Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. Макаренко
Д. А. Антонович
Н. В. Вабищевич

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК
ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

2-е издание, исправленное и дополненное

Новополоцк
ПГУ
2012

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве
справочника (протокол № 3 от 14.11.2011)

Рецензенты:

канд. пед. наук, доц., зав. каф. общей физики и астрономии УО «Витебский государственный университет им. П. М. Машерова» И. В. ГАЛУЗО;
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики УО «Полоцкий государственный университет» И. Е. АНДРУШКЕВИЧ

Макаренко, Г. М.

М15 Краткий справочник по общей физике / Г. М. Макаренко, Д. А. Антонович, Н. В. Вабищевич. – 2-е изд., испр. и доп. – Новополоцк : ПГУ, 2012. – 152 с.

ISBN 978-985-531-322-0.

Впервые издан в 2011 году.

Рассчитан на широкий круг работников различных профессий, имеющих знания по физике в объеме не ниже программы средней школы, а также преподавателей и студентов инженерно-технических специальностей высших и средне-специальных учебных заведений.

Охватывает все основные разделы программы вуза по общей физике для студентов технических специальностей.

В первой части кратко изложены основные понятия и законы по всем разделам общей физики; во второй части приводятся справочные данные, наиболее часто применяемые при решении задач по курсу общей физики.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-531-322-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый справочник состоит из двух частей и охватывает основные разделы общей физики – «Физические основы механики», «Основы молекулярной физики и термодинамики», «Электродинамика», «Оптика», «Квантовая природа излучения», «Физика атома».

В первой части изложены основные формулы по разделам и темам курса общей физики; во второй части приводятся справочные таблицы и графики; в приложении – некоторые сведения по математике.

Теоретические сведения, приведенные в первой части, не могут заменить учебник, здесь приведены лишь основные формулы, сопровождаемые небольшими пояснениями.

Во второй части в справочных таблицах в большинстве случаев названия веществ расположены в алфавитном порядке. Некоторые из таблиц построены в порядке возрастания или убывания численного значения величин.

Помещенные в справочнике формулы, таблицы и графики не претендуют на полноту охвата всех справочных данных по предмету. Из многочисленных сведений сделана попытка отобрать такие, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

ЧАСТЬ 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика материальной точки

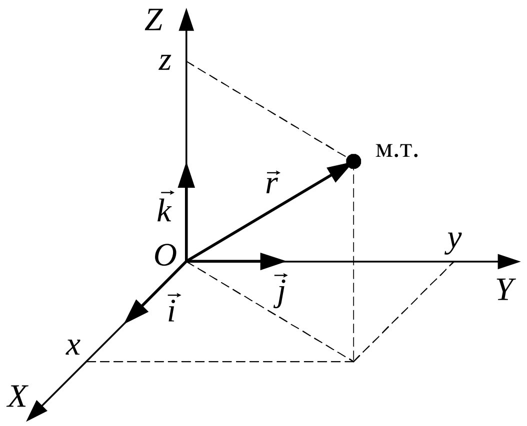


Рис. 1

Положение материальной точки в пространстве в данный момент времени задается с использованием *системы координат* относительно некоторой *точки* (тела) *отсчета*, которая является началом системы координат. Направленный отрезок прямой, соединяющий точку отсчета O (рис. 1) и материальную точку (м.т.), называется *радиус-вектором* – $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты точки в пространстве; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты соответствующих координатных осей); t – время.

Модуль радиус-вектора определяется выражением

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}.$$

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются со временем, а сама материальная точка (конец вектора $\vec{r}$) описывает в пространстве линию, которая называется *траекторией* (рис. 2). Скалярную величину ΔS, равную длине траектории, описанной точкой за данный промежуток времени, называют *отрезком пути* материальной точки (*путем*). Путь всегда положителен и в процессе движения может только возрастать.

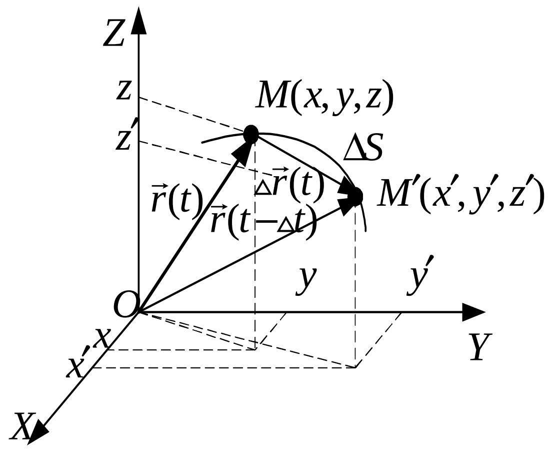


Рис. 2

Пусть за время Δt материальная точка переместилась из точки M в точку M', пройдя вдоль траектории отрезок пути ΔS (см. рис. 2). Вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начальной точки M в конечную точку M', называется *вектором перемещения* материальной точки за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t),$$

$$\text{или } \Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k},$$

где $\Delta x = x' - x$; $\Delta y = y' - y$; $\Delta z = z' - z$.

При линейном движении путь ΔS равен модулю вектора перемещения (перемещению) $|\Delta\vec{r}|$:

$$\Delta S = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

при криволинейном движении $|\Delta\vec{r}| < \Delta S$.

Вектор средней скорости движения материальной точки

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Средняя путевая скорость движения

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Кинематическое уравнение равномерного движения ($\vec{\upsilon} = \text{const}$, $\vec{a} = 0$) точки вдоль оси OX

$$x = x_0 \pm \upsilon t,$$

где x_0 – начальная координата точки; t – время движения.

Знак «плюс» берется при совпадении направления вектора скорости с выбранным положительным направлением оси *OX*.

Правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0,$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}'$ – скорость материальной точки относительно подвижной системы отсчета; $\vec{\upsilon}_0$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета.

Среднее ускорение материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ – проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на соответствующие оси координат.

Модуль вектора полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ – тангенциальная (касательная к траектории) составляющая ускорения; $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ – нормальная (центростремительная) составляющая ускорения; R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Модуль вектора полного ускорения при криволинейном движении

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($\vec{a} = \text{const}$) вдоль оси X

$$x = x_0 \pm \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном движении

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

где υ_0 – скорость движения в начальный момент времени $t = 0$ (начальная скорость).

Связь между ускорением и перемещением при прямолинейном движении может быть определена выражением

$$\Delta S = \frac{\left|\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right|}{2a}.$$

Для тела, брошенного с земли под углом α к горизонту со скоростью υ_0 (без учета сопротивления воздуха),

время полета

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

дальность полета

$$\Delta S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

максимальная высота

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) $d\varphi$ при указанном положении оси вращения.

Угловая скорость тела

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота произвольного радиуса от начального положения; Δt – промежуток времени, за который произошел этот поворот; T – период вращения; $\nu = \frac{N}{t}$ – частота вращения, N – число оборотов за время t.

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения ($\vec{\omega} = \mathrm{const}$, $\varepsilon = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – угол поворота в момент времени $t = 0$ (в начальный момент времени).

Кинематическое уравнение равнопеременного вращательного движения ($\varepsilon = \mathrm{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Связь угла поворота с числом оборотов:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Угловая скорость тела при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – угловая скорость в начальный момент времени $t = 0$ (начальная угловая скорость).

При равноускоренном вращении тела угловое ускорение ε берется со знаком «плюс», при равнозамедленном – со знаком «минус».

Угловое ускорение ε связано с углом поворота за некоторый промежуток времени $\Delta\varphi$ соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|}{2\varepsilon}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении:

$$\Delta S = R\Delta\varphi; \qquad \upsilon = R\omega; \qquad a_\tau = \varepsilon R; \qquad a_n = \omega^2 R.$$

Полное ускорение при вращательном движении

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

1.2. Динамика. Законы сохранения. Элементы теории поля

Импульс, количество движения – мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на вектор ее скорости $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульс механической системы равен векторной сумме импульсов всех n материальных точек системы или произведению массы всей системы m на скорость ее центра масс $\vec{\upsilon}_c$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c .$$

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно, масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Координаты центра масс системы материальных точек:

радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m};$$

в координатной форме

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i, $\vec{r}_i$, x_i, y_i, z_i – соответственно, масса, радиус-вектор и координата i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе, m – масса всей системы.

Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const} .$$

При решении задач формулировка *первого закона Ньютона* полезна в следующей форме: если результирующая всех сил, действующих на материальную точку (тело), равна нулю, то тело покоится или совершает равномерное и прямолинейное движение.

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки): скорость изменения импульса точки равна равнодействующей силе, действующей на точку:

$$\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на тело массой m; k – число действующих сих.

В проекциях на касательную и нормаль к траектории точки это же уравнение будет иметь вид

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}; \qquad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Все силы в природе являются силами взаимодействия. Этот факт выражает суть *третьего закона Ньютона*: с какой силой тело 1 действует на тело 2, с такой же силой, но противоположной по направлению, тело 2 действует на тело 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Основные силы, рассматриваемые в механике

Сила тяжести

$$F_m = mg,$$

где g – ускорение свободного падения.

Силы упругой деформации при растяжении (сжатии)

$$F = -kx \text{ либо } \sigma = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где $k = \frac{ES}{l_0}$ – коэффициент упругости (жесткости); $\sigma = F/S$ – механическое напряжение; E – модуль Юнга; $\Delta l = \left|\vec{x}\right|$ – абсолютное удлинение (сокращение) тела при деформации.

Сила трения скольжения

$$F_{mp} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила реакции опоры (сила нормального давления на опору). Сила трения покоя меняет свое значение от нуля до величины силы трения скольжения $\vec{F}_{mp}$.

Сила трения качения

$$F = \frac{\mu_k N}{r},$$

где μ_k – коэффициент трения качения; r – радиус катящегося тела.

Сила гравитационного притяжения

$$\vec{F}_T = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r},$$

где G = 6,67·10^{-11} м^3/кг·с^2 – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих объектов; $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий объекты; r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ (расстояние между объектами).

Сила Архимеда

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность жидкости или газа; V – объем погруженной в жидкость или газ части тела.

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p,$$

где $\vec{F}_p = -\vec{u}\frac{dm}{dt}$ – реактивная сила ($\vec{u}$ – скорость истечения газов из ракеты).

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos(\alpha),$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$; $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь.

Работа, совершаемая переменной силой на пути *s*,

$$A = \int_S \vec{F}d\vec{r} = \int_S F_s ds = \int_S F\cos\alpha ds,$$

где $\vec{F}_S$ – проекция вектора силы на вектор перемещения $d\vec{r}$, $dS = |d\vec{r}|$ – модуль вектора перемещения.

Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_s\upsilon = F\upsilon\cos\alpha.$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия

упругих сил

$$E_П = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости; x – абсолютная деформация;

гравитационного взаимодействия двух тел

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2};$$

тéла, находящегося в однородном гравитационном поле,

$$E_П = mgh,$$

где h – высота над уровнем, принимаемым за нулевой (для консервативной системы).

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}E_{\Pi} = -(\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}\vec{k}),$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия сохраняется:

$$E = E_K + E_П = \mathrm{const}.$$

Если кроме консервативных сил действуют неконсервативные, то изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил:

$$E_2 - E_1 = A.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся до удара со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ соответственно, после абсолютно упругого центрального удара

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{\upsilon}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость движения тел массами m_1 и m_2, движущихся, соответственно, со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после абсолютно неупругого центрального удара

$$\upsilon = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон всемирного тяготения в скалярной форме:

$$F_T = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F_T – сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух тел массами m_1 и m_2 ; r – расстояние между точками.

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{F}$ – сила тяготения, действующая на тело массой m, помещенное в данную точку поля.

Работа в поле тяготения, создаваемом объектом массой M, по перемещению тела массой m:

$$A = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_П}{m},$$

где $E_П$ – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой M,

$$\varphi_П = -\frac{GM}{R},$$

где R – расстояние от центра тела до рассматриваемой точки.

Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

$$\vec{g} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Знак «минус» в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Законы Кеплера

Первый закон: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон: радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.

Третий закон: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Для всех планет справедливо соотношение

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 – большие полуоси орбит этих планет.

Первая космическая скорость

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_З}{r}} = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

где $M_З$, $R_З$ – соответственно, масса и радиус Земли; r – радиус круговой орбиты; G – гравитационная постоянная.

Вторая космическая скорость

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM_З}{r}} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – соответственно, ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции.

Силы инерции

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_к,$$

где $\vec{F}_и$ – силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0$,

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_0;$$

$F_ц$ – центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R),

$$F_ц = -m\omega^2 R;$$

$\vec{F}_к$ – сила Кориолиса (сила инерции, действующая на тело, движущееся со скоростью υ' во вращающейся системе отсчета),

$$\vec{F}_к = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right].$$

1.3. Механика твердого тела

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$.

Момент силы относительно неподвижной оси Z

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m – масса точки; r – расстояние до оси вращения.

Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

Ниже приведены моменты инерции некоторых однородных тел массой m правильной геометрической формы.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкостенный стержень длиной l	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкостенный стержень длиной l	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

В случае непрерывного распределения масс (для сплошного однородного твердого тела)

$$J = \oint_m r^2 dm = \rho \oint_V r^2 dV,$$

где ρ – плотность тела; V – его объем.

Теорема Штейнера:

$$J = J_c + ma^2,$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса вращающегося тела.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}].$$

Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно неподвижной оси вращения

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i r_i = J_z \vec{\omega}_z,$$

где r_i – расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i\upsilon_i$ – импульс этой частицы; J_z – момент инерции тела относительно оси Z; $\vec{\omega}_z$ – угловая скорость вращения.

Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}.$$

Для двух взаимодействующих тел закон сохранения момента импульса:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

где J_1, J_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1', $J_2', \omega_2', \omega_2'$ – те же величины после взаимодействия.

Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции тела относительно оси Z.

Элементарная работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела; M_z – момент силы относительно оси z.

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Если M_z = const, то работа

$$A = M_z \varphi.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z,

$$W_{Kвр} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси Z; ω – его угловая скорость.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$W_K = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где m – масса тела; υ_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Напряжение при упругой деформации тела

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения тела.

Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – изменение длины тела при растяжении (сжатии); l – длина тела до деформации.

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где Δd – изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d – диаметр стержня.

Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε:

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Закон Гука для продольного растяжения (сжатия):

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

Потенциальная энергия упруго растянутого (сжатого) тела

$$W_\Pi = \int_0^{\Delta l} F dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2 = \frac{E \varepsilon^2}{2} V,$$

где V – объем тела.

1.4. Механика жидкостей

Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости.

Закон Архимеда:

$$F_A = \rho g V,$$

где F_A – выталкивающая сила; V – объем вытесненной жидкости.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$S\upsilon = \text{const},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости.

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамический напор; $\rho g h$ – гидравлический напор (h – глубина рассматриваемого сечения жидкости относительно уровня жидкости); p – статическое давление.

С физической точки зрения *динамический напор* соответствует удельной кинетической энергии, т.е. энергии 1 единицы объема движущейся жидкости, а *гидравлический напор* – удельная потенциальная энергия 1 единицы объема в поле силы тяжести.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = \text{const}.$$

Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде:

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = -\eta\left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right|S,$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ – градиент скорости; S – площадь соприкасающихся слоев.

Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\langle\upsilon\rangle d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик:

$$F = -6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шарика; υ – его скорость.

Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l:

$$V = \pi R^4 \frac{\Delta p t}{8\eta l},$$

где R – радиус трубки; Δp – разность давлений на концах трубки.

При движении твердых тел в жидкостях и газах лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho\upsilon^2}{2} S,$$

где C_x – коэффициент сопротивления (безразмерный); ρ – плотность среды; υ – скорость движения тела; S – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho\upsilon^2}{2} S,$$

где C_y – коэффициент подъемной силы (безразмерный).

1.5. Элементы специальной теории относительности (СТО)

В СТО рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В рассматриваемых задачах считается, что оси координат y, y' и z, z' (рис. 3) сонаправлены, а относительная скорость υ системы координат k' относительно системы k направлена вдоль общей оси xx'.

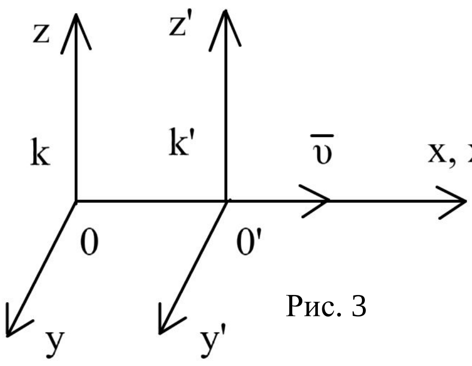


Рис. 3

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

где l_0 – длина стержня в системе k', относительно которой стержень покоится (собственная длина) – стержень параллелен оси x; l − длина стержня в системе k, относительно которой он движется со скоростью υ; $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$; $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где Δt_0 − промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы k', измеренными по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt − промежуток времени между двумя событиями, измеренными по часам системы k.

Зависимость массы частицы от скорости ее движения (релятивистская масса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

где m_0 − масса покоя этой частицы.

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right); \quad E_к = E - E_0\,,$$

где $E = mc^2 = m_0c^2 + E_к$ – полная энергия релятивистской частицы; $E_0 = m_0c^2$ − энергия покоя частицы.

Изменение массы системы на величину Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$$\Delta E = \Delta mc^2\,.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}\,; \quad pc = \sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)}\,.$$

Релятивистское сложение скоростей:

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}; \quad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}},$$

где u' − скорость тела относительно системы k' (относительная скорость), υ − скорость системы k' относительно системы k (переносная скорость), u – скорость тела относительно системы k.

Энергию микрочастиц часто измеряют в электрон-вольтах:

$$1 \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

1.6. Механические колебания

Колебаниями называют движения и процессы, характеризующиеся повторяемостью во времени. К гармоническим относят колебания, при которых координаты тела меняются по закону

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где x – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ – частота; T – период колебаний; φ_0 – начальная фаза (в момент времени $t_0 = 0$); $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент t.

Настоящее уравнение является решением дифференциального уравнения свободных гармонических колебаний материальной точки массой m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$); ω – собственная частота колебаний, которая зависит от параметров колеблющейся системы.

Гармонические колебания можно представить с помощью векторной диаграммы. Вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно точки O против часовой стрелки (рис. 4), при этом угол φ между осью OX и вектором $\vec{A}$ непрерывно меняется со временем t:

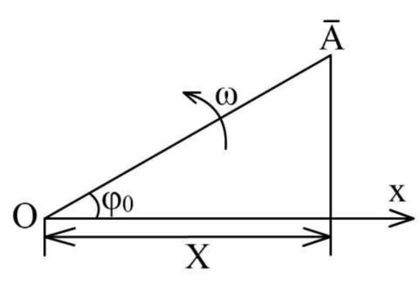


Рис. 4

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальный угол при $t_0 = 0$.

При вращении проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX совершает гармонические колебания:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

при которых модуль вектора $\left|\vec{A}\right|$ является амплитудой, угловая скорость вращения ω – циклической частотой, а угол φ_0 – начальной фазой колебаний. Метод векторной диаграммы используется при сложении гармонических колебаний одинаковой частоты и определении сдвига фаз между током и напряжением в цепях переменного тока.

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Максимальные скорость $\upsilon_{\max}$ (амплитуда скорости) и ускорение $a_{\max}$ (амплитуда ускорения) материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon_{\max} = A\omega; \quad a_{\max} = A\omega^2.$$

Фаза колебаний

$$\varphi = \left(\omega t + \varphi_0\right) = \left(2\pi\nu t + \varphi_0\right) = \left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right).$$

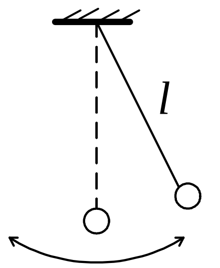


Рис. 5

Математический маятник (рис. 5) *с неподвижной осью*:

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Математический маятник с осью, движущейся с ускорением $\vec{a}$:

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}$;

циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g^*}{l}}$,

где l – длина маятника; g^* – модуль вектора ускорения маятника, $\vec{g}^* = \vec{g} + \vec{a}$.

Физический маятник (рис. 6):

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{mgd}{J}} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$,

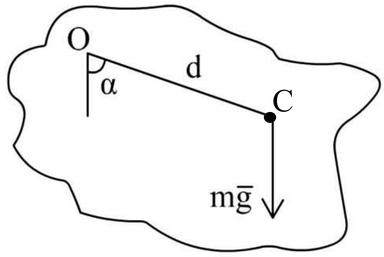


Рис. 6

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(md)$ – приведенная длина физического маятника.

Пружинный маятник (рис. 7):

период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

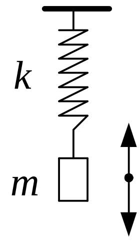


Рис. 7

где k – коэффициент упругости (жесткость пружины).

Крутильный маятник (тело, подвешенное на упругой нити) (рис. 8):

период крутильных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{k}}$;

циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{J}}$,

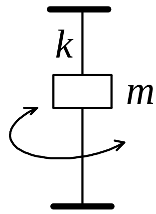


Рис. 8

где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k – жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается.

Приведенные формулы являются точными для случая бесконечно малых амплитуд. При конечных амплитудах эти формулы дают лишь приближенные результаты. При амплитудах порядка 3° погрешность в значении периода не превышает 1 %.

При наличии сил трения свободные колебания будут *затухающими*, их амплитуда уменьшается в результате потерь энергии.

Дифференциальное уравнение свободных *затухающих колебаний*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания.

Если амплитуда уменьшилась в e раз ($e \approx 2{,}718$), то $\delta = \frac{1}{\tau}$, где τ – время релаксации; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота той же колебательной системы; r – коэффициент сопротивления.

Уравнение затухающих колебаний, т.е. смещение колеблющейся точки от положения равновесия (решение дифференциального уравнения):

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний в момент t; A_0 – амплитуда затухающих колебаний в начальный момент времени (t_0 = 0); $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где δ – коэффициент затухания; T – период затухающих колебаний; τ – время релаксации; N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз; $A(t)$ и $A(t + T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

где Θ – логарифмический декремент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; δ – коэффициент затухания.

Если система совершает колебания под периодически изменяющимся внешним воздействием, то такие колебания называют *вынужденными*.

Дифференциальное уравнение *вынужденных колебаний* для установившихся колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t,$$

где $F_0\cos\omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 – амплитуда вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний для установившихся колебаний:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, которая зависит от соотношения вынужденной ω и собственной ω_0 частоты:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где φ определяет отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где F_0 – амплитудное значение внешней периодической силы.

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки массой m (рис. 9):

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

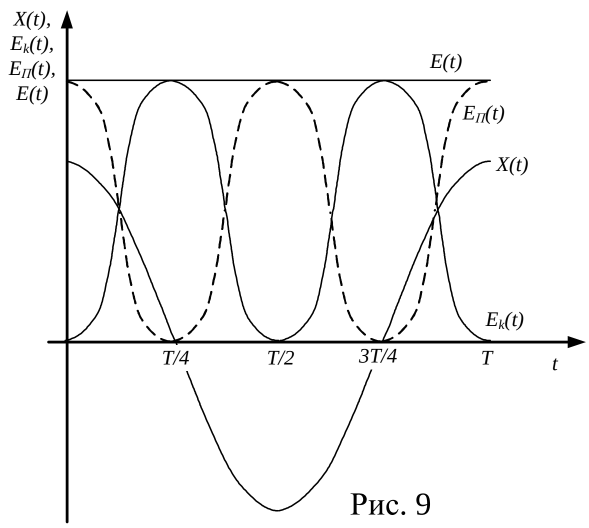


Рис. 9

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис. 9):

$$E_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная энергия колеблющейся материальной точки массой m (см. рис. 9):

$$E_П = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2.$$

Сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Амплитуда A результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний.

Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2:

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 .$$

Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, уравнение траектории примет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

т.е. точка движется по эллипсу.

1.7. Упругие волны

Связь длины волны λ с периодом T и частотой ν колебаний:

$$\lambda = \upsilon T; \quad \upsilon = \lambda\nu,$$

где υ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

Уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль положительного направления оси x:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi\ (x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость волны; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

Величина $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0$ или $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0$ называется *фазой волны*.

Дифференциальное уравнение *волнового процесса*:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{dx^2},$$

где $\xi\ (x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; υ – фазовая скорость волны.

Уравнение *плоской затухающей волны*:

$$\xi(x,t) = A_0 e^{-\beta x}\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где A_0 – амплитуда волны в точке $x = 0$; β – коэффициент затухания, зависящий от свойств среды; ω – циклическая (круговая) частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость волны; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

Уравнение *сферической волны* без учета затухания имеет вид

$$\xi(x,t) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right),$$

где $\xi\ (x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; r – расстояние от источника колебаний; ω – циклическая (круговая) частота; υ – фазовая скорость волны; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Волновое уравнение для волн, распространяющихся в упругой изотропной среде, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tilde{o}^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

его решение:

$$\xi = a\cos\left[\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, который характеризует точку пространства, которой достигла волна к промежутку времени t; при этом выполняются следующие равенства:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2}; \quad \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода Δ:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta .$$

Условия максимума и минимума амплитуды колебаний при интерференции волн:

$$\Delta_{\max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{\min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где m = 0, 1, 2, … – порядок максимума (минимума).

Фазовая υ и групповая u скорости, а также связь между ними:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

Уравнение стоячей волны:

$$\xi(x,t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t,$$

где ξ (x, t) – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость; T – период колебаний).

Координаты пучностей и узлов стоячей волны:

$$x_П = \pm m\frac{\lambda}{2}; \quad x_у = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

где m = 0, 1, 2, … .

Уровень *интенсивности* звука в децибелах:

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0},$$

где I – интенсивность звука; I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости ($I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2).

Эффект Доплера в акустике:

$$\nu = \frac{(\upsilon \pm \upsilon_{пр})\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{ист}},$$

где ν – частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 – частота звука, посылаемая источником; $\upsilon_{пр}$ – скорость движения приемника; $\upsilon_{ист}$ – скорость движения источника; υ – скорость распространения звука.

Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Скорость распространения поперечной упругой волны (например, в тонкой струне)

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

где $\sigma = \dfrac{F}{S}$ – механическое напряжение в струне (модуль сдвига), ρ – плотность вещества струны.

Скорость распространения продольных волн в стержне

$$\upsilon_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга.

В изотропном твердом теле по любому направлению могут распространяться продольная упругая волна со скоростью $\upsilon_{||} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ и две поперечные волны со скоростью $\upsilon_{\perp} = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho}}$. Скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн: ($\upsilon_{\perp} < \upsilon_{||}$).

В жидкостях возможно распространение лишь продольных волн. Скорость их распространения определяется формулой

$$\upsilon_{||} = \sqrt{\frac{k}{\rho}},$$

где k – модуль всестороннего сжатия; ρ – плотность жидкости.

Например, в воде $\upsilon_{||} \approx 1450$ м/с.

Скорость распространения продольных волн в *газообразной среде* (звук) определяется выражением

$$\upsilon_{||} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \langle \upsilon \rangle \sqrt{\frac{\pi \gamma}{8}},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ – отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме (показатель адиабаты); p и ρ – давление и плотность невозмущенного газа; M – молярная масса газа; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная; $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi \mu}}$ – средняя скорость теплового движения молекул газа.

В воздухе при нормальных условиях скорость звука $\upsilon_{\|} \approx 340$ м/с.

Отдельную группу представляют волны на поверхности жидкости. Распространение таких волн обусловлено действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения. Роль этих сил различна для волн разной длины: для достаточно коротких волн, когда кривизна поверхности жидкости велика, преобладающими являются силы поверхностного натяжения, а в случае длинных волн этими силами можно пренебречь. В первом случае волны на воде называются *капиллярными* – υ_σ. Во втором случае волны называются *гравитационными* – υ_g.

Скорость капиллярных поверхностных волн

$$\upsilon_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – плотность жидкости; λ – длина волны.

Скорость гравитационных поверхностных волн:

- для «глубокой» воды, когда $\lambda << h$ (h – глубина жидкости)

$$\upsilon_g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{g\lambda};$$

- для «мелкой» воды, когда $h << \lambda$,

$$\upsilon_g = \sqrt{gh}.$$

При распространении волн происходит перенос энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из *кинетической энергии* колебательного движения частиц вещества $K_{\Delta x}$ и *потенциальной энергии* упругой деформации среды $\Pi_{\Delta x}$.

Кинетическая энергия элемента стержня длиной Δx в точке x в момент времени t

$$K_{\Delta x} = \frac{1}{2}\rho S \Delta x \omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где S – площадь сечения стержня; ρ – плотность материала стержня; ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебаний; υ – фазовая скорость; $m = \rho S \Delta x$ – масса выделенного элемента стержня.

Плотность кинетической энергии в точке x в момент времени t

$$w_K = \frac{K_{\Delta x}}{S\Delta x} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right).$$

Потенциальная энергия деформации $\Pi_{\Delta x}$ в момент времени t

$$\Pi_{\Delta x}=\frac{1}{2}S\Delta xE\left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2=\frac{1}{2}S\Delta xE\left(\frac{\omega}{\upsilon}A\right)^2\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где Δl – удлинение рассматриваемого элемента стержня Δx, вызванное проходящей волной; S – площадь сечения стержня; E – модуль Юнга; ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебаний; υ – фазовая скорость.

Плотность потенциальной энергии в точке x в момент времени t

$$w_\Pi=\frac{\Pi_{\Delta x}}{S\Delta x}=\frac{1}{2}E\frac{\omega^2}{\upsilon^2}A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\right]=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\right).$$

Суммарная плотность энергии в точке x в момент времени t

$$w=w_\Pi+w_K=\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\right),$$

где ρ – плотность материала, ω – циклическая (круговая) частота; A – амплитуда колебаний; υ – фазовая скорость.

Среднее значение вдоль направления распространения волны

$$\langle w\rangle=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2.$$

Плотность потока энергии волны (***вектор Умова***):

$$\vec{j}=\frac{d\vec{\Phi}}{dS}=w\vec{\upsilon},$$

где $d\vec{\Phi}$ – *поток энергии*, переносимой волной за единицу времени через площадку dS, перпендикулярную к направлению распространения волны.

Среднее значение модуля вектора Умова

$$\langle j\rangle=\langle w\rangle\upsilon=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon=I.$$

При произвольной ориентации площадки dS (единичного вектора $\vec{n}$, нормального к плоскости площадки) относительно вектора Умова $\vec{j}$ поток через нее будет равен

$$d\Phi=\vec{j}d\vec{S}=j\Delta S\cos\alpha.$$

Полный поток через поверхность S определяется интегралом

$$\Phi=\int_S\vec{j}d\vec{S}=\int_S j_n dS.$$

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Законы идеального газа

Количество вещества тела (системы)

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.); $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро (число молекул в одном моле).

Молярная масса вещества

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m – масса однородного тела (системы); ν – количество вещества этого тела.

Молярная масса смеси газов

$$M_{см} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i}{\sum_{i=0}^{n} \nu_i},$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; ν_i – количество вещества i-го компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Концентрация частиц (молекул, атомов, ионов и т.п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V},$$

где N – число частиц в системе; V – объем системы.

Нормальные условия – стандартные физические условия, определяемые давлением $p = 101325 \approx 10^5$ Па (760 мм рт. ст.) и абсолютной температурой $T = 273{,}15$ К ($t = 0$ °С).

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где R = 8,31 Дж/моль·К – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура газа; p – давление газа; V – объем газа.

Зависимость давления газа p от концентрации молекул n и температуры T газа (уравнение состояния газа):

$$p = nkT,$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу, $k = \frac{R}{N_A}$).

Опытные газовые законы

Объединенный газовый закон

для неизменной массы газа:

$$\frac{pV}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где p_1, V_1, T_1 – соответственно, давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

Закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс, m = const, T = const):

$$pV = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $p_1V_1 = p_2V_2$.

Закон Гей – Люссака (изобарный процесс, m = const, p = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Закон Шарля (изохорный процесс, m = const, V = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i-го компонента смеси; n – число компонентов смеси.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 \quad \text{или} \quad p = \frac{2}{3} n \langle E_к \rangle,$$

где m_0 – масса одной молекулы; $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; $\langle E_к \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа

$$\langle E_1 \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана (определяет «долю» газовой постоянной, приходящейся на одну молекулу, $k = \frac{R}{N_A}$).

Средняя полная кинетическая энергия движения молекулы газа (приходящаяся на все степени свободы молекулы)

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – сумма числа поступательных $i_П$, числа вращательных $i_В$ и удвоенного числа колебательных $i_К$ степеней свободы молекулы: $i = i_П + i_В + 2i_К$; для одноатомной молекулы $i = 3$ (поступательное движение описывается тремя координатами); для двухатомной $i = 5$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 2$ для вращательного движения); для трехатомной и более $i = 6$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 3$ для вращательного движения).

Внутренняя энергия идеального газа

для произвольной массы газа:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT;$$

для одного моля газа:

$$U = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT,$$

где i – число степеней свободы газа; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; N_A – постоянная Авогадро; R – молярная газовая постоянная; m – масса газа; M – молярная масса; ν – количество вещества.

2.2. Элементы статистической физики

Скорости молекул

наиболее вероятная:

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

средняя квадратичная:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}};$$

средняя арифметическая:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Распределение молекул по скоростям (***распределение Максвелла***):

$$dN = Nf(\upsilon)d\upsilon,$$

где $f(\upsilon)$ – функция распределения молекул газа по скоростям (доля молекул, модули скоростей которых находятся в единичном интервале скоростей).

Аналитическое выражение функции распределения:

$$f(\upsilon) = \frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}},$$

где m_0 – масса одной молекулы газа; k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Закон распределения молекул по скоростям (Максвелла) в дифференциальной форме:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Ne^{-u^2} u^2 du,$$

где $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$ – относительная скорость; υ – данная скорость; $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул; $f(u)$ – функция распределения; N – общее число молекул.

Для малых интервалов относительных скоростей $\Delta u << u$, или, поскольку $u = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_в}$ и $\Delta u = \dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в}$, $\Delta\upsilon << \upsilon$, закон распределения молекул по скоростям справедлив в виде

$$f(u)=\frac{\Delta N}{N\Delta u}=\frac{4}{\pi}Ne^{-u^2}u^2,$$

и при решении задач на закон распределения молекул по скоростям удобно пользоваться таблицей, в которой даны значения функции распределения $f(u)=\frac{\Delta N}{N\Delta u}=\frac{4}{\pi}Ne^{-u^2}u^2$ для различных u, приведенной ниже.

u	$f(u)$	u	$f(u)$	u	$f(u)$
0,1	0,022	0,8	0,761	1,5	0,535
0,2	0,087	0,9	0,813	1,6	0,447
0,3	0,185	1,0	0,830	1,7	0,362
0,4	0,308	1,1	0,814	1,8	0,286
0,5	0,439	1,2	0,770	2,0	0,165
0,6	0,567	1,3	0,703	2,2	0,186
0,7	0,677	1,4	0,623	2,4	0,041

Распределение частиц в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана):

$$n=n_0e^{-Mgh/(RT)}=n_0e^{-m_0gh/(kT)} \quad \text{или} \quad n=n_0e^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 – концентрации молекул, соответственно, на высоте h и h = 0; $\Pi = m_0gh$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

Распределение давления в однородном поле силы тяжести (барометрическая формула):

$$p=p_0e^{-Mgh/(RT)}=p_0e^{-m_0gh/(kT)},$$

где h – координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p – давление газа на высоте h; p_0 – давление газа на высоте h = 0; m_0 – масса частицы; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана.

2.3. Явления переноса в газах

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z\rangle=\sqrt{2}\pi d^2n\langle\upsilon\rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Среднее число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle \upsilon \rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости):

$$F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости; η – динамическая вязкость,

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle,$$

где ρ – плотность газа.

Закон теплопроводности Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} St,$$

где Q – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности,

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Закон диффузии Фика:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} St,$$

где M – масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности; D – коэффициент диффузии,

$$D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle l \rangle.$$

Связь между коэффициентами теплопроводности λ, диффузии D и внутреннего трения η:

$$\eta = \rho D; \quad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа.

2.4. Основы термодинамики

Теплоемкость – отношение элементарного количества теплоты dQ, сообщенного телу (системе) при бесконечно малом изменении его состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению dT абсолютной температуры этого тела:

$$C_T = \frac{dQ}{dT}.$$

Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме (c_V) и при постоянном давлении (c_p)

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M},$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная; M – молярная масса.

Связь между молярной и удельной теплоемкостью:

$$C_M = cM.$$

Молярные теплоемкости при постоянном объеме (C_V) и постоянном давлении (C_P)

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Связь между молярными теплоемкостями при постоянном объеме и постоянном давлении (при изобарном и изохорном процессах) выражается уравнением Майера:

$$C_p - C_V = R.$$

Удельная теплоемкость смеси газов определяется отношением теплоемкости $C_{см}$ к массе этой смеси $m_{см}$:

$$c_{см} = \frac{C_{см}}{m_{см}}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{m}{M}C_V T,$$

где i – число степеней свободы молекулы; для одноатомной молекулы $i = 3$ (поступательное движение описывается тремя координатами); для двухатомной $i = 5$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 2$ для вращательного движения); для трехатомной и более $i = 6$ ($i_{пост.} = 3$ для поступательного движения, $i_{вр.} = 3$ для вращательного движения).

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU – изменение ее внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = pdV.$$

Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

где V_1 и V_2 – соответственно, начальный и конечный объемы газа.

Работа газа

при изобарном процессе:

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right);$$

при изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2};$$

при изохорном процессе:

$$A = 0.$$

В условиях теплоизоляции системы реализуется *адиабатный* процесс, которым можно считать также процесс, протекающий столь быстро, что за время его осуществления не успевает произойти существенный теплообмен с внешней средой. Из первого начала термодинамики следует, что в адиабатном процессе работа совершается за счет изменения внутренней энергии: $\delta A = -dU$, т.е. если газ расширяется, то его температура понижается, а при резком сжатии – возрастает.

Уравнение Пуассона, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$pV^{\gamma} = \text{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}; \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Связь между начальными и конечными параметрами состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Работа в случае адиабатного процесса

$$A = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) \quad \text{или} \quad A = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 – соответственно, начальные и конечные температура и объем газа.

Изохорный процесс: $V = \text{const}$; $dA = 0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение внутренней энергии газа: $dQ = dU$.

Изобарный процесс: $p = \text{const}$; $dA = pdV$. Количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение им работы: $dQ = dU + dA$.

Изотермический процесс: $T = \text{const}$; $dU = 0$. Количество теплоты, переданное газу, идет на совершение им работы при изотермическом расширении: $dQ = dA$.

Адиабатный процесс идет без теплообмена с окружающей средой, поэтому $dQ = 0$. Газ при расширении совершает работу за счет уменьшения его внутренней энергии: $dU = -dA$, при этом газ охлаждается.

Политропическими называются процессы, при которых теплоемкость тела остается постоянной. Для идеального газа уравнение политропы имеет вид:

$$pV^{n} = \text{const},$$

где n – показатель политропы;

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

При $C = 0$, $n = \gamma$ получается уравнение адиабаты; при $C = \infty$, $n = 1$ – уравнение изотермы; при $C = C_p$, $n = 0$ – уравнение изобары; при $C = C_V$, $n = \pm\infty$ – уравнение изохоры.

Круговым процессом (циклом) называется термодинамический процесс, в итоге которого система возвращается в исходное состояние. Круговые процессы изображаются в диаграммах $p - V$, $p - T$ и др. в виде замкнутых контуров, образуемых графиками (рис. 10).

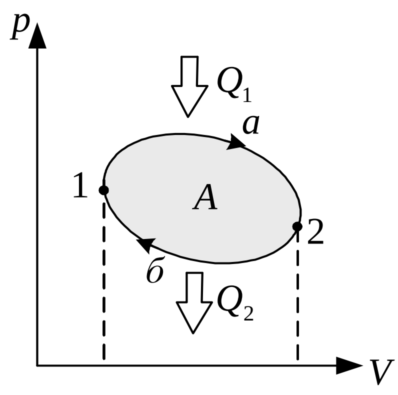


Рис. 10

Круговые процессы лежат в основе действия всех *тепловых машин* – устройств, которые превращают внутреннюю энергию в механическую.

Основные части тепловой машины – нагреватель, рабочее тело и холодильник. Рабочее тело (обычно газ) получает количество теплоты Q_1 от нагревателя, совершает работу A за цикл, отдает холодильнику количество теплоты Q_2. На pV-диаграмме (см. рис. 10) работа равна площади фигуры $1a2б1$, ограниченной графиками процессов $1a2$ и $2б1$. Изменение внутренней энергии в круговом процессе равно нулю. Работа, совершаемая за цикл, $A = Q_1 - Q_2$.

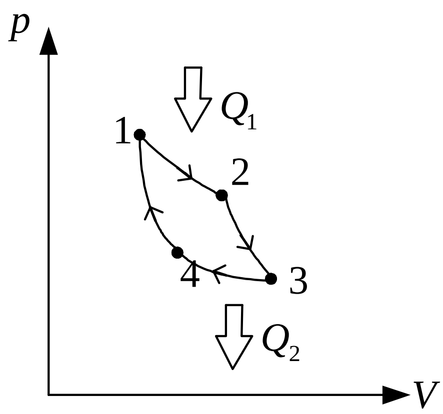


Рис. 11

Среди всех круговых процессов большое значение имеет процесс, составленный из четырех процессов: двух изотерм и двух адиабат – *цикл Карно* (рис. 11).

Эффективность тепловой машины определяется термическим коэффициентом полезного действия (кпд) для кругового процесса (цикла):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где знак равенства относится к *циклу Карно*; A – работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла (полезная работа); Q_1 – количество теплоты, полученное от нагревателя рабочим веществом; Q_2 – количество теплоты, отданное при этом холодильнику; T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

Приведенная теплота $\left(\frac{Q}{T}\right)$ для любых изотермических переходов между двумя адиабатами – величина постоянная:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}; \quad \frac{Q}{T} = \text{const}.$$

Функция, характеризующая направление протекания самопроизвольных процессов в замкнутой термодинамической системе, называется *энтропией:*

$$\frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния 1 в состояние 2,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

где dQ – элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре *T*.

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается – она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов, т.е. $\Delta S \geq 0$.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T},$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс.

Изменение энтропии в процессах идеального газа

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right);$$

для *адиабатического* процесса $\Delta S = 0$, т.е. процесс протекает при постоянной энтропии, $S = \text{const}$;

для *изотермического* ($T = \text{const}$, т.е. $T_1 = T_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

для *изохорического* ($V = \text{const}$, т.е. $V_1 = V_2$) процесса

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

2.5. Реальные газы, жидкости и твердые тела

2.5.1. Реальные газы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для одного моля газа:

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)(V_m-b)=\nu RT,$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа:

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-b\nu)=\nu RT,$$

где $\nu=\dfrac{m}{M}$ – количество вещества; $V=\nu V_m$.

Внутреннее давление газа, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p'=\frac{a}{V_m^2},$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Критические параметры – объем $V_к$, давление $p_к$ и температура $T_к$ связаны с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса соотношениями

$$V_к=3b;\quad p_к=\frac{a}{27b^2};\quad T_к=\frac{8a}{27Rb},$$

где R – молярная газовая постоянная.

Внутренняя энергия реального газа

одного моля:

$$U_m=C_V T-\frac{a}{V_m};$$

произвольной массы:

$$U_m=\frac{m}{M}\left(C_V T-\frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Уравнение ***Клапейрона – Клаузиуса***, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T\left(V_2-V_1\right)},$$

где L – теплота фазового перехода; (V_2 – V_1) – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T – температура перехода (процесс изотермический).

2.5.2. Жидкости

Поверхностное натяжение

$$\sigma=\frac{F}{l} \quad \text{либо} \quad \sigma=\frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

Формула ***Лапласа***, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск).

В случае сферической поверхности

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; r – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

2.5.3. Твердые тела

Закон Дюлонга и Пти:

$$C_V = 3R,$$

где C_V – молярная (атомная) теплоемкость химически простого твердого тела.

При повышении температуры длина твердых тел возрастает в первом приближении линейно с температурой, т.е.

$$l_1 = l_0(1 + at),$$

где l_1 – длина тела при температуре t, l_0 – его длина при температуре 0 °С, a – коэффициент линейного теплового расширения.

Для твердых изотропных тел $a = \frac{1}{3}b$, где b – коэффициент объемного теплового расширения.

Относительное изменение длины стержня по закону Гука в случае деформации продольного растяжения (или одностороннего сжатия) стержня

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \frac{1}{E} p_н,$$

где $p_н$ – удельная нагрузка, $p_н = \frac{F}{S}$, где F – растягивающая (сжимающая) сила, S – площадь поперечного сечения; α – коэффициент упругости, $E = \frac{1}{\alpha}$ – модуль упругости (модуль Юнга).

Относительное изменение толщины стержня при продольном растяжении

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta p_н,$$

где β – коэффициент поперечного сжатия.

Коэффициент Пуассона

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Для закручивания стержня (проволоки) на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил

$$M = \frac{\pi N r^4 \varphi}{2l},$$

где l – длина проволоки, r – ее радиус; N – модуль сдвига материала проволоки.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатика

Закон сохранения электрического заряда: в электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной:

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \text{const},$$

где k – число зарядов.

Силы взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся в однородном безграничном диэлектрике (***закон Кулона***):

– в векторной форме: $\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\dfrac{\vec{r}_{12}}{r}$;

– модуль вектора: $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{\left|q_1 q_2\right|}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$,

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, соединяющий заряды q_1 и q_2, модуль которого равен расстоянию r между зарядами; ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м (или Кл^2/(Н·м^2)) – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Напряженность электрического поля в данной точке (т.е. в той точке, в которой на пробный заряд q_0 действует сила $\vec{F}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Принцип суперпозиции электрических полей: напряженность поля $\vec{E}$, создаваемая в данной точке системой, состоящей из K точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в этой точке отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_K.$$

Напряженность электростатического поля равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциала (связь между напряженностью поля и потенциалом):

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстроте убывания потенциала поля на единицу длины dl в этом направлении:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \frac{dq}{dV},$$

где dq – элементарный заряд, приходящийся на единицу длины, площади и объема, соответственно.

Напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом на расстоянии r от него,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра сферы,

$$E = 0 \quad \text{при} \quad r < R;$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \quad \text{при} \quad r \geq R.$$

Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра шара,

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3} \quad \text{при} \quad r \leq R;$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \quad \text{при} \quad r > R.$$

Напряженность поля бесконечно длинной заряженной нити или цилиндра на расстоянии r от оси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

где $\tau = \dfrac{dq}{dl}$ – линейная плотность заряда.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ – поверхностная плотность заряда; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Напряженность поля, образованного двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, полностью заполняющего объем между плоскостями.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому контуру L.

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2,

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0\Delta U,$$

или

$$A_{12} = q_0\int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = q_0\int_1^2 E\cos\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)dl,$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле.

Разность потенциалов между точками 1 и 2 в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где A_{12} – работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2; E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$; интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Разность потенциалов между точками, находящимися на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Разность потенциалов между бесконечными разноименными заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом q, при условии, что $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, при условии, что $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{V},$$

где V – объем диэлектрика; $\vec{P}_V = \sum_i \vec{P}_i$ – дипольный момент диэлектрика, $\vec{P}_i$ – дипольный момент i-й молекулы.

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества; ε_0 – электрическая постоянная.

Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ:

$$\varepsilon = 1 + \chi .$$

Связь между поверхностной плотностью σ' связанного заряда в однородном диэлектрике с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника:

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma .$$

Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где P – поляризованность, ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} .$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через поверхность S определяется интегралом:

$$\Phi = \int_S E_n dS ,$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали к элементу площади поверхности dS.

Теорема Гаусса: поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i}{\varepsilon_0},$$

где k – число зарядов.

Вектор электрического смещения (электрической индукции) для изотропной однородной диэлектрической среды

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} .$$

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$: поток электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов (сторонними называются заряды, которые находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул):

$$\oint\limits_S D_n dS = \sum_{i=1}^{k} q_i ,$$

где k – число зарядов.

Потенциал в какой-либо точке электрического поля равен отношению потенциальной энергии заряда W_n к пробному заряду q_0:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0}.$$

Потенциальная энергия заряда в поле другого точечного заряда

$$W_n = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой радиусом R с зарядом q, в вакууме на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E = 0$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

б) если $r = R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;

в) если $r > R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Электроемкость уединенной металлической сферы (шара) радиусом R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов (напряжение) между пластинами.

Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь одной пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между пластинами.

Электроемкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{\left(R_2 - R_1\right)},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между сферами.

Электроемкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра с длиной образующей l и радиусами R_1 и R_2)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между цилиндрами.

Электроемкость системы конденсаторов:

– при *параллельном* соединении $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$;

– при *последовательном* соединении $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$.

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где C – электроемкость проводника; q – заряд проводника; φ – потенциал проводника.

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме i-го.

Энергия электрического поля в объеме V

$$W = \int_V \omega dV ,$$

где $\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ – объемная плотность энергии.

3.2. Постоянный электрический ток

3.2.1. Постоянный электрический ток в металлах

Если в проводнике создать электрическое поле, то свободные заряды наряду с их хаотическим движением будут совершать и направленное (упорядоченное) движение. Это направленное движение зарядов получило название – *электрический ток*. Его принято характеризовать *силой тока*:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время dt.

Плотность электрического тока определяется отношением силы тока dI к площади dS поперечного сечения проводника, перпендикулярной к направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Плотность тока пропорциональна средней скорости $\langle \upsilon \rangle$ направленного движения носителей заряда и их концентрации n:

$$\vec{j} = en\langle \vec{\upsilon} \rangle,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Сила тока I через любую поверхность S

$$I = \int_S j_n dS,$$

где j_n – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к поверхности.

Сопротивление R однородного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

Зависимость от температуры:

– *удельного сопротивления проводника:*

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t);$$

– *сопротивления проводника:*

$$R = R_0 (1 + \alpha t),$$

где ρ_0, R_0 – удельное сопротивление и сопротивление проводника при температуре $t = 0$ °C, α – температурный коэффициент сопротивления; t – температура.

Общее сопротивление проводников, соединенных

последовательно:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \text{, при } R = R_1 = R_2 = \ldots = R_n \text{ сопротивление } R = nR_1;$$

параллельно:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \text{, при } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \ldots = \frac{1}{R_n} \text{ сопротивление } R = \frac{R_1}{n}.$$

Здесь R_i – сопротивление i-го проводника; n – число проводников.

Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) ε, действующей в цепи:

$$\varepsilon = \frac{A}{q_0}.$$

Силы неэлектрического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются сторонними.

Напряжением U на участке 1 – 2 цепи называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon_{12},$$

где знак ЭДС ε_{12} определяется способом включения источника в цепь. В случае, когда ЭДС повышает потенциал цепи, она принимается со знаком «+», если понижает, то «–».

Напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если на этом участке не действует ЭДС, т.е. сторонние силы отсутствуют:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \text{ если } \varepsilon_{12} = 0.$$

Закон Ома для участка цепи, не содержащей ЭДС:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}; \quad I = \frac{U}{R},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка (напряжение); R – его сопротивление.

Закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащей ЭДС:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \sum \varepsilon_i}{\sum R}; \quad I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R + r},$$

где $\sum \varepsilon_i$ – алгебраическая сумма всех электродвижущих сил (ЭДС), имеющихся на данном участке; $\sum R$ – сумма всех сопротивлений участка; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Закон Ома для замкнутой цепи $(\varphi_1 = \varphi_2)$:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{R + r},$$

где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E},$$

где σ – удельная проводимость; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Правила Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю (токи, подходящие к узлу, берутся со знаком «плюс», отходящие от узла – со знаком «минус»):

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

2. В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников, включенных в контур:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \,,$$

где n – число участков, содержащих сопротивление R; k – число ЭДС, действующих в контуре.

Мостик Уитстона (рис. 12)

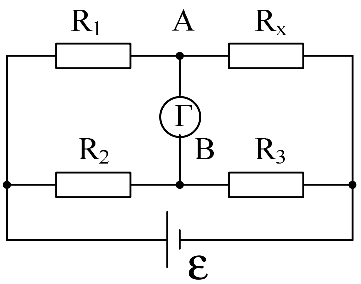


Рис. 12

В случае такого подбора известных сопротивлений R_1, R_2 и R_3, что потенциалы точек А и В окажутся равными (через гальванометр ток не проходит), величина неизвестного сопротивления R_x может быть определена соотношением

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}\,.$$

Работа, совершаемая электрическим полем и сторонними силами на участке цепи постоянного тока за время t,

$$A = qU = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t\,.$$

Мощность электрического тока (тепловая) на участке цепи – работа, совершаемая в единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}\,.$$

Работа и мощность, развиваемая источником тока с ЭДС ε,

$$A = I\varepsilon t\,; \quad P = I\varepsilon\,.$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$dQ = I^2 Rdt = IUdt\,,$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся на участке электрической цепи за время dt; U – напряжение, приложенное к концам участка цепи; I – сила тока в цепи; R – сопротивление участка.

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = jE = \sigma E^2\,,$$

где ω – удельная тепловая мощность тока; j – плотность тока; E – напряженность электростатического поля; σ – удельная электрическая проводимость вещества.

3.2.2. Постоянный электрический ток в других средах

Полупроводниками называют вещества, обладающие особым характером электрической проводимости, у которых удельная проводимость γ сильно зависит от температуры, внешнего электрического поля, наличия примесей, интенсивности облучения, внешнего давления и т.д. *Собственным полупроводником* называется чистый (беспримесный) полупроводник, имеющий идеально правильную кристаллическую решетку. Плотность тока при собственной (не обусловленной примесями) проводимости полупроводника складывается из плотности тока электронов (n) и «дырок» (p). *«Дырка»* отождествляется с нескомпенсированным положительным зарядом, который образуется в кристалле в том месте, которое покинул электрон, став свободным. Это место (вакансия) может быть занято электроном из соседнего атома под действием электрического поля, что обеспечивает подвижность «дырок».

Закон Ома в дифференциальной форме для собственного полупроводника (при равенстве концентраций электронов и «дырок» $n_e = n_p = n_0$):

$$\vec{j} = en_0\left(\mu_n + \mu_p\right)\vec{E},$$

где e – заряд электрона; n_0 – концентрация носителей заряда; μ_n – подвижность электронов; μ_p – подвижность «дырок», $\vec{E}$ – напряженность поля.

В общем случае $(n_e \neq n_p)$ удельная электрическая проводимость полупроводника

$$\gamma = en_e\mu_n + en_p\mu_p,$$

где e – заряд электрона; μ_n – подвижность электронов; μ_p – подвижность «дырок».

Зависимость электропроводности собственного полупроводника от температуры:

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right),$$

где γ_0 – постоянная величина, характеризующая проводимость полупроводника при определенной температуре T, ΔE – ширина запрещенной зоны полупроводника; k – постоянная Больцмана.

Проводимость газов

В обычных условиях *газ* является плохим проводником электрического тока, поскольку состоит в основном из нейтральных молекул и атомов, т.е. содержит относительно мало заряженных частиц – носителей тока, способных приходить в упорядоченное движение под действием поля. Газ становится проводником, если существенную часть его молекул ионизовать.

Если при ионизации образуются электроны и одновалентные положительные ионы, число пар которых одинаково, то плотность тока в газе

$$\vec{j} = en\left(\mu_+ + \mu_-\right)\vec{E},$$

где μ_+, μ_- – подвижность ионов и электронов, соответственно.

Связь между током и напряжением U на электродах в вакуумном промежутке подчиняется закону ***Богуславского – Ленгмюра:***

$$I = BU^{3/2}.$$

Коэффициент B зависит от формы, размеров и относительного расположения катода и анода.

В *электролитах* ток переносится положительными и отрицательными ионами, и плотность тока в электролитах равна

$$\vec{j} = qn\left(u_+ + u_-\right)\vec{E},$$

где q – заряд иона; n – число пар ионов в единице объема в электролите; u_+ и u_- – подвижность положительных и отрицательных ионов, соответственно.

При электролизе имеют место ***законы Фарадея:***

1. Масса вещества m, выделяющегося при электролизе,

$$m = kIt = kq,$$

где k – электрохимический эквивалент вещества; q и I – соответственно, заряд и сила тока; t – время прохождения тока.

2. Электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:

$$k = \frac{M}{Fn},$$

где $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль – число Фарадея; M – молярная масса вещества; n – валентность.

Объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{MIt}{Fn}.$$

3.3. Магнитное поле

Экспериментально было установлено, что пробный контур, помещенный в магнитное поле, испытывает действие вращающего момента $\vec{M}$. Также эксперименты показали, что для одной и той же точки магнитного поля максимальный вращающий момент $\vec{M}$ пропорционален произведению силы тока I в контуре и его площади S. Величину IS назвали *магнитным моментом контура* p_m. Было также установлено, что пробный контур вследствие вращающего момента ориентируется в пространстве определенным образом – это зависит от направлений токов. Поэтому моменту $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ контура приписали определенное направление: вектор $\vec{p}_m$ совпадает с направлением положительной нормали к плоскости контура, причем положительное направление совпадает с направлением перемещения буравчика (***правого винта***), вращаемого в направлении тока (рис. 13). Было также установлено, что отношение $\frac{M_{\max}}{p_m}$ для некоторой точки поля, создаваемого проводником с постоянным током, не зависит от величины p_m пробного контура, т.е. выполняется равенство

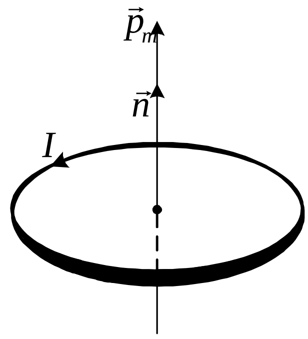


Рис. 13

$$\frac{M_{\max}}{p_m} = \text{const} \quad \text{или} \quad M_{\max} = Bp_m,$$

или в общем виде

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right].$$

Величина B (коэффициент пропорциональности между $M_{\max}$ и p_m) была названа *магнитной индукцией*.

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция в точке поля, создаваемая элементом длины проводника $d\vec{l}$ с током I; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; μ – магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Модуль вектора $d\vec{B}$ выражается формулой

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

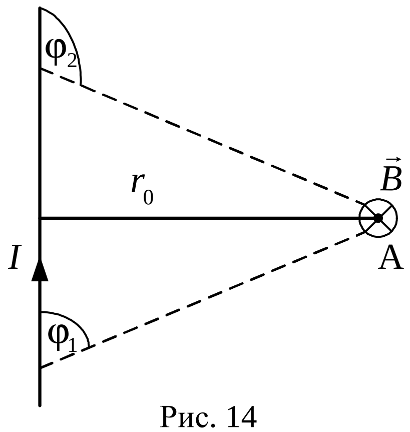


Рис. 14

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

Магнитная индукция поля бесконечно длинного прямого проводника с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

где r_0 – кратчайшее расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

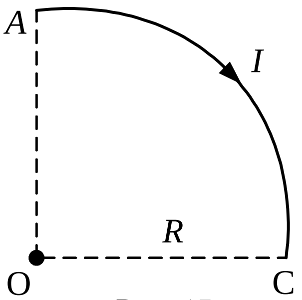


Рис. 15

Магнитная индукция в центре кругового витка радиусом R с током I

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемая отрезком проводника,

$$B = \frac{\mu\mu_0 I\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)}{4\pi r_0}.$$

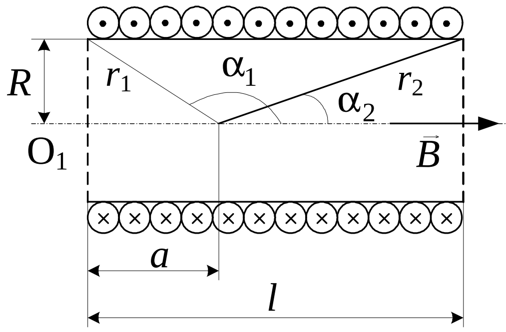


Рис. 16

Вектор $\vec{B}$ в точке А (рис. 14) направлен за чертеж перпендикулярно к его плоскости (по правилу правого винта).

Индукция $\left|\vec{B}\right|$ магнитного поля в центре (точка О) дуги АС окружности длиной l, радиусом R, с током I (рис. 15)

$$B = \frac{\mu\mu_0 I l}{4\pi R^2}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемого длинным соленоидом (рис. 16) в средней его части,

$$B = \mu\mu_0 n I,$$

где $n = \dfrac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; N – число витков соленоида; l – длина соленоида; I – сила тока в соленоиде.

Индукция магнитного поля на оси соленоида конечной длины (см. рис. 16)

$$B=\frac{\mu\mu_0}{2}In\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right),$$

где α_1 и α_2 – углы между осью соленоида и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида.

Магнитная индукция поля внутри тороида

$$B=\mu\mu_0\frac{NI}{2\pi r},$$

где N – число витков тороида; I – сила тока; r – средний радиус тороида.

Магнитная индукция на оси кругового витка радиусом R с током I на расстоянии a от его плоскости (рис. 17)

$$B=\frac{\mu\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+a^2\right)^{3/2}},$$

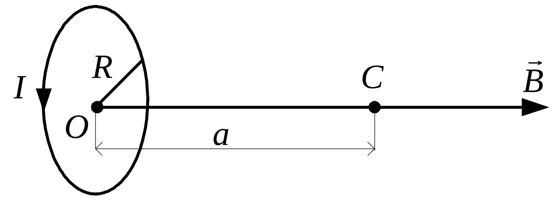


Рис. 17

направление вектора $\vec{B}$ определяется правилом правого винта.

Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\ldots+\vec{B}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{B}_i,$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ – магнитная индукция поля с индексом i.

Закон Ампера: сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле, равна

$$d\vec{F}=\left[d\vec{l},\vec{B}\right]I,$$

где $\left[d\vec{l},\vec{B}\right]$ – векторное произведение элемента длины проводника $d\vec{l}$ и магнитной индукции поля $\vec{B}$.

Модуль силы Ампера

$$dF=IBdl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Для определения направления силы Ампера применяется ***правило левой руки***: *если левую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а вытянутые четыре пальца совпадали с направлением тока в проводнике, то отогнутый большой палец указывает направление силы, действующей на проводник*.

Сила взаимодействия двух прямых бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, приходящаяся на единицу длины каждого из проводников,

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

где d – расстояние между проводниками.

Сила Лоренца – сила, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right].$$

Модуль силы Лоренца

$$F = q\upsilon B \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Сила Лоренца перпендикулярна к векторам $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$. Ее направление определяется согласно ***правилу левой руки***: *если пальцы направить вдоль вектора скорости положительного заряда, а вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, то отогнутый большой палец показывает направление силы*. С изменением знака заряда направление силы изменяется на противоположное.

При движении частицы с зарядом q и массой m в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$:

– если скорость частицы равна нулю ($\upsilon = 0$), то $F_Л = 0$, т.е. магнитное поле не действует на неподвижную заряженную частицу;

– если $\alpha = 0^\circ$ ($\sin\alpha = 0$), то $F_Л = 0$, т.е. если частица движется так, что вектор скорости $\vec{\upsilon}$ частицы параллелен вектору магнитной индукции $\vec{B}$, то магнитное поле на движение заряда не влияет;

– если $\alpha = 90^\circ$ $\left(\vec{F}_Л \perp \vec{\upsilon}\right)$, то траектория частицы представляет собой окружность радиусом R,

$$R = \frac{m\upsilon}{qB};$$

– если частица движется под углом β к линиям $\vec{B}$, то траекторией ее движения является *винтовая линия* (*спираль*) (рис. 18). *Радиус R спирали* определяется в этом случае компонентой скорости $\upsilon_{\perp}$, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$, т.е.

$$R = \frac{m\upsilon_{\perp}}{qB} = \frac{m\upsilon \sin\beta}{qB}.$$

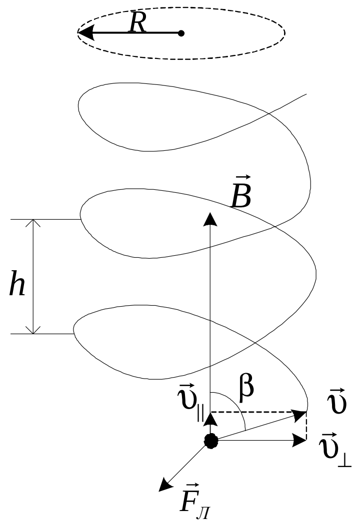


Рис . 18

Шаг h спирали определяется составляющей скорости $\upsilon_{\parallel}$ частицы, совпадающей по направлению с вектором $\vec{B}$, как расстояние, которое проходит частица в направлении вектора $\vec{B}$ за время одного оборота T:

$$h = \upsilon_{\parallel} T = \upsilon T \cos\beta,$$

где $T = \frac{2\pi R}{\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi R}{\upsilon \sin\beta}$ – *период обращения* (время одного оборота частицы).

Результирующая сила, действующая на заряженную частицу с электрическим зарядом q, находящуюся в электрическом и магнитном полях,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) Φ через произвольную поверхность S в случае однородного магнитного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha = B_n S,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности; $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$.

В случае неоднородного поля поток Φ вектора $\vec{B}$

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к элементу площади dS.

Работа dA перемещения замкнутого контура с током силой I в магнитном поле определяется соотношением

$$dA = -Id\Phi,$$

где $d\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B – магнитная индукция; I – сила тока; d – толщина пластинки; $R = \frac{1}{en}$ – постоянная Холла (n – концентрация электронов, e – заряд электрона).

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k ,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной контура l произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром.

Теорема о циркуляции вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k ,$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром l.

Намагниченность

$$\vec{j} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{P}}{V},$$

где $\vec{P}_m = \sum \vec{P}$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{j} = \chi\vec{H} ,$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{j}\right) = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_0(1+\chi)\vec{H} .$$

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества:

$$\mu = 1 + \chi .$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \left(I + I' \right),$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру L произвольной формы; I и I' – соответственно, алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром.

3.4. Электромагнитная индукция

Основной закон электромагнитной индукции (***закон Фарадея***):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где ε_i – мгновенное значение ЭДС индукции; $\frac{d\Phi}{dt}$ – скорость изменения магнитного потока.

Знак «минус» говорит о том, что индукционный ток имеет такое направление, чтобы противодействовать причине, его вызывающей (правило Ленца).

Если контур состоит не из одного, а из N одинаковых витков, то

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

где $d\psi = Nd\Phi$ – потокосцепление (полный магнитный поток).

Индукционный ток

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

где R – сопротивление контура.

Направление индукционного тока определяется по ***правилу Ленца:*** *индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле, формируемое им, стремится препятствовать всякому изменению магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, в котором возникает ЭДС электромагнитной индукции.*

Разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью υ в однородном магнитном поле,

$$U = Bl\upsilon \sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов скорости $\vec{\upsilon}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

Электродвижущая сила индукции ε_i, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\varepsilon_i = BNS\omega \sin\omega t,$$

где $\omega t = \alpha$ – мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки.

Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI.$$

Индуктивность L соленоида зависит от геометрических размеров контура и заполняющей его среды:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 n^2 lS = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l},$$

где N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь витков соленоида (площадь поперечного сечения соленоида); $n = \dfrac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; $V = Sl$ – объем соленоида.

Формула для ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура; $\dfrac{dI}{dt}$ – скорость изменения силы тока.

Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L:

после замыкания цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

где ε – ЭДС источника; r – внутреннее сопротивление источника; t – время, прошедшее после замыкания цепи; $\tau = L/R$ – постоянная времени цепи; I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$ (амплитудное значение силы тока);

после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t} = I_0 e^{-t/\tau},$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; t – время, прошедшее после размыкания цепи.

Коэффициент трансформации K (в режиме холостого хода) для идеального трансформатора

$$K = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

где ε, N – соответственно, ЭДС и число витков в обмотках трансформатора.

Энергия W магнитного поля, созданного контуром индуктивности L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность ω энергии W магнитного поля в объеме поля V

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

3.5. Электромагнитные колебания и волны

3.5.1. Свободные и вынужденные колебания

Колебательный контур в общем случае имеет вид, приведенный на рис. 19.

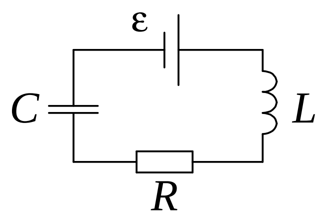


Рис. 19

Уравнение колебаний в контуре ***без активного сопротивления*** (свободные незатухающие колебания, $\varepsilon = 0$, $R = 0$):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

где q – электрический заряд; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура; L – индуктивность контура (катушки); C – электроемкость контура (конденсатора).

Решением уравнения колебаний в контуре без активного сопротивления является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0 – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период незатухающих электрических колебаний в контуре.

Законы изменения силы тока I и напряжения U для контура без активного сопротивления:

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad U = \frac{q}{C} = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $I_0 = q_0\omega_0 = \dfrac{q_0}{\sqrt{LC}}$ – амплитуда силы тока в контуре; $U_0 = \dfrac{q_0}{C}$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Величины I_0 и U_0 связаны между собой соотношением

$$I_0 = \frac{U_0 C}{\sqrt{LC}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Так как $\dfrac{U_0}{I_0} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то из физических соображений (закон Ома) величину $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ можно считать сопротивлением. Оно называется *волновым сопротивлением* LC-контура.

Для ***контура, содержащего активное сопротивление***, уравнение затухающих колебаний ($\varepsilon = 0$, $R \neq 0$):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\delta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания.

При условии, что $\delta^2 < \omega_0^2$, т.е. $\dfrac{R^2}{4L^2} < \dfrac{1}{LC}$, решение уравнения затухающих колебаний имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период, где период колебаний

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$; N_e – число колебаний за время τ; τ – время релаксации.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_\tau = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}.$$

При слабом затухании $\left(\omega_0^2 \approx \delta^2\right)$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\pi\frac{W}{\Delta W},$$

где W – энергия, запасенная в контуре; ΔW – убыль этой энергии за один период колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t; \quad q = q_m \cos\left(\omega t - \varphi\right),$$

где $q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$; φ – сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением $U = U_0 \cos\omega t$; R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура.

Резонансная частота и резонансная амплитуда заряда в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}; \quad \left(q_m\right)_{рез} = \frac{U_m/L}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где ω_0 – собственная частота контура; δ – коэффициент затухания; R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае электрического резонанса

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \left(I_m\right)_{рез} = \frac{U_m}{R},$$

где ω_0 – собственная частота контура, R, L и C – соответственно, активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m – амплитуда внешнего приложенного напряжения.

3.5.2. Переменный ток

Переменным током в электрических цепях называют такой ток, который изменяет свое значение и направление во времени.

Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения

$$I_{\partial} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U_{\partial} = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

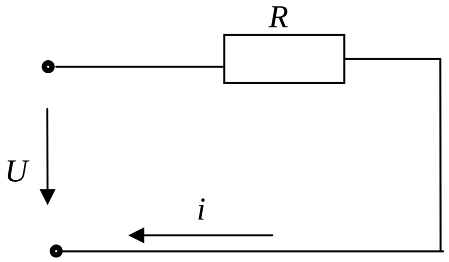


Рис. 20

Цепь переменного тока с активным сопротивлением (рис. 20).

Напряжение в сети $U = U_m \sin \omega t$.

Ток в цепи

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{R}$ – наибольшее значение силы тока.

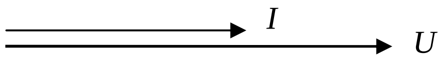


Рис. 21

Векторная диаграмма тока и напряжения в цепи с активным сопротивлением – рис. 21.

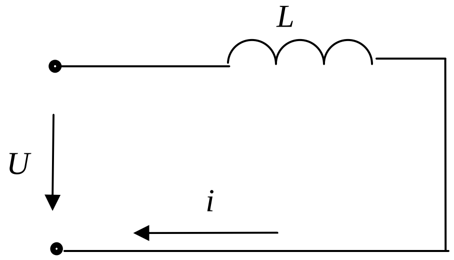


Рис. 22

Цепь переменного тока с индуктивностью – рис. 22.

Ток в цепи

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L};$$

где $X_L = \omega L = 2\pi \nu L$ – реактивное индуктивное сопротивление.

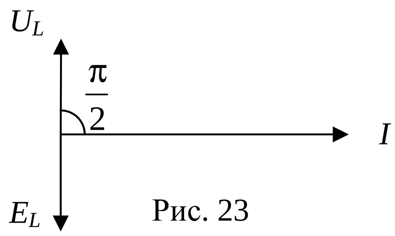


Рис. 23

Напряжение в цепи с индуктивностью

$$U = -E_L = L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Векторная диаграмма тока, ЭДС и напряжения в цепи с индуктивностью – рис. 23.

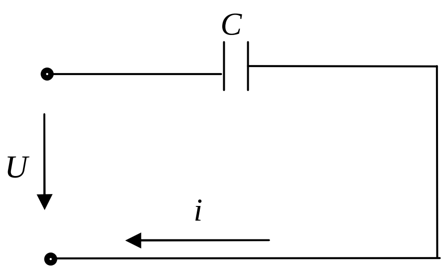


Рис. 24

Цепь переменного тока с емкостью – рис. 24.

Ток в цепи

$$I = \omega c U = \frac{U}{\frac{1}{\omega c}} = \frac{U}{X_c},$$

где $X_c = \dfrac{1}{\omega c} = \dfrac{1}{2\pi\nu c}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Векторная диаграмма тока и напряжения в цепи с емкостью – рис. 25.

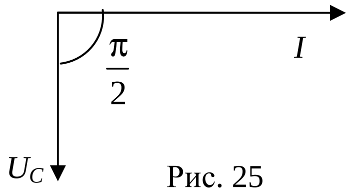


Рис. 25

При последовательном соединении активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 26) общее напряжение

$$U = \sqrt{U_R^2 + \left(U_L - U_C\right)^2} = \sqrt{\left(RI\right)^2 + \left(X_L I - X_C I\right)^2} = I\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2},$$

или

$$U = I\sqrt{R^2 + X^2} = IZ,$$

где $X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление; Z – полное сопротивление цепи.

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

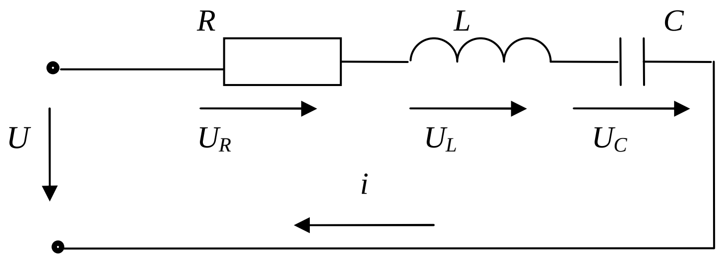


Рис. 26

Активная мощность цепи

$$P = U_R I = R \cdot I \cdot I = I^2 R;$$

Реактивная мощность

$$Q = U_P I = X \cdot I \cdot I = I^2 X.$$

Полная мощность

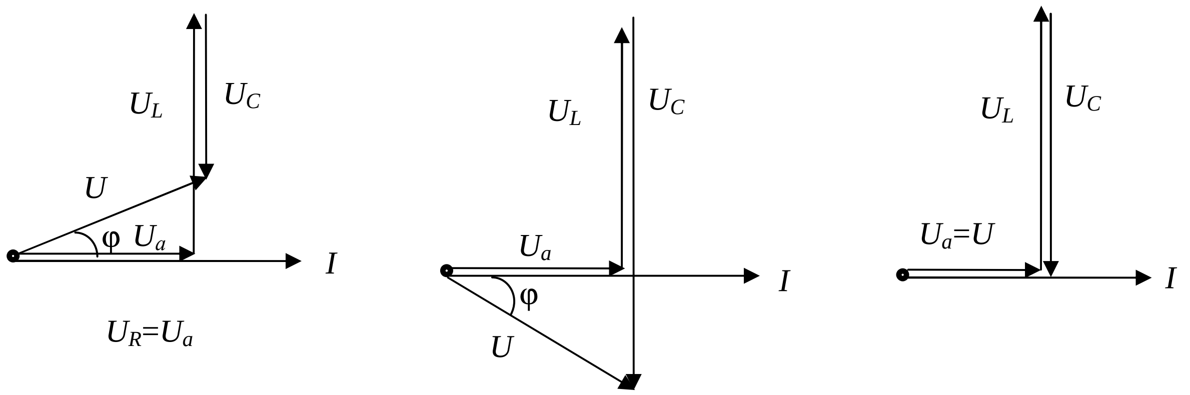
$$S = UI = \sqrt{P^2 + \left(Q_L - Q_C\right)^2}.$$

Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z},$$

где R – активное сопротивление цепи; ωL – реактивное индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; Z – полное сопротивление цепи.

Векторная диаграмма цепи при последовательном соединении R, L и C – рис. 27.



когда $|U_L| > |U_C|$ когда $|U_L| < |U_c|$ когда $|U_L| = |U_c|$ (резонанс напряжений)

Рис. 27

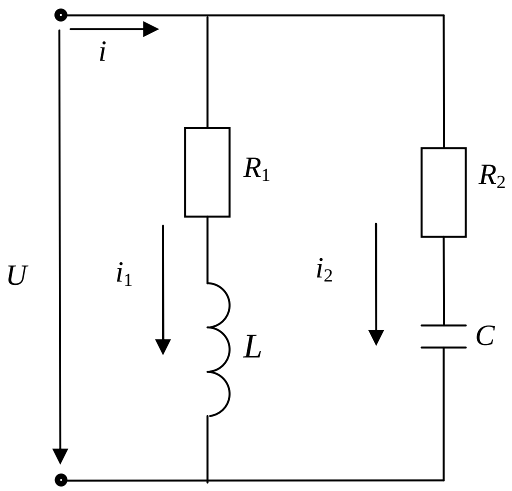


Рис. 28

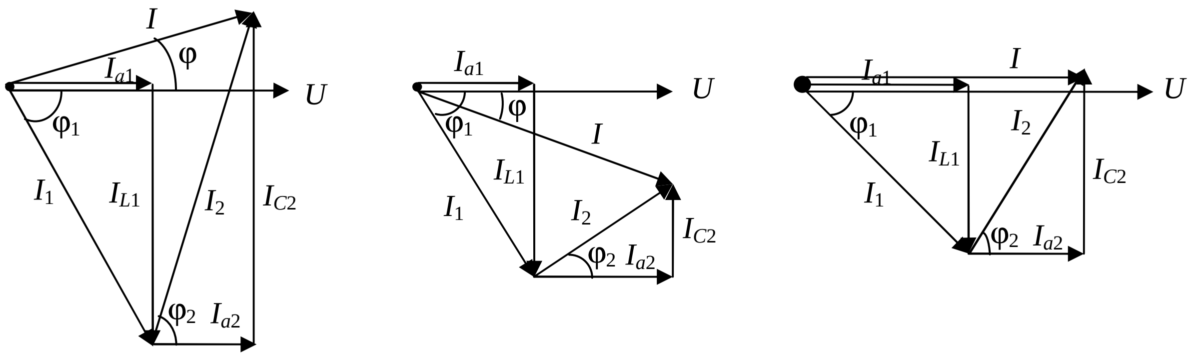
При параллельном соединении активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 28) модуль общего тока в неразветвленной части цепи равен

$$I = \sqrt{\left(I_{R_1} + I_{R_2}\right)^2 + \left(I_{L_1} - I_{C_2}\right)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_p^2}$$

,

где $I_{R_1} + I_{R_2}$ – арифметическая сумма, а $I_{L_1} - I_{C_2}$ – алгебраическая сумма.

Векторная диаграмма цепи – рис. 29.



когда $|I_c| > |I_L|$ когда $|I_c| < |I_L|$ когда $|I_c| = |I_L|$ (резонанс тока)

Рис. 29

Ниже приведена таблица формул для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз $\mathrm{tg}\varphi$ между напряжением и током при различных способах включения активного сопротивления R, емкости C и индуктивности L, где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление; ω – частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L – индуктивность; C – емкость.

Тип соединения	Полное сопротивление цепи Z	Сдвиг фаз $\mathrm{tg}\varphi$ между напряжением и током
Последовательно включены активное сопротивление R и емкость C	$Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{1}{R\omega C}$
Параллельно включены активное сопротивление R и емкость C	$Z = \dfrac{R}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}$	$\mathrm{tg}\varphi = -R\omega C$
Последовательно включены активное сопротивление R и индуктивность L	$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$
Параллельно включены активное сопротивление R и индуктивность L	$Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \dfrac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$	$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{R}{\omega L}$
Последовательно включены активное сопротивлением R, индуктивность L и емкость C	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$

Период T электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и активного сопротивления R,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}.$$

3.5.3. Электромагнитные волны

Электромагнитными волнами называются возмущения электромагнитного поля (т.е. переменное электромагнитное поле), распространяющиеся в пространстве.

Связь между длиной электромагнитной волны, скоростью ее распространения c и ее частотой: $c = \lambda\nu$.

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – скорость распространения света в вакууме; ε_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Связь между мгновенными значениями E и H:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H,$$

где E, H – модули напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Уравнение плоской электромагнитной волны:

$$E = E_0\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right),$$

где E_0 – амплитуда напряженности электромагнитного поля волны; ω – циклическая частота; $k = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число; φ_0 – начальная фаза; υ – фазовая скорость распространения волны.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Плотность потока энергии электромагнитных волн – вектор Умова – Пойтинга

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right],$$

где $\vec{S}$ – плотность потока электромагнитной энергии; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Модуль плотности потока энергии

$$S = \omega\upsilon = EH,$$

где ω – объемная плотность энергии электромагнитной волны; υ – скорость распространения волны в среде; E – напряженность электрического поля волны; H – напряженность магнитного поля волны.

Интенсивность электромагнитной волны

$$I = \left|\left\langle S\right\rangle\right| = \frac{1}{2}E_0H_0.$$

4. ОПТИКА. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

4.1. Геометрическая оптика

Отношение скорости света в вакууме к скорости света υ в данной среде:

$$n = \frac{c}{\upsilon} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,,$$

где n называется *абсолютным показателем преломления* этой среды.

Здесь ε и μ – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, $\mu \approx 1$ для неферромагнитных сред. Для любой среды, кроме вакуума, $n > 1$. Величина n зависит от частоты света и состояния среды (ее плотности и температуры). Для газов при нормальных условиях $n \approx 1$. В анизотропных средах n зависит от направления распространения света и его поляризации.

Относительным показателем преломления n_{21} второй среды относительно первой называется соотношение скоростей света υ_1 и υ_2, соответственно, в первой и второй средах:

$$n_{21} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред.

Если $n_{21} > 1$, то вторая среда называется *оптически более плотной*, чем первая среда.

При падении световых лучей на идеально плоскую границу раздела двух сред, размеры которой значительно превышают длину волны, происходят явления преломления и отражения света. Направление распространения света изменяется при переходе его во вторую среду, за исключением случая перпендикулярного падения лучей на границу раздела.

Углом падения i называется угол между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения. *Углом отражения* i' называется угол между отраженным лучом и тем же перпендикуляром (рис. 30). *Углом преломления* r называется угол между преломленным лучом и тем же перпендикуляром.

Законы отражения света

Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.

Угол падения равен углу отражения: $i = i'$ (см. рис. 30, *а*).

Законы отражения справедливы при обратном направлении хода световых лучей. Луч, распространяющийся по пути отраженного, отражается по пути падающего луча (*обратимость хода световых лучей*).

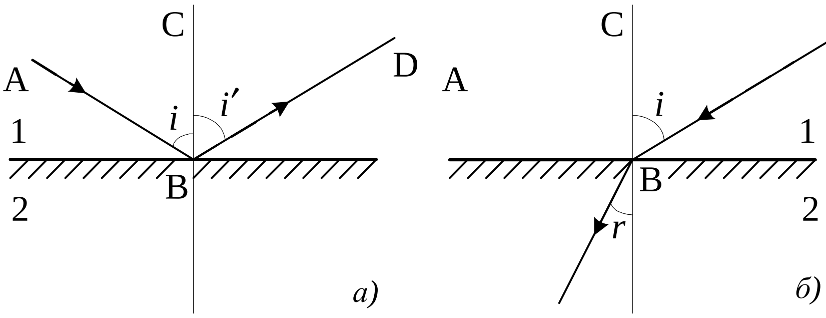


Рис. 30

Отражение света, происходящее по этим законам, называется *зеркальным*. Если условие зеркальности отражения не выполняется, то законы отражения несправедливы и отражение света называется *диффузным*.

Законы преломления света

Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости (см. рис. 30, *б*).

Отношение синусов углов падения и преломления – постоянная величина, равная относительному показателю преломления двух данных сред:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Падающий и преломленный лучи *взаимно обратимы:* если падающий луч пущен по линии преломленного луча, то луч преломленный пойдет по линии падающего.

Законы отражения и преломления света справедливы для однородных изотропных сред в отсутствие поглощения света.

Если световые лучи из оптически более плотной среды 2 падают на границу раздела с оптически менее плотной средой 1, например, из стекла в воду, то при углах падения $i \geq i_{пр}$, где $\sin i_{пр} = n_{21}$, преломленный луч в среде с показателем преломления $n_2 > n_1$ отсутствует (рис. 31).

При условии $i = i_{пр}$ угол преломления $r = \pi/2$, $\sin r = 1$ и луч скользит вдоль границы раздела сред. Это явление называется **полным внутренним отражением**. Угол $i_{пр}$ называется *предельным углом полного отражения*;

$$\sin i_{пр} = \frac{n_2}{n_1},$$

где $i_{пр}$ – предельный угол полного отражения.

Все лучи, падающие на границу двух сред под углом $i > i_{пр}$, полностью отражаются.

Для призмы из материала с показателем преломления n и преломляющим углом A (рис. 32):

для первой преломляющей грани

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n;$$

для второй преломляющей грани

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{1}{n};$$

преломляющий угол

$$A = \alpha_2 + \beta_1.$$

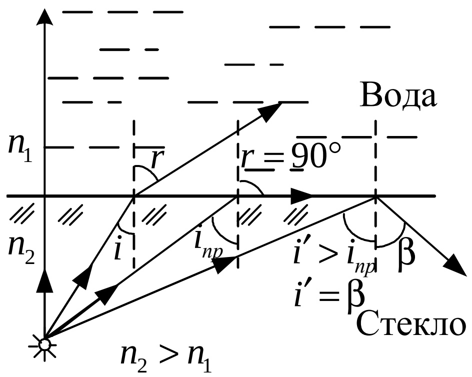


Рис. 31

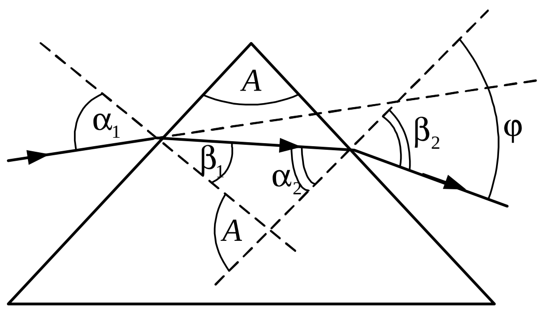


Рис. 32

Связь угла φ отклонения лучей и преломляющего угла A призмы:

$$\varphi = A(n-1) = \alpha_1 + \beta_2 - A.$$

Формула сферического зеркала (для параксиальных световых лучей):

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где F – главное фокусное расстояние; R – радиус кривизны сферического зеркала; d – расстояние от зеркала до светящейся точки; f – расстояние от зеркала до изображения.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = \frac{1}{F} = \frac{2}{R},$$

где F – главное фокусное расстояние; R – радиус кривизны сферического зеркала.

Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где F – главное фокусное расстояние линзы; $n_л$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{ср}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды (одинаковой с обеих сторон линзы).

В этой формуле радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком «плюс», вогнутых – со знаком «минус».

Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где d – расстояние от оптического центра линзы до предмета; f – расстояние от оптического центра линзы до изображения.

Для собирающих линз величина F положительная, для рассеивающих линз величина F отрицательная. Если изображение мнимое, то величина f отрицательная.

Увеличение в линзе

$$Г = \frac{h}{h_0} = \frac{f}{d},$$

где h и h_0 – соответственно, линейные размеры изображения и предмета.

Построение изображения в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

– луч, проходящий через оптический центр линзы, – не изменяет своего направления и является побочной оптической осью;

– луч, идущий параллельно главной оптической оси, – после преломления в линзе (этот луч или его продолжение) проходит через один из фокусов линзы;

– луч (или его продолжение), проходящий через первый фокус линзы, – после преломления в ней выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

При построении изображений в тонкой линзе следует также учитывать свойства побочных фокусов. Напомним, что побочной оптической осью называется любая прямая, проходящая через оптический центр линзы под углом к главной оптической оси. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно к главной оптической оси, называется главной фокальной плоскостью.

Точка пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью называется побочным фокусом F'. Любой луч (или его продолжение), параллельный побочной оптической оси, пройдя через линзу, проходит через соответствующий побочный фокус (рис. 33, F' – побочный фокус).

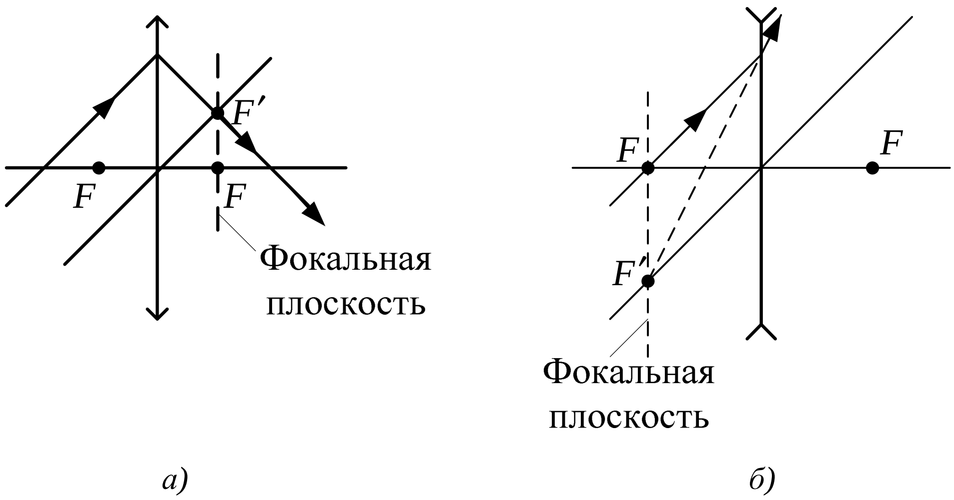


Рис. 33

Увеличение лупы

$$N = \frac{L}{F}, \quad L = 0{,}25 \text{ м (расстояние наилучшего зрения).}$$

Увеличение микроскопа

$$N = \frac{\delta L}{F_1 F_2},$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра; F_1 и F_2 – фокусные расстояния объектива и окуляра.

Световой поток Φ, испускаемый изотропным источником в пределах телесного угла ω, в вершине которого находится источник, пропорционален силе света I источника и величине телесного угла ω:

$$\Phi = I\omega.$$

Полный световой поток изотропного точечного источника

$$\Phi_0 = 4\pi I.$$

Поток излучения

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W – энергия излучения; t – время излучения.

Светимость R равномерно светящейся поверхности численно равна световому потоку, испускаемому с единицы площади поверхности:

$$R = \frac{\Phi}{S}.$$

Энергетическая яркость (светимость)

$$B = \frac{\Delta I_e}{\Delta S},$$

где ΔI_e – энергетическая сила света элемента излучающей поверхности; ΔS – площадь проекции элемента излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению наблюдения.

Освещенность E поверхности численно равна световому потоку, падающему на единицу площади:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Освещенность, создаваемая изотропным точечным источником на расстоянии r от него,

$$E = \frac{I \cos\alpha}{r^2},$$

где α – угол падения луча.

4.2. Волновая оптика

4.2.1. Интерференция света

Когерентность – согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Волны называются когерентными, если разность их фаз остается постоянной во времени (т.е. они имеют одинаковую частоту).

Монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга независимых гармонических цугов. Средняя продолжительность одного цуга $\tau_{ког}$ называется *временем когерентности* (время когерентности не может превышать время излучения τ, т.е. $\tau_{ког} < \tau$). Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности $\tau_{ког}$. За это время волна распространяется в вакууме на расстояние $l_{ког} = c\tau_{ког}$, называемое *длиной когерентности* (или длиной цуга).

Скорость света в среде $\upsilon = \frac{c}{n}$, где c – скорость распространения света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Оптическая длина пути, проходимого световым лучом в однородной среде с показателем преломления n, равна $L = nl$, где l – геометрическая длина пути луча.

Если один луч проходит путь длиной l_1 в среде с показателем преломления n_1, а другой луч – путь l_2 с показателем преломления n_2, то оптическая разность хода этих лучей

$$\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1 = L_2 - L_1,$$

где L_1 и L_2 – соответственно, оптические длины проходимых волнами путей.

Разность фаз двух когерентных волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где λ_0 – длина волны (световой) в вакууме; Δ – оптическая разность хода двух световых волн.

Условие максимального усиления света при интерференции (интерференционный максимум):

$$\Delta = \pm m\lambda_0,$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме; $m = 0, 1, 2, \ldots$ – порядок интерференционного максимума.

Условие максимального ослабления света при интерференции (интерференционный минимум):

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где m – порядок интерференционного минимума.

Расстояние Δx между интерференционными полосами на экране, полученными от двух когерентных источников света (ширина интерференционной полосы),

$$\Delta x = \frac{l\lambda_0}{d},$$

где l – расстояние от экрана до источника света; d – расстояние между источниками.

При большом расстоянии между источниками, например, при $d \approx l$, отдельные полосы становятся неразличимыми.

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе $(n_0 = 1)$,

максимум: $$2dn\cos\beta \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0;$$

минимум: $$2dn\cos\beta \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель ее преломления; α – угол падения; β – угол преломления; $m = 0, 1, 2\ldots$

В общем случае слагаемое $\pm\frac{\lambda_0}{2}$ обусловлено потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n < n_0$ – знак «минус», если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак «плюс».

Радиус колец Ньютона:

– темных в отраженном свете (или светлых в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}};$$

– светлых в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda R}{n}},$$

где R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной пластинкой; λ – длина световой волны в среде между линзой и пластинкой; m – порядковый номер кольца, $m = 0$ соответствует центральному пятну; n – показатель преломления среды между линзой и пластиной.

Оптическая разность хода световых лучей Δ, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки, по обе стороны которых находятся одинаковые среды:

в проходящем свете $$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha};$$

в отраженном свете $$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} - \frac{\lambda_0}{2},$$

где d – толщина пластинки; n – показатель преломления вещества пластинки; n_1 – показатель преломления среды; α – угол падения луча; λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Добавочная разность хода $\frac{\lambda}{2}$ учитывает изменение фазы волны на π при отражении ее от оптически более плотной среды.

В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n_{пл} = \sqrt{n_{ст} n_0} \ .$$

Так как показатель преломления стекла $n_{ст}$, показатель преломления пленки $n_{пл}$ и показатель преломления окружающей среды n_0 удовлетворяют условию $n_{ст} > n_{пл} > n_0$, то потеря полуволны происходит на обеих поверхностях. Поэтому условие интерференционного максимума (при нормальном падении света)

$$2n_{пл}d = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где $n_{пл}d$ – оптическая толщина пленки; λ_0 – длина волны в вакууме.

Для минимальной толщины наносимой пленки $m = 0$, тогда минимальная толщина наносимой пленки

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_{пл}}.$$

4.2.2. Дифракция света

Радиусы зон Френеля (рис. 34):

– для *плоской* волны

$$r_m = \sqrt{mb\lambda},$$

где r – радиус зоны; m – номер зоны Френеля; b – расстояние от круглого отверстия в непрозрачном экране до точки наблюдения, расположенной на оси отверстия; λ – длина световой волны;

– для *сферической* волны (радиус внешней границы m-й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{(a+b)}},$$

где $\mathrm{SO} = a$; $\mathrm{OP} = b$; m – номер зоны Френеля; λ – длина волны (т.е. a и b – соответственно, расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина).

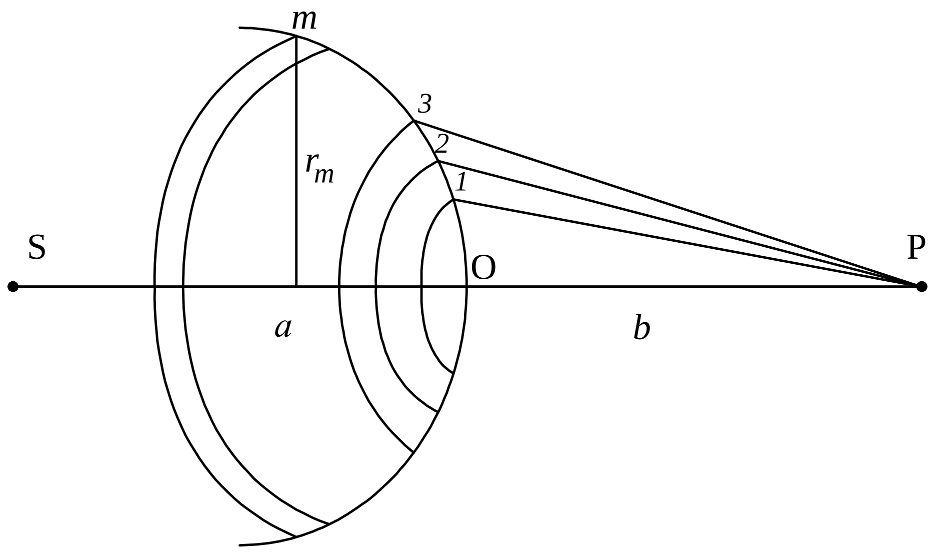


Рис. 34

В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели шириной a при нормальном падении света положение минимумов и максимумов освещенности на экране определяется углом φ, отсчитанным от нормали к поверхности щели и удовлетворяющим условию:

– *минимум* $$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2};$$

– *максимум* $$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где φ – угол дифракции; m – порядок спектра $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; λ – длина волны.

Постоянная (период) дифракционной решетки d:

$$d = a + b; \quad d = \frac{1}{N_0}; \quad d = \frac{l}{N},$$

где a – ширина каждой щели решетки; b – ширина непрозрачных участков между щелями; N_0 – число щелей, приходящихся на единицу длины дифракционной решетки; l – длина дифракционной решетки; N – общее количество щелей дифракционной решетки.

Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N}, \quad (m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\ \text{кроме } m' = 0,\ N,\ 2N,\ \ldots,$$

где d – постоянная (период) дифракционной решетки; φ – угол между нормалью к поверхности дифракционной решетки и направлением дифрагирующих лучей; N – число штрихов решетки; m – порядок дифракционного спектра.

Формула Вульфа – Брэггов (условие дифракционных максимумов от пространственной дифракционной решетки):

$$2d\sin\theta = m\lambda, \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения; λ – длина волны рентгеновского излучения.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi},$$

где φ – угол дифракции; m – порядок спектра; d – период решетки.

Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D = F\frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где F – фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран; $d\varphi$ – разница в углах, соответствующая двум линиям, отличающимся по длине волны на $d\lambda$.

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda$ – минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = mN,$$

где m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

Разрешающая способность призмы

$$R = \frac{\lambda}{(\lambda + \Delta\lambda)} = (a - b)\left(\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

где λ, $(\lambda + \Delta\lambda)$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; a и b – пути, проходимые в призме крайними лучами пучка.

При полном использовании разрешающей способности падающий пучок покрывает всю боковую поверхность призмы. В этом случае $b = 0$ и $R_{\max} = a\left(\dfrac{dn}{d\lambda}\right)$.

Разрешающая способность объектива

$$R \approx \frac{1}{\varphi} = \frac{D}{1{,}22\lambda},$$

где D – диаметр объектива; φ – минимальное разрешаемое угловое расстояние.

Разрешающая способность глаза

$$R \approx \frac{1}{\varphi_{\min}} = \frac{d}{1{,}22\lambda},$$

где d – диаметр зрачка.

Закон Бугера:

$$W = W_0 e^{-\mu x},$$

где коэффициент μ учитывает *поглощательную способность среды*; W_0 – начальная энергия волны; W – энергия волны при прохождении среды поглощения толщиной x.

4.2.3. Поляризация света

Отражение полностью линейно поляризованного света от поверхности диэлектрика называется **явлением Брюстера**, а соответствующий угол падения – *углом Брюстера*.

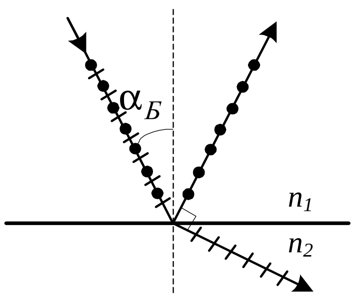


Рис. 35

Математическая формулировка ***закона Брюстера***, утверждающего, что *для каждого диэлектрика найдется такой угол падения света, что отраженный луч оказывается плоскополяризованным*:

$$\operatorname{tg}\alpha_Б = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где $\alpha_Б$ – угол падения луча на границу раздела двух прозрачных диэлектриков, при котором отраженный луч является плоскополяризованным; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления диэлектриков; n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой (рис. 35).

Интенсивность света, прошедшего через первый николь N_1 (поляризатор *П*), с учетом поглощения,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1-k_1),$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый николь; k_1 – коэффициент поглощения света в поляризаторе (рис. 36).

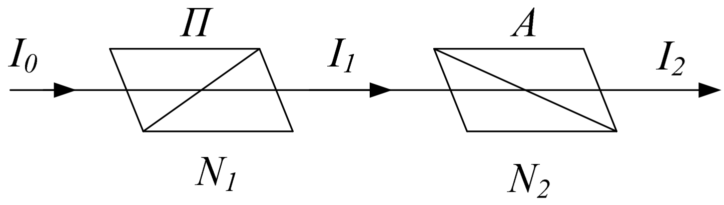


Рис. 36

Уменьшение интенсивности света после второго николя N_2 (анализатора *А*) определяется *законом Малюса*:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi.$$

С учетом потери интенсивности света в анализаторе

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1-k_1)(1-k_2)\cos^2 \varphi,$$

где k_2 – коэффициент поглощения света в анализаторе; φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – соответственно, максимальная и минимальная интенсивность частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Падающий свет – естественный.

Двойное лучепреломление – способность веществ, в частности, кристаллов расщеплять падающий световой луч на два луча – обыкновенный (o) и необыкновенный (e), которые распространяются в различных направлениях с разными фазовыми скоростями. Если показатель преломления необыкновенного луча n_e больше показателя преломления обыкновенного луча n_o, то такие кристаллы называются оптически положительными. Если n_o больше n_e, то такие кристаллы называются оптически отрицательными.

Оптическая разность хода для кристаллической пластинки:

– *в четверть длины волны* $(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda$, $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$;

– *в полдлины волны* $(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$;

– *в целую длину волны* $(n_o - n_e)d = \pm m\lambda$, $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

где знак «+» соответствует отрицательным одноосным кристаллам, знак «$-$» – положительным; λ – длина волны; d – толщина пластинки; n_o, n_e – соответственно, показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном к оптической оси.

Угол поворота плоскости поляризации

для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d;$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha]Cd,$$

где d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha([\alpha])$ – удельное вращение; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Фазовая скорость света

$$\upsilon = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Дисперсия вещества

$$D = \frac{dn}{d\lambda}.$$

Групповая скорость света

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Направление излучения Вавилова – Черенкова

$$\cos\theta = \frac{c}{n\upsilon},$$

где υ – скорость заряженной частицы.

4.3. Квантовая природа излучения

4.3.1. Тепловое излучение

Основные ***характеристики теплового излучения нагретого тела***

Энергетическая светимость r_T – энергия, испускаемая единицей поверхности излучающего тела в единицу времени. Размерность $\left[r_T\right]$ = Вт/м^2.

Испускательная способность тела $r_{\nu,T}$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот. Размерность $\left[r_{\nu,T}\right]$ = Дж/м^2, связь с энергетической светимостью:

$$r_T = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu .$$

Испускательная способность тела $r_{\lambda,T}$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длин волн: $r_{\lambda,T} = r_{\nu,T}\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda$, размерность $\left[r_{\lambda,T}\right]$ = Вт/м^3, связь с интегральной характеристикой:

$$r_T = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda .$$

Поглощательная способность тела $a_{\nu,T}$ – отношение потока энергии, поглощенной телом в единичном интервале частот, к падающему потоку энергии. Это безразмерная величина, не превышающая единицы.

Тело, которое при любой температуре поглощает всю энергию падающего на него электромагнитного излучения, называется ***абсолютно черным телом***; для него $a_{\nu,T} = 1$.

Энергетическая светимость тела

$$r_э = \frac{\Phi_э}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW_э}{dt} = \frac{N}{S},$$

где $\Phi_э$ – поток излучения; S – площадь излучающей поверхности; $dW_э$ – энергия, излучаемая поверхностью S за время dt; N – мощность излучения с поверхности S.

Энергетическая светимость абсолютно черного тела определяется формулой Стефана – Больцмана

$$R_э = \sigma T^4,$$

где T – термодинамическая температура, σ = 5,67·10^{-8} Вт/(м^{2}К^4) – постоянная Стефана – Больцмана.

Энергетическая светимость серого тела

$$r_э = a_T \sigma T^4,$$

где a_T – поглощательная способность серого тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – термодинамическая температура.

Закон смещения Вина: длина волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости в спектре абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad \nu_{\max} = aT,$$

где $\nu_{\max}$ и $\lambda_{\max}$ – частота и длина волны, соответствующие максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; a = 5,9·10^{11} Гц/К; b = 2,9·10^{-3} мК – постоянные Вина.

Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости $R_{\nu,T}$ и $R_{\lambda,T}$ абсолютно черного тела пропорционально третьей и, соответственно, пятой степени абсолютной температуры:

$$R_{\nu,T} = a_1 T^3; \qquad a_1 = 0{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{Вт/(м}^3\text{К}^3\text{)};$$

$$R_{\lambda,T} = b_1 T^5; \qquad b_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{Вт/(м}^3\text{К}^5\text{)}.$$

Формула Рэлея – Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела:

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где kT – средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν (k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура); c – скорость света в вакууме.

Формула Планка:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1},$$

где $r_{\nu,T}$, $r_{\lambda,T}$ – спектральная плотность энергетической светимости черного тела, соответственно, как функция частоты ν и длины волны λ; kT – средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν (k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура); c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка.

Радиационная температура абсолютно черного тела

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{R_э}{\sigma}},$$

где $R_э$ – энергетическая светимость абсолютно черного тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана.

Радиационная температура серого тела

$$T_p = T\sqrt[4]{a_T},$$

где T – истинная температура; a_T – поглощательная способность серого тела.

Закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = R_{\nu,T},$$

где $r_{\nu,T}$ – спектральная плотность энергетической светимости тела; $a_{\nu,T}$ – спектральная поглощательная способность тела; $R_{\nu,T}$ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

4.3.2. Квантово-оптические явления

Энергия кванта (фотона)

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где ν – частота света; λ – длина световой волны; h = 6,62·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Масса фотона

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$

где ε – энергия фотона; λ – длина световой волны; c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка.

Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ – энергия фотона.

Уравнение Эйнштейна для *внешнего фотоэффекта:*

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла (ν – частота падающего фотона, h – постоянная Планка); A – работа выхода электрона из металла; $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

Максимальную скорость электронов можно определить также по величине тормозящей разности потенциалов, при которой фототок обращается в нуль:

$$\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = eU_0.$$

Работа выхода электронов из материала A не зависит от частоты падающего света и может быть определена по таблицам, если известен материал, из которого выбиваются электроны, либо по частоте излучения, соответствующей красной границе фотоэффекта $\nu_к$:

$$A = h\nu_к = \frac{hc}{\lambda_к}.$$

Тогда уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = h\nu_к + eU_0,$$

где U_0 – задерживающее напряжение (напряжение запирания фотона); $\nu_к$ – красная граница фотоэффекта; $\lambda_к$ – длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта.

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho),$$

где $E_e = \frac{Nh\nu}{St}$ – облученность поверхности; ρ – коэффициент отражения; c – скорость света в вакууме; ω – объемная плотность энергии излучения.

При падении света на поверхность под некоторым углом i к нормали к поверхности давление света

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho)\cos^2 i = \omega(1+\rho)\cos^2 i.$$

Закон сохранения энергии при комптоновском рассеивании (***эффекте Комптона***) (рис 37, *а*):

$$E_Ф + E_{e0} = E'_Ф + E_e \quad \text{или} \quad h\nu + m_{e0}c^2 = h\nu' + m_e c^2,$$

где $E_Ф = h\nu$ и $E_Ф = h\nu'$ – соответственно, энергия падающего и рассеянного фотона; $E_{e0} = m_{e0}c^2$ и $E_e = m_e c^2$ – полная энергия электрона, соответственно, до и после столкновения с фотоном; ν – частота падающего фотона; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

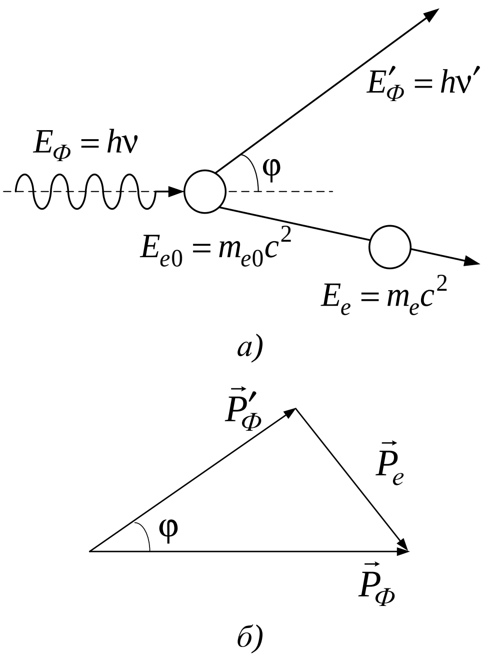


Рис. 37

Масса электрона m_e связана с массой покоя электрона m_{e0} соотношением

$$m_e = \frac{m_{e0}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Закон сохранения импульса при эффекте Комптона (см. рис 37, *б*):

– *в векторной форме*

$$\vec{P}_Ф = \vec{P}'_Ф + \vec{P}_e \quad \text{или} \quad \vec{P}_Ф - \vec{P}'_Ф = \vec{P}_e;$$

– *в скалярном виде*

$$P_Ф^2 + P_Ф'^2 - 2P_Ф P'_Ф \cos\varphi = P_e^2, \text{ или}$$

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\varphi = (m_e\upsilon)^2,$$

где $P_Ф = \frac{h\nu}{c}$ – импульс падающего фотона; $P'_Ф = \frac{h\nu'}{c}$ – импульс рассеянного фотона; $P_e = m_e\upsilon$ – импульс электрона отдачи; φ – угол рассеяния; ν – частота падающего фотона; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме; m_e – масса электрона.

Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеивании (эффекте Комптона)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\lambda_к \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

где λ и λ' – длина волны падающего и рассеянного излучения; m – масса электрона; c – скорость света; φ – угол рассеяния; $\lambda_к = \frac{h}{mc} = 0{,}242 \cdot 10^{-11}$ м – комптоновская длина волны.

4.4. Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

4.4.1. Электронные оболочки атома. Теория Бора

Первый постулат Бора: в атоме существуют стационарные орбиты, на которых электрон не излучает и не поглощает энергию.

Второй постулат Бора: излучение или поглощение в виде кванта с энергией $h\nu$ происходит при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. Величина энергии кванта равна разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается переход:

$$h\nu = \hbar\omega = E_n - E_k,$$

где h – постоянная Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота; E_n, E_k – энергетические уровни с квантовыми числами n и k (т.е. энергии стационарных состояний атома, соответственно, до и после излучения (поглощения); ν – частота излучения.

В стационарных состояниях атом не излучает энергию, при этом электрон движется по круговой стационарной орбите.

По второму закону Ньютона для электрона $\vec{F}_{эл} = m\vec{a}_n$,

$$m\frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{kZe^2}{r_n^2}.$$

Согласно правилу квантования орбит момент импульса электрона кратен $\hbar$:

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar = n\frac{h}{2\pi},$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; Z – заряд ядра; m – масса электрона; e – заряд электрона; r_n – радиус n-й орбиты электрона; υ_n – его скорость на этой орбите; $n = 1, 2, 3 \ldots$ – число, соответствующее номеру орбиты.

Радиус n-й стационарной орбиты в боровской модели атома

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{Z^2 m_e e^2} n^2 = \frac{r_1 n^2}{Z^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots),$$

где $\hbar$ – постоянная Планка; ε_0 – электрическая постоянная; m_e – масса электрона; e – элементарный заряд; r_1 – первый боровский радиус; Z – заряд ядра.

Первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 52{,}8 \text{ пм.}$$

Энергия электрона на n-й стационарной орбите для водородоподобного атома

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Zm_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ эВ} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где Z – заряд ядра; ε_0 – электрическая постоянная; m_e – масса электрона; e – заряд электрона.

При переходе атома из одного стационарного состояния во второе происходит излучение (поглощение) кванта энергии, что и создает спектр излучения.

Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре атома водорода (спектр излучения):

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{или} \quad \nu = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода; $R = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 c} = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; $R' = R \cdot c = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ – также постоянная Ридберга; c – скорость света в вакууме; Z – заряд ядра; $\dfrac{1}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны излучения; n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ – номер орбиты, на которую происходит переход электронов (определяет серию); k – номер орбиты, с которой осуществляется переход электронов (определяет отдельные линии соответствующей серии, $k = n+1,\ n+2, \ldots$); $n = 1$ (серия Лаймана), $n = 2$ (серия Бальмера), $n = 3$ (серия Пашена), $n = 4$ (серия Брэкета), $n = 5$ (серия Пфунда), $n = 6$ (серия Хэмфри).

Спектральные линии характеристического рентгеновского излучения:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где a – постоянная экранирования; R – постоянная Ридберга; n, k – целые, числа $k > n$; λ – длина волны излучения; Z – заряд ядра.

4.4.2. Элементы квантовой механики

Формула де Бройля связывает длину волны λ, соответствующую микрочастице, с ее импульсом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Для *нерелятивистской* частицы $(\upsilon << c)$

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_к}},$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость; $E_к$ – кинетическая энергия частицы.

Для *релятивистской* частицы ($\upsilon \approx c$)

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_к\left(E_к + 2m_0c^2\right)}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; c – скорость света в вакууме; $E_к$ – кинетическая энергия частицы.

Иногда импульс частицы удобно выражать через ее кинетическую энергию $E_к$:

для *нерелятивистской* частицы $(\upsilon << c)$

$$p = \sqrt{2m_0E_к};$$

для *релятивистской* частицы ($\upsilon \approx c$)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)},$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы; c – скорость света в вакууме.

В случае *релятивистской частицы*, когда $pc \approx E_0 = m_0c^2$, связь импульса p с полной энергией E частицы и длиной волны:

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}; \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}.$$

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = E_к + E_0,$$

где $E_к$ – кинетическая энергия частицы; E_0 – энергия покоя частицы.

В случае, когда $E << E_0$,

$$E = pc \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{E}.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга, сопряженных величин для координаты x и проекции импульса p_x на ось x:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

где Δx – неопределенность координаты x частицы; Δp_x – неопределенность проекции импульса частицы на ось x.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии ΔE и времени жизни состояния Δt:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Энергия свободно движущейся частицы массой m

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m},$$

где $p_x = \hbar k$ – импульс частицы; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – квантовое число; λ – длина волны де Бройля.

Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2},$$

где l – ширина ямы; m – масса частицы.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0,$$

где Ψ – волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа; U – потенциальная энергия частицы в данной точке поля; E – энергия частицы.

Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме:

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где l – ширина ямы; x – координата частицы в яме ($0<x<l$); n – квантовое число $(n=1,\ 2,\ 3\ldots)$.

Плотность вероятности нахождения частицы в соответствующей области пространства

$$\omega=|\Psi|^2,$$

где Ψ – волновая функция частицы.

Вероятность нахождения частицы в объеме dV (для стационарных состояний)

$$dW=\left|\Psi^2\right|dV.$$

Вероятность обнаружения частицы в объеме V

$$W=\int_V dW=\int_V\left|\Psi^2\right|dV.$$

Условие нормировки вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi|^2\,dV=1.$$

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$P(x)=\int_{x_1}^{x_2}|\Psi|^2\,dx.$$

4.4.3. Элементы физики атомного ядра

Радиус ядра атома

$$R=R_0M^{1/3},$$

где $R_0=(1{,}3-1{,}7)$ Фм; M – массовое число.

Массовое число ядра (число нуклонов)

$$M=Z+N,$$

где Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

Энергия связи ядра атома

$$E_{св}=\left[Zm_p+(M-Z)m_n-m_я\right]c^2=\left[Zm_H+(M-Z)m_n-m_a\right]c^2,$$

где $m_p, m_n, m_я$ – соответственно, массы протона, нейтрона и ядра; Z – зарядовое число; M – массовое число; $m_H = m_p + m_e$ – масса атома водорода $\left({}_1^1H\right)$; m_a – масса атома.

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + \left(M - Z\right)m_n - m_я$$

или

$$\Delta m = Zm_H + \left(M - Z\right)m_n - m_a.$$

Энергия связи нуклонов в ядре

$$\Delta E_{св} = \Delta mc^2, \text{ Дж} \quad \text{или} \quad \Delta E_{св} = 931{,}5\Delta m, \text{ МэВ},$$

где Δm – дефект массы ядра, измеренный в атомных единицах массы (а.е.м.); c – скорость света в вакууме.

Энергия, выделяемая или поглощаемая в ядерной реакции,

$$\Delta E = c^2\left(\sum m_i - \sum m_k\right), \text{ Дж};$$

$$\Delta E = 931\left(\sum m_i - \sum m_k\right), \text{ МэВ},$$

где $\sum m_i$ – сумма масс исходных частиц; $\sum m_k$ – сумма масс образовавшихся частиц.

Ядерный магнетон

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p},$$

где e – заряд электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка; m_p – масса протона.

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число нераспавшихся ядер радиоактивного элемента к моменту времени t; N_0 – исходное число ядер; λ – постоянная распада.

Число атомов, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Период полураспада (время, за которое распадается половина исходных ядер элемента)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau,$$

где $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ – среднее время жизни радиоактивного элемента; при этом исходное число ядер уменьшается в e раз ($e \approx 2,718$).

Активность радиоактивного элемента (число ядер, распадающихся в единицу времени)

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \text{или} \quad A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Считая $A_0 = \lambda N_0$ – активность радиоактивного вещества в начальный период времени $t = 0$,

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Правила смещения:

для α*-распада*

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He;$$

для β^-*-распада*

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e;$$

для β^+*-распада*

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e.$$

Закон поглощения ионизирующего излучения веществом:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где I_0 – интенсивность падающего на вещество излучения; I – интенсивность излучения после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x; μ – линейный коэффициент поглощения.

ЧАСТЬ 2. ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

Таблица 1

Множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	Множитель	Приставка	Обозначение приставки
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^{9}	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

Таблица 2

Единицы СИ, имеющие специальные наименования

Величина	Размерность	Обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы системы СИ
1	2	3	4
Основные единицы системы СИ			
Длина	метр	м	
Масса	килограмм	кг	
Время	секунда	с	
Сила электрического тока	ампер	А	
Термодинамическая температура	кельвин	К	
Количество вещества	моль	моль	
Сила света	кандела	кд	
Дополнительные единицы системы СИ			
Плоский угол	радиан	рд	
Телесный угол	стерадиан	ср	
Производные единицы системы СИ			
Частота	Герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	Ньютон	Н	$м·кг·с^{-2}$
Давление, механическое напряжение	Паскаль	Па	$м^{-1}·кг·с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	Джоуль	Дж	$м^{2}·кг·с^{-2}$
Мощность, поток энергии	Ватт	Вт	$м^{2}·кг·с^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	Кулон	Кл	с·А
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	Вольт	В	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-1}$

Окончание табл. 2

1	2	3	4
Электрическая емкость	Фарад	Ф	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{4}·А^{2}$
Электрическое сопротивление	Ом	Ом	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-2}$
Электрическая проводимость	Сименс	См	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{3}·А^{2}$
Магнитный поток	Вебер	Вб	$м^{-2}·кг^{1}·с^{-2}·А^{-1}$
Магнитная индукция	Тесла	Тл	$кг·с^{-2}·А^{-1}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	Генри	Гн	$м^{2}·кг·с^{-2}·А^{-2}$
Световой поток	Люмен	лм	кд·ср
Освещенность	Люкс	лк	$м^{-2}$·кд·ср
Активность радионуклида (изотопа)	Беккерель	Бк	$с^{-1}$
Поглощенная доза излучения	Грей	Гр	$м^{2}·с^{-2}$

Таблица 3

Перевод некоторых единиц в СИ

1 Å (ангстрем) = 10^{-10} м	1 ат (техническая атмосфера) = $9{,}8·10^{4}$ Па
1 га = 10^{4} $м^{2}$	1 кгс/$см^{2}$ = $9{,}8·10^{4}$ Па
1 $мм^{2}$ = 10^{-6} $м^{2}$	1 м/мин = 1/60 м/с
1 $см^{2}$ = 10^{-4} $м^{2}$	1 км/ч = 1000/3600 м/с = 5/18 м/с
1 $дм^{2}$ = 10^{-2} $м^{2}$	1 Кл/$см^{2}$ = 10^{4} Кл/$м^{2}$
1 $мм^{3}$ = 10^{-9} $м^{3}$	1 об/мин = 1/60 об/с
1 $см^{3}$ = 10^{-6} $м^{3}$	1 км/с = 10^{3} м/с
1 $дм^{3}$ = 1 л = 10^{-3} $м^{3}$	1 В/см = 100 В/м
1 ч = 3600 с	1кВ/см=10^{5}В/м
1 мин = 60 с	1 Ом·$мм^{2}$/м = 10^{-6} Ом·м
1 мг = 10^{-6} кг	1 Вт·ч = $3{,}6·10^{3}$ Дж
1 г = 10^{-3} кг	1 гВт·ч = $3{,}6·10^{5}$ Дж
1 т = 10^{3} кг	1 кВт·ч = $3{,}6·10^{6}$ Дж
1 л.с. = 736 Вт	1 МВт·ч = $3{,}6·10^{9}$ Дж
Т К = t °С + 273	1 г/$см^{3}$ = 10^{3} кг/$м^{3}$
0 °С = 273 К	1 бар = 10^{5} Па
1 а.е. (астрономическая единица) = = $1{,}496·10^{11}$ м	1 кал = 4,186 Дж
1 световой год = $9{,}46·10^{15}$ м	1 ккал = 4186 Дж
1 пк (парсек) = $3{,}086·10^{16}$ м	1 год = 365,25 сут = $3{,}16·10^{7}$ с
1 эВ = $1{,}6·10^{-19}$ Дж	1 сут = 86400 с
1 а.е.м. = $1{,}66·10^{-27}$ кг	1° = $1{,}75·10^{-2}$ рад
1 мм рт.ст. = 133 Па	1' = $2{,}91·10^{-4}$ рад
1 атм = 760 мм рт. ст. = $1{,}01·10^{5}$ Па	1'' = $4{,}85·10^{-6}$ рад

Таблица 4

Основные физические постоянные

Абсолютный ноль температуры	t = –273,15 °С = 0 К
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66054\cdot10^{-27}$ кг = 931,494 МэВ/c^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Заряд α-частицы	$q_\alpha = 2e = 3{,}204\cdot10^{-19}$Кл
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м = $12{,}57\cdot10^{-7}$ Гн/м
Магнитный момент протона	$\mu_p = 1{,}4106\cdot10^{-26}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 9{,}2848\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Масса α-частицы	$m_\alpha = 6{,}644\cdot10^{-27}$ кг
Масса изотопа ${}_1^1H$	$m_H = 1{,}6736\cdot10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}674928\cdot10^{-27}$ кг = 939,56563 МэВ/с^2 = = 1,008665 а.е.м.
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672623\cdot10^{-27}$ кг = 938,2723 МэВ/с^2 = = 1,0072765 а.е.м.= 1836,1527 m_e
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг = 0,511 МэВ/с^2
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22{,}414\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Нормальные условия: давление газа температура	$p_0 = 101325$ Н/м^2 $T = 273$ К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02214\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}3807\cdot10^{-23}$Дж/К ($8{,}6174\cdot10^{-5}$ эВ/К)
Постоянная Вина в первом законе (смещения)	$C' = 2{,}90\cdot10^{-3}$ м·К
Постоянная Вина во втором законе	$C'' = 1{,}30\cdot10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5)
Постоянная Планка	$h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж·с $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}055\cdot10^{-34}$Дж·с = $6{,}582\cdot10^{-16}$ эВ·с
Постоянная Ридберга	$R' = 3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$; $R = 1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}65\cdot10^{4}$ Кл/моль
Радиус первой боровской орбиты	$a_1 = 5{,}29\cdot10^{-11}$ м
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458\cdot10^{8}$ м/с
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(К·моль)
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}$ Ф/м (Кл^2/Н·м)
Элементарный заряд	$e = 1{,}602\cdot10^{-19}$ Кл
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж = 13,6 эВ
Энергия, соответствующая 1 а.е.м.	931,50 МэВ
Ядерный магнетон	$\mu_я = 5{,}05\cdot10^{-27}$ Дж/Тл (Ф/м)

Таблица 5

Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,381 \cdot 10^{6}$ м
Средняя плотность Земли	$5,518 \cdot 10^{3}$ кг/м^3
Масса Земли	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6,961 \cdot 10^{8}$ м
Средняя плотность Солнца	$1,410 \cdot 10^{3}$ кг/м^3
Масса Солнца	$1,989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,737 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7,351 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,496 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,844 \cdot 10^{8}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 сут = $2,36 \cdot 10^{6}$ с
Период обращения Земли вокруг оси (сутки)	24 ч 3 мин 56,6 с или $8,664 \cdot 10^{3}$ с
Большая полуось орбиты Земли	$1,496 \cdot 10^{11}$ м
Средняя орбитальная скорость Земли	29,765 км/с
Период обращения Земли вокруг Солнца (год)	$3,156 \cdot 10^{7}$ с
Светимость Солнца	$3,826 \cdot 10^{26}$ Дж/с

Таблица 6

Плотность ρ некоторых твердых веществ

Вещество	$\rho, 10^3$ кг/м^3	Вещество	$\rho, 10^3$ кг/м^3	Вещество	$\rho, 10^3$ кг/м^3
Алмаз	3,50	Железо (сталь)	7,87	Олово	7,30
Алюминий	2,70	Золото	19,3	Опал	2,20
Барий	3,50	Инвар	7,90	Платина	21,5
Бериллий	1,85	Иридий	22,4	Плутоний	19,8
Бетон	2,20	Калий	0,86	Пробка	0,24
Бор	2,34	Каменная соль	2,18	Рубидий	1,53
Бронза	8,30	Кирпич	1,80	Свинец	11,3
Ванадий	6,02	Кобальт	8,90	Серебро	10,5
Висмут	9,78	Латунь	8,50	Стекло	2,60
Вольфрам	19,35	Лед	0,95	Тантал	16,6
Германий	5,32	Литий	0,53	Титан	4,50
Гранит	2,60	Магний	1,74	Топаз	3,60
Графит	1,60	Марганец	7,30	Уголь (антрацит)	1,60
Дерево:		Медь	8,96	Уран	19,1
дуб	0,80	Мрамор	2,70	Хром	7,19
береза	0,60	Молибден	10,2	Цезий	1,87
сосна	0,50	Натрий	0,97	Цинк	7,13
Дюралюминий	2,80	Никель	8,91	Фарфор	2,30

Таблица 7

Плотность ρ некоторых газов при нормальных условиях ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К)

Газы	ρ, кг/м^3	Газы	ρ, кг/м^3
Азот	1,25	Криптон	3,73
Аммиак	0,77	Ксенон	5,89
Аргон	1,78	Метан	0,72
Водород	0,09	Неон	0,90
Воздух	1,29	Углекислый газ	1,98
Гелий	0,18	Фтор	1,69
Кислород	1,43	Хлор	3,21

Таблица 8

Плотность ρ некоторых жидких веществ

Жидкости	ρ, 10^3 кг/м^3	Жидкости	ρ, 10^3 кг/м^3
Азотная кислота	1,50	Масло трансформаторное	0,87
Ацетон	0,80	Молоко	1,03
Бензин	0,70	Нефть	0,84
Бензол	0,88	Олифа	0,94
Вода	1,00	Ртуть	13,6
Глицерин	1,26	Серная кислота	1,83
Дизельное топливо	0,86	Сероуглерод	1,26
Масло касторовое	0,90	Скипидар	0,87
Керосин	0,80	Соляная кислота	1,10
Мазут	0,95	Спирт	0,79
Масло (смазочное)	0,90	Тяжелая вода	1,10
Масло растительное	0,94	Эфир	0,72

Таблица 9

Моменты инерции некоторых однородных тел

Тело	Относительно оси	Момент инерции J
Тонкий стержень длиной l	перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Тонкий стержень длиной l	перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец	$\frac{ml^2}{3}$
Круглый диск или цилиндр радиусом R	перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр	$\frac{mR^2}{2}$
Шар радиусом R	совпадающей с диаметром	$0{,}4mR^2$
Тонкая труба или кольцо радиусом R	совпадающей с осью трубы	mR^2
Круглый цилиндр длиной l и радиусом R	перпендикулярной к оси цилиндра и проходящей через его середину	$m\left(\frac{l^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right)$
Прямоугольный параллелепипед размерами $2a$, $2b$, $2c$	проходящей через центр и параллельной ребру длиной $2a$	$m\frac{b^2+c^2}{3}$

Таблица 10

Упругие свойства некоторых твердых тел

Вещество	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Предел прочности σ, МПа	Коэффициент Пуассона, ν
Алюминий	63 – 70	25 – 26	50 – 110	0,31 – 0,36
Вольфрам	380	140	1000	0,3
Гранит	35 – 50	14 – 44		0,1 – 0,15
Железо	196	76	170 – 294	0,28
Золото	81	28,5	140	0,4
Кварц	73	31		0,17
Кобальт	206	78,5	240	0,32
Константан	160	61	290	0,33
Латунь	89 – 97	34 – 36	100 – 400	0,32 – 0,42
Медь	98	44	245	0,35
Никель	210	78	20	0,28
Свинец	16	6	290	0,44
Серебро	74	27	785	0,37
Сталь	216	76	380 – 470	0,25 – 0,3
Стекло	49 – 78	18 – 30	60 – 120	0,2 – 0,3
Титан	116	44	250	0,32
Чугун	100 – 150	44	250 – 550	0,23 – 0,27

Таблица 11

Модуль упругости (E) и предел прочности (σ_B) древесины при нормальном давлении и температуре 20 °C

Порода древесины	E, ГПа		σ_B, ГПа	
	Растяжение	Сжатие	Растяжение	Сжатие
Береза	18,1	15,8	161,0	46,5
Дуб	14,1	14,0	113,5	51,0
Ель	14,3	14,2	100,5	39,0
Ольха	11,9	12,8	96,5	36,5
Осина	15,4	12,6	120,0	37,5
Сосна	11,7	11,7	101,0	41,5
Тополь	12,2	13,7	87,0	34,5
Ясень	14,0	15,0	139,0	50,0

Таблица 12

Удельная теплоемкость и удельная теплота парообразования некоторых жидкостей

Жидкость	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота парообразования, кДж/кг
Ацетон	2180	524
Бензин	2090	230 – 310
Бензол	1705	396
Вода	4200	2300
Глицерин	2400	825
Керосин	2140	209 – 230
Масло:		
касторовое	1800	215
трансформаторное	2090	211
Нефть	1670 – 2090	209 – 230
Скипидар	1760	560
Спирт	2500	900
Ртуть	138	293
Эфир этиловый	2340	356

Таблица 13

Теплотворная способность газов

Газ	Теплотворная способность, q, МДж/м^3	Газ	Теплотворная способность, q, МДж/м^3
Аммиак	14,2	Метан	35,9
Ацетилен	56,9	Пропан	93,4
Бутан	124	Сероводород	23,7
Бытовой газ	15,9	Этан	64,5
Водород	10,8	Этилен	60,0

Таблица 14

Удельная теплота плавления, удельная теплоемкость и температурный коэффициент линейного расширения некоторых твердых веществ

Вещество	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюминий	393	896	2,3
Вольфрам	185	130	4,5
Железо	270	450	1,2
Золото	67	130	1,4
Калий	61	763	7,96
Латунь	270	380	1,7 – 1,9
Лед	335	2100	1,2
Литий	628	4400	4,71
Магний	373	1300	0,58
Медь	213	395	1,6
Натрий	113	883	7,15
Никель	175	460	1,4
Нихром	175	500	1,4
Олово	58,6	230	2,7
Платина	113	117	0,89
Серебро	87,3	234	1,9
Свинец	22,6	126	2,9
Сталь	205	460	1,06
Стекло	84	670 – 830	1
Цинк	117	391	2,9
Чугун	110	500	0,9 – 1,1

Таблица 15

Удельная теплота сгорания твердых и жидких веществ

Твердые тела	Удельная теплота сгорания, q, МДж/кг	Жидкости	Удельная теплота сгорания, q, МДж/кг
Антрацит	31	Бензин	42
Бурый уголь (брикеты)	21	Бензол	40
Дерево свежее	8	Дизельное топливо	43
Дерево сухое	15	Керосин	41
Древесный уголь	31	Мазут	41
Кокс	31	Нефть	41
Торф	15	Спирт	27

Таблица 16

Удельная теплоемкость газов

Газы	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	Газы	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)
Азот	1,04	Кислород	0,91
Водяной пар	2,13	Метан	2,48
Водород	14,27	Окись углерода	1,04
Воздух	1,01	Пары спирта	1,2
Гелий	5,20	Хлор	0,5
Двуокись углерода	0,88		

Таблица 17

Скорость звука в различных средах

Вещество	Скорость, м/с	Вещество	Скорость, м/с
Вода	1485	Пробка	500
Водород	1286	Резина	54
Воздух	332	Свинец	1300
Гранит	3950	Сталь	5100
Дерево	4000	Стекло	5000
Кирпич	3480	Углекислый газ	258

Таблица 18

Температура кипения и молярная теплота парообразования некоторых веществ

Вещество	Температура кипения, $t_{кип}$, °C	Молярная теплота парообразования, r_m, кДж/моль
Азот	–196	5,59
Алюминий	2520	293
Аргон	–186	6,5
Ацетон	56,2	29,09
Бензол	80	30,76
Висмут	1552	177
Вода	100	40,683
Водород	–253	0,916
Вольфрам	5680	770
Гелий	–268	0,0837
Железо	2872	350
Золото	2877	331
Йод	184	41,8
Калий	761	77
Кислород	–183	6,833
Криптон	–153	9,1
Медь	2543	1302
Натрий	886	90,1
Никель	2800	370
Олово	2337	295,8
Платина	3827	511
Ртуть	357	59
Свинец	1745	178
Серебро	2167	251
Соль поваренная	1490	138
Спирт	79	39
Титан	3287	410
Уран	4030	494
Хлор	–34,1	20,41
Цинк	906,2	115,3

Таблица 19

Температура плавления и молярная теплота плавления некоторых веществ

Вещество	Температура плавления, $t_{пл}$, °C	Молярная теплота плавления, λ_m, кДж/моль
Азот	–210,012	0,7207
Алюминий	660,24	10,8
Аргон	–189,30	1,190
Ацетон	–95,4	5,72
Бензол	5,51	9,837
Висмут	217,4	11,0
Вода	0,00	6,013
Водород	–259,19	0,117
Вольфрам	3420	35,1
Гелий	–271,4	0,007
Глицерин	20	18,47
Железо	1538	13,8
Золото	1063,4	12,6
Йод	113,6	15,77
Калий	63,5	2,33
Кислород	–218,79	0,4459
Криптон	–157,37	1,64
Медь	1083	13,0
Натрий	97,9	2,60
Никель	1455	17,6
Олово	232	7,039
Платина	1772	20
Ртуть	–38,89	2,30
Свинец	327,44	4,77
Серебро	960,5	11,3
Соль поваренная	801	28,2
Спирт	–113,3	5,02
Титан	1608	15,1
Уран	1134	9,2
Хлор	–101,03	6,61
Цинк	419,5	7,2

Таблица 20

Теплопроводность некоторых твердых тел

Вещество	Теплопроводность, λ, Вт/м·К	Вещество	Теплопроводность, λ, Вт/м·К
Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавленый	1,37	Сталь	46,3
Медь	390	Эбонит	0,174

Таблица 21

Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов в нормальных условиях

Газ	Эффективный диаметр, d, Нм	Динамическая вязкость, η, мкПа $\cdot$ с	Теплопроводность, λ, мВт/м·К
Азот	0,38	16,6	24,3
Аммиак	0,30	9,8	24,4
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Водяной пар	0,46	8,3 – 9,2	15,8
Воздух	0,29	17,2	24,1
Гелий	0,22	19,9	152
Кислород	0,36	19,8	24,4
Криптон	0,31	25,5	9,6
Метан	0,44	10,4	30,7
Углекислый газ	0,45	14,1	16,6
Хлор	0,54	13,7	8,8

Таблица 22

Молярная масса некоторых металлов, у которых на каждый атом приходится в среднем по одному свободному электрону

Металл	Молярная масса, M, кг/моль
Литий	0,0069
Калий	0,0391
Рубидий	0,0855
Цезий	0,1329
Медь	0,0635
Серебро	0,1079
Золото	0,1970

Таблица 23

Давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах

Температура, t, °C	Давление, $P_н$, Па	Температура, t, °C	Давление, $P_н$, Па	Температура, t, °C	Давление, $P_н$, Па
–5	400	8	1070	40	7335
0	609	9	1145	50	12302
1	656	10	1225	60	19807
2	704	12	1396	70	31122
3	757	14	1596	80	47215
4	811	16	1809	90	69958
5	870	20	2328	100	101080
6	932	25	3165	150	486240
7	1025	30	4229	200	1549890

Таблица 24

Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

Температура, t, °C	Удельная теплота парообразования, r, 10^5 Дж/кг	Температура, t, °C	Удельная теплота парообразования, r, 10^5 Дж/кг
0	25,0	180	20,1
10	24,7	200	19,4
20	24,5	220	18,6
30	24,0	250	17,0
50	23,8	300	14,0
70	23,2	350	8,92
90	22,8	370	4,40
100	22,6	374	1,1
120	22,0	374,15	0

Таблица 25

Коэффициент поверхностного натяжения и динамическая вязкость жидкостей при 20 °C

Жидкость	Коэффициент поверхностного натяжения, σ, мН/м	Динамическая вязкость, η, мПа·с
Анилин	42,9	0,46
Ацетон	23,70	0,322
Бензол	28,88	0,648
Вода	72,88	1,002
Глицерин	59,40	1480
Касторовое масло	35,00	987
Керосин	28,90	1,50
Ртуть	465	1,554
Спирт	22,80	1,20
Эфир	17,00	0,24

Таблица 26

Критические параметры и постоянные Ван-дер-Ваальса

Газ	$T_{кр}$, К	$P_{кр}$, МПа	$V_{кр}$, 10^6 м^3/моль	a, Н·м^4/моль^2	b, 10^{-6} м^3/моль
Азот	126,25	3,399	92,1	0,1368	38,607
Аммиак	405,45	11,283	73,1	0,4249	37,347
Аргон	150,65	4,86	75,2	0,1361	32,191
Водород	33,240	1,297	65,5	0,0248	26,635
Водяной пар	647,30	22,12	56,3	0,5524	30,413
Воздух	413,80	3,77	63,2	1,3247	144,09
Гелий	5,20	0,229	57,5	0,0034	23,599
Кислород	154,78	5,081	78,1	0,1375	31,662
Криптон	209,38	5,50	92,3	0,2324	39,549
Неон	44,4	2,72	76,3	0,2090	0,170
Озон	261,05	5,53	89,4	0,3592	49,038
Ртуть	1763	153,5	36,5	0,5905	11,936
Углекислый газ	304,15	7,387	94,1	0,3652	42,792
Фтор	144	5,6	66,2	0,1085	26,854
Хлор	417	7,71	124	0,6576	56,202

Таблица 27

Подвижность ионов в электролитах

Анионы	Подвижность, u, 10^{-8} м^2/(В·с)	Катионы	Подвижность, u, 10^{-8} м^2/(В·с)
NO_3^-	6,4	H^+	32,6
Cl^-	6,8	K^+	6,7
O^{2-}	7,3	Ag^+	5,6

Таблица 28

Подвижность ионов в газах

Газ	Положительные ионы, u, м^2/(В·с)	Отрицательные ионы, u, м^2/(В·с)
Азот	$1{,}27\cdot10^{-4}$	$1{,}81\cdot10^{-4}$
Водород	$5{,}4\cdot10^{-4}$	$7{,}4\cdot10^{-4}$
Воздух	$1{,}4\cdot10^{-4}$	$1{,}9\cdot10^{-4}$

Таблица 29

Электрохимический эквивалент веществ

Анионы	Электрохимический эквивалент, 10^{-6} кг/Кл	Катионы	Электрохимический эквивалент, 10^{-6} кг/Кл
Cl^{-}	0,367	Ag^{+}	1,118
NO_3^{-}	0,643	Al^{3+}	0,093
O^{2-}	0,083	Au^{3+}	0,681
OH^{-}	0,177	Cu^{2+}	0,329
S^{2-}	0,167	Fe^{3+}	0,193
SO_4^{2-}	0,499	H^{+}	0,105
CO_3^{2-}	0,311	Na^{+}	0,238
		Ni^{2+}	0,304
		Zn^{2+}	0,339

Таблица 30

Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых проводников при температуре 20 °С

Проводник	Удельное сопротивление, ρ, 10^{-9} Ом·м	Температурный коэффициент, α, 10^{-3} $К^{-1}$	Проводник	Удельное сопротивление, ρ, 10^{-9} Ом·м	Температурный коэффициент, α, 10^{-3} $К^{-1}$
Алюминий	26	3,6	Никель	973	6,2
Висмут	1065	4,0	Ниобий	161	3,43
Вольфрам	55	4,8	Нихром	1120	0,4
Графит	3900	$-0{,}8\cdot10^{3}$	Олово	120	4,2
Железо	98	6,2	Платина	105	3,8
Золото	20	4,0	Ртуть	958	0,9
Индий	90	4,7	Свинец	205	4,2
Кадмий	76	4,2	Серебро	16	4,1
Кобальт	62	6,6	Сталь	100	1 – 4
Константан	500	0,05	Тантал	135	3,5
Манганин	430	0,01	Титан	420	5,46
Медь	17	4,2	Хром	140	3,0
Молибден	57	4,3	Цинк	59	3,7
Никелин	400	0,1	Чугун	500 – 800	1,0

Таблица 31

Удельное сопротивление некоторых диэлектриков

Изолятор	Удельное сопротивление, ρ, Ом·м
Вода	$10^3 – 10^4$
Воздух	$10^{15} – 10^{18}$
Гетинакс	$10^9 – 10^{12}$
Древесина сухая	$10^9 – 10^{10}$
Кварц	10^9
Масло трансформаторное	$10^{10} – 10^{13}$
Мрамор	10^8
Парафин	10^{14}
Пенопласт	10^{11}
Резина	$10^{11} – 10^{12}$
Слюда	$10^{11}– 10^{15}$
Стекло	$10^9 – 10^{13}$
Стеклотекстолит	$10^{11} – 10^{12}$
Фарфор	10^{12}
Шифер	10^6
Эбонит	10^{16}
Янтарь	10^{11}

Таблица 32

Относительная диэлектрическая проницаемость

Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε
Бензин	2,0	Мрамор	8 – 10
Бумага	3,5	Парафин	2,0
Вода	81	Парафинированная бумага	2,0
Воск	7,8	Плексиглас	3,5
Винипласт	3,5	Полиэтилен	2,3
Гетинакс	5 – 7,5	Полихлорвинил	5,0
Глицерин	43	Скипидар	2,3
Дерево	4,3	Слюда	7,5
Керосин	2,0	Спирт	27
Канифоль	3,5	Стекло	7,0
Масло		Фарфор	5,0
касторовое	4,5	Эбонит	2,6
трансформаторное	5,0	Янтарь	2,7 – 2,9

Таблица 33

Относительная магнитная проницаемость

Парамагнетик	Относительная магнитная проницаемость, μ	Диамагнетик	Относительная магнитная проницаемость, μ	Ферромагнетик	Относительная магнитная проницаемость, μ
Алюминий	1,000023	Висмут	0,999824	Железо	8000
Ванадий	1,000343	Вода	0,999991	Кобальт	175
Вольфрам	1,000176	Водород	0,9999988	Никель	1100
Кислород	1,0000019	Золото	0,999961	Пермаллой	250000
Магний	1,0000174	Медь	0,9999897	Чугун	600-800
Марганец	1,00100	Свинец	0,9999841		
Олово	1,0000022	Серебро	0,999981		
Платина	1,000250	Цинк	0,999988		

Таблица 34

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетики	Магнитная восприимчивость, $\chi, 10^{-6}$	Диамагнетики	Магнитная восприимчивость, $\chi, 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	–0,063
Алюминий	23	Бензол	–7,5
Воздух	0,38	Висмут	–176
Вольфрам	176	Вода	–9,0
Жидкий кислород	3400	Каменная соль	–12,6
Кислород	1,9	Кварц	–15,1
Марганец	121	Медь	–10,3
Платина	360	Стекло	–12,3
Эбонит	14		

Таблица 35

Температура Кюри некоторых веществ

Вещество	Температура Кюри, t, °С	Вещество	Температура Кюри, t, °С
Железо	770	Сульфид хрома	30
Кобальт	1330	Гадолиний	20
Никель	360	Тербий	–50

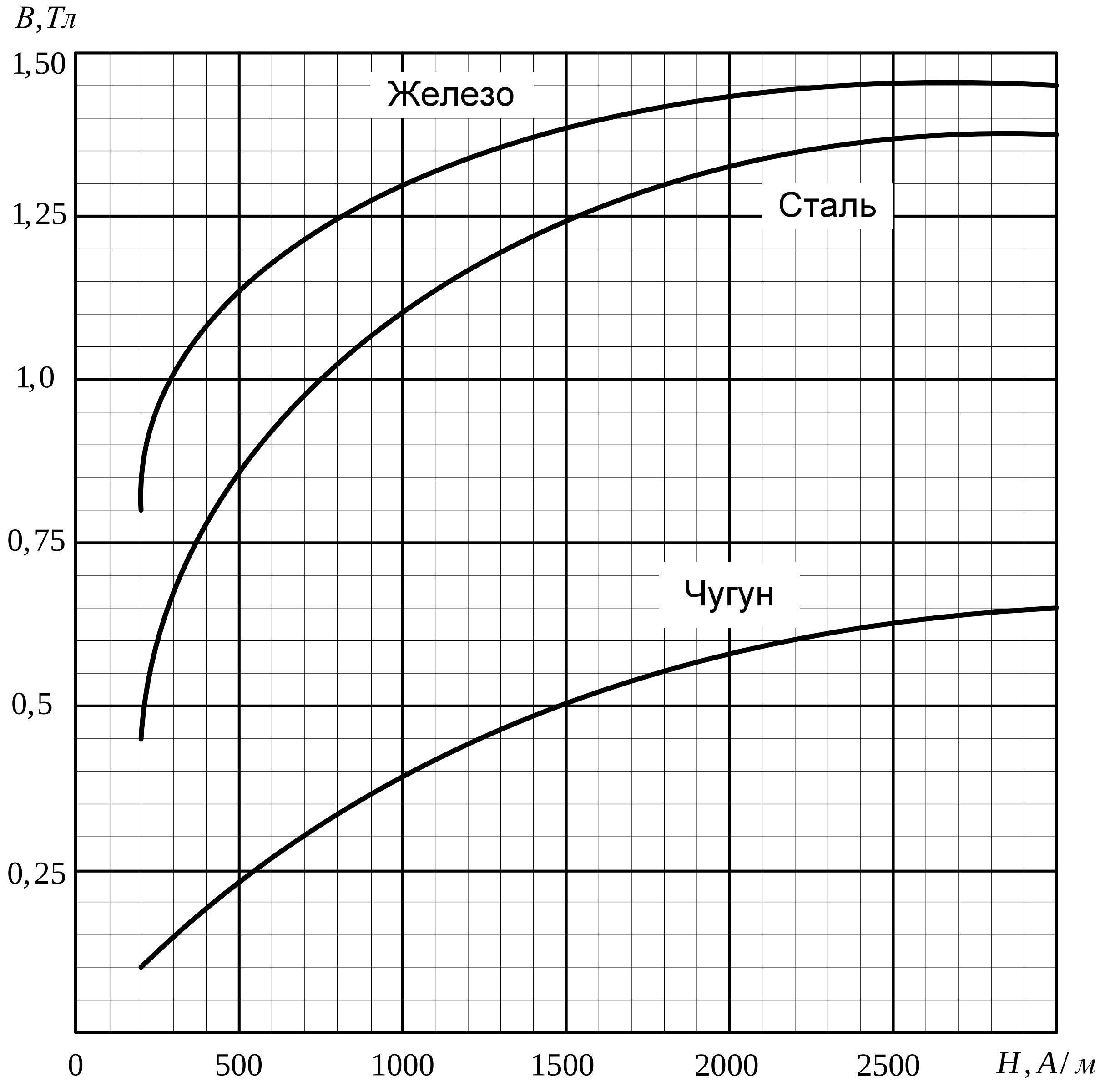


График зависимости магнитной индукции *B* от напряженности *H* магнитного поля для некоторых веществ

Таблица 36

Работа выхода электронов из металлов

Металл	Работа выхода, эВ	Металл	Работа выхода, эВ
Алюминий	4,25	Натрий	2,50
Барий	2,29	Никель	4,50
Вольфрам	4,5	Платина	5,32
Железо	4,36	Рубидий	2,10
Золото	5,10	Серебро	4,30
Калий	2,20	Титан	3,95
Литий	2,38	Цезий	1,81
Медь	4,40	Цинк	4,24

Таблица 37

Показатель преломления некоторых жидкостей и твердых веществ для желтой линии натрия (λ = 589,3 нм) при температуре 20 °С

Жидкость	Показатель преломления, n	Твердое вещество	Показатель преломления, n
Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Вода	1,33	Кварц	1,54
Глицерин	1,47	Корунд	1,77
Масло льняное	1,60	Лед	1,31
Скипидар	1,46	Слюда	1,60
Спирт	1,33	Стекло	1,5 – 1,9
Толуол	1,49	Янтарь	1,55

Таблица 38

Предельные углы полного отражения некоторых веществ

Вещество	Предельный угол полного отражения	Вещество	Предельный угол полного отражения
Алмаз	24^0	Спирт	47^0
Бензин	45^0	Стекло	$(30\text{-}42)^0$
Вода	49^0	Эфир	47^0
Глицерин	43^0		

Таблица 39

Энергия ионизации

Вещество	Энергия ионизации, E_i, Дж	Энергия ионизации, E_i, эВ
Водород	$2{,}18\cdot10^{-18}$	13,6
Гелий	$3{,}94\cdot10^{-18}$	24,6
Литий	$1{,}21\cdot10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66\cdot10^{-18}$	10,4

Таблица 40

Шкала электромагнитных волн

Диапазон	Длина волны, см	Частота, Гц	Источник, основной метод возбуждения
Радиоволна	$3 \cdot 10^{3} – 5 \cdot 10^{-3}$	$10^{7} – 6 \cdot 10^{12}$	Переменные токи в проводниках (контурах) и электронных потоках
Инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-2} – 8 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{11} – 3{,}75 \cdot 10^{14}$	Излучение быстрых заряженных частиц. Атомные процессы, возбуждаемые тепловыми и электрическими воздействиями
Видимый свет	$8 \cdot 10^{-5} – 4 \cdot 10^{-5}$	$3{,}75 \cdot 10^{14} – 7{,}5 \cdot 10^{14}$	
Ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-5} – 10^{-7}$	$7{,}5 \cdot 10^{14} – 3 \cdot 10^{17}$	
Рентгеновские лучи	$2 \cdot 10^{-7} – 6 \cdot 10^{-10}$	$1{,}5 \cdot 10^{17} – 5 \cdot 10^{19}$	Атомные процессы при воздействии электронов и ядерных частиц
γ-лучи	$10^{-8} – 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{18} – 3 \cdot 10^{21}$	Ядерные процессы

Таблица 41

Излучение оптического диапазона

Вид излучения	Диапазон длин волн, м	Диапазон частот, Гц
Инфракрасное излучение	$10^{-3} – 7{,}6 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{11} – 4 \cdot 10^{14}$
Видимое излучение	$7{,}6 \cdot 10^{-7} – 3{,}8 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14} – 8 \cdot 10^{14}$
Красные волны	$7{,}6 \cdot 10^{-7} – 6{,}2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14} – 4{,}8 \cdot 10^{14}$
Оранжевые волны	$6{,}2 \cdot 10^{-7} – 5{,}9 \cdot 10^{-7}$	$4{,}8 \cdot 10^{14} – 5{,}1 \cdot 10^{14}$
Желтые волны	$5{,}9 \cdot 10^{-7} – 5{,}6 \cdot 10^{-7}$	$5{,}1 \cdot 10^{14} – 5{,}4 \cdot 10^{14}$
Зеленые волны	$5{,}6 \cdot 10^{-7} – 5{,}0 \cdot 10^{-7}$	$5{,}4 \cdot 10^{14} – 6{,}0 \cdot 10^{14}$
Голубые волны	$5{,}0 \cdot 10^{-7} – 4{,}8 \cdot 10^{-7}$	$6{,}0 \cdot 10^{14} – 6{,}2 \cdot 10^{14}$
Синие волны	$4{,}8 \cdot 10^{-7} – 4{,}5 \cdot 10^{-7}$	$6{,}2 \cdot 10^{14} – 6{,}7 \cdot 10^{14}$
Фиолетовые волны	$4{,}5 \cdot 10^{-7} – 3{,}8 \cdot 10^{-7}$	$6{,}7 \cdot 10^{14} – 8{,}0 \cdot 10^{14}$
Ультрафиолетовое излучение	$3{,}8 \cdot 10^{-7} – 8 \cdot 10^{-8}$	$8{,}0 \cdot 10^{14} – 3{,}7 \cdot 10^{15}$
Рентгеновское излучение	$8 \cdot 10^{-8} – 10^{-11}$	$3{,}7 \cdot 10^{15} – 3 \cdot 10^{19}$
Гамма-излучение	10^{-11} и менее	$3 \cdot 10^{19}$ и более

Таблица 42

Свойства полупроводников

Полупроводники	Ширина запрещенной зоны при 0 К, эВ	Подвижность электронов при 18 °С, $см^2/(В \cdot с)$	Подвижность дырок при 18 °С, $см^2/(В \cdot с)$
Германий	0,74	4500	3500
Кремний	1,17	1300	500
GaSb	0,81	4000	1400
InAs	0,36	33000	460
InSb	0,23	77000	750

Таблица 43

Масса и энергия покоя некоторых частиц и легких ядер

Частица	Масса, m_0		Энергия $E_0 = m_0c^2$	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8{,}16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$	938,3
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939,6
Дейтрон	$3{,}344 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3{,}01 \cdot 10^{-10}$	1876
α-частица	$6{,}645 \cdot 10^{-27}$	4,00150	$5{,}97 \cdot 10^{-10}$	3727
π-мезон, π^0 (нейтральный) мезон	$2{,}406 \cdot 10^{-28}$	0,14490	$2{,}16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблица 44

Коэффициент качества различных видов излучения

Излучение	Коэффициент качества, k
Рентгеновское и γ-излучение	1
β-излучение	1
Нейтроны $E < 10$ кэВ	5
E = 10 – 100 кэВ	10
E = 100 кэВ – 2 МэВ	20
E = 2 – 20 МэВ	10
$E > 20$ МэВ	5
Протоны $E > 2$ МэВ	5
α-излучение и другие тяжелые ядра	20

Схемы радиоактивного распада ядер урана и тория

(на схемах указаны виды распада ядер и период полураспада $T_{1/2}$)

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[4{,}47\cdot10^{9}\ \text{лет}]{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[24{,}1\ \text{сут}]{\beta^-} {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow[1{,}17\ \text{мин}]{\beta^-} {}^{234}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[2{,}48\cdot10^{5}\ \text{лет}]{\beta^-} {}^{230}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[8\cdot10^{4}\ \text{лет}]{\alpha}$$

$${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow[1600\ \text{лет}]{\alpha} {}^{222}_{86}Rn \xrightarrow[3{,}82\ \text{сут}]{\alpha} {}^{218}_{84}Po \xrightarrow[3{,}05\ \text{мин}]{\alpha} {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} \xrightarrow[26{,}8\ \text{мин}]{\beta^-} {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} \xrightarrow[19{,}7\ \text{мин}]{\beta^-}$$

$${}^{214}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[1{,}6\cdot10^{-4}\ \text{с}]{\alpha} {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} \xrightarrow[22{,}3\ \text{года}]{\beta^-} {}^{210}_{83}\mathrm{Bi} \xrightarrow[5{,}01\ \text{сут}]{\beta^-} {}^{210}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[138{,}4\ \text{сут}]{\alpha} {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}\ \text{(стабильный)}$$

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[7{,}13\cdot10^{8}\ \text{лет}]{\alpha} {}^{231}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[25{,}64\ \text{час}]{\beta^-} {}^{231}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow[3{,}48\cdot10^{4}\ \text{лет}]{\alpha} {}^{227}_{89}\mathrm{Ac} \xrightarrow[22\ \text{года}]{\beta^-} {}^{227}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[18{,}6\ \text{сут}]{\alpha}$$

$${}^{223}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow[11{,}7\ \text{сут}]{\alpha} {}^{219}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow[3{,}92\ \text{с}]{\alpha} {}^{215}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow[1{,}8\cdot10^{-3}\ \text{с}]{\alpha} {}^{211}_{82}\mathrm{Pb} \xrightarrow[36{,}1\ \text{мин}]{\beta^-} {}^{211}_{83}\mathrm{Bi} \xrightarrow[2{,}15\ \text{мин}]{\beta^-}$$

$${}^{207}_{81}\mathrm{Tl} \xrightarrow[41{,}8\ \text{мин}]{\beta^-} {}^{207}_{82}\mathrm{Pb}\ \text{(стабильный)}$$

$${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[1{,}4\cdot10^{10}\ \text{лет}]{\alpha} {}^{228}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow[5{,}76\ \text{лет}]{\beta^-} {}^{228}_{89}\mathrm{Ac} \xrightarrow[6{,}13\ \text{час}]{\beta^-} {}^{228}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[1{,}913\ \text{сут}]{\alpha} {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow[3{,}66\ \text{сут}]{\alpha}$$

$$\begin{tikzcd}
{}^{220}_{86}\mathrm{Rn} \arrow[r, "\alpha", "54{,}5\ \text{с}"'] & {}^{216}_{84}\mathrm{Po} \arrow[r, "\alpha", "0{,}158\ \text{с}"'] & {}^{212}_{82}\mathrm{Pb} \arrow[r, "\beta^-", "10{,}64\ \text{час}"'] & {}^{212}_{83}\mathrm{Bi} \arrow[r, "\beta^-", "60{,}6\ \text{мин}"'] \arrow[d, "\alpha"', "60{,}6\ \text{мин}"] & {}^{212}_{84}\mathrm{Po} \arrow[d, "\alpha"', "3.04\cdot10^{-7}\ \text{с}"] \\
 & & & {}^{206}_{81}\mathrm{Tl} \arrow[r, "\beta^-", "3{,}05\ \text{мин}"'] & {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}\ \text{(стабильный)}
\end{tikzcd}$$

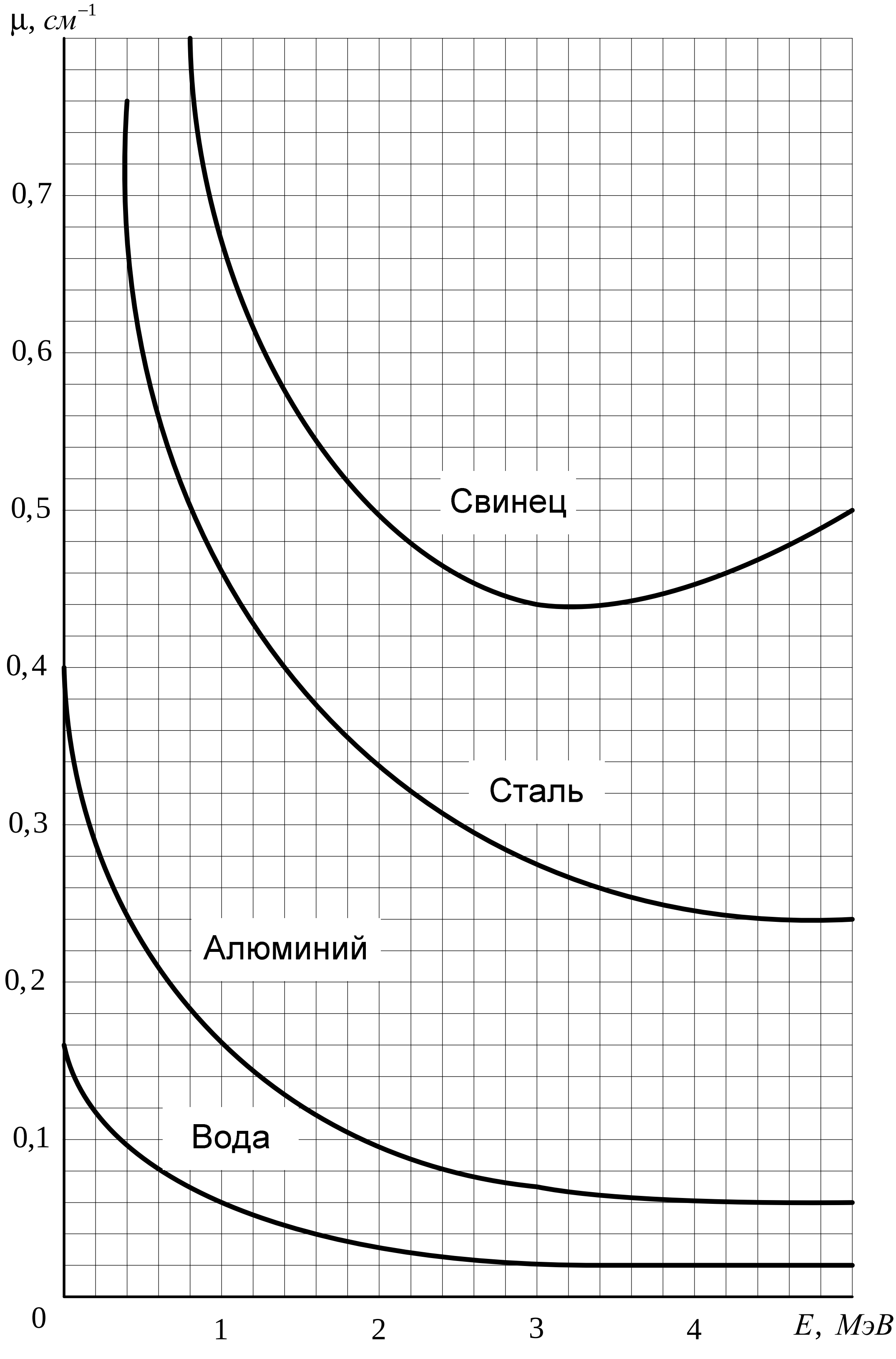


График зависимости коэффициента линейного ослабления γ-лучей от их энергии для различных веществ

Таблица 45

Периоды полураспада некоторых радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Тип распада	Период полураспада, $T_{1/2}$
Актиний	${}^{225}_{89}Ac$	α	10,0 сут
Йод	${}^{131}_{53}J$	β^-, γ	8,04 сут
Иридий	${}^{192}_{77}Jr$	β^-, γ	73,83 сут
Кобальт	${}^{60}_{27}Co$	β^-, γ	5,27 года
Магний	${}^{27}_{12}Mg$	β^-	9,46 мин
Натрий	${}^{22}_{11}Na$	γ	2,60 года
Радий	${}^{220}_{88}Ra$	α	0,023 с
Радий	${}^{226}_{88}Ra$	α, γ	1600 лет
Радон	${}^{222}_{86}Rn$	α	3,82 сут
Стронций	${}^{90}_{38}Sr$	β^-	28,6 лет
Торий	${}^{229}_{90}Th$	α, γ	7340 лет
Уран	${}^{235}_{92}U$	α	$7{,}04\cdot10^8$ лет
Уран	${}^{238}_{92}U$	α, γ	$4{,}47\cdot10^9$ лет
Фосфор	${}^{32}_{15}P$	β^-	14,36 сут

Таблица 46

Температура Дебая

Вещество	Температура Дебая, $\Theta_Д$, К	Вещество	Температура Дебая, $\Theta_Д$, К
Азот	81	Медь	347
Алмаз	2250	Никель	477
Алюминий	433	Ртуть	72
Аргон	92	Свинец	105
Висмут	120	Серебро	227
Вольфрам	383	Титан	420
Графит	413	Уран	248
Железо	477	Фтор	78
Золото	162	Хлор	115
Кремний	645	Цинк	329

Таблица 47

Масса нейтральных атомов

Элемент	Число протонов в ядре, Z	Изотоп	Масса, а.е.м.
1	2	3	4
Водород	1	^{1}H ^{2}H ^{3}H	1,00783 2,01410 3,01605
Гелий	2	^{3}He ^{4}He	3,01603 4,00260
Литий	3	^{6}Li ^{7}Li	6,01513 7,01601
Бериллий	4	^{7}Be ^{9}Be ^{10}Be	7,01693 9,01219 10,01354
Бор	5	^{9}B ^{10}B ^{11}B	9,01333 10,01294 11,00931
Углерод	6	^{10}C ^{12}C ^{13}C ^{14}C	10,00168 12,00000 13,00335 14,00324
Азот	7	^{13}N ^{14}N ^{15}N	13,00574 14,00307 15,00011
Кислород	8	^{16}O ^{17}O ^{18}O	15,99491 16,99913 17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na ^{23}Na	21,99444 22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
Алюминий	13	^{30}Al	29,99817

Окончание табл. 47

1	2	3	4
Кремний	14	$^{31}\mathrm{Si}$	30,97535
Фосфор	15	$^{31}\mathrm{P}$	30,97376
Сера	16	$^{32}\mathrm{S}$ $^{34}\mathrm{S}$ $^{35}\mathrm{S}$ $^{36}\mathrm{S}$	31,972074 33,967864 34,969030 35,967090
Хлор	17	$^{35}\mathrm{Ci}$ $^{37}\mathrm{Ci}$	34,968851 36,965898
Калий	19	$^{41}\mathrm{K}$	40,96184
Кальций	20	$^{44}\mathrm{Ca}$	43,95549
Марганец	25	$^{54}\mathrm{Mn}$	53,940350
Железо	26	$^{54}\mathrm{Fe}$ $^{56}\mathrm{Fe}$	53,939617 55,934936
Медь	29	$^{63}\mathrm{Cu}$ $^{65}\mathrm{Cu}$	62,929592 64,927786
Цинк	30	$^{65}\mathrm{Zn}$	64,929230
Молибден	42	$^{95}\mathrm{Mo}$	94,905854
Технеций	43	$^{96}\mathrm{Tc}$	95,907830
Индий	49	$^{113}\mathrm{In}$ $^{115}\mathrm{In}$	112,904089 114,903871
Олово	50	$^{112}\mathrm{Sn}$ $^{113}\mathrm{Sn}$ $^{114}\mathrm{Sn}$	111,904835 112,905180 113,902773
Свинец	82	$^{206}\mathrm{Pb}$	205,97446
Полоний	84	$^{210}\mathrm{Po}$	209,98297
Плутоний	94	$^{239}\mathrm{Pu}$	239,05216

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

Д.И. Менделеев
1834–1907

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
1	1 1,00794 **H** водород							2 4,0026 **He** гелий		
2	3 6.941 **Li** литий	4 9,012182 **Be** бериллий	5 10,811 **B** бор	6 12,011 **C** углерод	7 14,00674 **N** азот	8 15,9994 **O** кислород	9 18,998 **F** фтор	10 20,1797 **Ne** неон		
3	11 22.989768 **Na** натрий	12 24,3050 **Mg** магний	13 26,98154 **Al** алюминий	14 28,0855 **Si** кремний	15 30,973762 **P** фосфор	16 32,066 **S** сера	17 35,4527 **Cl** хлор	18 39,948 **Ar** аргон		
4	19 39.0983 **K** калий	20 40,078 **Ca** кальций	21 44,9559 **Sc** скандий	22 47,88 **Ti** титан	23 50,9415 **V** ванадий	24 51,9961 **Cr** хром	25 54,938 **Mn** марганец	26 55,847 **Fe** железо	27 58,9332 **Co** кобальт	28 58,69 **Ni** никель
	29 63.546 **Cu** медь	30 65,39 **Zn** цинк	31 69,723 **Ga** галлий	32 72,61 **Ge** германий	33 74,92159 **As** мышьяк	34 78,96 **Se** селен	35 79,904 **Br** бром	36 83,80 **Kr** криптон		
5	37 85.4678 **Rb** рубидий	38 87,62 **Sr** стронций	39 88,606 **Y** иттрий	40 91,224 **Zr** цирконий	41 92,90638 **Nb** ниобий	42 95,94 **Mo** молибден	43 97,9072 **Tc** технеций	44 101,07 **Ru** рутений	45 102,906 **Rh** родий	46 106,42 **Pd** палладий
	47 107.868 **Ag** серебро	48 112,411 **Cd** кадмий	49 114,82 **In** индий	50 118,710 **Sn** олово	51 121,75 **Sb** сурьма	52 127,60 **Te** теллур	53 126,9045 **I** йод	54 131,29 **Xe** ксенон		
6	55 132.90543 **Cs** цезий	56 137,327 **Ba** барий	57 138,9055 **La*** лантан	72 178,49 **Hf** гафний	73 180,9479 **Ta** тантал	74 183,85 **W** вольфрам	75 186,207 **Re** рений	76 190,2 **Os** осмий	77 178,49 **Ir** иридий	78 180,9479 **Pt** платина
	79 196.96654 **Au** золото	80 200,059 **Hg** ртуть	81 204,3833 **Tl** таллий	82 207,2 **Pb** свинец	83 208,98037 **Bi** висмут	84 208,9824 **Po** полоний	85 209,9871 **At** астат	86 222,0176 **Rn** радон		
7	87 223.0197 **Fr** франций	88 226,0254 **Ra** радий	89 227,0278 **Ac**** актиний	104 261,11 **Ku** курчатовий	105 262,114 **Ns** нильсборий	106 263,118	107 264,12			

* лантаноиды

58 140,12 **Ce** церий	59 140,97 **Pr** празеодим	60 144,24 **Nd** неодим	61 145,02 **Pm** прометий	62 150,35 **Sm** самарий	63 151,96 **Eu** европий	64 157,25 **Gd** гадолиний	65 158,92 **Tb** тербий	66 162,51 **Dy** диспрозий	67 164,93 **Ho** гольмий	68 167,26 **Er** эробий	69 168,93 **Tm** тулий	70 173,04 **Yb** иттербий	71 174,97 **Lu** лютеций

** актиноиды

90 232,04 **Th** торий	91 231,02 **Pa** протактиний	92 238,03 **U** уран	93 237,12 **Np** нептуний	94 243,12 **Pu** плутоний	95 247,15 **Am** америций	96 247,25 **Cm** кюрий	97 249,02 **Bk** берклий	98 254,12 **Cf** калифорний	99 255,02 **Es** эйнштейний	100 257,02 **Fm** фермий	101 258,22 **Md** менделевий	102 259,1 **No** нобелий	103 60,1054 **Lr** лоуренсий

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян, Р.Г. Курс общей физики / Р.Г.Геворкян, В.В. Шепель. – М.: Высш. шк., 1972. – 600 с.
2. Енохович, А.С. Справочник по физике и технике / А.С. Енохович. – М.: Просвещение, 1989. –224 с.
3. Зиновьев, В.А. Краткий физико-технический справочник. Т. 2 / В.А. Зиновьев, Г.Н. Свешников, И.К. Снитко. – М.: Физматгиз, 1960. – 411 с.
4. Карякин, Н.И. Краткий справочник по физике / Н.И. Карякин, К.Н. Быстров, П.С. Киреев. – М.: Высш. шк., 1963. – 559 с.
5. Кошкин, Н.И. Справочник по элементарной физике / Н.И. Кошкин, М.Г. Ширкевич. – М.: Физматгиз, 1960. – 208 с.
6. Кужир, П.Г. Радиационная безопасность / П.Г. Кужир, И.А. Сатиков, Е.Е. Трофименко. – Минск: Пион, 1999.
7. Курс физики: учебник для вузов. В 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001.
8. Леденев, А.Н. Физика. В 5 кн. / А.Н. Леденев. – М.: Физматлит, 2005.
9. Лунц, Г.Л. Краткий физико-технический справочник Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. – 446 с.
10. Макаренко, Г.М. Курс общей физики / Г.М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
11. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
12. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. Т. 1-5. – М.: Астрель АСТ, 2003-2004.
13. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
14. Физика. Учебное пособие. В 2-х частях / В.А. Груздев [и др.]; под ред. В.А. Груздева // Минск: РИВШ, 2009.
15. Физические величины: справочник / А.П. Бабичев [и др.]; под. ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
16. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 368 с.
17. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 512 с.
18. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике/ М.Я. Выгодский. – М:Изд-во физ.-мат. Литературы, 1958. – 412 с.
19. Дубровский И.М. справочник по физике/ И.М. Дубровский, Б.В. Егоров, К.П. Рябошапка.- Киев:Навукова думка, 1986. – 557 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Латинский алфавит

Aa	а	*Nn*	эн
Bв	бэ	*Oo*	о
Cc	цэ	*Pp*	пэ
Dd	дэ	*Qq*	ку
Ee	э	*Rr*	эр
Ff	эф	*Ss*	эс
Gg	гэ (же)	*Tt*	тэ
Hh	ха (аш)	*Uu*	у
Ii	и	*Vv*	вэ
Jj	йот (жи)	*Ww*	дубль-вэ
Kk	ка	*Xx*	икс
Ll	эль	*Yy*	игрек
Mm	эм	*Zz*	зэт

Греческий алфавит

Αα альфа	Νν ню (ни)
Ββ бэта	Ξξ кси
Γγ гамма	Οο омикрон
Δδ дэльта	Ππ пи
Εε эпсилон	Ρρ ро
Ζζ дзета	Σσς сигма
Ηη эта	Ττ тау
Θθ тэта	ϒυ юпсилон (ипсилон)
Ιι йота	Φφ фи
Κκ каппа	Χχ хи
Λλ ламбда	Ψψ пси
Μμ мю (ми)	Ωω омега

Правила действия со степенями и корнями

$$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)};$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Тождества сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат двучлена;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^3 \pm b^3$ – куб двучлена;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – разность квадратов двух чисел;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов двух чисел;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов двух чисел.

Формулы корней квадратных уравнений

Квадратное уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.

Корни квадратного уравнения: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Квадратное уравнение вида: $x^2 + px + q = 0$.

Корни квадратного уравнения: $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Некоторые формулы для приближенных вычислений

Если $a << 1$, то в первом приближении можно принять:

$$\frac{1}{1 \mp a} = 1 \mp a;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{1}{2}a;$$

$$(1 \mp a)^2 = 1 \pm 2a;$$

$$e^a = 1 + a;$$

$$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2}a;$$

$$\ln(1 + a) = a.$$

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой разность между последующим и предыдущим членами остается неизменной. Эта неизменная разность называется *разностью прогрессии.*

Пример 1. Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, … есть арифметическая прогрессия с разностью 1.

Пример 2. Последовательность чисел 10, 8, 6, 4, 2, 0, –2, –4, … есть арифметическая прогрессия с разностью –2.

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

где a_1 – первый член прогрессии; d – разность прогрессии; n – номер взятого члена.

Сумма первых n *членов* арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Пример 3. В прогрессии 12, 15, 18, 21, 24, … десятый член равен

$$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39.$$

Сумма десяти первых членов равна

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(12 + 39) \cdot 10}{2} = 255.$$

Пример 4. Сумма всех целых чисел от 1 до100 включительно равна

$$\frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, в которой отношение между последующим и предыдущим членами остается неизменным. Это неизменное отношение называется *знаменателем прогрессии.*

Пример 1. Числа 5, 10, 20, 40… образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Пример 2. Числа 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т.д. – геометрическая прогрессия со знаменателем 0,1.

Геометрическая прогрессия называется *возрастающей*, когда абсолютная величина ее знаменателя больше единицы (как в примере 1), и *убывающей*, когда она меньше единицы (как в примере 2).

Замечание. Знаменатель прогрессии может быть и отрицательным числом, но прогрессии с отрицательным знаменателем практического значения не имеют.

Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

где a_1 – первый член; q – знаменатель прогрессии; n – номер взятого члена.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии (знаменатель которой не равен 1) выражается формулой

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}; \qquad (2)$$

первое из выражений удобнее брать, когда прогрессия возрастающая, второе – когда она убывающая.

Если же $q = 1$, то прогрессия состоит из равных членов и вместо (2) имеем:

$$s_n = n a_1.$$

Пример 3. В геометрической прогрессии 5, 10, 20, 40… десятый член $a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 512 = 2560$. Сумма десяти первых членов

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot 2 - a_1}{2-1} = 5115.$$

Суммой бесконечно убывающей прогрессии называется число, к которому неограниченно приближается сумма первых n членов убывающей прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Сумма бесконечно убывающей прогрессии в возрастании выражается формулой

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Пример 4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad (a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2})$$

равна $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, т.е. сумма $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^n}$ при неограниченном возрастании n неограниченно приближается к числу 1.

Элементы дифференциального и интегрального исчисления

Некоторые простейшие интегралы

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad \text{при } n \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int\limits_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$$

$$\int\limits_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n!$$

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} \, dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x-1} = 2,405$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{e^x-1} = 0,225$$

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{e^x-1} = 1,18$$

Некоторые дифференциалы элементарных функций

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon) = \upsilon\frac{du}{dx} + u\frac{d\upsilon}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon\frac{du}{dx} + u\frac{d\upsilon}{dx}}{\upsilon^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^n+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

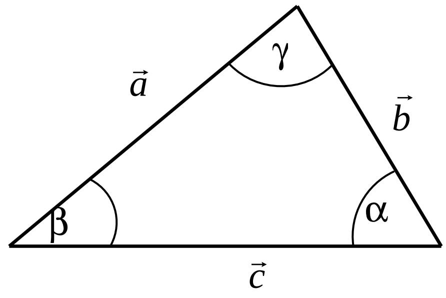
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{ctg}x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Элементы тригонометрии

Тригонометрические функции острого угла



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

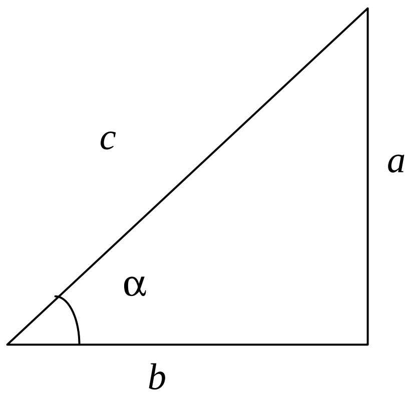
где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника; α, β, γ – углы, лежащие против сторон *a*, *b*, *c* соответственно.

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, α – угол, лежащий против стороны *a*.

Тригонометрические функции прямого угла



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{\circ}$	0	30	45	60	90	180
α рад		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	–1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Формулы приведения

α	$\alpha+\frac{\pi}{2}$	$\alpha+\pi$	$\alpha+\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}\left(\alpha+\beta\right) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Некоторые формулы из тригонометрии

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\frac{1}{2}\cos(a+b)x;$$

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x.$$

Объемы и площади поверхности тел

Обозначения

V – объем; S – площадь основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; P – полная площадь поверхности; h – высота; a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда; A – апофема правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды; l – образующая конуса; p – периметр или окружность основания; r – радиус основания; d – диаметр основания; R – радиус шара; D – диаметр шара.

Призма, прямая и наклонная; *параллелепипед*:

$$V=Sh.$$

Прямая призма:

$$S_{бок}=ph.$$

Параллелепипед прямоугольный:

$$V=abc;\ P=2(ab+bc+ac).$$

Куб:

$$V = a^3; \quad P = 6a^2.$$

Пирамида , правильная и неправильная:

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Пирамида правильная:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}pA.$$

Усеченная пирамида, правильная и неправильная:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)n.$$

Усеченная пирамида правильная:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)A.$$

Цилиндр круговой (прямой и наклонный):

$$V = Sh = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi d^2 h.$$

Цилиндр круглый:

$$S_{бок} = 2\pi rh = \pi dh.$$

Конус круговой (круглый и наклонный):

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h.$$

Конус круглый:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}pl = \pi rl = \frac{1}{2}\pi dl.$$

Усеченный конус круговой (круглый и наклонный):

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Усеченный конус круглый:

$$S_{бок} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Шар:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3; P = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

Полушарие:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{12}\pi D^3; S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2;$$

$$S_{бок} = 2\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi D^2; P = 3\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi D^2.$$

Шаровой сегмент:

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h) = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2);$$
$$S_{бок} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2), P = \pi(2r^2 + h^2).$$

Шаровой слой:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h, S_{бок} = 2\pi Rh.$$

Шаровой сектор:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h',$$

где h' – высота сегмента ,содержащегося в секторе.

Полый шар:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3) = \frac{\pi}{6}(D_1^3 + D_2^3);$$
$$P = 4\pi(R_1^2 + R_2^2) = \pi(D_1^2 + D_2^2),$$

где R_1 и R_2 – радиусы внешней и внутренней шаровых поверхностей.

Перевод градусной меры в радианную

Градусы	Радианы (дуга)	Градусы	Радианы (дуга)	Градусы	Радианы (дуга)	Минуты	Радианы (дуга)	Минуты	Радианы (дуга)
0	0,0000	35	0,6109	70	1,2217	0	0,0000	30	0,0087
1	0,0175	36	0,6283	71	1,2392				
2	0,0349	37	0,6458	72	1,2566	1	0,0003	31	0,0090
3	0,0524	38	0,6632	73	1,2741				
4	0,0698	39	0,6807	74	1,2915	2	0,0006	32	0,0093
5	0,0873	40	0,6981	75	1,3090				
6	0,1047	41	0,7156	76	1,3265	3	0,0009	33	0,0096
7	0,1222	42	0,7330	77	1,3439				
8	0,1396	43	0,7505	78	1,3614	4	0,0012	34	0,0099
9	0,1571	44	0,7679	79	1,3788				
10	0,1745	45	0,7854	80	1,3963	5	0,0015	35	0,0102
11	0,1920	46	0,8029	81	1,4137	6	0,0017	36	0,0105
12	0,2094	47	0,8203	82	1,4312	7	0,0020	37	0,0108
13	0,2269	48	0,8378	83	1,4486	8	0,0023	38	0,0111
14	0,2443	49	0,8552	84	1,4661	9	0,0026	39	0,0113
15	0,2618	50	0,8727	85	1,4835	10	0,0029	40	0,0116
16	0,2793	51	0,8901	86	1,5010	11	0,0032	41	0,0119
17	0,2967	52	0,9076	87	1,5184	12	0,0035	42	0,0122
18	0,3142	53	0,9250	88	1,5359	13	0,0038	43	0,0125
19	0,3316	54	0,9425	89	1,5533	14	0,0041	44	0,0128
20	0,3491	55	0,9599	90	1,5708	15	0,0044	45	0,0131
21	0,3665	56	0,9774	91	1,5882	16	0,0047	46	0,0134
22	0,3840	57	0,9948	92	1,6057	17	0,0049	47	0,0137
23	0,4014	58	1,0123	93	1,6232	18	0,0052	48	0,0140
24	0,4189	59	1,0297	94	1,6406	19	0,0055	49	0,0143
25	0,4363	60	1,0472	95	1,6581	20	0,0058	50	0,0145
26	0,4538	61	1,0647	96	1,6755	21	0,0061	51	0,0148
27	0,4712	62	1,0821	97	1,6930	22	0,0064	52	0,0151
28	0,4887	63	1,0996	98	1,7104	23	0,0067	53	0,0154
29	0,5061	64	1,1170	99	1,7279	24	0,0070	54	0,0157
30	0,5236	65	1,1345	100	1,7453	25	0,0073	55	0,0160
31	0,5411	66	1,1519	180	3,1416	26	0,0076	56	0,0163
32	0,5585	67	1,1694	200	3,4907	27	0,0079	57	0,0166
33	0,5760	68	1,1868	300	5,2360	28	0,0081	58	0,0169
34	0,5934	69	1,2043	360	6,2832	29	0,0084	59	0,0172

Перевод радианной меры в градусную

Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Градусы и минуты	Радианы	Минуты	Радианы	Минуты
1	57°18'	0,1	5°44'	0,01	0°34'	0,001	0°03'	0,0001	0°00'
2	114°35'	0,2	11°28'	0,02	1°09'	0,002	0°07'	0,0002	0°01'
3	171°53'	0,3	17°11'	0,03	1°43'	0,003	0°10'	0,0003	0°01'
4	229°11'	0,4	22°55'	0,04	2°18'	0,004	0°14'	0,0004	0°01'
5	286°29'	0,5	28°39'	0,05	2°52'	0,005	0°17'	0,0005	0°02
6	343°46'	0,6	34°23'	0,06	3°26'	0,006	0°21'	0,0006	0°02
7	401°04'	0,7	40°06'	0,07	4°01'	0,007	0°24'	0,0007	0°02
8	458°22'	0,8	45°50'	0,08	4°35'	0,008	0°28'	0,0008	0°03'
9	515°40'	0,9	51°34'	0,09	5°09'	0,009	0°31'	0,0009	0°03'

Степени, корни, обратные величины, натуральные логарифмы

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$	$\ln(n^2)$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1,000	0,00000
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,500	0,69315
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,333	1,09861
4	16	64	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	0,250	1,38629
5	25	125	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	0,200	1,60944
6	36	216	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	0,167	1,79176
7	49	343	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	0,143	1,94591
8	64	512	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	0,125	2,07944
9	81	729	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	0,111	2,19722
10	100	1000	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0,100	2,30259
11	121	1331	3,317	10,488	2,224	4,791	10,323	0,091	2,39790
12	144	1728	3,464	10,954	2,289	4,932	10,627	0,083	2,48491
13	169	2197	3,606	11,402	2,351	5,066	10,914	0,077	2,56495
14	196	2744	3,742	11,832	2,410	5,192	11,187	0,071	2,63906
15	225	3375	3,873	12,247	2,466	5,313	11,447	0,067	2,70805
16	256	4096	4,000	12649	2,520	5,429	11,696	0,062	2,77259
17	289	4913	4,123	13,038	2,571	5,540	11,935	0,059	2,83321
18	324	5832	4,243	13,416	2,621	5,646	12,164	0,056	2,89037
19	361	6859	4,359	13,784	2,668	5,749	12,386	0,053	2,94444
20	400	8000	4,472	14,142	2,714	5,848	12,599	0,050	2,99573

Продолжение табл.

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$	$\ln(n^2)$
21	441	9261	4,583	14,491	2,759	5,944	12,806	0,048	3,04452
22	484	10648	4,690	14,832	2,802	6,037	13,006	0,045	3,09104
23	529	12167	4,796	15,166	2,844	6,127	13,200	0,043	3,13549
24	576	13824	4,899	15,492	2,884	6,214	13,389	0,042	3,17805
25	625	15625	5,000	15,811	2,924	6,300	13,572	0,040	3,21888
26	676	17576	5,099	16,125	2,962	6,383	13,751	0,038	3,25810
27	729	19683	5,196	16,432	3,000	6,463	13,925	0,037	3,29584
28	784	21952	5,292	16,733	3,037	6,542	14,095	0,036	3,33220
29	841	24389	5,385	17,029	3,072	6,619	14,260	0,034	3,36730
30	900	27000	5,477	17,321	3,107	6,694	14,422	0,033	3,40120
31	961	29791	5,568	17,607	3,141	6,768	14,581	0,032	3,43399
32	1024	32768	5,657	17,899	3,175	6,840	14,736	0,031	3,46574
33	1089	35937	5,745	18,166	3,208	6,910	14,888	0,030	3,49651
34	1156	39304	5,831	18,439	3,240	6,980	15,037	0,029	3,52636
35	1225	42875	5,916	18,708	3,271	7,047	15,183	0,029	3,55535
36	1296	46656	6,000	18,974	3,302	7,114	15,326	0,028	3,58352
37	1369	50353	6,083	19,235	3,332	7,179	15,467	0,027	3,61092
38	1444	54872	6,164	19,494	3,362	7,243	15,605	0,026	3,63759
39	1521	59319	6,245	19,748	3,391	7,306	15,741	0,026	3,66356
40	1600	64000	6,325	20,000	3,420	7,368	15,874	0,025	3,68888

Продолжение табл.

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$	$\ln(n^2)$
41	1681	68921	6,403	20,248	3,448	7,429	16,005	0,024	3,71357
42	1764	74088	6,481	20,494	3,476	7,489	16,134	0,024	3,73767
43	1849	79507	6,557	20,736	3,503	7,548	16,261	0,023	3,76120
44	1936	85184	6,633	20,976	3,530	7,606	16,386	0,023	3,78419
45	2025	91125	6,703	21,213	3,557	7,663	16,510	0,022	3,80665
46	2116	97336	6,782	21,443	3,583	7,719	16,631	0,022	3,82864
47	2209	103823	6,856	21,679	3,609	7,775	16,751	0,021	3,85015
48	2304	110592	6,928	21,909	3,634	7,830	16,839	0,021	3,87120
49	2401	117649	7,000	22,136	3,659	7,884	16,985	0,020	3,89182
50	2500	125000	7,071	22,361	3,684	7,937	17,100	0,020	3,91202
51	2601	132651	7,141	22,583	3,703	7,990	17,213	0,020	3,93183
52	2704	140608	7,211	22,804	3,733	8,041	17,325	0,019	3,95124
53	2809	148877	7,280	23,022	3,756	8,093	17,435	0,019	3,97029
54	2916	157464	7,348	23,238	3,780	8,143	17,544	0,018	3,98898
55	3025	166375	7,416	23,452	3,803	8,193	17,652	0,018	4,00733
56	3136	175616	7,483	23,664	3,826	8,243	17,758	0,018	4,02535
57	3249	185193	7,550	23,875	3,849	8,291	17,863	0,017	4,04306
58	3364	195112	7,616	24,083	3,871	8,340	17,967	0,017	4,06044
59	3481	205379	7,681	24,290	3,893	8,387	18,070	0,017	4,07754
60	3600	216000	7,746	24,495	3,915	8,434	18,171	0,017	4,09434

Продолжение табл.

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$	$\ln(n^2)$
61	3721	226981	7,810	24,698	3,936	8,481	18,272	0,016	4,11087
62	3844	238328	7,874	24,900	3,958	8,527	18,371	0,016	4,12713
63	3969	250047	7,937	25,100	3,979	8,573	18,469	0,016	4,14313
64	4096	262144	8,000	25,298	4,000	8,618	18,566	0,016	4,15888
65	4225	274625	8,062	25,495	4,021	8,662	18,663	0,015	4,17439
66	4356	287496	8,124	25,690	4,041	8,707	18,758	0,015	4,18965
67	4489	300763	8,185	25,884	4,062	8,750	18,852	0,015	4,20469
68	4624	314432	8,246	26,077	4,082	8,794	18,945	0,015	4,21951
69	4761	328509	8,307	26,268	4,102	8,837	19,038	0,014	4,23411
70	4900	343000	8,367	26,458	4,121	8,879	19,129	0,014	4,24850
71	5041	357911	8,426	26,646	4,141	8,921	19,220	0,014	4,26268
72	5184	373248	8,485	26,833	4,160	8,963	19,310	0,014	4,27667
73	5329	389017	8,544	27,019	4,179	9,004	19,399	0,014	4,29046
74	5476	405224	8,602	27,203	4,198	9,045	19,487	0,013	4,30407
75	5625	421875	8,660	27,386	4,217	9,086	19,574	0,013	4,31749
76	5776	438976	8,718	27,568	4,236	9,126	19,661	0,013	4,33073
77	5929	456533	8,775	27,749	4,254	9,166	19,747	0,013	4,34381
78	6084	474552	8,832	27,928	4,273	9,205	19,832	0,013	4,35671
79	6241	493039	8,888	28,107	4,291	9,244	19,916	0,013	4,36945
80	6400	512000	8,944	28,284	4,309	9,283	20,000	0,012	4,38203

Окончание табл.

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$	$\ln(n^2)$
81	6561	531441	9,000	28,460	4,327	9,322	20,083	0,012	4,39445
82	6724	551368	9,055	28,636	4,344	9,360	20,165	0,012	4,40672
83	6889	571787	9,110	28,810	4,362	9,398	20,247	0,012	4,41884
84	7056	592704	9,165	28,983	4,380	9,435	20,328	0,012	4,43082
85	7225	614125	9,220	29,155	4,397	9,473	20,408	0,012	4,44265
86	7396	636056	9,274	29,326	4,414	9,510	20,488	0,012	4,45435
87	7569	658503	9,327	29,496	4,431	9,546	20,567	0,011	4,46591
88	7744	681472	9,381	29,665	4,448	9,583	20,646	0,011	4,47734
89	7921	704969	9,434	29,883	4,465	9,619	20,724	0,011	4,48864
90	8100	729000	9,487	30,000	4,481	9,655	20,801	0,011	4,49981
91	8281	753571	9,539	30,166	4,498	9,691	20,878	0,011	4,51086
92	8464	778688	9,592	30,332	4,514	9,726	20,954	0,011	4,52179
93	8649	804357	9,644	30,496	4,531	9,761	21,029	0,011	4,53260
94	8836	830584	9,695	30,659	4,547	9,796	21,105	0,011	4,54329
95	9025	857375	9,747	30,822	4,563	9,830	21,179	0,011	4,55388
96	9216	884736	9,798	30,984	4,579	9,865	21,253	0,010	4,56435
97	9409	912673	9,849	31,145	4,595	9,899	21,327	0,010	4,57471
98	9604	941192	9,899	31,305	4,610	9,933	21,400	0,010	4,58497
99	9801	970299	9,950	31,464	4,626	9,967	21,472	0,010	4,59512
100	10000	1000000	10,000	31,623	4,642	10,000	21,544	0,010	4,60517

СОДЕРЖАНИЕ

Справочное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович
АНТОНОВИЧ Дмитрий Анатольевич
ВАБИЩЕВИЧ Наталья Вячеславовна

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК
по общей физике

2-е издание, исправленное и дополненное

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 23.05.2012. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 8,82. Уч.-изд. л. 8,2. Тираж 99 экз. Заказ 828.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29