УДК 624.072

К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Анализируется влияние различия модулей упругости при растяжении и сжатии конструкционного материала на перемещения и внутренние усилия, возникающие в изгибаемой произвольной плоской стержневой конструкции. Учет различия модулей упругости осуществляется с помощью билинейной диаграммы «напряжения – деформации». Для оценки влияния разномодульности материала на перемещения получены формулы, являющиеся обобщением формулы Максвелла – Мора и формул для определения перемещений в обычных упругих статически неопределимых стержневых конструкциях при действии температуры и осадки опор. Полученные формулы справедливы для стержневых конструкций при определении перемещений, в которых можно ограничиваться учетом только изгибных деформаций, что справедливо для большинства балочных и рамных конструкций. Проанализировано, как учет фактора разномодульности влияет на перемещения и внутренние усилия в статически определимых и статически неопределимых изгибаемых плоских стержневых конструкциях.

В линейной теории расчета стержневых конструкций конструкционный материал, как правило, считается однородным изотропным упругим телом, поведение которого описывается модулем упругости E одинаковым при растяжении и сжатии. Однако, как показывают экспериментальные исследования [1; 2], модули упругости при растяжении и сжатии для ряда современных конструкционных материалов существенно разнятся. Исходя из экспериментальных данных, полученных для различных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, была построена феноменологическая теория [3], описывающая поведение разномодульного материала и предлагающая общие методы решения задач теории упругости из такого материала. Согласно этой теории диаграмма «напряжение – деформация» для материалов с разными модулями упругости при растяжении и сжатии представляется в виде билинейной диаграммы (рис. 1).

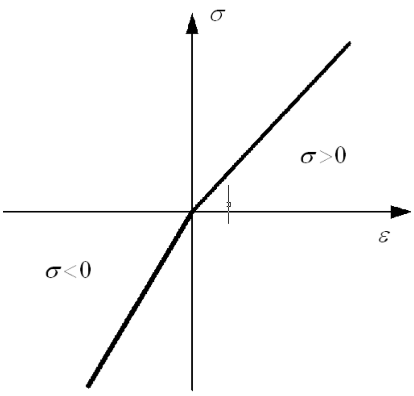


Рис. 1. Диаграмма «напряжение – деформация»

Поведение разномодульного материала, наряду с модулями упругости при растяжении E^{+} и сжатии E^{-}, определяется коэффициентами Пуассона ν^{+} и ν^{-} (характеризуют соответственно поперечное сужение при растяжении и поперечное расширение при сжатии), а также модулем сдвига разномодульного материала:

$$G^{+/-} = \frac{E^{+}E^{-}}{E^{-}(1+\nu^{+}) + E^{+}(1+\nu^{-})}.$$

Степень разномодульности конструкционного материала характеризуется соотношением модулей упругости

$$\mu = \frac{E^{-}}{E^{+}}. \quad (1)$$

Расчеты отдельного стержня с учетом разномодульности материала при некоторых простейших видах нагружения были выполнены рядом авторов, основные результаты решения этих задач приведены в [3]. Применим общую теорию [3] к расчету изгибаемых плоских стержневых конструкций без учета сдвиговых деформаций.

Известно [4], что общая формула для определения перемещений в произвольной плоской стержневой конструкции (статически определимой или статически неопределимой) без учета сдвиговых деформаций при одновременном приложении нагрузки, температурного воздействия и осадки опор, в случае обычного упругого конструкционного материала, описывается выражением:

$$\Delta_i = \sum_k \iint_{lA} \sigma_i \varepsilon \, dA ds - \sum_j r_{ji} c_j. \quad (2)$$

В формуле (2) суммирование осуществляется по стержням рассматриваемой конструкции.

С учетом разномодульности конструкционного материала формула (2) примет вид:

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_{A^-} \sigma_i^- \varepsilon^- dA + \int_{A^+} \sigma_i^+ \varepsilon^+ dA \right) ds - \sum_j r_{ji} c_j , \tag{3}$$

где A^- – площадь сжатой части поперечного сечения; A^+ – площадь растянутой части поперечного сечения.

При воздействии на плоскую стержневую конструкцию только нагрузки относительные линейные деформации и нормальные напряжения действительного состояния с учетом разномодульности материала связаны следующими зависимостями:

$$\varepsilon^- = \frac{\sigma^-}{E^-}; \quad \varepsilon^+ = \frac{\sigma^+}{E^+} .$$

С учетом этих зависимостей формула (3) примет вид:

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \left(\int_{A^-} \frac{\sigma_i^- \sigma^-}{E^-} dA + \int_{A^+} \frac{\sigma_i^+ \sigma^+}{E^+} dA \right) ds. \tag{4}$$

Согласно [3] нормальные напряжения, возникающие при изгибе в произвольной точке поперечного сечения, связаны с изгибающими моментами действительного и единичного следующими формулами:

$$\sigma^- = -\frac{E^-}{D} My; \quad \sigma^+ = -\frac{E^+}{D} My \tag{5}$$

и

$$\sigma_i^- = -\frac{E^-}{D} m_i y; \quad \sigma_i^+ = -\frac{E^+}{D} m_i y , \tag{6}$$

где D – изгибная жесткость поперечного сечения для разномодульного материала или приведенная изгибная жесткость.

Для симметричного поперечного сечения произвольной формы приведенная изгибная жесткость определяется как

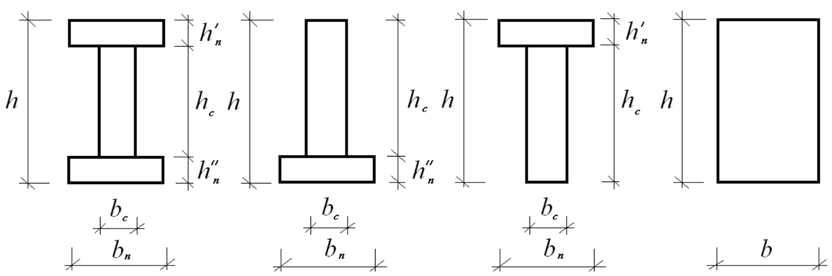
$$D = E^- I^- + E^+ I^+ , \tag{7}$$

где величины I^- и I^+ характеризуют моменты инерции соответственно сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси. Положение нейтральной оси определяется с помощью уравнения:

$$E^- S^- = E^+ S^+ , \tag{8}$$

где S^- – статический момент сжатой части поперечного сечения; S^+ – статический момент растянутой части поперечного сечения.

Используя полученные формулы (7), (8), определим положение нейтральной линии и приведенную изгибную жесткость для наиболее часто встречающихся при расчетах стержневых конструкций типов поперечных сечений: двутавровое, тавровое и прямоугольное (рис. 2).



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 2. Типы поперечных сечений:
а – двутавровое; *б*, *в* – тавровое с полкой, расположенной соответственно в растянутой и сжатой зонах; *г* – прямоугольное

Для двутаврового поперечного сечения (рис. 2, *а*) положение нейтральной линии описывается выражением:

$$\eta^- = p\left(\mu,\eta_1,\eta_2,\beta\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{q\left(\mu,\eta_1,\eta_2,\beta\right)}{p^2\left(\mu,\eta_1,\eta_2,\beta\right)}}\right),$$

где

$$\eta^- = \frac{h^-}{h};\;\; \eta^+ = \frac{h^+}{h};\;\; \eta_1 = \frac{h''}{h};\;\; \eta_2 = \frac{h}{h};\;\; \eta_3 = \frac{h_c}{h};\;\; \beta = \frac{b_n}{b_c},$$

и

$$p\left(\mu,\eta_1,\eta_2,\beta\right) = \frac{1-\left(1-\beta\right)\left(\mu\eta_1+\eta_2\right)}{1-\mu};$$

$$q\left(\mu,\eta_1,\eta_2,\beta\right) = \frac{1-\left(1-\beta\right)\left(\mu\eta_1^2+2\eta_2-\eta_2^2\right)}{1-\mu}.$$

Приведенную жесткость двутаврового поперечного сечения определим по формуле:

$$D = E^+\frac{b_c h^3}{3}\left[\mu\left(1-\beta\right)\left(\eta^- -\eta_1\right)^3+\mu\beta\left(\eta^-\right)^3+\left(1-\beta\right)\left(\eta^+-\eta_2\right)^3+\beta\left(\eta^+\right)^3\right].$$

Для таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в растянутой зоне (рис. 2, *б*), положение нейтральной линии описывается выражением

$$\eta^- = p\left(\mu,\eta_2,\beta\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{q\left(\mu,\eta_2,\beta\right)}{p^2\left(\mu,\eta_2,\beta\right)}}\right),$$

где

$$p\left(\mu,\eta_2,\beta\right) = \frac{1-\left(1-\beta\right)\eta_2}{1-\mu};$$

$$q\left(\mu,\eta_2,\beta\right) = \frac{1-\left(1-\beta\right)\left(2-\eta_2\right)\eta_2}{1-\mu}.$$

Приведенная жесткость таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в растянутой зоне, описывается выражением следующего вида:

$$D = E^+\frac{b_c h^3}{3}\left[\mu\left(\eta^-\right)^3+\left(1-\beta\right)\left(\eta^+-\eta_2\right)+\beta\left(\eta^+\right)^3\right].$$

Для таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в сжатой зоне (рис. 2, *в*), положение нейтральной линии описывается выражением:

$$\eta^- = p\left(\mu,\eta_1,\beta\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{q\left(\mu,\eta_1,\beta\right)}{p^2\left(\mu,\eta_1,\beta\right)}}\right),$$

где

$$p\left(\mu,\eta_1,\beta\right) = \frac{1-\mu\left(1-\beta\right)\eta_1}{1-\mu};$$

$$q\left(\mu,\eta_1,\beta\right) = \frac{1-\mu\left(1-\beta\right)\eta_1^2}{1-\mu}.$$

Приведенная жесткость таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в сжатой зоне, описывается выражением следующего вида:

$$D = E^{+}\frac{b_c h^3}{3}\left[\mu(1-\beta)\left(\eta^{-}-\eta_1\right)^3+\mu\beta\left(\eta^{-}\right)^3+\left(\eta^{+}\right)^3\right].$$

Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 2, *г*) положение нейтральной линии описывается выражением:

$$\eta^{-} = p(\mu)\left(1-\sqrt{1-\frac{q(\mu)}{p^2(\mu)}}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{\mu}},$$

где

$$p(\mu)=\frac{1}{1-\mu};\;\; q(\mu)=\frac{1}{1-\mu}.$$

Приведенная жесткость прямоугольного поперечного сечения описывается выражением следующего вида:

$$D=\frac{b}{3}\left(E^{-}\left(h^{-}\right)^3+E^{+}\left(h^{+}\right)^3\right).$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим формулу:

$$\Delta_i = \sum_k\int_l \frac{m_i M}{D}ds. \tag{9}$$

Формула (9) является обобщением формулы Максвелла – Мора для плоских стержневых конструкций (статически определимых и статически неопределимых) с учетом разномодульности материала, при определении перемещений в которых можно ограничиваться учетом только изгибных деформаций, что справедливо для большинства балочных и рамных конструкций.

Известно [5], что формула для определения перемещений в статически неопределимых плоских стержневых конструкциях от действия температуры или осадки опор с учетом только изгибных деформаций имеет вид

$$\Delta_i = \sum_k\int_l \frac{m_i M}{EI_z}ds+\Delta_i^0. \tag{10}$$

Обобщением формулы (10) для определения перемещений в статически неопределимых плоских стержневых конструкциях от действия температуры или осадки опор с учетом разномодульности материала является формула следующего вида

$$\Delta_i = \sum_k\int_l \frac{m_i M}{D}ds+\Delta_i^0. \tag{11}$$

Так как при действии температуры и осадки опор в статически определимых стержневых конструкциях внутренних сил не возникает, то разномодульность материала не оказывает никакого влияния на перемещения, возникающие в таких конструкциях.

Поскольку в соответствии со свойствами статически определимых систем внутренние силы, возникающие от действия нагрузки, не зависят от перемещений системы, то учет разномодульности материала не оказывает никакого влияния на внутренние усилия в статически определимых конструкциях.

Для оценки влияния разномодульности материала на перемещения и внутренние усилия в изгибаемых плоских статически неопределимых стержневых конструкциях от произвольных внешних воздействий (нагрузка, температура и осадка опор) можно пользоваться коэффициентом следующего вида:

$$\zeta=\frac{EI_z}{D}, \tag{12}$$

который позволяет количественно оценить величину соответствующей поправки. На графике (рис. 3) показана зависимость этого коэффициента для прямоугольного поперечного сечения от степени разномодульности μ.

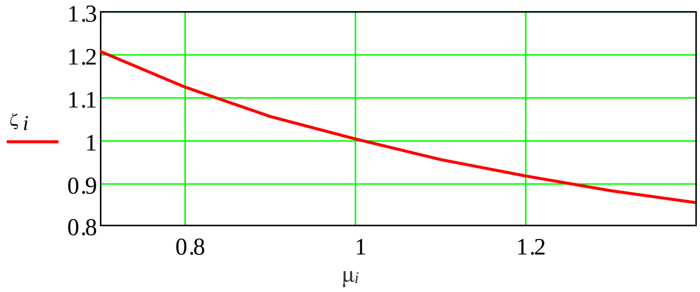


Рис. 3. Зависимость коэффициента влияния ζ от μ

Следует иметь в виду, что поскольку в изгибаемых статически неопределимых стержневых системах внутренние усилия от действия нагрузки зависят от соотношения изгибных жесткостных характеристик, то учет разномодульности материала не повлияет на величины внутренних усилий. Поэтому коэффициент влияния (12) должен учитываться при определении внутренних усилий в плоских статически неопределимых стержневых конструкциях только при действии температуры или осадки опор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов, Г.П. Исследование несовершенной упругости металлов: автореф. дис. … канд. техн. наук / Г.П. Иванов. – Минск, 1973.
2. Авхимков, А.П. Об уравнениях обобщенного закона упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию и некоторых их приложениях: автореф. дис. … канд. техн. наук / А.П. Авхимков. – М., 1975.
3. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1982.
4. Турищев, Л.С. Строительная механика: учеб.-метод. компл. / Л.С. Турищев. – Новополоцк: ПГУ, 2005. – Ч. 1: Статически определимые системы.
5. Турищев, Л.С. Строительная механика: учеб.-метод. компл. / Л.С. Турищев. – Новополоцк: ПГУ, 2009. – Ч. 2: Статически неопределимые системы.

Поступила 14.07.2011

TO THE DESIGN OF PLANE CORE STRUCTURES TAKING INTO CONSIDERATION DIFFERENT MODULUS OF A MATERIALS

L. TOURISCHEV

The influence of elasticity modulus difference in tension and compression of a construction material on the displacement and internal efforts which appear in a bending arbitrary plane rod structure is analyzed. The elasticity modulus difference is registered by bilinear diagram of stress and deformation. To evaluate the influence of material difference modulus on displacement a special formula was invented. This formula is the generalization of Maxwell-More formula and other formulas for definition of displacement in an ordinary elastic statically indeterminate rod structure, when a structure is subjected to heat and yielding of supports. The formulas are corrected for rod structures to define displacement in most beam and frame structures taking into consideration only bending deformation. We also studied how the factor of modulus difference effects on the displacement and internal forces in statically determinate and statically indeterminate bending plane rod structures.