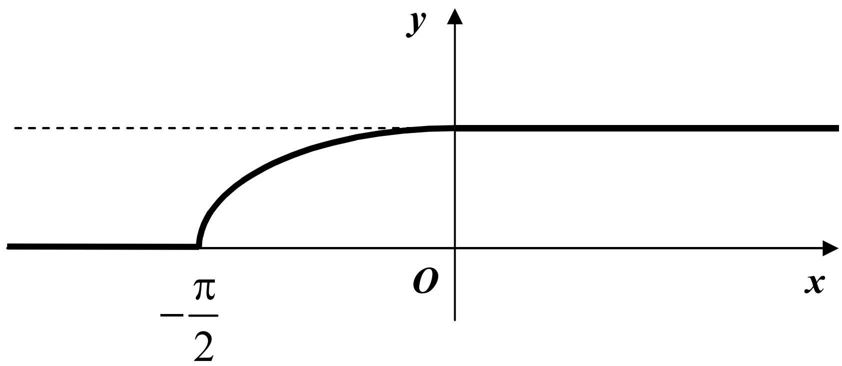


Рис. 1

В соответствии с формулой

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

находим искомую вероятность:

$$P\left(-\frac{\pi}{3} < X < 0\right) = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле равна 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность события $X \ge 1$.

Решение. Найдём сначала закон распределения данной ДСВ X. Эта величина может принимать три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Пусть событие A_1 – «попадание первого стрелка», событие A_2 – «попадание второго стрелка», $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ – их промахи соответственно. Тогда $q_1 = P(\overline{A_1}) = 1 - p_1 = 0,5$, $q_2 = P(\overline{A_2}) = 1 - p_2 = 0,6$.

Значению $x_1 = 0$ соответствует случай, когда у обоих стрелков промахи: произошло событие $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, где $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ – независимые события, поскольку A_1 и A_2 независимы.

По теореме умножения получаем

$$P(A) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3.$$

Значению $x_2 = 1$ соответствует случай, когда число попаданий равно единице: попадание у первого стрелка и промах у второго или попадание у второго и промах у первого. Это значит, что произошло событие

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} + A_2 \cdot \overline{A_1},$$

где $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $A_2 \cdot \overline{A_1}$ – несовместные события, A_1 и $\overline{A_2}$, A_2 и $\overline{A_1}$ – независимые события соответственно. На основании теорем сложения и умножения находим

$$P(B) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(A_2 \overline{A_1}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(A_2)P(\overline{A_1}) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Значению $x_3 = 2$ соответствует случай, когда у обоих стрелков попадания, – произошло событие $C = A_1 \cdot A_2$. Следовательно,

$$P(C) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$$

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Построим функцию распределения этой случайной величины.

При $x \le 0$

$$F(x) = \sum_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0.$$

При $0 < x \le 1$

$$F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}3.$$

При $1 < x \le 2$

$$F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

При $x > 2$

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

График функции распределения изображён на рис. 2.

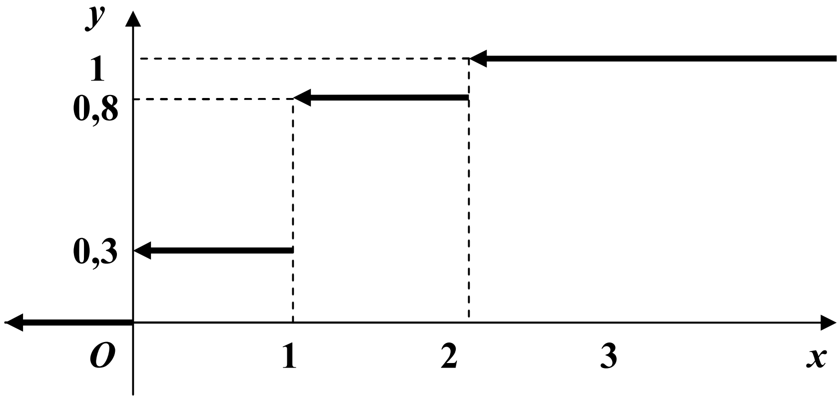


Рис. 2

Найдём вероятность события $X \ge 1$. Это событие равно сумме двух событий $X = 1$, $X = 2$. Значит,

$$P(X \ge 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7\,.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Даны функции:

а) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$ б) $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

в) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$ г) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при} \quad x \le 0, \\ e^{-x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$

д) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$ е) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \cos x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Являются ли они функциями распределения некоторой случайной величины?

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0{,}5x & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее трёх; в) не меньшее трёх; г) не меньшее пяти.

3. Трижды подбрасывается симметричная монета. Найти функцию распределения случайной величины X, равной числу выпавших гербов.

4. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Найти функцию распределения случайной величины X, равной числу оцененных на «отлично» работ среди извлечённых. Используя функцию распределения, найти вероятность события $1 \le X \le 2$.

5. Случайная величина X на всей оси Ox задана функцией распределения $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяю-

щее условию: с вероятностью $\frac{1}{4}$ случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

Ответы

1. а) Нет. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Да. е) Нет.
2. а) 0. б) 0,5. в) 0,5. г) 0.
3. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{8} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ \frac{7}{8} & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

5. $x_1 = 2$.

Плотность вероятности

Пример 1. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией $f(x)=\frac{c}{1+x^2}$. Найти значение параметра c.

Решение. Плотность вероятности должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = 1, \qquad c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1,$$

тогда

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}}.$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ – сходящийся: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Следовательно, $c = \frac{1}{\pi}$. Плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Пример 2. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1, 2).

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2=0{,}75.$$

Пример 3. График плотности вероятности случайной величины X изображён на рис. 1. Записать аналитическое выражение для плотности вероятности, найти функцию распределения.

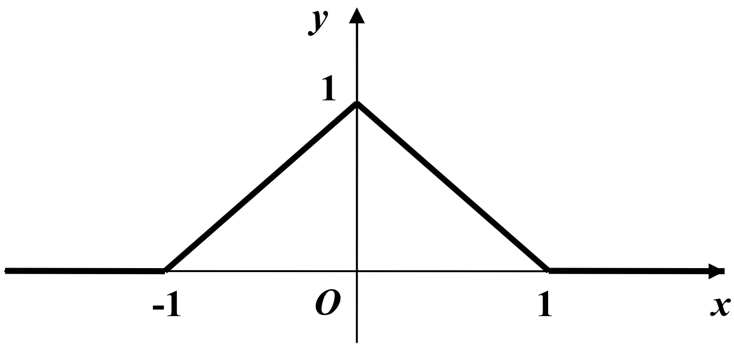


Рис. 1

Решение. В соответствии с графиком записываем аналитическое выражение для плотности вероятности распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad |x|>1,\\ x+1 & \text{при} \quad -1<x\le 0,\\ -x+1 & \text{при} \quad 0<x\le 1.\end{cases}$$

По формуле $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ найдём функцию распределения:

при $x\le -1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$$

при $-1<x\le 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x}(t+1)dt=0+\left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2};$$

при $0 < x \le 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} (t+1)dt + \int_{0}^{x} (-t+1)dt = \left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_{0}^{x} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2};$$

при $x > 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} (t+1)dt + \int_{0}^{1} (-t+1)dt + \int_{1}^{x} 0dt =$$

$$= \left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - 0 - \left(0 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2} & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

График функции распределения изображён на рис. 2.

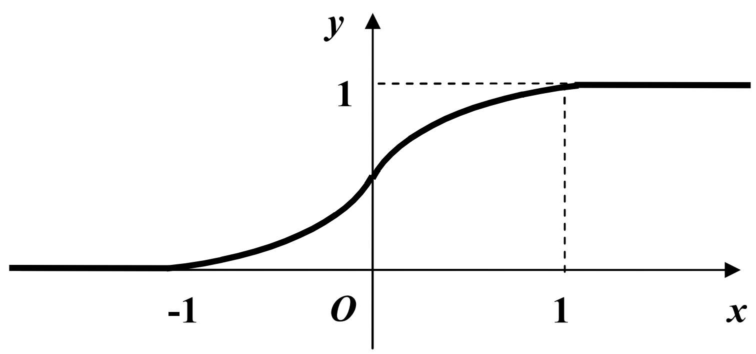


Рис. 2

Задания для самостоятельной работы

1. Является ли плотностью вероятности распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x(1-x) & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{3x^2}{2} & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$ г) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

2. Плотность вероятности распределения случайной величины X задана функцией $f(x)=ax^2e^{-kx}$ ($k>0$, $0 \le x < +\infty$). Найти значение параметра a. Найти функцию распределения $F(x)$ СВ X.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{(1-\cos x)}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности распределения СВ X. Вычислить вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Плотность вероятности распределения случайной величины X задана функцией $f(x)=\dfrac{c}{e^x+e^{-x}}$. Найти значение параметра c. Найти функцию распределения $F(x)$.

5. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ этой случайной величины. Чему равна вероятность того, что значение СВ X принадлежит интервалу (0,5; 1)?

Ответы

1. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет.

2. $a=\dfrac{k^3}{2}$; $F(x)=1-\dfrac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}$.

3. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x \ge \pi, \end{cases}$ $P(\dfrac{\pi}{3} < X < \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{4}$.

4. $c = \dfrac{2}{\pi}$; $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИСПЕРСИЯ, СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ. МОМЕНТЫ

Математическое ожидание

Пример 1. Найти математическое ожидание СВ X, заданной рядом распределения

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. В соответствии с формулой $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ находим

$$M(X) = 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}4 + 6\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}1 = 5.$$

Пример 2. Дан ряд распределения СВ X

x_i	-4	-2	0	2	4
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Записать законы распределения случайных величин $3X$, $\dfrac{X}{2}$. Найти $M(X)$, $M(3X)$, $M\left(\dfrac{X}{2}\right)$.

Решение. Законы распределения случайных величин $3X$, $\dfrac{X}{2}$ запишем в виде рядов распределения:

$3x_i$	-12	-6	0	6	12
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

$\frac{x_i}{2}$	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Тогда $M(X)=0{,}9$, $M(3X)=2{,}7$, $M\left(\frac{X}{2}\right)=0{,}45$.

Математические ожидания случайных величин $3X$ и $\frac{X}{2}$ можно вычислить с помощью равенства $M(CX)=CM(X)$:

$$M(3X)=3M(X)=3\cdot 0{,}9=2{,}7,\ M\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{1}{2}M(X)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}45.$$

Пример 3. Подбрасывается игральный кубик. Найти математическое ожидание ДСВ X, равной числу выпавших очков.

Решение. Ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда $M(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$.

Пример 4. Подбрасываются два игральных кубика. ДСВ X – сумма очков, выпавших на обоих кубиках. Найти математическое ожидание ДСВ X.

Решение. Ряд распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Тогда $M(X)=7$.

Этот результат можно получить проще. Случайную величину числа очков, выпадающих на одном кубике, обозначим через X, а на другом – через Y. Они имеют одинаковые законы распределения.

Поэтому

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=3{,}5+3{,}5=7.$$

Поскольку величины X и Y независимы, то можно найти математическое ожидание СВ $Z=XY$ – произведения числа очков, выпавших при совместном подбрасывании двух кубиков.

Тогда

$$M(Z)=M(XY)=M(X)M(Y)=3{,}5\cdot 3{,}5=12{,}25.$$

Пример 5. ДСВ X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана рядом распределения:

x_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{3^k}$	$\ldots$
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^k}$	$\ldots$

Найти математическое ожидание СВ X.

Решение.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{6^k}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}.$$

Пример 6. Производятся независимые опыты, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p. Опыты продолжаются до первого появления события A. Случайная величина X – число произведённых опытов. Найти математическое ожидание СВ X.

Решение. Возможные значения данной СВ X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, …, $x_n=n$, … . Событие $X=n$ означает, что в первых $n-1$ опытах событие A не наступает, а в n-ном опыте наступает. Вероятность такого исхода равна

$$P(X=n)=\underbrace{qq...q}_{n-1\text{ раз}}p=pq^{n-1},\text{ где } q=1-p.$$

Следовательно, закон распределения СВ X можно представить таблицей:

x_i	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
p_i	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{n-1}	$\ldots$

Находим математическое ожидание этой величины:

$$M(X)=1\cdot p+2\cdot pq+3\cdot pq^2+\ldots+npq^{n-1}+\ldots=$$
$$=p(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots).$$

Ряд в скобках получается почленным дифференцированием геометрического ряда

$$q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{q}{1-q}=\frac{1}{1-q}-1.$$

Следовательно,

$$M(X)=p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Пример 7. Найти математическое ожидание СВ X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Решение. Найдём сначала плотность вероятности СВ X по формуле $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X)=3$, $M(Y)=2$. Найти математические ожидания суммы и разности этих величин.

2. Известны математические ожидания независимых случайных величин X и Y: $M(X)=4$, $M(Y)=5$. Найти математическое ожидание их произведения.

3. Найти математическое ожидание случайной величины $Y=2X+7$, если $M(X)=4$.

4. Найти математическое ожидание случайной величины X, плотность вероятности которой задана функцией $f(x)=\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}$, где $-\infty<x<+\infty$.

5. ДСВ X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана рядом распределения:

x_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{4^k}$	$\ldots$
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^k}$	$\ldots$

Найти математическое ожидание СВ X.

6. Найти математическое ожидание СВ X, если известна функция распределения этой величины:

а) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{3} & \text{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1-e^{-\alpha x} & \text{при} \quad x > 0 \quad (\alpha > 0). \end{cases}$

7. Известны возможные значения ДСВ X: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, а также математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(X)=0{,}1$, $M(X^2)=0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

8. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание ДСВ X – числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

Ответы

1. $M(X+Y)=5$, $M(X-Y)=1$.
2. $M(XY)=20$.
3. $M(Y)=15$.
4. $M(X)=0$.
5. $M(X)=\dfrac{1}{7}$.
6. а) $M(X)=4{,}5$, б) $M(X)=\dfrac{1}{\alpha}$.
7. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}5$.
8. $M(X)=\dfrac{3}{5}$.

<u>Дисперсия. Среднее квадратическое ожидание. Моменты</u>

Пример 1. ДСВ X имеет следующий закон распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ X.

Решение. Найдём математическое ожидание данной ДСВ X:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения этой величины, то есть величины $(X - M(X))^2$:

$(x_i - M(X))^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
p_i	0,3	0,5	0,2

По формуле $D(X) = M((X - M(X))^2)$ получаем

$$D(X) = (0-0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1-0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2-0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}49.$$

В соответствии с формулой $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Замечание. Дисперсию можно вычислить и по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Найдём для этого математическое ожидание ДСВ X^2, предварительно записав закон распределения ДСВ X^2:

X^2	0	1	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Тогда

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}3,$$

$$D(X) = 1{,}3 - 0{,}9^2 = 0{,}49.$$

Пример 2. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ СВ X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдём сначала плотность вероятности СВ X по формуле $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

По формуле $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx$ находим математическое ожидание данной случайной величины

$$M(X)=\int\limits_0^1 x\cdot 3x^2dx=3\int\limits_0^1 x^3dx=3\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{3}{4}.$$

По формуле $D(X)=\int\limits_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx$ находим дисперсию данной случайной величины

$$D(X)=\int\limits_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 3x^2dx=3\int\limits_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)x^2dx=$$

$$=3\int\limits_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=3\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1=$$

$$=3\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{80}.$$

Найдём среднее квадратическое отклонение данной случайной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{3}{80}}\approx 0{,}19.$$

Пример 3. ДСВ X может принять одно из двух возможных значений: $x_1=1$ с вероятностью $p_1=0{,}4$ и $x_2=2$ с вероятностью $p_2=0{,}6$. Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков ДСВ X.

Решение. В соответствии с формулой $\nu_k=\sum\limits_{i=1}^n x_i^k p_i$ находим начальные моменты:

$$\nu_1=M(X^1)=\sum_{i=1}^2 x_i p_i=M(X)=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}6=1{,}6,$$

$$\nu_2=M(X^2)=\sum_{i=1}^2 x_i^{\,2} p_i=1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}6=2{,}8,$$

$$\nu_3=M(X^3)=\sum_{i=1}^2 x_i^{\,3} p_i=1^3\cdot 0{,}4+2^3\cdot 0{,}6=5{,}2.$$

Вычислим центральные моменты.

$$\mu_0=M(X-a)^0=\sum_{i=1}^2 p_i=1,$$

$$\mu_1=M(X-a)^1=0,$$

$$\mu_2=M(X-a)^2=\sum_{i=1}^\infty (x_i-a)^2 p_i=D(X)=$$

$$=(1-1{,}6)^2\cdot 0{,}4+(2-1{,}6)^2\cdot 0{,}6=0{,}24,$$

иначе $\mu_2 = M(X^2) - a^2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2{,}8 - (1{,}6)^2 = 0{,}24$,

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 5{,}2 - 3 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}8 + 2 \cdot (1{,}6)^3 = -0{,}048$.

Пример 4. Найти моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X, если известна её плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ e^{-x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Решение. Найдём начальные моменты с помощью формулы $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$:

$$\nu_1 = M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} xd(-e^{-x}) =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2d(-e^{-x}) =$$

$$= -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$\nu_3 = M(X^3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^3e^{-x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^3d(-e^{-x}) =$$

$$= -x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 0 + 3 \cdot 2 = 6.$$

Вычислим центральные моменты с помощью формулы $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x)dx$:

$$\mu_1 = M(X - a) = 0,$$

$$\mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} (x-1)^2e^{-x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} (x^2 - 2x + 1)e^{-x}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx - 2\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1,$$

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^3 f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} (x-1)^3e^{-x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)e^{-x}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^3e^{-x}dx - 3\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx + 3\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^3e^{-x}dx - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 = \int\limits_{0}^{+\infty} x^3e^{-x}dx - 4.$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^3 d(-e^{-x}) = -e^{-x}x^3\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = 0 + 3\cdot 2 = 6, \text{ то}$$

$\mu_3 = 6 - 4 = 2$.

Замечание 1. Центральные моменты можно вычислить и по формулам

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Получим:

$\mu_2 = 2 - 1^2 = 1$,

$\mu_3 = 6 - 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1^3 = 2$.

Замечание 2. Данная случайная величина имеет моменты всех порядков. Интегрированием по частям находим начальный момент k-того порядка:

$$\nu_k = M(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^k d(-e^{-x}) = -x^k e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-x}dx = k\nu_{k-1}.$$

Таким образом, $\nu_k = k\nu_{k-1}$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

При $k = 1$ получаем $\nu_0 = 1$.

Следовательно,

$$\nu_k = k\nu_{k-1} = k(k-1)\nu_{k-2} = k(k-1)(k-2)\nu_{k-3} = k(k-1)(k-2)\ldots 1 = k!,$$

то есть

$$\nu_k = k!.$$

Задания для самостоятельной работы

1. ДСВ X имеет следующий закон распределения:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти дисперсию случайной величины X двумя способами.

2. Симметричная монета подбрасывается 4 раза. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, если случайной величиной X является число выпадений герба при этих подбрасываниях.

3. Найти дисперсию случайной величины X – числа очков, выпадающих при одном подбрасывании игрального кубика.

4. Даны все возможные значения ДСВ X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. Найти закон распределения ДСВ X .

5. ДСВ X может принимать только два значения x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Известны: вероятность $p_1 = 0{,}5$, математическое ожидание $M(X) = 3{,}5$ и дисперсия $D(X) = 0{,}25$. Найти закон распределения ДСВ X .

6. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X < 5)$ НСВ X , если известна функция распределения этой величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -2, \\ 0{,}2 \cdot (x+2) \quad \text{при} \quad -2 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

7. ДСВ X имеет только два возможных значения x_1 и x_2 , причём равновероятных. Доказать, что дисперсия ДСВ X равна квадрату полуразности возможных значений.

8. Вероятность того, что покупатель сделает покупку в магазине, равна 0,4. Составить закон распределения СВ X – числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9. Игрок поочерёдно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй – 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание СВ X – числа купленных билетов, если игрок имеет возможность купить: а) только 5 билетов; б) неограниченное число билетов.

10. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть 4 препятствия с вероятностями $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$, $p_4 = 0{,}6$. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения СВ X – числа взятых препятствий. Найти $M(X)$.

11. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие распределения:

x_i	2	4	6
p_i	0,3	0,5	0,2

y_i	3	4
p_i	0,4	0,6

Составить закон распределения случайных величин $Z = X + Y$, $N = XY$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и N.

12. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \dfrac{x^3 - 8}{19} & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности; б) построить графики функции распределения и плотности вероятности; в) вероятность попадания значений случайной величины в интервал (2,5;3); г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; д) моду и медиану величины X.

13. ДСВ X может принять одно из двух возможных значений: $x_1 = 2$ с вероятностью $p_1 = 0{,}7$ и $x_2 = -2$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$. Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков ДСВ X.

14. ДСВ X имеет следующий закон распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков ДСВ X.

15. Найти моменты первых трёх порядков случайной величины X, если известна её функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ответы

1. $D(X) = 1{,}2$.
2. $M(X) = 2$, $D(X) = 1$, $\sigma(X) = 1$.
3. $D(X) = \dfrac{35}{12}$.
4.

x_i	0	2	3
p_i	0,2	0,3	0,5

5.

x_i	3	4
p_i	0,5	0,5

6. $M(X) = 0{,}5$, $D(X) \approx 2{,}083$, $\sigma(X) \approx 1{,}443$, $P(1 < X < 5) = 0{,}4$.

8. $M(X) = 1{,}2$, $D(X) = 0{,}72$, $\sigma(X) = 0{,}85$.

9. а) $M(X) = 3{,}1216$; б) $M(X) = 4{,}091$.

10. $M(X) = 2{,}4264$.

11. $M(Z) = 7{,}4$; $D(Z) = 2{,}2$; $\sigma(Z) = 1{,}48$.

$M(N) = 13{,}68$; $D(N) = 29{,}3376$; $\sigma(Z) = 5{,}4164$.

12. в) 0,599; г) $M(X) = 2{,}566$, $D(X) = 0{,}079$, $\sigma(X) = 0{,}28$.

14. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1{,}2$, $\mu_3 = -37$.

15. $\nu_1 = \dfrac{3}{4}$, $\nu_2 = \dfrac{3}{5}$, $\nu_3 = \dfrac{1}{2}$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \dfrac{3}{80}$, $\mu_3 = \dfrac{1}{160}$.

РАЗДЕЛ III. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальный закон распределения

Пример 1. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов в среднем 75. Составить биномиальное распределение числа бездефектных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Решение.

Пусть ДСВ X – число бездефектных деталей из взятых наудачу 6 деталей. Возможные значения X :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5,\ x_7 = 6.$$

Вероятности этих значений найдём по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 6$:

$$p_1 = P_6(0) = C_6^0 p^0 q^{6-0} = \frac{6!}{0!\cdot 6!}\cdot 0{,}75^0 \cdot 0{,}25^6 \approx 0{,}0002 \approx 0{,}000,$$

$$p_2 = P_6(1) = C_6^1 p^1 q^{6-1} = \frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot 0{,}75^1 \cdot 0{,}25^5 \approx 0{,}004,$$

$$p_3 = P_6(2) = C_6^2 p^2 q^{6-2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^4 \approx 0{,}033,$$

$$p_4 = P_6(3) = C_6^3 p^3 q^{6-3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3 \approx 0{,}132,$$

$$p_5 = P_6(4) = C_6^4 p^4 q^{6-4} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}297,$$

$$p_6 = P_6(5) = C_6^5 p^5 q^{6-5} = \frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^1 \approx 0{,}356,$$

$$p_7 = P_6(6) = C_6^6 p^6 q^{6-6} = \frac{6!}{6!\cdot 0!}\cdot 0{,}75^6 \cdot 0{,}25^0 \approx 0{,}178.$$

Проверим выполнимость условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}004 + 0{,}033 + 0{,}132 + 0{,}297 + 0{,}356 + 0{,}178 = 1.$$

Ряд распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Задания для самостоятельной работы

1. Производится 9 независимых испытаний. В каждом из них событие A появляется с вероятностью $p=\frac{2}{3}$. Составить закон распределения числа появлений события A в этих испытаниях.

2. Доказать рекуррентную формулу для биномиальных вероятностей:

$$P_n(k+1)=\frac{p}{q}\cdot\frac{n-k}{k+1}P_n(k).$$

3. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}4$. Случайная величина X – число появлений события A в этих опытах. Построить ряд и функцию распределения ДСВ X, вычислить её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Вероятность работы каждого из четырёх комбайнов без поломок в течение определённого времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X – числа комбайнов, работавших безотказно. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Построить ряд и функцию распределения ДСВ X – числа мальчиков в семьях, имеющих четырёх детей. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Ответы

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,0000	0,0009	0,0073	0,0341	0,1024	0,2049	0,2733	0,2341	0,1170	0,0260

3. $M(X)=1{,}6$, $D(X)=0{,}96$, $\sigma(X)=0{,}98$.

4. $M(X)=3{,}6$, $D(X)=0{,}36$, $\sigma(X)=0{,}6$.

5. $M(X)=2{,}06$, $D(X)=0{,}999$, $\sigma(X)=1{,}0$.

Распределение Пуассона

Пример 2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Найти $P(X=3)$, если $\lambda=4$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По формуле $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ находим

$$P_n(3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{e^4} = 10{,}6667 \cdot 0{,}0183 = 0{,}1952.$$

Согласно формулам $M(X) = np = \lambda$ и $D(X) = \lambda$ получаем

$$M(X) = 4, \; D(X) = 4.$$

Тогда

$$\sigma(X) = 2.$$

Пример 3. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятность следующих событий: «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию», «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию», «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

Решение. Из условия следует, что $n = 400$, $p = 0{,}01$. Тогда $\lambda = np = 400 \cdot 0{,}01 = 4$.

Вычислим искомые вероятности:

$$P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563,$$

$$P_{400}(0 \le k \le 4) \approx P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) =$$
$$= 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 + 0{,}1954 = 0{,}6289,$$

$$P_{400}(3 \le k \le 400) \approx 1 - P_{400}(0 \le k \le 2) = 1 - P_{400}(0) - P_{400}(1) - P_{400}(2) =$$
$$= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 = 0{,}7619.$$

Пример 4. Будем считать поток заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт, простейшим. Среднее число заказов в одну минуту равно трём. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит:

а) четыре вызова;

б) менее четырёх вызовов;

в) не менее четырёх вызовов.

Решение. ДСВ X – число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт. По условию $\nu = 3$, $t = 2$, $k = 4$.

а) Вероятность того, что за 2 мин поступит четыре вызова, найдём по формуле

$$P_t(k) \approx \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}.$$

Имеем

$$P_{t=2}(k = 4) \approx \frac{(3 \cdot 2)^4}{4!} e^{-3 \cdot 2} = \frac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135.$$

б) Событие «поступило менее четырёх вызовов» произойдёт, если наступит одно из следующих событий: 1) поступило три вызова; 2) поступило два вызова; 3) поступил один вызов; 4) не поступило ни одного вызова. Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_{t=2}(k<4)\approx P_{t=2}(k=3)+P_{t=2}(k=2)+P_{t=2}(k=1)+P_{t=2}(k=0)=$$

$$=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=e^{-6}(36+18+6+1)=$$

$$=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

в) События «поступило менее четырёх вызовов» и «поступило не менее четырёх вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 мин поступит не менее четырёх вызовов, равна

$$P_{t=2}(k\ge 4)\approx 1-P_{t=2}(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

Задания для самостоятельной работы

6. На факультете учатся 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днём рождения одновременно для k студентов данного факультета? Вычислить эту вероятность при $k=0,1,2,3$.

7. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создаётся в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребёнка?

8. Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение СВ X – числа бракованных деталей из 1000 изготовленных.

9. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин поступит:

а) три вызова;

б) менее трёх вызовов;

в) не менее трёх вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

Ответы

6. $P(X=0)\approx 0{,}2541$,
   $P(X=1)\approx 0{,}3481$,
   $P(X=2)\approx 0{,}2385$,
   $P(X=3)\approx 0{,}1089$.

7. $P(X=1)\approx 0{,}3679$,
$P(X=2)\approx 0{,}1839$,
$P(X=3)\approx 0{,}0613$,
$P(X=4)\approx 0{,}0153$.

9. а) $P_{t=4}(k=3)\approx 0{,}0256$; б) $P_{t=4}(k<3)\approx 0{,}0123$; в) $P_{t=4}(k\geq 3)\approx 0{,}9877$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Равномерное распределение

Пример 1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2;7]$. Записать плотность вероятности этой случайной величины.

Решение. Плотность вероятности случайной величины X, равномерно распределённой на отрезке $[a;b]$, имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a\leq x\leq b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

В данном случае $a=2$, $b=7$, $b-a=5$, следовательно,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<2, \\ \dfrac{1}{5} & \text{при} \quad 2\leq x\leq 7, \\ 0 & \text{при} \quad x>7. \end{cases}$$

Пример 2. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления отсчёта можно рассматривать как случайную величину X, равномерно распределённую в интервале между двумя соседними делениями. В данной задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому $f(x)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$.

Понятно, что ошибка отсчёта превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08).

По формуле

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

получим

$$P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} 10dx = 0{,}6.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 3,5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус от 2 до 5 мин.

2. Случайная величина X распределена на отрезке $[2;8]$ с постоянной плотностью. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X, а также $P(3 \le X < 5)$.

3. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) превышающая 0,05.

4. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, распределённой равномерно в интервале (2; 8).

6. Равномерно распределённая СВ X задана плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{1}{2l}$ в интервале $(a-l; a+l)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X.

Ответы

1. $\dfrac{3}{7}$.

2. $M(X) = 5$, $D(X) = 3$, $P(3 \le X < 5) = 0{,}333$.

3. а) $P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 20) = 0{,}4$;

   б) $P(0{,}05 \le X < 0{,}15) = 0{,}5$.

5. $D(X) = 3$, $\sigma(X) = \sqrt{3}$.

6. $M(X) = a$ (кривая распределения симметрична относительно прямой $x = a$); $D(X) = \dfrac{l^2}{3}$.

Показательное распределение

Пример 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T, плотность вероятности которой задана функцией

$$f(t)=\begin{cases}5e^{-5t} & \text{при} \quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0.\end{cases}.$$

Решение. Так как для показательного закона

$$D(T)=\frac{1}{\nu^2},\ \sigma(T)=\frac{1}{\nu}$$

и по условию $\nu=5$, то

$$D(T)=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=0{,}04,\ \sigma(T)=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Пример 4. Испытывают два независимо работающих элемента. Время безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0{,}02t}$, второго – $F_2(t)=1-e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=6$ ч:

а) оба элемента откажут;

б) оба элемента не откажут;

в) только один элемент откажет;

г) хотя бы один элемент откажет.

Решение. а) Вероятность отказа первого элемента

$$P_1=F_1(t=6)=1-e^{-0{,}02\cdot 6}=1-e^{-0{,}12}=1-0{,}887=0{,}113.$$

Вероятность отказа второго элемента

$$P_2=F_2(t=6)=1-e^{-0{,}05\cdot 6}=1-e^{-0{,}3}=1-0{,}741=0{,}259.$$

Искомая вероятность того, что оба элемента откажут, по теореме умножения вероятностей равна

$$P=P_1\cdot P_2=0{,}113\cdot 0{,}259=0{,}03.$$

б) Вероятность безотказной работы первого элемента

$$q_1=R_1(t=6)=e^{-0{,}02\cdot 6}=e^{-0{,}12}=0{,}887.$$

Вероятность безотказной работы второго элемента

$$q_2=R_2(t=6)=e^{-0{,}05\cdot 6}=e^{-0{,}3}=0{,}741.$$

Искомая вероятность безотказной работы обоих элементов равна

$$Q=q_1\cdot q_2=0{,}887\cdot 0{,}741=0{,}66.$$

в) Вероятность того, что откажет только один элемент, равна

$$P_1q_2+P_2q_1=0{,}113\cdot 0{,}741+0{,}259\cdot 0{,}887=0{,}31.$$

г) Вероятность того, что хотя бы один элемент откажет, равна

$$P=1-q_1q_2=1-0{,}66=0{,}34.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Написать функцию распределения и плотность вероятности случайной величины, имеющей показательный закон распределения:

а) при $\nu = 2$;

б) при $\nu = 0{,}5$.

2. Студент помнит, что плотность показательного распределения имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} Ce^{-\nu t} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Однако он забыл, чему равна постоянная C. Требуется найти C.

3. Найти математическое ожидание показательного распределения.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения.

5. Найти теоретический центральный момент третьего порядка $\mu_3 = M(X - M(X))^3$ показательного распределения.

6. Найти асимметрию $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ показательного распределения.

7. Найти теоретический центральный момент четвёртого порядка $\mu_4 = M(X - M(X))^4$ показательного распределения.

8. Найти эксцесс $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ показательного распределения.

9. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролёром, – если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = \begin{cases} 4e^{-4t} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$

10. Время безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$, $t > 0$. Найти вероятность того, что за время $t = 100$ ч:

а) элемент откажет;

б) элемент не откажет.

11. Испытывают три независимо работающих элемента. Время безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение

$F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, второго – $F_2(t) = 1 - e^{-0,2t}$, третьего – $F_3(t) = 1 - e^{-0,3t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 5$ ч откажут:

а) только один элемент;

б) только два элемента;

в) все три элемента.

Ответы

5. $\mu_3 = \dfrac{2}{\nu^3}$.

6. $A_S = 2$.

7. $\mu_4 = \dfrac{9}{\nu^4}$.

8. $E_k = 6$.

10. а) $F(t = 100) = 0,95$; б) $R(t = 100) = 0,05$.

11. а) 0,292; б) 0,466; в) 0,19.

Нормальное распределение

Пример 5. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения случайной величины X, если её плотность вероятности имеет вид:

а) $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}$.

Решение. а) Сравнивая данную плотность вероятности $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$ с плотностью нормального распределения $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, находим

$$M(X) = a = 1,\ \sigma(X) = 5.$$

По формуле $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$ запишем искомую функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-1}{5}\right).$$

б) Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{18\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 3^2}}.$$

Тогда

$$M(X)=a=-2,\ \sigma(X)=3,\ F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+2}{3}\right).$$

Пример 6. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причём $M(X)=10$. Найти $P(0<X<10)$, если известно, что $P(10<X<20)=0{,}3$.

Решение. Так как $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, то

$$P(10<X<20)=\Phi\left(\frac{20\text{-}10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{10\text{-}10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0=0{,}3,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}3.$$

Рассмотрим искомую вероятность

$$P(0<X<10)=\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right)=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

Следовательно,

$$P(0<X<10)=0{,}3.$$

Пример 7. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X имеет нормальное распределение, причём $\sigma(X)=0{,}4$ мм?

Решение. Найдём вначале вероятность отклонения по формуле $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ при $\delta=0{,}77$ и $\sigma=0{,}4$:

$$P(|X-a|<0{,}77)=2\Phi\left(\frac{0{,}77}{0{,}4}\right)\approx 2\Phi(1{,}93)=2\cdot 0{,}473197=0{,}946394.$$

Считая приближённо $p=0{,}95$ и $q=0{,}05$, в соответствии с формулой $np-q\le k_0\le np+p$ при $n=100$ находим:

$$100\cdot 0{,}95-0{,}05\le k_0\le 100\cdot 0{,}95+0{,}95,\ \text{откуда}\ k_0=95.$$

Пример 8. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должна иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдёт ни одной потери вызова?

Решение. Вероятность вызова для каждого абонента

$$p = \frac{6}{60} = 0{,}1, \text{ тогда } q = 0{,}9 \text{ и}$$

$$M(X) = a = np = 1000 \cdot 0{,}1 = 100,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 9{,}5.$$

Согласно правилу трёх сигм $P(|X - a| < 3\sigma) \approx 1$ имеем

$$|X - 100| < 3 \cdot 9{,}5 \text{ или } |X - 100| < 28{,}5.$$

Для практически безотказной работы линии связи при указанных условиях достаточно иметь 129 каналов.

Задания для самостоятельной работы

1. Записать плотность вероятности и функцию распределения нормально распределённой случайной величины X, если $M(X) = 3$, $D(X) = 4$.

2. Вес пойманной рыбы распределён нормально с параметрами $M(X) = 375$ г, $\sigma(X) = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет заключён в интервале:

а) от 300 г до 425 г;

б) не более 450 г;

в) больше 300 г.

3. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения:

а) из интервала (-1; 5);

б) не превышающие 8;

в) не меньшие 5;

г) из интервала (-3; 9).

4. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределённой нормально, равно 2 см, а математическое ожидание равно 16 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.

5. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=0{,}5$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X по модулю будет меньше 1.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причём $\sigma(X)=5$. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадёт X в результате испытания.

7. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой головы крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

Ответы

1. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$, $F(x)=\dfrac{1}{2}+\Phi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$.

2. а) $P(300<X<425)=0{,}9759$,

   б) $P(X<450)=0{,}9987$,

   в) $P(X>300)=0{,}9987$.

3. а) $P(-1<X<5)=0{,}8185$,

   б) $P(X\le 8)=0{,}9938$,

   в) $P(X\ge 5)=0{,}1587$,

   г) $P(-3<X<9)=0{,}9972$.

4. (12,08; 19,92).

5. $P(|X|<1)=0{,}9544$.

6. $6\sigma=30$.

7. $\sigma(X)=10$.

РАЗДЕЛ IV. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13 НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА И МАРКОВА. ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Пример 1. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X)=0{,}001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)=a$ более чем на 0,1?

Решение. По первому неравенству Чебышева

$$P(\left|X-a\right|\geq 0{,}1)\leq \frac{D(X)}{0{,}1^2}=\frac{0{,}001}{0{,}01}=0{,}1.$$

Пример 2. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

Решение. По условию $M(X)=50$. Неравенство $49{,}5<X<50{,}5$, в котором случайная величина X – возможная длина детали, приводится почленным вычитанием числа $M(X)=50$ к виду $\left|X-a\right|\leq 0{,}5$. Применяя неравенство $P(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ в случае $\varepsilon=0{,}5$ и $D(X)=0{,}1$ получаем

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}5\right)\geq 1-\frac{0{,}1}{0{,}5^2}=1-\frac{0{,}1}{0{,}25}=0{,}6.$$

Пример 3. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших будет заключено в границах от 700 до 800 включительно.

Решение. В данном случае $M(X)=np=1000\cdot 0{,}75=750$, граничные значения случайной величины X симметричны относительно математического ожидания. Поэтому от исходных неравенств $700\leq X\leq 800$ можно перейти к неравенствам $-50\leq X-750\leq 50$ или $\left|X-M(X)\right|\leq 50$, что даёт левую часть неравенства $P(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ с $\varepsilon=50$. Значение $D(X)$ найдём по формуле $D(X)=npq$, тогда $D(X)=1000\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25=\dfrac{750}{4}$.

Принимая во внимание, что $\varepsilon^2 = 50^2 = 2500$, получаем правую часть последнего неравенства:

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{750}{4 \cdot 2500} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Следовательно,

$$P(|X - 750| < 50) \geq 0{,}925.$$

Пример 4. Вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Оценить вероятность того, что число нестандартных деталей среди 10000 будет заключено в границах от 950 до 1030 включительно.

Решение. Число нестандартных деталей в данных условиях является случайной величиной X, распределённой по биномиальному закону. В соответствии с формулами $M(X) = np$ и $D(X) = npq$ при $n = 10000$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$ получаем:

$$M(X) = 10000 \cdot 0{,}1 = 1000,$$
$$D(X) = 10000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 900.$$

Отсюда видно, что границы допустимых значений случайной величины не симметричны относительно математического ожидания. Следовательно, применить неравенство Чебышева для оценки вероятности указанного события нельзя. Чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, правая граница должна быть больше математического ожидания на 50, то есть должна быть равна 1050. Учитывая, что двойное неравенство $950 \leq X \leq 1050$ равносильно неравенству $|X - 1000| \leq 50$, применяем неравенство $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ в случае $\varepsilon = 50$ и $D(X) = 900$:

$$P(950 \leq X \leq 1050) = P(|X - 1000| \leq 50) \geq 1 - \frac{900}{50^2} = 0{,}64.$$

Замечание. Неравенство $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ даёт нетривиальную оценку вероятности события $|X - M(X)| < \varepsilon$ лишь в том случае, когда дисперсия случайной величины X достаточно мала (меньше ε^2). Действительно, левая часть неравенства $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, выражающая вероятность события, положительна. Это неравенство даёт оценку вероятности события $|X - M(X)| < \varepsilon$, если правая часть его будет положительной: $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} > 0$, откуда $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} < 1$ или

$D(X) < \varepsilon^2$. Если же $D(X) > \varepsilon^2$, то неравенство $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ запишется так: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq -\alpha$, где $\alpha > 0$, что и без того очевидно (вероятность любого события неотрицательна).

Пример 5. Средний вес клубня картофеля равен 120 г. Оценить вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 360 г.

Решение. Искомую вероятность оценим по формуле $P(X \leq \delta) > 1 - \frac{M(X)}{\delta}$. Пусть случайная величина X – вес клубня. По условию $M(X) = 120$, $\delta = 360$. Имеем

$$P(X \leq 360) > 1 - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0{,}004$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)$ более чем на 0,2?

2. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0{,}009$ и неравенство $P(|X - M(X)| \geq a) < 0{,}1$. Найти a.

3. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0{,}01$ и неравенство $P(|X - M(X)| < a) > 0{,}96$. Найти a.

4. Среднее число дождливых дней в году в данном географическом пункте равно 90. Какова вероятность того, что в нём будет более 150 дождливых дней в году?

5. Случайная величина X задана таблицей:

x_i	1	2	3	5	7	8
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1

Пользуясь неравенством Маркова, оценить вероятность того, что случайная величина X примет значение, не большее 7.

6. Вероятность появления события A в каждом испытании равно $p = \frac{1}{2}$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

7. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}2$, если $D(X) = 0{,}004$.

Ответы

1. 0,1.
2. $a \ge 0{,}3$.
3. $a \ge 0{,}5$.
4. 0,6.
5. $P(X \le 7) > \dfrac{3}{7}$.
6. $p > 0{,}75$.
7. $p > 0{,}9$.

Теорема Чебышева

Пример 1. Для определения средней урожайности поля площадью 1800 га случайным образом выбрали по 1 м^2 с каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия не превышает 6. Оценить вероятность того, что отклонение средней выборочной урожайности отличается от средней урожайности по всему полю не более чем на 0,25 ц.

Решение. В правой части неравенства

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

определяющего искомую вероятность, по условию имеем $\varepsilon = 0{,}25$, $C = 6$ и $n = 1800$. Следовательно,

$$P \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{6}{1800 \cdot 0{,}0625} = 1 - 0{,}053 = 0{,}947.$$

Пример 2. Определить такое число замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения a не более чем на 2 см с вероятностью, не меньшей 0,95. Среднее квадратическое отклонение поперечного сечения деревьев не превышает 10 см; измерения проводятся без погрешности.

Решение. Будем считать выбор деревьев для замеров таким, что можно считать результаты измерений независимыми случайными величинами. Пусть X_i – результат измерения поперечного сечения i-того дерева. По условию задачи $\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)} \le 10$, следовательно, $D(X_i) \le 100$.

Полагая в неравенстве $P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$ $\varepsilon = 2$, $C = 100$, получаем

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a \right| < 2 \right) \ge 1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \ge 0{,}95.$$

Поскольку

$$1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \ge 0{,}95, \text{ то}$$

$$0{,}05 \ge \frac{100}{n \cdot 4},\ n \ge \frac{100}{0{,}05 \cdot 4} = 500.$$

Итак, достаточно выполнить 500 замеров поперечного сечения деревьев.

Задания для самостоятельной работы

1. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин X_k равна 4. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий по модулю не превзойдёт 0,1.
2. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 4. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения средней арифметической случайной величины от средней арифметической их математических ожиданий не более чем на 0,25 превысит 0,99.

Ответы

1. $P \ge 0{,}6$.
2. $n \ge 6400$.

<u>*Теорема Бернулли*</u>

Пример 1. При штамповке пластинок из пластмассы брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1%.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 1000$, $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}03$, $q = 1 - p = 0{,}97$. В соответствии с формулой $P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ получаем

$$P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| < 0{,}01 \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{10000 \cdot 0{,}01^2} = 1 - \frac{0{,}0291}{0{,}1} = 0{,}709 .$$

Таким образом, искомая вероятность $P \geq 0{,}709$.

Задания для самостоятельной работы

1. При каком числе независимых испытаний вероятность выполнения неравенства $\left| \frac{k}{n} - p \right| < 0{,}2$ превысит 0,96, если вероятность появления события в отдельном испытании $p = 0{,}7$?

2. Найти вероятность того, что частота появления шестёрки в 10000 независимых подбрасываниях игрального кубика отклоняется от вероятности появления шестёрки по модулю меньше чем на 0,01.

3. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдёт каждое из них, не превзойдёт по модулю 0,01.

4. Начиная с какого числа n независимых испытаний выполняется неравенство $P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| < 0{,}1 \right) \geq 0{,}97$, если в отдельном испытании $p = 0{,}8$?

Ответы

1. $n \geq 132$.
2. $P \geq 0{,}86$.
3. $P \geq 0{,}79$.
4. $n \geq 534$.

РАЗДЕЛ V. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пример 1. Двумерная ДСВ (X,Y) задана законом распределения

X \ Y	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений ДСВ X:

$$P(X=3)=0{,}17+0{,}10=0{,}27,$$
$$P(X=10)=0{,}13+0{,}30=0{,}43,$$
$$P(X=12)=0{,}25+0{,}05=0{,}3.$$

Закон распределения составляющей X:

x_i	3	10	12
p_i	0,27	0,43	0,3

$0{,}27+0{,}43+0{,}3=1$ – условие нормировки выполнено.

Сложив вероятности по строкам, аналогично найдём распределение составляющей Y:

y_i	4	5
p_i	0,55	0,45

$0{,}55+0{,}45=1$ – условие нормировки выполнено.

Пример 2. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & \text{при} \quad x\ge 0, \quad y\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

Решение. Используем формулу $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot(3^{-x}-3^{-x-y}),\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}.$$

Искомая двумерная плотность вероятности имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y} & \text{при}\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\\ 0 & \text{при}\quad x<0\quad \text{или}\quad y<0.\end{cases}$$

Самостоятельно убедитесь в выполнении условия нормировки

$$\ln^2 3\int_0^\infty\int_0^\infty 3^{-x-y}\,dxdy=1.$$

Пример 3. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y) & \text{в}\quad \text{квадрате}\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{вне квадрата}\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения этой величины. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значения $X<\dfrac{\pi}{6}$, $Y<\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. По формуле $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(\xi,\eta)d\xi d\eta$ получаем

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 0{,}5\sin(\xi+\eta)d\xi d\eta=\int_0^x\left(\int_0^y 0{,}5\sin(\xi+\eta)d\eta\right)d\xi=$$

$$=\int_0^x(-0{,}5\cos(\xi+\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=y}d\xi=-0{,}5\int_0^x(\cos(\xi+y)-\cos\xi)d\xi=$$

$$=-0{,}5\int_0^x\cos(\xi+y)d\xi+0{,}5\int_0^x\cos\xi d\xi=-0{,}5\sin(\xi+y)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}+0{,}5\sin\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}=$$

$$=-0{,}5(\sin(x+y)-\sin y)+0{,}5\sin x.$$

Тогда

$$F(x,y)=0{,}5(\sin x+\sin y-\sin(x+y)).$$

В соответствии с формулой $F(x,y)=P(X<x,\ Y<y)$ находим

$$P\left(X<\frac{\pi}{6},\ Y<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\approx 0{,}67.$$

Пример 4. Дана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

$X \diagdown Y$	$y_1 = 0{,}4$	$y_2 = 0{,}8$
$x_1 = 2$	0,15	0,05
$x_2 = 5$	0,30	0,12
$x_3 = 8$	0,35	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 0{,}4$; в) условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X = x_2 = 5$.

Решение. а) Сложив вероятности «по столбцам», напишем закон распределения X:

x_i	2	5	8
p_i	0,20	0,42	0,38

Сложив вероятности «по строкам», напишем закон распределения Y:

y_i	0,4	0,8
p_i	0,80	0,20

б) Найдём условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 0{,}4$:

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}80} = \frac{3}{16},$$

$$p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}35}{0{,}80} = \frac{7}{16}.$$

Искомый условный закон распределения X:

x_i	2	5	8
$p(X \mid y_1)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

Здесь $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i / y_1) = 1$.

в) Аналогично найдём условный закон распределения Y:

y_j	0,4	0,8
$p(Y\mid x_2)$	$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{2}{7}$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(y_j / x_2) = 1$.

Пример 5. Дана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}.$$

Найти: а) плотности распределения составляющих; б) условные плотности распределения составляющих.

Решение. а) Найдём плотность распределения X

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}} dy.$$

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{-\frac{x^2}{2}}$, не зависящий от переменной интегрирования y, дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{10}} \sqrt{\frac{2}{5}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, окончательно получим плотность распределения составляющей X:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} e^{-0,4x^2}.$$

Аналогично находится плотность распределения составляющей Y:

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2y^2}.$$

б) Найдём условные плотности распределения составляющих:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x+y)^2},$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

Пример 6. Дана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2} & \text{при } x>0,\ y>0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти: а) математические ожидания; б) дисперсии составляющих X и Y.

Решение. а) Найдём сначала плотность вероятности X:

$$f(x)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dy=4xe^{-x^2}\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}dy=2xe^{-x^2},\ x>0.$$

Аналогично получим

$$f(y)=2ye^{-y^2},\ y>0.$$

Найдём математическое ожидание составляющей X

$$M(X)=\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x(2xe^{-x^2}dx).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, получим $M(X)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Понятно, что $M(Y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$D(X)=\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\int_0^{+\infty} x^2(2xe^{-x^2}dx)-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{4}.$$

Понятно, что $D(Y)=1-\frac{\pi}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

X \ Y	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих X и Y.

2. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при } x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$.

3. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}) & \text{при} \quad x>0, \quad y>0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

4. Задана двумерная плотность вероятности системы случайных величин (X,Y):

$$f(x,y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Найти функцию распределения системы.

5. Дана дискретная двумерная случайная величина (X,Y):

$X \backslash Y$	$y_1=10$	$y_2=14$	$y_3=18$
$x_1=3$	0,25	0,15	0,32
$x_2=6$	0,10	0,05	0,13

Найти: а) условный закон распределения X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=10$; в) условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X=x_2=6$.

6. Дана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Найти: а) постоянный множитель C; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения составляющих.

7. Дана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) $f(x,y)=\frac{1}{4}\sin x \sin y$ в квадрате $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\pi$; вне квадрата $f(x,y)=0$. Найти а) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y; б) корреляционный момент.

Ответы

1.

x_i	26	30	41	50
p_i	0,14	0,42	0,19	0,25

y_i	2,3	2,7
p_i	0,29	0,71

2. $P = \dfrac{3}{128}$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} 8e^{-4x-2y} & \text{при} \quad x > 0, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$

4. $\left(\dfrac{1}{\pi}\text{arctg}\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\text{arctg}\dfrac{y}{5} + \dfrac{1}{2}\right)$.

5. а)

x_i	3	6
$p(X\,\vert\,10)$	$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{2}{7}$

б)

y_j	10	14	18
$p(Y\,\vert\,6)$	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{13}{28}$

6. а) $C = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} e^{-0,75x^2}$, $f(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} e^{-3y^2}$;

в) $f(x/y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2}$, $f(y/x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25(x+4y)^2}$.

7. а) $M(X) = M(Y) = \dfrac{\pi}{2}$, $D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4$; б) $K_{xy} = 0$.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

1-20. *Решить задачу, используя классическое определение вероятности.*

1. Из 25 студентов группы 12 занимаются научной работой на кафедре бухгалтерского учета, 7 – экономического анализа, остальные – на кафедре статистики. Какова вероятность того, что два случайно отобранных студента занимаются научной работой на кафедре статистики?

2. Какова вероятность того, что два определенных студента будут проходить практику в Витебске, если предоставлено 6 мест в Витебск, 10 – в Оршу, 4 – в Полоцк?

3. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношенных. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

4. В коробке 5 одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди отобранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается. В противном случае ее посылают на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 5 бракованных, будет принята контролером?

6. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника?

7. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке?

8. Группа студентов состоит из 5 девушек и 4 юношей. Среди них разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки и 2 юношей?

9. В ящике лежат 3 белых, 4 красных, 5 зеленых шаров. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разных цветов?

10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики перемешали. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

11. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Определить вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже.

12. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отдельными буквами перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Найти вероятность того, что получится слово «море».

13. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в разных группах.

14. За выполнение контрольной работы 24 студента получили следующие оценки: 8 студентов – «отлично», 6 – «хорошо», 6 – «удовлетворительно», 4 – «неудовлетворительно». Найти вероятность того, что из четырех работ, взятых наугад, две оценены положительно и две – неудовлетворительно.

15. В группе 12 студентов, среди которых 7 отличников. По списку наудачу отобраны 8 студентов. Какова вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника?

16. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и черного цветов. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

17. 12 волейбольных команд разбиты по жребию на две равные подгруппы. Найти вероятность того, что две самые слабые команды окажутся в одной подгруппе.

18. У сборщика 12 однотипных деталей. Из них 6 – первого, 4 – второго, 2 – третьего сорта. Наугад отобрано 8 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей 4 – первого сорта, 3 – второго и одна – третьего.

19. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в одной группе.

20. В лотерее 1000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 ден. ед., на 4 билета – по 50 ден. ед., на 135 билетов – по 30 ден. ед., на 100 билетов – по 10 ден. ед., на 160 билетов – по 5 ден. ед. Остальные билеты – без выигрыша. Найти вероятность выигрыша по одному билету не менее 10 ден. ед.

21-40. *Решить задачу, используя геометрическое определение вероятности.*

21. Внутрь равностороннего треугольника наугад брошена точка. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в треугольник.

22. На отрезке длины 3 случайно появляется точка. Чему равна вероятность того, что расстояние от точки до конца отрезка превосходит 1?

23. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что $x+y \le 1$, $xy \ge 0{,}08$.

24. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что частное $\dfrac{y}{x}$ не превышает двух, а произведение xy больше единицы.

25. В квадрат с вершинами $O(0;0)$, $K(0;1)$, $L(1;1)$, $M(1;0)$ наудачу брошена точка $Q(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2x$?

26. В прямой круговой цилиндр вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в цилиндре. Найти вероятность попадания точки в куб.

27. Стержень длиной l произвольным образом сломан на три части. Найти вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.

28. В прямоугольник с вершинами $N(-2;0)$, $K(-2;9)$, $L(4;9)$, $M(4;0)$ наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенствам $0 \le y \le 2x - x^2 + 8$?

29. Область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 25$, а область g – этой окружностью и параболой $16x - 3y^2 = 0$. В область G брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет в область g.

30. В прямоугольник с вершинами $N(-1;0)$, $K(-1;5)$, $L(2;5)$, $M(2;0)$ наудачу брошена точка $Q(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенствам $x^2 + 1 \le y \le x + 3$?

31. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy больше $\dfrac{4}{9}$.

32. На отрезке $[0;2]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

33. Вероятность попадания в любую часть плоской треугольной пластины пропорциональна ее площади. Найти вероятность попадания наугад брошенной на пластинку точки в треугольник, образованный средними линиями исходного треугольника.

34. Область G ограничена эллипсом $x^2+4y^2=8$, а область g – этим эллипсом и параболой $x^2-4y=0$. В область G брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет в область g.

35. Два человека условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 12 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих людей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

36. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $\frac{L}{2}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

37. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

38. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

39. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что частное $\frac{y}{x}$ не превышает двух, а произведение xy не больше единицы.

40. Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

41-60. *Решить задачу, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.*

41. Вероятность безотказной работы за время T блока, входящего в прибор, равна 0,85. Для повышения надежности устанавливается такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы прибора за время T с учетом резервного блока.

42. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов.

43. В первом ящике 20 деталей, 15 из них – стандартные, во втором ящике 30 деталей, 25 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные?

44. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,8, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) три высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

45. Подброшены монета и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпала цифра, а на кубике – число очков, кратное трем.

46. Первый станок-автомат дает 1% брака, второй – 1,5% , третий – 2%. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Найти вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь.

47. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна: 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя.

48. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой, если она содержит 5% неисправных деталей.

49. Первый рабочий изготавливает 40% изделий второго сорта, а второй – 30%. У каждого рабочего взято наугад по два изделия. Найти вероятность того, что: а) все 4 изделия – второго сорта; б) хотя бы три изделия – второго сорта; в) менее трех изделий – второго сорта.

50. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа каждого из них за время T равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы за время T: а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства.

51. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов.

52. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь высшего качества изготовлена первым автоматом, равна 0,9, вторым – 0,7, третьим – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

53. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для первого станка составляет 2%, для второго – 5%. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) хотя бы одна деталь нестандартная.

54. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор.

55. В ящике 50% деталей, изготовленных на заводе №1, 20% – на заводе №2 и 30% – на заводе №3. Наугад взято три детали. Найти вероятность того, что: а) все три детали – с завода №1; б) две детали – с завода №2; в) все три детали – с разных заводов.

56. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,8, из второго – 0,6. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

57. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени T проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) менее трех блоков.

58. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, – высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Найти вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник.

59. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, равна соответственно 0,9; 0,8; 0,6. Найти вероятности того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

60. На железобетонном заводе изготавливают панели, 93% из которых – высшего сорта. Найти вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей будут высшего сорта: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

***61-80**. Решить задачу, используя формулу полной вероятности и формулы Байеса.*

61. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго, и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, со второго – 0,6, с третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь – высшего качества; б) взятая наугад с конвейера деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

62. В дисплейном классе имеется 10 компьютеров первого типа и 15 – второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа.

63. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7.

а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии.

б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

64. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40%, второй – 30%, третий – 20% и четвертый – 10% всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,25%, четвертый – 0,5%. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена четвертым автоматом.

65. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных.

а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию.

б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

66. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка №1 равна 0,03, для станка №2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке №1, вдвое больше, чем на станке №2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

67. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. Имеется 20 вопросов, причем: отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10 и плохо подготовленный – на 5. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент сможет ответить на доставшийся ему вопрос, и вероятность того, что этот студент плохо подготовлен и ему просто повезло с вопросом.

68. Из продаваемого в магазине молока 40% поставляет первый молокозавод, остальные 60% – второй. В среднем 9 из 1000 пакетов первого поставщика и 1 из 250 пакетов второго не выдерживают транспортировки и разгерметизируются.

а) Найти вероятность того, что взятый наугад пакет будет разгерметизированным.

б) Случайно выбранный пакет оказался разгерметизированным. Найти вероятность того, что он произведен на первом заводе.

69. Во время боевых действий самолет противника выпускает три помехи для дезинформации системы ПВО. Оператор ПВО отличает самолет от помехи с вероятностью 0,9. Точка на экране была принята за самолет. Что более вероятно: появление самолета или помехи?

70. Обнаружен факт сброса в водоем неочищенных стоков. Пусть известно, что потенциальными источниками загрязнения являются два предприятия, причем вероятность того, что сброс произведен первым предприятием, оценивается в 90%, а вторым в – 10%. Известно, что в 15% стока первого предприятия и в 92% второго ртуть превышает предельно допустимую концентрацию (ПДК). Определить, какому предприятию может принадлежать обнаруженный сброс, если взятая проба показывает превышение ПДК по ртути.

71. 20% приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он исправен.

72. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй – 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?

73. Имеются две урны. В первой – семь красных шаров и три черных, во второй – три красных шара и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

74. Первой бригадой производится в три раза больше продукции, чем второй. Вероятность того, что продукция, производимая первой бригадой, окажется стандартной, равна 0,7, второй – 0,8. Определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она произведена второй бригадой?

75. Комплектовщик получает для сборки 30% деталей с завода №1, 20% деталей – с завода №2, остальные – с завода №3. Вероятность того, что деталь с завода №1 – высшего качества, равна 0,9, с завода №2 – 0,8, с завода №3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе №2.

76. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире».

77. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7.

а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат.

б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

78. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B – 0,5.

а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет.

б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

79. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный диод проработает гарантийное число часов. б) Наугад выбранный диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

80. На участке, изготавливающем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

81-100. *Решить задачу, используя формулу Бернулли или асимптотические формулы (локальную формулу Муавра – Лапласа, формулу Пуассона, интегральную формулу Муавра – Лапласа).*

81. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух.

82. На диспетчерский пункт в среднем поступает 3 заказа в минуту на такси. Определить вероятность того, что за две минуты поступит: а) не менее 4 вызовов; б) ровно 4.

83. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) менее пяти студентов.

84. Телефонный кабель состоит из 400 жил. С какой вероятностью этим кабелем можно подключить к телефонной сети 395 абонентов, если для подключения каждого абонента нужна одна жила, а вероятность того, что она повреждена, равна 0,0125?

85. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из девяти посаженных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи.

86. К магистральному водопроводу подключены 160 предприятий, каждое из которых с вероятностью 0,7 в данный момент времени осуществляет отбор воды. Найти вероятность того, что в этот момент забор воды производят не менее 80 и не более 120 предприятий.

87. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Определить вероятность того, что за данную минуту она получит: а) ровно два вызова; б) более двух вызовов.

88. В жилом доме имеется 6000 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет в интервале между 2800 и 3200.

89. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч равна 0,7. Проведено 10 бросков. Что вероятнее: он забросит мяч в корзину 6 раз или 8 раз?

90. Образец радиоактивного вещества в среднем за 10 секунд испускает 4 заряженные частицы. Определить вероятность того, что за 2 секунды образец испустит: а) хотя бы одну частицу; б) ровно одну.

91. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора.

92. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 6 мин прибудет 5 самолетов, если поток прибытия самолетов простейший.

93. Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что методом угадывания студенту удастся выбрать хотя бы четыре правильных ответа?

94. Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми: а) три изделия; б) не более двух; в) не менее двух изделий.

95. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Какова вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников. Численность работников составляет 500 человек.

96. Программа-экзаменатор содержит 12 вопросов, на каждый из которых предлагается 4 варианта ответов. Положительная оценка выставляется программой в том случае, когда экзаменующийся правильно ответит не менее чем на 10 вопросов. Найти вероятность того, что, выбирая ответы наугад: а) студент ответит на 10 вопросов; б) студент получит положительную оценку.

97. Вероятность поломки станка в течение одной смены равна 0,3. Определить вероятность поломки станка: а) в течение каждой из трех смен; б) в течение одной из трех смен.

98. Ожидается прибытие трех судов с овощами и фруктами. Статистика показывает, что в 1% случаев груз овощей и фруктов частично портится в дороге. Найти вероятность того, что: а) только одно судно придет с частично испорченным грузом; б) все три судна придут с неиспорченным грузом.

99. Вероятность попадания в цель равна 0,5. Сбрасывают по одной 5 бомб. Определить вероятность того, что будет: а) не менее одного попадания в цель; б) два попадания.

100. Вероятность того, что расход электроэнергии за сутки не превышает нормы, равна 0,8. Найти вероятность того, что в ближайшие 7 суток расход электроэнергии не превысит нормы: а) за 4 суток; б) не менее чем за 5 суток.

101-120. *Для данной СВ X : а) описать пространство элементарных исходов Ω и вычислить $P(X=\omega_i)$, $\omega_i \in \Omega$; б) записать ряд распределения СВ X; в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$; г) найти функцию распределения СВ X и построить график этой функции.*

101. Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8. СВ X – число положительных результатов химического анализа среди пяти проведенных.

102. Из ящика, содержащего 2 бракованные и 6 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ X – число извлеченных стандартных деталей.

103. При автоматической прессовке заготовок 2/3 от общего их числа не имеют зазубрин. СВ X – число заготовок из трех, не имеющих зазубрин.

104. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна 0,3. СВ X – число промахов, если у снайпера в запасе 4 патрона.

105. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. СВ X – число попыток открыть замок каждым ключом при условии, что опробованный ключ в последующих попытках не участвует.

106. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. СВ X – число выстрелов, производимых до первого поражения цели.

107. В шестиламповом радиоприемнике, где все лампы различны, перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наудачу выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу радиоприемника. СВ X – число замен ламп.

108. В лотерее на 2000 билетов разыгрываются три вещи, стоимость которых 420, 120 и 60 ден. ед. СВ X – сумма выигрыша для лица, имеющего один билет.

109. Партия из 40 изделий содержит 8 бракованных. Из нее случайным образом отобрано 4 изделия. СВ X – число бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

110. Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,4. СВ X – число попаданий при трех бросках.

111. Вероятность того, что в библиотеке имеется необходимая студенту книга, равна 0,4. В городе 5 библиотек. СВ X – число библиотек, которые посетит студент.

112. В озере 3000 рыб, причем 2000 из них – меченые. Выловили 7 рыб. СВ X – число меченых рыб среди выловленных.

113. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий батареи равны соответственно 0,6, 0,8, 0,7. Каждое орудие стреляет по некоторой цели один раз. СВ X – число попаданий в цель.

114. В первой коробке 10 сальников, из них 2 бракованных, во второй – 16 сальников, из них – 4 бракованных, в третьей – 12, из них 3 бракованных. СВ X – число бракованных сальников при условии, что из каждой коробки взято наугад по одному сальнику.

115. Выход из строя коробки передач происходит по трем причинам: поломка зубьев шестерен, недопустимо большие контактные напряжения и излишняя жесткость конструкции. Каждая из причин приводит к поломке коробки передач с одной и той же вероятностью, равной 0,1. СВ X – число причин, приведших к поломке в одном испытании.

116. Из 39 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных.

117. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из трех узлов прибора равны соответственно 0,2; 0,3; 0,1. СВ X – число узлов, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

118. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из трех блоков прибора равна 0,3. СВ X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

119. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек 3 отличника, в третьей из 24 человек 6 отличников, в четвертой из 20 человек 2 отличника. СВ X – число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку.

120. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2. СВ X – число приборов, отказавших в работе среди пяти испытываемых.

121-140. *Непрерывная СВ X задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Найти:*

а) вероятность попадания значений НСВ X в интервал $(a;b)$;

б) дифференциальную функцию (плотность вероятности) $f(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

121. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi^2} & \text{при } 0<x\le\pi,\\ 1 & \text{при x} >\pi.\end{cases}$$
$$a=1,\quad b=2.$$

122. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{64}{81}x^2 & \text{при } 0<x\le\dfrac{9}{8},\\ 1 & \text{при x} >\dfrac{9}{8}.\end{cases}$$
$$a=0{,}5,\quad b=0{,}9.$$

123. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ (x-2)^2 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$
$$a=2{,}5,\quad b=3.$$

124. $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{6}(x^2-x) & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$
$$a=1,\quad b=2.$$

125. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1) \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$a=0, \quad b=\frac{\pi}{6}.$$

126. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{16}{25}x^2 \quad \text{при } 0<x\le \dfrac{5}{4}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

$$a=0{,}5, \quad b=1.$$

127. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 100, \\ 1-\left(\dfrac{100}{x}\right)^3 \quad \text{при } x>100. \end{cases}$$

$$\text{a}=110, \quad b=120.$$

128. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ 1-e^{-2x} \quad \text{при } x>0. \end{cases}$$

$$\text{a}=0, \quad b=2.$$

129. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{e^2} \quad \text{при } 0<x\le e, \\ 1 \quad \text{при } x>e. \end{cases}$$

$$a=1, \quad b=2.$$

130. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 3, \\ \dfrac{x^4-81}{175} \quad \text{при } 3<x\le 4, \\ 1 \quad \text{при } x>4. \end{cases}$$

$$a=3{,}2, \quad b=3{,}5.$$

131. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{x^4}{16} \quad \text{при } 0<x\le 2, \\ 1 \quad \text{при x} >2. \end{cases}$$

$$a=1, \quad b=1{,}5.$$

132. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{25} \quad \text{при } 1<x\le 6, \\ 1 \quad \text{при x} >6. \end{cases}$$

$$a=2, \quad b=4.$$

133. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le -2, \\ \dfrac{(x+2)^3}{216} \quad \text{при } -2<x\le 4, \\ 1 \quad \text{при x} >4. \end{cases}$$

$$a=-1, \quad b=3.$$

134. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 1, \\ \dfrac{x^3-x}{60} \quad \text{при } 1<x\le 4, \\ 1 \quad \text{при x} >4. \end{cases}$$

$$a=1, \quad b=2.$$

135. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{64}{49}x^2 \quad \text{при } 0<x\le \dfrac{7}{8}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{7}{8}. \end{cases}$$

$$a=0{,}5, \quad b=0{,}8.$$

136. $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le -2, \\ \dfrac{x^3+8}{16} \quad \text{при } -2<x\le 2, \\ 1 \quad \text{при } x>2. \end{cases}$$

$$a=-1, \quad b=1.$$

137. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x^3-x^2}{48} & \text{при } 1<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$ $a=2,\quad b=3.$

138. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x) & \text{при } 0<x\le \pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{3},\quad b=\dfrac{\pi}{2}.$

139. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le \sqrt{2},\\ \dfrac{x^6-x^4-4}{96} & \text{при } \sqrt{2}<x\le \sqrt{5},\\ 1 & \text{при } x>\sqrt{5}.\end{cases}$ $a=1{,}5,\quad b=2.$

140. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le \dfrac{\pi}{2},\\ -\cos x & \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{2},\quad b=\dfrac{5\pi}{6}.$

ТИПОВОЕ РЕШЕНИЕ

Пример 1. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что из ящика будут извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

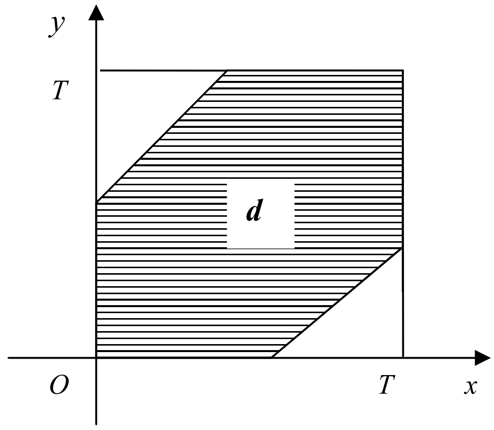
Решение. В ящике всего 30 шаров. При данном испытании число всех равновозможных элементарных исходов будет $n=C_{30}^{6}$. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A – шары вынуты в заданном составе. Три красных шара из 15 можно выбрать C_{15}^{3} способами, два голубых шара из 9 можно выбрать C_{9}^{2} способами, один зеленый из 6 – C_{6}^{1} способами. Следовательно (в силу правила произведения в комбинаторике), число исходов, благоприятствующих событию A, будет $m=C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}$. Используя классическое определение вероятности, находим вероятность события A:

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}}=\frac{15!}{3!(15-3)!}\cdot\frac{9!}{2!(9-2)!}\cdot\frac{6!}{1!(6-1)!}\cdot\frac{6!(30-6)!}{30!}=\frac{24}{145}\approx 0{,}17\,.$$

Ответ: 0,17.

Пример 2. Два человека договорились встретиться в некоторый промежуток времени длительностью T мин, причем каждый из пришедших на место встречи должен ждать другого не более τ мин. Найти вероятность встречи.

Решение. Пусть x и y – моменты прихода каждого из встречающихся. Тогда возможные значения x и y: $0 \le x \le T$ и $0 \le y \le T$. Благоприятствующие значения для встречи: $y - x \le \tau$ и $x - y \le \tau$. Откуда $y \le x + \tau$ и $y \ge x - \tau$. Эти неравенства определяют область d, заштрихованную на рис. 1.



Площадь области d:

$$S_d = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Поскольку $S_D = T^2$, то

$$P = \frac{S_d}{S_D} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Ответ: $1 - \left(1 - \dfrac{\tau}{T}\right)^2$.

Пример 3. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.

Решение. а) Пусть A_i, $i = \overline{1,3}$ – события, означающие попадание в цель каждого из трех стрелков. Тогда $\overline{A_i}$, $i = \overline{1,3}$ – события, означающие промах каждого из трех стрелков. Событие A, означающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$A = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3.$$

Так как $A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3).$$

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}9$. Тогда $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Следовательно,

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

б) Событие B, означающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$B = A_1 + A_2 + A_3.$$

Так как попадания в цель каждого стрелка – независимые в совокупности события, то

$$P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}994.$$

Ответ: а) 0,092; б) 0,994.

Пример 4. На участке, изготавливающем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из них брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

Решение. а) Пусть событие H_1 состоит в том, что взятый наугад болт изготовлен на первом станке, тогда $P(H_1)=0{,}25$; событие H_2 – взятый наугад болт изготовлен на втором станке, тогда $P(H_2)=0{,}35$; событие H_3 – взятый наугад болт изготовлен на третьем станке, тогда $P(H_3)=0{,}4$. Система гипотез H_1, H_2, H_3 является полной группой несовместных событий.

Пусть событие A состоит в том, что взятый наугад болт окажется с дефектом. Тогда $P(A/H_1)=0{,}05$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на первом станке; $P(A/H_2)=0{,}04$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на втором станке; $P(A/H_3)=0{,}02$ – условная вероятность события, состоящего в том, что дефектный болт изготовлен на третьем станке. Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}4\cdot 0{,}02=0{,}0297.$$

б) Вероятность того, что случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке, найдем по формуле Байеса

$P(H_3/A)=\dfrac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}$, где $P(A)$ – полная вероятность события A.

Тогда

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}03}\approx 0{,}27.$$

Ответ: а) 0,0297; б) 0,27.

Пример 5.1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трех дней; в) не более трех дней.

Решение. Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября

$p = \frac{12}{30} = 0{,}4$, а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n наблюдениях событие наступит k раз, определяется формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

а) По условию задачи $n = 8$, $k = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тогда

$$P_8(3) = C_8^3 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}278692.$$

б) Поскольку $n = 8$, $3 \le k \le 8$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(3 \le k \le 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$$

$$= 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - 0{,}6^8 - 8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^7 - 28 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}624893.$$

в) Так как $n = 8$, $0 \le k \le 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(0 \le k \le 3) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) =$$

$$P_8(1) - P_8(2) = 1 - 0{,}6^8 - 8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^7 - 28 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}624893.$$

Ответ: а) $0{,}278692$; б) $0{,}624893$; в) $0{,}624893$.

Пример 5.2. На факультете 730 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна $\frac{1}{365}$. Вычислить вероятность того, что найдутся три студента, у которых дни рождения совпадают.

Решение. В данном случае $n = 730$, $k = 3$, $p = \frac{1}{365}$, $q = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Определяем x:

$$x = \frac{3 - 730 \cdot \frac{1}{365}}{\sqrt{730 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}}} = 0{,}71.$$

С помощью таблицы значений функции $\varphi(x)$ находим

$$\varphi(0{,}71) = 0{,}3101.$$

Тогда $$P_{730}(3) \approx 0{,}2210.$$

Ответ: $0{,}2210$.

Пример 5.3. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших заключено между 790 и 830.

Решение. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа:

$P_n(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

а x_1 и x_2 определяются равенствами $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Из условия следует, что $n = 900$, $k_1 = 790$, $k_2 = 830$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Определяем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{790 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{790 - 810}{\sqrt{81}} = -\frac{20}{9} \approx -2{,}22;$$

$$x_2 = \frac{830 - 900 \cdot 0{,}9}{\sqrt{900 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{830 - 810}{\sqrt{81}} = \frac{20}{9} \approx 2{,}22.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа находим

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}22) \approx 0{,}4868, \; \Phi(x_1) = \Phi(-2{,}22) \approx -0{,}4868.$$

Наконец, получаем искомую вероятность

$$P_{900}(790{,}830) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}4868 + 0{,}4868 = 0{,}9736.$$

Ответ: $0{,}9736$.

Пример 5.4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение времени t обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n = 1000$, $k > 3$, $p = 0{,}002$. Так как n достаточно велико, а p достаточно мало, воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

В нашем случае при $\lambda = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ искомая вероятность равна

$$P_{1000}(k > 3) = 1 - P_{1000}(k \le 3) = 1 - P_{1000}(0) - P_{1000}(1) - P_{1000}(2) - P_{1000}(3) =$$

$$= 1 - e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} - e^{-2} \cdot \frac{2}{1!} - e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} - e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} =$$

$$= 1 - 0{,}1353 - 0{,}2707 - 0{,}2707 - 0{,}1805 = 0{,}1428.$$

Ответ: $0{,}1428$.

Пример 6. Для данной СВ X:

а) описать пространство элементарных исходов Ω и вычислить $P(X=\omega_i)$, $\omega_i \in \Omega$;

б) записать ряд распределения СВ X;

в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

г) найти функцию распределения СВ X и построить график этой функции.

Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее, и т.д., но всего проверяет не более пяти изделий. СВ X – число проверяемых изделий.

Решение. а) Дискретная случайная величина X может принимать пять значений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Она примет значение $x_1=1$, т.е. будет проверено лишь одно изделие, и партию задержат, если первое проверенное контролером изделие окажется нестандартным. Вероятность такого исхода испытания $P(X=1)=0{,}06$.

Проверяют два изделия, т.е. $X=2$, если первое окажется стандартным, а второе – нестандартным. Вероятность такого исхода испытания находим по теореме умножения: $P(X=2)=0{,}94\cdot 0{,}06\approx 0{,}056$ (здесь 0,94=1-0,06 – вероятность того, что изделие окажется стандартным).

Испытание ограничится проверкой качества трех изделий, если первые два окажутся стандартными, а третье – нестандартным. По теореме умножения вероятность такого исхода испытаний $P(X=3)=0{,}94\cdot 0{,}94\cdot 0{,}06=.$ $=0{,}94^2\cdot 0{,}06\approx 0{,}053$ Аналогично находим $P(X=4)=0{,}94^3\cdot 0{,}06\approx 0{,}05$.

Проверяются пять изделий, если первые четыре окажутся стандартными, так как при любом качестве пятого изделия по условию проверка партии заканчивается. Имеем $P(X=5)=0{,}94^4\approx 0{,}781$.

Таким образом, пространство элементарных исходов Ω есть множество $\Omega=\{\omega_1=1, \omega_2=2, \omega_3=3, \omega_4=4, \omega_5=5\}$.

б) Запишем ряд распределения СВ X:

X	1	2	3	4	5
P	0,06	0,056	0,053	0,05	0,781

Отметим, что условие нормировки выполнено:

0,06+0,056+0,053+0,05+0,781=1.

в) Вычислим математическое ожидание $M(X)$ по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k .$$

Имеем

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}06 + 2 \cdot 0{,}056 + 3 \cdot 0{,}053 + 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}781 = 4{,}436 .$$

Вычислим дисперсию $D(X)$ по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 .$$

Имеем

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}06 + 2^2 \cdot 0{,}056 + 3^2 \cdot 0{,}053 + 4^2 \cdot 0{,}05 + 5^2 \cdot 0{,}781 = 21{,}086 ,$$

тогда

$$D(X) = 21{,}086 - 4{,}436^2 \approx 1{,}408 .$$

В соответствии с формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

находим среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{1{,}408} \approx 1{,}187 .$$

г) Для построения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X воспользуемся формулой

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) ,$$

где неравнство $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x.

При $x \le 1$

$$F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = 0 .$$

При $1 < x \le 2$

$$F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 1) = 0{,}06 .$$

При $2 < x \le 3$

$$F(x) = \sum_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0{,}06 + 0{,}056 = 0{,}116 .$$

При $3 < x \le 4$

$$F(x) = \sum_{x_k < 4} P(X = x_k) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= 0{,}06 + 0{,}056 + 0{,}053 = 0{,}169 .$$

При $4 < x \le 5$

$$F(x) = \sum_{x_k < 5} P(X = x_k) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$= 0{,}06 + 0{,}056 + 0{,}053 + 0{,}05 = 0{,}219 .$$

При $x > 5$

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$
$$= 0{,}06 + 0{,}056 + 0{,}053 + 0{,}05 + 0{,}781 = 1.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}06 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}116 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}169 & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}219 & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ 1 & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$ (рис. 2).

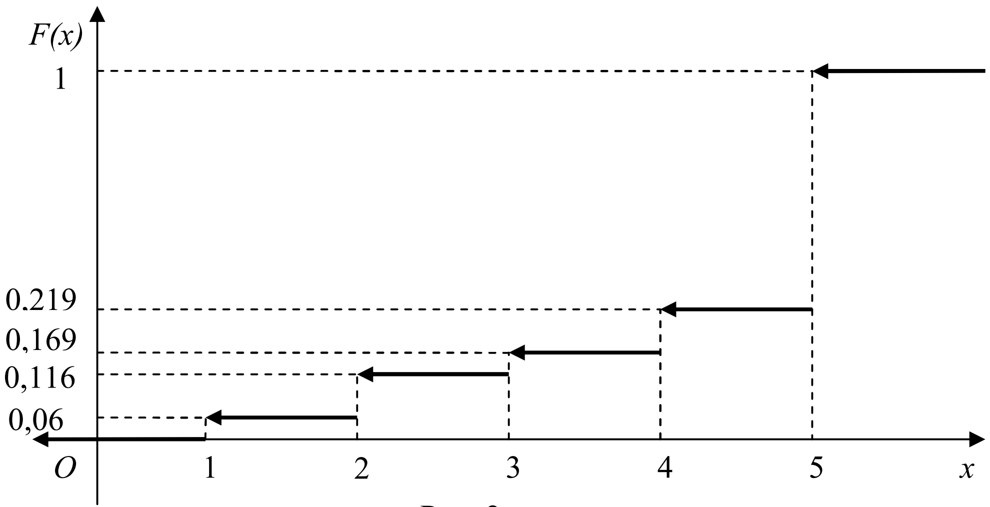


Рис. 2

Пример 7. Непрерывная СВ X задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Найти:

а) вероятность попадания значений НСВ X в интервал $(a;b)$;

б) дифференциальную функцию (плотность вероятности) $f(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{125} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 1 & \text{при x} > 5. \end{cases}$$

$$a = 2, \quad b = 3.$$

Решение. а) По свойству функции распределения имеем

$$P(2<X<3)=F(3)-F(2)=\frac{x^3}{125}\Big|_{x=3}-\frac{x^3}{125}\Big|_{x=2}=\frac{27}{125}-\frac{8}{125}=0{,}152.$$

б) Найдем плотность вероятности

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при} \quad 0<x\le 5,\\ 0 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

Вероятность попадания значений НСВ X в интервал (2;3) также можно найти, зная плотность вероятности

$$P(2<X<3)=\int_2^3\frac{3x^2}{125}dx=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\frac{27}{125}-\frac{8}{125}=0{,}152.$$

в) Найдем числовые характеристики НСВ X.

Математическое ожидание

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{3x^2}{125}dx=\frac{3}{125}\int_0^5 x^3dx=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^5=\frac{3}{5^3}\cdot\frac{5^4}{4}=\frac{15}{4}=3{,}75.$$

Дисперсия

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{3x^2}{125}dx-3{,}75^2=\frac{3}{125}\int_0^5 x^4dx-14{,}0625=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^5-14{,}0625=$$

$$=15-14{,}0625=0{,}9375.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}9375}\approx 0{,}9672.$$

г) Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рис. 3,4).

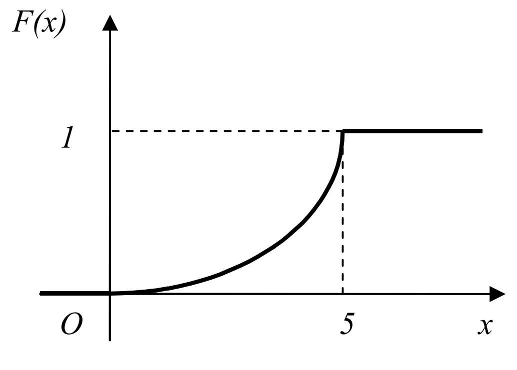


Рис. 3

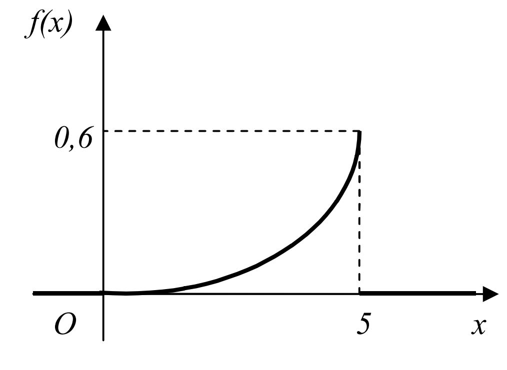


Рис. 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определения: случайного события, опыта; достоверных и невозможных, совместных и несовместных событий; элементарных исходов опыта. Примеры. Действия над событиями. Примеры.
2. Классическое определение вероятности. Пример. Основные свойства вероятности. Статистическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности. Пример.
4. Теоремы о вероятности суммы и произведения событий.
5. Определение зависимых и независимых событий. Определение условной и безусловной вероятности. События независимые в совокупности. Пример Бернштейна.
6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
7. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.
8. Асимптотические формулы: формула Пуассона, локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа.
9. Определения: случайной величины, дискретной и непрерывной случайных величин. Примеры. Закон распределения случайной величины, дискретной случайной величины.
10. Плотность вероятности непрерывной случайной величины и её свойства.
11. Функция распределения случайной величины и её свойства.
12. Функция распределения дискретной и непрерывной случайных величин.
13. Математическое ожидание и его свойства.
14. Дисперсия и её свойства. Среднее квадратическое отклонение.
15. Моменты распределения случайных величин.
16. Биномиальный закон распределения дискретных случайных величин. Числовые характеристики случайной величины, распределённой биномиально.
17. Закон распределения Пуассона дискретных случайных величин. Числовые характеристики случайной величины, имеющей пуассоновское распределение. Простейший поток событий.
18. Закон равномерного распределения непрерывных случайных величин. Числовые характеристики случайной величины, распределённой равномерно.

19. Показательный закон распределения непрерывных случайных величин. Числовые характеристики случайной величины, распределённой по показательному закону. Функция надёжности.

20. Нормальный закон распределения непрерывных случайных величин. Числовые характеристики нормально распределённой случайной величины.

21. Вероятность попадания значений нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило трёх сигм. Функция распределения нормальной случайной величины.

22. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.

23. Теорема Бернулли.

24. Неравенство Маркова, теорема Пуассона, центральная предельная теорема Ляпунова.

25. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины.

26. Функция распределения двумерной случайной величины и её свойства.

27. Законы и условные законы распределения составляющих двумерной случайной величины.

28. Зависимые и независимые составляющие двумерной случайной величины. Числовые характеристики двумерной случайной величины.

29. Функциональная и статистическая зависимости. Корреляционное отношение и его свойства.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Булдык, Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / Г.М. Булдык. – Минск: Выш. шк., 1989. – 285 с.: ил.

2. Высшая математика для экономистов. В 3 т. Т. 2. Теория вероятностей в экономике. Методы оптимизации и экономические модели: учеб. / И.В. Гайшун [и др.]. – Минск: БГЭУ, 2005. – 623 с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 6-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.

4. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учеб. пособие для вузов / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 400 с.

5. Гусак, А.А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов. В 2 т. Т. 2 / А.А. Гусак. – 6-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2007.

6. Гусак, А.А. Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 288 с.

7. Кузнецов, Б.Т. Математика: учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Б.Т. Кузнецов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с.

8. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

9. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. пособие / А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2006. – 336 с.

10. Фигурин, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.А. Фигурин, В.В. Оболонкин. – Минск: ООО «Новое знание», 2000. – 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,16	0,0636	0,32	0,1255	0,48	0,1844
0,01	0,0040	0,17	0,0675	0,33	0,1293	0,49	0,1879
0,02	0,0080	0,18	0,0714	0,34	0,1331	0,50	0,1915
0,03	0,0120	0,19	0,0753	0,35	0,1368	0,51	0,1950
0,04	0,0160	0,20	0,0793	0,36	0,1406	0,52	0,1985
0,05	0,0199	0,21	0,0832	0,37	0,1443	0,53	0,2019
0,06	0,0239	0,22	0,0871	0,38	0,1480	0,54	0,2054
0,07	0,279	0,23	0,0910	0,39	0,1517	0,55	0,2088
0,08	0,0319	0,24	0,0948	0,40	0,1554	0,56	0,2123
0,09	0,0359	0,25	0,0987	0,41	0,1591	0,57	0,2157
0,10	0,0398	0,26	0,1026	0,42	0,1628	0,58	0,2190
0,11	0,0438	0,27	0,1064	0,43	0,1664	0,59	0,2224
0,12	0,0478	0,28	0,1103	0,44	0,1700	0,60	0,2257
0,13	0,0517	0,29	0,1141	0,45	0,1736	0,61	0,2291
0,14	0,0557	0,30	0,1179	0,46	0,1772	0,62	0,2324
0,15	0,596	0,31	0,1217	0,47	0,1808	0,63	0,2357
0,64	0,2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131	1,72	0,4573
0,65	0,2422	1,01	0,3438	1,37	0,4147	1,73	0,4582
0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,38	0,4162	1,74	0,4591
0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,39	0,4177	1,75	0,4599
0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,40	0,4192	1,76	0,4608
0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,41	0,4207	1,77	0,4616
0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,42	0,4222	1,78	0,4625
0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,43	0,4236	1,79	0,4633
0,72	0,2642	1,08	0,3599	1,44	0,4251	1,80	0,4641
0,73	0,2673	1,09	0,3621	1,45	0,4265	1,81	0,4649
0,74	0,2703	1,10	0,3643	1,46	0,4279	1,82	0,4656
0,75	0,2734	1,11	0,3665	1,47	0,4292	1,83	0,4664
0,76	0,2764	1,12	0,3686	1,48	0,4306	1,84	0,4671
0,77	0,2794	1,13	0,3708	1,49	0,4319	1,85	0,4678
0,78	0,2823	1,14	0,3729	1,50	0,4332	1,86	0,4686
0,79	0,2852	1,15	0,3749	1,51	0,4345	1,87	0,4693
0,80	0,2881	1,16	0,3770	1,52	0,4357	1,88	0,4699
0,81	0,2910	1,17	0,3790	1,53	0,4370	1,89	0,4706
0,82	0,2939	1,18	0,3810	1,54	0,4382	1,90	0,4713
0,83	0,2967	1,19	0,3830	1,55	0,4394	1,91	0,4719
0,84	0,2995	1,20	0,3849	1,56	0,4406	1,92	0,4726
0,85	0,3023	1,21	03869	1,57	0,4418	1,93	0,4732
0,86	0,3051	1,22	0,3883	1,58	0,4429	1,94	0,4738

Окончание прил. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,87	0,3078	1,23	0,3907	1,59	0,4441	1,95	0,4744
0,88	0,3106	1,24	0,3925	1,60	0,4452	1,96	0,4750
0,89	0,3133	1,25	0,3944	1,61	0,4463	1,97	0,4756
0,90	0,3159	1,26	0,3962	1,62	0,4474	1,98	0,4761
0,91	0,3186	1,27	0,3980	1,63	0,4484	1,99	0,4767
0,92	0,3212	1,28	0,3997	1,64	0,4495	2,00	0,4772
0,93	0,3238	1,29	0,4015	1,65	0,4505	2,02	0,4783
0,94	0,3264	1,30	0,4032	1,66	0,4515	2,04	0,4793
0,95	0,3289	1,31	0,4049	1,67	0,4525	2,06	0,4803
0,96	0,3315	0,32	0,4066	1,68	0,4535	2,08	0,4812
0,97	0,3340	0,33	0,4082	1,69	0,4545	2,10	0,4821
0,98	0,3365	1,34	0,4099	1,70	0,4554	2,12	0,4830
0,99	0,3389	1,35	0,4115	1,71	0,4564	2,14	0,4838
2,16	0,4846	2,42	0,4922	2,68	0,4963	2,92	0,4982
2,18	0,4854	2,44	0,4927	2,70	0,4965	2,94	0,4984
2,20	0,4861	2,46	0,4931	2,72	0,4967	2,96	0,4985
2,22	0,4868	2,48	0,4934	2,74	0,4969	2,98	0,4986
2,24	0,4875	2,50	0,4938	2,76	0,4971	3,00	0,49865
2,26	0,4881	2,52	0,4941	2,78	0,4973	3,20	0,49931
2,28	0,4887	2,54	0,4945	2,80	0,4974	3,40	0,49966
2,30	0,4893	2,56	0,4948	2,82	0,4976	3,60	0,499841
2,32	0,4898	2,58	0,4951	2,84	0,4977	3,80	0,499928
2,34	0,4904	2,60	0,4953	2,86	0,4979	4,00	0,499968
2,36	0,4909	2,62	0,4956	2,88	0,4980	4,50	0,499997
2,38	0,4913	2,64	0,4959	2,90	0,4981	5,00	0,499999
2,40	0,4918	2,66	0,4961				

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЕХИЛЕВСКИЙ Степан Григорьевич
ГОЛУБЕВА Оксана Валерьевна
ГУРЬЕВА Нина Алексеевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»

В двух частях

Часть 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *А. Э. Цибульская*
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 07.09.10. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 14,85. Уч.-изд. л. 13,91. Тираж 170 экз. Заказ 1459.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.