Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Г. М. МАКАРЕНКО

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Сборник заданий

В трех частях

Часть 1

Новополоцк
ПГУ
2008

УДК 53(076.2)
ББК 22.3я73
М15

Рекомендовано к изданию методической комиссией
геодезического факультета в качестве сборника заданий
(протокол № 32 от 05.11.2007)

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доц. УО «ПГУ» Л. И. ПРОКОПОВИЧ;
канд. техн. наук, доц. УО «ПГУ» Н.В. ОЩЕПКОВА

Макаренко, Г. М.

М15 Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика : сб. заданий / Г. М. Макаренко. В 2 ч. Ч. 1. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 304 с.

ISBN 978-985-418-706-8 (Ч. 1).

Охватывает следующие разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений: физические основы классической механики с элементами специальной теории относительности, молекулярная физика и термодинамика.

Содержит свыше 500 задач, из них более 170 с решениями по основным разделам физики. В сборнике 60 вариантов индивидуальных заданий для студентов дневной и заочной форм обучения. Каждый вариант включает задачи по наиболее важным темам данных разделов вузовского курса общей физики. В сборнике даны варианты типовых расчетов по темам: физические основы механики, основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов в начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения, основные законы и формулы, методические указания к решению задач, примеры с подробным решением.

Предназначен для студентов вузов.

УДК 53 (076.2)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-418-706-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-418-705-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для усвоения курса физики важно не только знания теории, но и умение применять изученное на практике.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин.

При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теорию, научиться решать задачи.

Решение физических задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать изученные явления, выделять главные факторы, обусловливающие то или иное явление, отвлекаясь от случайных и несущественных деталей.

Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику – означает умение решать задачи». Следовательно, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решать.

Предлагаемый сборник содержит варианты типовых расчетов по темам «Физические основы механики», «Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики», а также 60 вариантов индивидуальных заданий. В начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения, основные законы и формулы, методические указания к решению задач и подробно разобраны примеры их решения. Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя – можно только научиться. Но для этого существует единственный путь – самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типовых задач выполняют другую роль: показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче.

Решение задач приближается к модели научного физического исследования.

Венгерский математик Д. Пойи писал: «Крупное научное открытие дает решение крупной победы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия… Если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы».

Умение решать задачи является лучшей оценкой глубины изучения программного материала.

Сборник охватывает следующие разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений: физические основы классической механики с элементами специальной теории относительности, молекулярная физика и термодинамика.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1. Слева записать исходные данные задачи, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров.
2. Выразить исходные данные в международной системе единиц (СИ). Исключение допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения – в таком случае они могут быть выражены в любой (но одной и той же) системе единиц.
3. Сделать чертеж, схему или рисунок с обозначением исходных данных в соответствии с условием задачи.
4. Установить физические законы, отвечающие содержанию задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину.
5. Решить задачу в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.
6. Произвести проверку размерностей. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине.
7. Произвести вычисления.
8. Привести в ответе числовые значения с сокращенным наименованием единицы измерения. Ответ записывают как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 6450 надо записать $6{,}45\cdot 10^{3}$, вместо $0{,}00214$ записать $2{,}14\cdot 10^{-3}$ и т.п.

Как выбрать номер варианта?

Номер варианта задания соответствует двум последним цифрам номера зачетной книжки студента или порядковому номеру фамилии студента в списке группы, или по указанию преподавателя.

Комплект задач задания определяется по *таблице вариантов* (табл. 1 – 2).

При этом необходимо придерживаться следующих указаний:

Номера задач в пособии содержат две части, разделенные точкой: 1.1, 1.2,…, 3.12,…, 6.14,…, 9.23.

Первое число (левее точки) соответствует номеру темы. Число правее точки соответствует номеру задачи данной темы.

Таблица 1

Варианты заданий для студентов дневной формы обучения

Номер вариа-нта	Цифра перед точкой в номере задач (в номере типа задач)																			
	1.	**1.**	**1.**	**2.**	**2.**	**2.**	**3.**	**3.**	**4.**	**4.**	**4.**	**5.**	**5.**	**6.**	**7.**	**7.**	**8.**	**8.**	**8.**	**9.**
	Номер задачи (цифра после точки)																			
01	53	81	121	1	57	113	29	85	29	84	113	55	57	4	2	65	25	53	82	29
02	54	82	122	2	58	114	30	86	30	83	114	56	58	5	1	66	24	52	83	30
03	55	83	123	3	59	115	31	87	31	82	115	1	59	6	29	67	23	51	84	31
04	56	84	124	4	60	116	32	88	32	81	116	2	60	7	30	68	22	50	85	32
05	57	85	125	5	61	117	33	89	33	80	117	3	61	8	31	69	21	49	86	33
06	58	86	126	6	62	118	34	90	34	79	118	4	62	9	32	70	20	48	87	34
07	59	87	127	7	63	119	35	91	35	78	119	5	63	10	33	71	19	47	88	35
08	60	88	128	8	64	120	36	92	36	77	120	6	64	11	34	72	18	46	89	36
09	61	89	129	9	65	121	37	93	37	76	121	7	65	12	35	73	17	45	90	37
10	62	90	130	10	66	122	38	94	38	75	122	8	66	13	36	74	16	44	91	38
11	63	91	131	11	67	123	39	95	39	74	123	9	67	14	37	75	15	43	92	39
12	64	92	132	12	68	124	40	96	40	73	124	10	68	15	38	76	14	42	93	40
13	65	93	133	13	69	125	41	97	41	72	125	11	69	16	39	77	13	41	94	41
14	66	94	134	14	70	126	42	98	42	71	126	12	70	17	40	78	12	40	95	42
15	67	95	135	15	71	127	43	99	43	70	127	13	71	18	41	79	11	39	96	43
16	68	96	136	16	72	128	44	100	44	69	128	14	72	19	42	80	10	38	97	44
17	69	97	139	17	73	129	45	101	45	68	129	15	73	20	43	81	9	37	98	45
18	70	98	140	18	74	130	46	102	46	67	130	16	74	21	44	82	8	36	99	46
19	71	99	141	19	75	131	47	103	47	66	131	17	75	22	45	83	7	35	100	47
20	72	100	143	20	76	132	48	104	48	65	132	18	76	23	46	84	6	34	101	48
21	73	101	144	21	77	133	49	105	49	64	133	19	77	24	47	57	5	33	102	49
22	74	102	145	22	78	134	50	106	50	63	134	20	78	25	48	58	4	32	103	50
23	75	103	146	23	79	135	51	107	51	62	135	21	79	26	49	59	3	31	104	51

Продолжение табл. 1

Номер варианта	Цифра перед точкой в номере задач (в номере типа задач)																			
	1.	**1.**	**1.**	**2.**	**2.**	**2.**	**3.**	**3.**	**4.**	**4.**	**4.**	**5.**	**5.**	**6.**	**7.**	**7.**	**8.**	**8.**	**8.**	**9.**
	Номер задачи (цифра после точки)																			
24	76	104	150	24	80	136	52	108	52	61	136	22	80	27	50	60	2	30	105	52
25	77	105	159	25	81	137	53	109	53	60	137	23	81	28	51	61	1	29	106	53
26	78	106	160	26	82	138	54	110	54	59	85	24	82	29	52	62	1	28	107	54
27	79	107	162	27	83	139	55	111	55	58	89	29	83	30	28	63	2	27	108	55
28	80	108	163	28	84	140	56	112	56	57	90	30	84	31	27	64	3	26	109	56
29	26	6	142	29	85	1	24	113	44	76	97	31	57	32	26	65	4	54	110	1
30	27	7	137	30	86	2	23	114	45	77	98	32	58	60	25	66	5	55	111	2
31	28	8	138	31	87	115	22	115	30	57	1	33	59	60	24	67	6	56	112	3
32	29	9	147	32	88	116	21	116	29	58	2	34	60	33	23	68	7	57	113	4
33	30	10	148	33	89	140	20	117	31	59	3	35	61	34	22	69	8	58	114	5
34	31	11	149	34	90	138	19	118	32	60	4	36	62	35	21	70	9	59	115	6
35	32	12	151	35	91	139	18	119	33	61	5	37	63	36	20	71	10	60	116	7
36	33	13	152	36	92	137	17	120	34	62	6	38	64	37	19	72	11	61	117	8
37	34	14	153	37	93	136	16	121	35	63	7	39	65	38	18	73	12	62	118	9
38	35	15	154	38	94	135	15	122	36	64	8	40	66	39	17	74	13	63	119	10
39	36	16	155	39	95	134	14	123	37	65	9	41	67	40	16	75	14	64	120	11
40	37	17	156	40	96	133	13	124	38	66	10	42	68	41	15	76	15	65	121	12
41	38	18	157	41	97	132	12	125	39	67	11	43	69	42	14	77	16	66	122	13
42	39	19	158	42	98	131	11	126	40	68	12	44	70	13	13	78	17	67	123	14
43	40	20	161	43	99	130	10	127	41	69	13	45	71	14	12	79	18	68	124	15
44	41	21	164	44	100	129	9	128	42	70	14	46	72	15	11	80	19	69	125	16
45	42	22	165	45	101	128	8	129	43	71	15	47	73	16	10	81	20	70	126	17

Окончание табл. 1

Номер варианта	Цифра перед точкой в номере задач (в номере типа задач)																			
	1.	**1.**	**1.**	**2.**	**2.**	**2.**	**3.**	**3.**	**4.**	**4.**	**4.**	**5.**	**5.**	**6.**	**7.**	**7.**	**8.**	**8.**	**8.**	**9.**
	Номер задачи (цифра после точки)																			
46	43	23	166	46	102	127	7	130	44	72	16	48	74	47	9	82	21	71	127	18
47	44	24	167	47	103	126	6	131	45	73	17	49	75	48	8	83	22	72	128	19
48	45	25	168	48	104	125	5	132	46	74	18	50	76	49	7	84	23	73	129	20
49	46	109	169	49	105	124	4	133	47	75	19	51	77	50	6	57	24	74	130	21
50	47	110	170	50	106	123	3	134	48	76	20	52	78	51	5	58	25	75	131	22
51	48	111	171	51	107	122	2	135	49	77	21	53	79	52	4	59	25	76	132	23
52	49	112	172	52	108	121	1	136	50	78	22	54	80	53	3	60	24	77	133	24
53	50	113	173	53	109	120	145	137	51	79	23	25	81	54	53	64	23	78	134	25
54	51	114	174	54	110	119	146	138	52	80	24	26	82	55	54	63	22	79	135	26
55	52	115	175	55	111	118	147	139	53	81	25	27	83	56	55	62	21	80	136	27
56	1	116	176	56	112	117	169	140	54	82	26	28	84	57	56	61	20	81	137	28
57	2	117	177	80	113	172	170	141	55	83	27	48	57	58	21	60	19	53	138	29
58	3	118	178	72	114	173	171	142	56	84	28	52	62	59	22	59	18	49	82	30
59	4	119	179	64	115	174	175	143	61	99	41	32	67	60	23	58	17	45	83	31
60	5	120	180	60	116	172	174	144	69	100	34	36	73	60	24	57	16	41	84	32

Таблица 2

Варианты заданий для студентов заочной формы обучения

Номер вари-анта	Цифра перед точкой в номере задач (в номере типа задач)										
	1.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
	Номер задачи (цифра после точки)										
01	81	137	157	194	57	138	93	20	85	167	82
02	82	139	143	195	58	139	94	19	86	166	83
03	83	140	169	196	59	140	95	18	87	165	81
04	84	141	168	197	60	141	96	17	88	164	80
05	85	143	164	198	61	142	97	16	89	163	79
06	86	144	165	189	62	143	98	15	90	162	78
07	87	145	166	190	63	144	99	14	91	161	77
08	88	146	167	191	64	145	100	13	92	160	76
09	89	147	149	192	65	146	101	12	93	159	75
10	90	148	150	193	66	147	102	11	94	158	74
11	91	150	172	188	67	148	103	10	95	157	73
12	92	151	173	187	68	149	104	9	96	156	72
13	93	152	174	186	69	150	105	8	97	155	71
14	94	153	184	185	70	151	106	7	98	154	70
15	95	154	176	184	71	152	107	6	99	153	69
16	96	155	177	183	72	153	108	5	100	152	68
17	97	156	178	182	73	154	109	4	101	151	67
18	98	157	179	181	74	155	110	21	102	150	66
19	99	159	160	180	75	156	111	22	103	149	65
20	100	160	161	179	76	157	112	23	104	148	64
21	101	161	162	178	77	158	113	24	105	147	63
22	102	162	163	177	78	159	114	25	106	146	62
23	103	163	158	176	79	160	115	26	107	145	61
24	104	165	157	175	80	161	116	27	108	144	60
25	105	166	156	174	81	152	117	28	109	143	59
26	106	167	155	173	82	160	118	29	110	142	58
27	107	168	141	172	83	140	119	30	85	141	57
28	108	169	144	170	84	150	120	31	86	140	58
29	16	170	145	169	57	163	121	32	87	139	59
30	27	164	158	199	58	164	122	33	88	1	60
31	32	158	159	171	59	165	123	34	89	2	61
32	35	149	171	57	60	166	124	35	90	3	62
33	40	142	175	58	61	167	92	36	91	4	63
34	42	138	176	59	62	168	91	37	92	5	64
35	18	46	177	60	63	169	90	38	93	6	65
36	19	50	178	61	64	170	89	39	94	7	66

Окончание табл. 2

Номер вари-анта	Цифра перед точкой в номере задач (в номере типа задач)										
	1.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
	Номер задачи (цифра после точки)										
37	20	109	179	62	65	171	88	40	95	8	67
38	21	110	180	63	66	172	87	41	96	9	68
39	22	111	181	69	67	173	86	42	97	10	69
40	23	112	142	65	68	174	85	43	98	11	70
41	26	100	182	66	69	175	93	44	99	12	71
42	30	99	183	67	70	176	94	45	100	13	72
43	34	98	151	68	71	177	95	47	101	14	73
44	38	97	152	69	72	178	96	46	102	15	74
45	96	181	153	70	73	179	97	45	103	16	75
46	95	182	146	71	74	180	98	54	104	17	76
47	94	183	147	72	75	181	99	53	105	18	77
48	93	184	148	73	76	182	100	52	106	19	78
49	92	175	154	74	77	183	101	51	107	20	79
50	91	176	155	75	78	184	102	50	108	21	80
51	90	177	156	76	79	185	103	49	109	22	81
52	89	178	154	77	80	186	104	48	110	23	82
53	88	179	172	78	81	187	105	57	88	24	83
54	87	180	173	79	82	188	106	56	89	25	57
55	7	86	174	80	83	189	107	55	90	141	58
56	10	85	141	81	84	190	108	58	91	142	59
57	11	84	144	82	74	191	109	60	92	143	60
58	12	83	179	83	75	148	110	60	93	144	61
59	14	82	170	84	72	144	111	60	94	145	62
60	15	81	175	67	63	154	112	59	95	146	63

Левый вертикальный столбец таблицы вариантов содержит номера вариантов от 1 до 60. Верхняя строка отражает последнюю цифру перед точкой в номере задачи. Остальные горизонтальные строки, начиная с номера варианта, содержат номера задач соответствующих тем в данном варианте (число после точки).

Как пользоваться таблицей вариантов?

Приведем примеры:

- для студентов дневной формы обучения (табл. 1) в варианте №32 – задачи 1.29; 1.9; 1,147; 2.32; 2.88; 2.116; 3.21; 3.116; 4.29; 4.58; 4.2; 5.34; 5.60; 6.33; 7.23; 7.68; 8.7; 8.57; 8.113; 9.4.

- для студентов заочной формы обучения (табл. 2) в варианте №06 – задачи 1.86; 1.114; 2.165; 3.189; 4.62; 4.143; 5.98; 6.15; 7.90; 8.162; 9.78.

Студентам заочной формы обучения надо учесть следующее:

1. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по следующему образцу:

Студент геодезического факультета ПГУ Киселев А.В. Шифр 05560206 Адрес: г. Витебск, ул. Фрунзе, 2, кв. 15, тел. 222-68-78 Контрольная работа № 1 по физике

2. Условия задач в контрольной работе надо переписывать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

3. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с незачтенной.

4. Зачтенные контрольные работы остаются на кафедре (у преподавателя). Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

5. Вычисления по расчетной формуле надо производить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Положение материальной точки (МТ) в пространственной системе отсчета задается ее радиусом-вектором $\vec{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ – вектором, проведенном из начала координат в данную точку *A* (рис. 1.1).

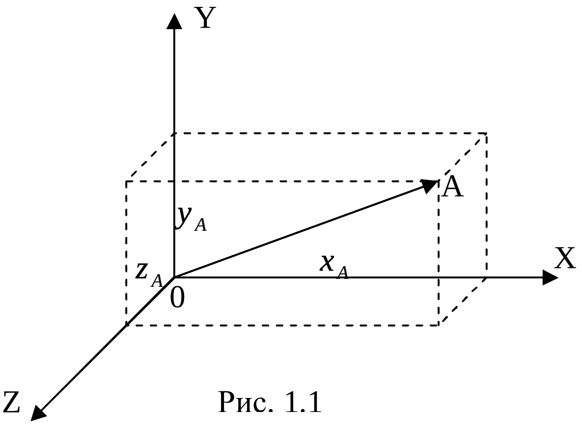


Рис. 1.1

При движении МТ ее радиус-вектор изменяется. Функцию, выражающую изменение радиуса-вектора во времени, называют законом или уравнением движения. Уравнение движения записывают как в векторной, так и в координатной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ или } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Знание уравнения движения МТ позволяет получить всю информацию о ее движении. В частности, скорость $\vec{u}$ и ускорение $\vec{a}$ определяются формулами:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}. \quad (1.2)$$

Соответственно для проекций скорости и ускорения справедливы формулы:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z; \quad (1.3)$$

$$\frac{du_x}{dt} = a_x, \quad \frac{du_y}{dt} = a_y, \quad \frac{du_z}{dt} = a_z. \quad (1.4)$$

Зная закон движения, можно найти вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, пройденный путь, радиус кривизны траектории и другие дополнительные характеристики движения. Задачи, в которых по известному закону движения путем его дифференцирования определяют скорость, ускорение и другие кинематические характеристики движения, называют **прямыми** задачами кинематики, а задачи, в которых по известным дополнительным характеристикам движения «восстанавливается» закон движения, – **обратными** задачами кинематики.

Обратные задачи значительно труднее прямых. В простейших случаях они сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений (1.3) и (1.4) методом разделения переменных. Например, если задана зависимость проекции ускорения от времени $a_x(t)$, то первое из уравнений (1.4) можно записать в виде $du_x = a_x(t)dt$. Интегрируя левую и правую части этого выражения, получаем

$$u_x(t) = \int a_x(t)dt + C_1, \tag{1.5}$$

где постоянную интегрирования C_1 определяют из начальных условий, т.е. по заданному значению проекции скорости в начальный момент времени u_{0x} (см. пример 2).

Аналогично, зная $u_x(t)$, можно записать первое из уравнений (1.3) в виде $dx = u_x(t)dt$ и, соответственно,

$$x(t) = \int u_x(t)dt + C_2, \tag{1.6}$$

где постоянную интегрирования C_2 определяют по заданному значению координаты в начальный момент времени x_0 (см. пример 2).

Решение кинематических задач можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 1.2

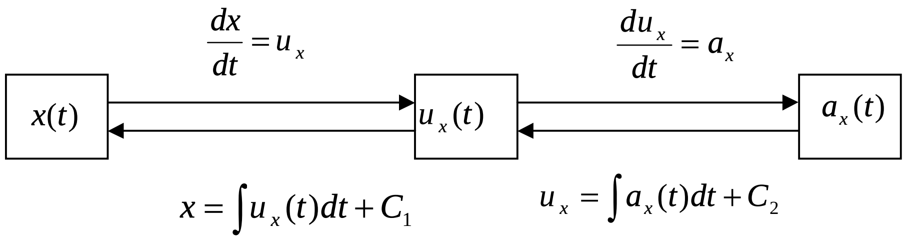


Рис. 1.2

В случае равномерного движения ($u = \text{const}$) выполняется соотношение $\Delta\vec{r} = \vec{u}\Delta t$. Формулы движения с постоянным ускорением имеют вид

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a}t; \tag{1.6}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{u}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.7}$$

где $\vec{u}_0$ – начальная скорость.

В криволинейном движении точки полное ускорение $\vec{a}$ есть векторная сумма тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений. Модуль полного ускорения равен при этом

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}}. \tag{1.8}$$

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}; \tag{1.9}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}, \tag{1.10}$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке, $\vec{\upsilon}$ – скорость точки; $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно к скорости.

Если МТ движется в одном измерении, то достаточно задать скалярную, зависящую от времени координату $x(t)$.

По известной зависимости $x(t)$ легко найти значения скорости $\frac{dx}{dt} = \upsilon_x$ и ускорения $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. В соответствии со своими определениями величины $x(t)$, $\upsilon_x(t)$ и $a_x(t)$ связаны математически следующими соотношениями:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon_x(t)dt; \tag{1.11}$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_0^t a_x(t)dt, \tag{1.12}$$

где x_0 и υ_0 – начальная координата и скорость, t – время.

В случае прямолинейного равнопеременного движения (движение с постоянным ускорением) формулы (1.11), (1.12) записываются в виде

$$x = \pm x_0 \pm \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \quad \upsilon = \pm\upsilon_0 \pm at.$$

Перед x_0, υ_0 и a знак «плюс» берется, когда начальная скорость υ_0, координата x_0 и ускорение a направлены вдоль оси *X*, а знак «минус» – если их направление противоположно оси.

Практически при решении задач используем следующее.

При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной $\vec{a}_n$ и тангенциальной $\vec{a}_\tau$ составляющих (рис. 1.3): $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

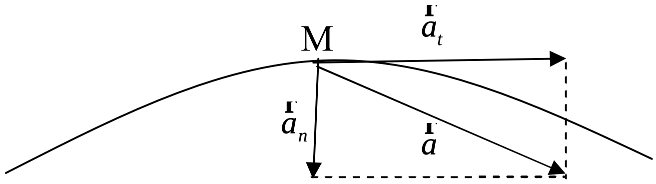


Рис. 1.3

Абсолютные значения этих ускорений $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$;

$$a_t = \frac{d\upsilon}{dt}; \;\; a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\,,$$

где R – радиус кривизны в данной точке траектории.

Движение с постоянным ускорением:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Проекция радиуса-вектора $\vec{r}$ на ось X имеет вид

$$r_x(t) = x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном движении:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t.$$

При вращательном движении твердого тела вокруг фиксированной оси роль перемещения $\Delta\vec{r}$ играет вектор малого поворота на угол $\Delta\vec{\varphi}$. Он направлен вдоль оси вращения по правилу буравчика.

Угловая скорость $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$.

Равнопеременное вращение тела вокруг неподвижной оси:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Связь угловых величин с линейными: путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R, равен $\Delta S = R\Delta\varphi$, линейная скорость этой точки $\upsilon = \omega R$,тангенциальное ускорение точки $a_\tau = \varepsilon R$, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, полное ускорение $a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

Если в процессе решения задачи возникает необходимость сопоставить движение МТ в двух системах отсчета, одна из которых K неподвижна, а другая K' движется относительно первой со скоростью υ_0, то используют **преобразования Галилея.** Например, если в начальный момент времени оси систем координат K и K' совпадают, а система K' движется со скоростью υ_0, направленной вдоль оси OX (рис. 1.4), то для соответствующих координат МТ можно записать:

$$\begin{cases} x = x' + u_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

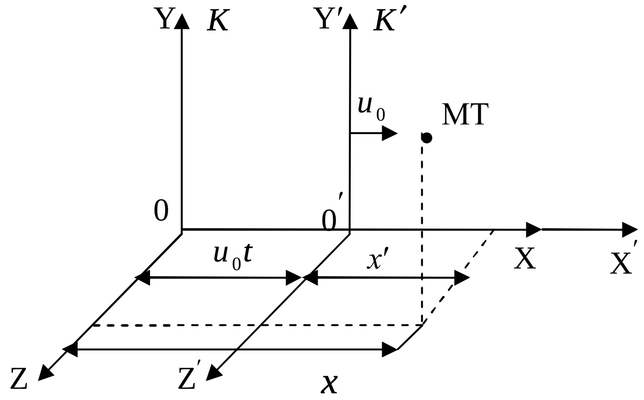


Рис. 1.4

Из преобразований Галилея следует **закон сложения скоростей:**

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}_0. \qquad (1.13)$$

Для приведенного примера (см. рис. 1.4) в координатной форме этот закон записывают в виде:

$$u_x = u'_x + u_0; \qquad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

1.2. Примеры решения задач

1. Автомобиль половину времени движется с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 72$ км/ч, а вторую половину времени – со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Найти среднюю путевую скорость $\upsilon_{ср}$ автомобиля.

Дано: $\frac{1}{2}t - \upsilon_1 = 72$ км/ч; $\frac{1}{2}t - \upsilon_2 = 40$ км/ч.

Найти: $\upsilon_{ср}$.

Решение. Введем обозначения: t_0 – момент начала движения, t_1 – момент смены скорости, t_2 – момент окончания движения. По условию $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$, а полное время движения равно

$$(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = t_2 - t_0 = 2(t_1 - t_0) = 2(t_2 - t_1)$$

На первом этапе проходится путь $S_1 = \upsilon_1(t_1 - t_0) = \frac{\upsilon_1(t_2 - t_0)}{2}$, на втором – путь $S_2 = \upsilon_2(t_2 - t_1) = \frac{\upsilon_2(t_2 - t_0)}{2}$. Полный пройденный путь равен сумме этих путей:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}(t_2 - t_0).$$

Согласно определению средней путевой скорости находим:

$$\upsilon_{ср} = \frac{S}{t_2 - t_0} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{72 + 40}{2} = 56 \text{ км/ч}.$$

2. Решим аналогичную задачу, т.е. определим среднюю путевую скорость, если автомобиль двигался с той же скоростью u_1 первую половину пути (а не времени), а вторую половину – со скоростью u_2.

Решение. В этом случае $S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$. Время движения на первом участке пути $t_1 - t_0 = \frac{S_1}{\upsilon_1} = \frac{S}{2\upsilon_1}$. На втором участке $t_2 - t_1 = \frac{S_2}{\upsilon_2} = \frac{S}{2\upsilon_2}$.

Полное время движения

$$t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = \frac{S}{2\upsilon_1} + \frac{S}{2\upsilon_2} = S\frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2\upsilon_1\upsilon_2},$$

отсюда средняя скорость движения

$$\upsilon_{cp} = \frac{S}{t_2 - t_0} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{2\cdot 72\cdot 40}{72 + 40} = 51{,}4 \text{ км/ч}.$$

3. Закон движения материальной точки имеет вид

$$x = b_1 + c_1 t, \qquad y = c_2 t + d_2 t^2, \qquad z = 0,$$

где $b_1 = -9$ м; $c_1 = 3$ м/с; $c_2 = 4$ м/с; $d_2 = -1$ м/с^2.

Построить графики зависимости $x(t)$ и $y(t)$ и траекторию точки за первые 5 с движения. Найти векторы скорости, ускорения и угол между ними в моменты времени $t_1 = 2$ с; $t_2 = 4$ с.

Решение. Так как $z = 0$, движение происходит в плоскости *XOY*. Координата x изменяется со временем по линейному закону, следовательно, движение вдоль оси *X* равномерное, график зависимости $x(t)$ имеет вид прямой. Координата y изменяется со временем по квадратичному закону, следовательно, движение вдоль оси *У* равнопеременное и график зависимости $y(t)$ имеет вид параболы.

Для построения траектории надо выразить y как функцию x. График $y(x)$ и будет траекторией движения точки. Можно также по заданным в условии уравнениям рассчитать значения x и y в отдельных, наиболее характерных точках и по ним построить траекторию.

Найдя проекции векторов скорости и ускорения последовательным дифференцированием по времени уравнений движения, можно определить модуль и направление векторов $\vec{u}$ и $\vec{a}$ для любого момента времени.

Так как график $x(t)$ имеет вид прямой, пересекающей оси координат, то в точках $t_0 = 0$, $x_0 = b_1 = -9$ м, $t' = -\frac{b_1}{c_1} = 3$ с, $x' = 0$ (рис. 1.5).

Для построения графика $y(t)$ найдем точки пересечения его с осью абсцисс (ось, по которой отложено время), т.е. точки, в которых $y = 0$, и экстремальное значение y.

Из уравнения $y = c_2 t + d_2 t^2 = 0$ получим, что $y = 0$ при $t_0' = 0$ и $t_0'' = -\dfrac{c_2}{d_2} = 4$ с. Для определения экстремального значения y следует приравнять нулю производную dy/dt:

$$dy/dt = c_2 + 2d_2 t = 0,\quad t_3 = -\frac{c_2}{d_2} = 2 \text{ с},\quad y(t_3) = 4 \text{ м}.$$

Это значение соответствует максимальному. Таким образом, график $y(t)$ имеет вид параболы, обращенной вершиной вверх (см. рис. 1.5).

Для построения траектории по точкам надо найти и выписать значения обеих координат во всех рассмотренных при построении графиков точках и при $t = 5$ с (конечная точка по условию задачи):

t, с	0	2	3	4	5
x, м	–9	–3	0	3	6
y, м	0	4	3	0	–5

Эти значения x и y следует наносить на плоскость *XOY* по нарастающим значениям времени. Траектория, построенная по данным точкам, показана на рис. 1.6.

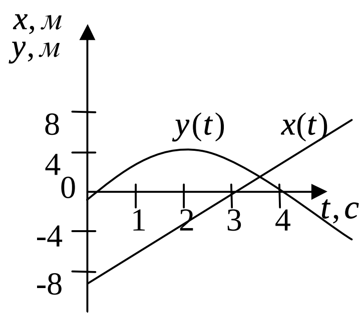


Рис. 1.5

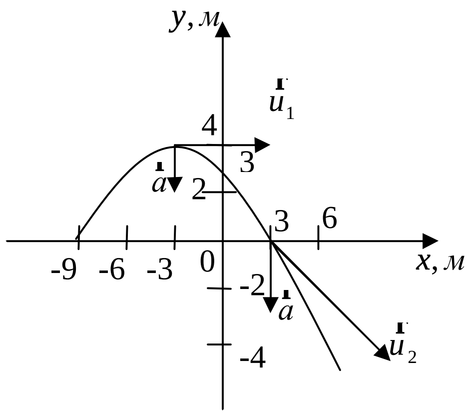


Рис. 1.6

Определим скорость движущейся точки в заданные моменты времени: $u_x = dx/dt = C_1$; $u_y = dy/dt = C_2 + 2d_2 t$.

Модуль вектора скорости $u = \sqrt{u_x^{\ 2} + u_y^{\ 2}} = \sqrt{C_1^{\ 2} + (C_2 + 2d_2 t)^2}$.

Угол наклона вектора $\vec{u}$, например к оси ОУ

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2 + 2d_2 t}.$$

Для $t_1 = 2$ с $u_1 = 3$ м/с, $\beta = \frac{\pi}{2}$, т.е. вектор скорости направлен по оси *X*.

Для $t_2 = 4$ с $u_2 = 5$ м/с, $\beta = \operatorname{arctg}(-0,75) = 143°$, т.е. вектор скорости образует тупой угол с осью *ОУ*.

Найдем ускорение движущейся точки:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = 0; \qquad a_y = \frac{du_y}{dt} = 2d_2.$$

Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}$ в любой момент направлен по вертикали вниз ($d_2 < 0$), модуль вектора ускорения $a = 2$ м/с^2. Из рис. 1.5 видно, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{u}$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2}(t_1 = 2\ \text{с}) \cdot \gamma_2 = \pi - \beta = 37°(t_2 = 4\ \text{с}).$$

При произвольном криволинейном движении угол $\widehat{\vec{a}, \vec{u}}$ может иметь любое значение от 0 до π.

4. Две материальные точки движутся по одной прямой, совпадающей с осью *ОХ* декартовой системы координат. В начальный момент времени первая точка имела координату $x_{10} = 4$ м, а вторая $x_{20} = 8$ м. Скорости точек изменяются по законам $u_1 = bt + ct^2$ и $u_2 = -bt + ct^2$, где $b = 1$ м/с^2, $c = 2$ м/с^2. Определить ускорения точек в момент их встречи.

Дано: $x_{10} = 4$ м; $x_{20} = 8$ м; $u_1 = bt + ct^2$; $u_2 = -bt + ct^2$; $b = 1$ м/с^2; $c = 2$ м/с^2.

Найти: a_1; a_2

Решение. Сначала находим время встречи точек и зависимости их ускорений от времени. Условием встречи является равенство координат точек. Поэтому определим законы их движения по формуле (1.6):

$$x_1 = \int u_1 dt + C_1 = \int (+bt + ct^2) dt + C_1 = \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_1;$$

$$x_2 = \int u_2 dt + C_2 = \int (-bt + ct^2) dt + C_2 = -\frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_2.$$

Константу C_1 определим из начального условия $x_1(t=0)=x_{10}$. Используя это равенство, находим $C_1=x_{10}$. Аналогично получим, что $C_2=x_{20}$.

Тогда законы движения первой и второй точек примут вид:

$$x_1=x_{10}+\frac{bt^2}{2}+\frac{ct^3}{3};$$

$$x_2=x_{20}-\frac{bt^2}{2}+\frac{ct^3}{3}.$$

Приравняем эти выражения в момент встречи и примем $t=t_в$ ($t_в$ – время встречи); $x_{10}+\frac{bt_в^2}{2}+\frac{ct_в^2}{3}=x_{20}-\frac{bt_в^2}{2}+\frac{ct_в^2}{3}$.

Выполнив преобразования, находим $t_в=\pm\sqrt{\frac{x_{20}-x_{10}}{b}}$. После вычислений выбираем положительные значения корня и получаем $t_в=2$ с.

Ускорения первой и второй точек находим по формуле (1.4)

$$a_{1x}=b+2ct; \qquad a_{2x}=-b+2ct;.$$

Подставляя в эти уравнения найденное значение времени встречи, получим ответ:

$$a_1=b+2ct_в=9\ \text{м/с}^2;$$

$$a_2=-b+2ct_в=7\ \text{м/с}^2.$$

5. Две прямые дороги пересекаются под углом $\alpha=60°$. По ним к перекрестку приближаются два автомобиля: грузовик со скоростью $u_1=54$ км/ч и легковой автомобиль со скоростью $u_2=72$ км/ч . С патрульного вертолета заметили, что в некоторый момент времени грузовик находится на расстоянии $l_1=500$ м, а легковой автомобиль – на расстоянии $l_2=1000$ м от перекрестка. Требуется ответить на вопросы:

1. Возможно ли столкновение машин?
2. Каково минимальное расстояние, на которое сближаются машины, и когда это сближение произойдет?
3. Какова скорость автомобилей в системе отсчета, движущейся вместе с вертолетом, если вертолет летит со скоростью $u=216$ км/ч навстречу легковому автомобилю?

Дано: $\alpha = 60°$; $u_1 = 54$ км/ч; $u_2 = 72$ км/ч; $l_1 = 500$ м; $l_2 = 1000$ м; $u = 216$ км/ч.

Найти: $S_{\min}$; u_1'; u_2'; t_1; t_2.

Решение

1. Время движения грузовика t_1 и время движения легкового автомобиля t_2 до перекрестка определяем, используя формулы $t_1 = \frac{l_1}{u_1}$ и $t_2 = \frac{l_2}{u_2}$. После вычислений получаем $t_1 \approx 33$ с, $t_2 \approx 50$ с. Столкновения не произойдет.

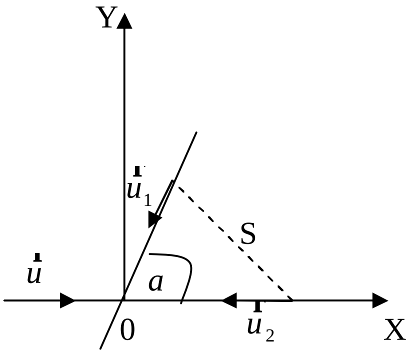


Рис. 1.7

2. Используем систему отсчета с началом координат на перекрестке и осью *OX*, направленной навстречу движению легкового автомобиля (рис. 1.7).

Началом отсчета времени будем считать момент фиксации указанных в условии расстояний. Закон движения грузовика будет иметь вид: $\begin{cases} x_1 = x_{01} + u_{1x} \cdot t \\ y_1 = y_{01} + u_{1y} \cdot t \end{cases}$.

Соответственно для легкового автомобиля $\begin{cases} x_2 = x_{02} + u_{2x} \cdot t \\ y_2 = 0 \end{cases}$.

По условию начальные координаты и проекции скоростей соответственно равны:

$x_{01} = l_1 \cos\alpha = 500 \cdot 0{,}5 \text{ м} = 250 \text{ м}$, $\upsilon_{1y} = -\upsilon_1 \sin\alpha = -15 \cdot 0{,}87 \text{ м/с} = -13 \text{ м/с}$,

$y_{01} = l_1 \sin\alpha = 500 \cdot 0{,}87 \text{ м} = 433 \text{ м}$, $x_{02} = l_2 = 1000 \text{ м}$, $y_{02} = 0$,

$\upsilon_{1x} = -\upsilon_1 \cos\alpha = -15 \cdot 0{,}5 \text{ м/с} = -7{,}5 \text{ м/с}$, $\upsilon_{2x} = -\upsilon_2 = -20 \text{ м/с}$, $\upsilon_{2y} = 0$.

Расстояние S между автомобилями определяем с помощью формулы:

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

или

$$S = \sqrt{(x_{01} + u_{1x}t - x_{02} - u_{2x}t)^2 + (y_{01} + u_{1y}t)^2}. \qquad (*)$$

Минимальное расстояние $S_{\min}$, на которое сближаются автомобили, находим из условия минимума этой функции, т.е. из равенства нулю производной: $\frac{dS}{dt} = 0$. Чтобы избежать громоздких выкладок, подставим в выражение (*) значения заданных величин, а затем найдем производную от подкоренного выражения (его минимум соответствует минимуму S):

$$\frac{d}{dt}=\left[(12{,}5t-70)^2+(-13t+435)^2\right]=0$$

или

$$2\cdot 12{,}\cdot 5\left(12{,}5\cdot t_{\min}-70\right)-2\cdot 13\left(-13t_{\min}+435\right)=0,$$

где $t_{\min}$ – время минимального сближения. После вычислений получаем $t_{\min}\approx 46{,}1$ с. Подставляя это значение $t_{\min}$ в выражение (*), найдем

$$S_{\min}=\sqrt{(12{,}5\cdot 46{,}1-750)^2+(13\cdot 46{,}1-435)^2}\text{ м}\approx 240\text{ м}.$$

3. Используем закон сложения скоростей (см. выше 1.13)

$$\vec{u}=\vec{u}'+\vec{u}_0$$

Будем считать, что движущаяся система отсчета имеет оси координат, параллельные осям координат выбранной ранее системы. Тогда $\vec{u}'=\vec{u}-\vec{u}_0$, где $\upsilon_0=\{60\text{ м/с};\ 0;\ 0\}$ – вектор скорости вертолета. Для проекций скорости грузовика получаем

$$\upsilon'_{1x}=\upsilon_{1x}-\upsilon_{0x}=\left(-7{,}5-60\right)\text{ м/с}=-67{,}5\text{ м/с};$$

$$\upsilon'_{1y}=\upsilon_{1y}=-13\text{ м/с},$$

а для легкового автомобиля

$$u'_{2x}=u_{2x}-u_{0x}=-80\text{ м/с};\quad u'_{2y}=u_{2y}=0.$$

Используя эти результаты, вычисляем модули скоростей грузовика и легкового автомобиля соответственно:

$$\upsilon'_1=\sqrt{\left(\upsilon'_{1x}\right)^2+\left(\upsilon'_{1y}\right)^2}\approx 68{,}7\text{ м/с}\approx 247\text{ км/ч};$$

$$\upsilon'_2=\left|\upsilon'_{2x}\right|=80\text{ м/с}=288\text{ км/ч}.$$

6. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось *OX*) имеет вид $x=A+Bt+Ct^2$, где $A=5$ м, $B=4$ м/с, $C=-1$ м/с^2. Найти: 1) максимальное значение координаты $x(t)$; 2) момент времени T, когда точка возвращается в то же место, где она была в начальный момент $t=0$; 3) среднюю скорость $<u_x>$ за интервал времени от $t_1=1$ с до $t_2=6$ с; 4) среднюю путевую скорость $u_{ср}$ за тот же интервал времени.

Построить график зависимости от времени координаты x и пути S, пройденного точкой с момента $t=0$.

Дано: $x=A+Bt+Ct^2$; $A=5$ м; $B=4$ м/с; $C=-1$ м/с^2; $t_1=1$ с; $t_2=6$ с.

Найти: T; $<u_x>$; $u_{ср}$; $x(t)$; $S(t)$.

Решение. В момент $t=0$ значение координаты равно $x(0)=A=5$ м. Зависимость скорости от времени задается линейным уравнением

$$u=\frac{dx}{dt}=B+2Ct.$$

В начальный момент времени скорость $u(0) = B = 4$ м/с положительна, т.е. точка движется в направлении возрастания координаты x. Скорость же с течением времени падает и в момент времени $t_{max} = -\dfrac{B}{2C} = 2$ с обращается в нуль, а затем становится отрицательной. Это значит, что в момент t_{max} точка остановилась, а затем стала двигаться в направлении уменьшения координаты x. Стало быть, в момент времени t_{max} координата точки достигла своего максимального значения:

$$x_{max} = A + Bt_{max} + Ct^2_{max} = A - \frac{B^2}{4C} = 9 \text{ м}.$$

По условию задачи, координаты точки в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ совпадают, т.е. $A = A + BT + CT^2$. Отсюда $T = -\dfrac{B}{C} = 4$ с. Теперь находим положение точки в данные моменты времени t_1 и t_2:

$$x_1 = x(t_1) = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8 \text{ м}; \qquad x_2 = x(t_2) = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7 \text{ м}.$$

Зная изменение координаты $\Delta x = x_2 - x_1 = -15$ м за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ с, определяем среднюю скорость за этот интервал времени:

$$< u_x > = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -3 \text{ м/с}.$$

t	0	1	2	3	4	5	6
x	5	8	9	8	5	0	–7
S	0	3	4	5	8	13	20

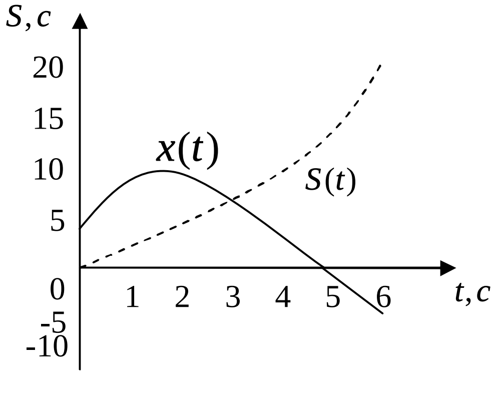


Рис. 1.8

График зависимости координаты от времени $x(t)$ представляет в данном случае параболу, обращенную выпуклостью вверх (коэффициент C отрицателен) и с вертикальной осью симметрии. Трех из уже найденных пар координат (0;5), (4;5), (2;9) достаточно для построения графика (сплошная линия на рис. 1.8). Видно, что в момент t_1 точка находится на восходящей ветви параболы, а в момент времени t_2 – на ее нисходящей ветви.

Поэтому пройденный точкой путь ΔS складывается из двух частей:

$\Delta S_1 = x_{max} - x_1 = 1$ м на отрезке времени от t_1 до t_{max} и $\Delta S_2 = x_{max} - x_2 = 9 = -(-7) = 16$ м на отрезке времени от t_{max} до t_2.

Полный пройденный путь равен $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 17$ м, откуда средняя путевая скорость $u_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{17}{5} = 3{,}4$ м/с. (Величина $u_{ср}$ всегда положительна).

К произвольному моменту времени $t \le t_{max}$ точка проходит путь $S(t) = x(t) - x(0) = Bt + Ct^2$. Эта часть графика представляет собой ту же параболу, все точки которой смещены вниз на величину $A = 5$ м. Если же произвольный момент времени $t \ge t_{max}$, то пройденный путь складывается из пути $x_{max} - x(0)$, пройденного за время от $t = 0$ до t_{max} и пути $x_{max} - x(t)$, пройденного за время от t_{max} до t. В результате для моментов времени $t \ge t_{max}$ получаем выражение для пройденного пути:

$$S(t) = 2x_{max} - x(0) - x(t) = -\frac{B^2}{2C} - Bt - Ct^2.$$

График этой части представляет собой отражение нисходящей ветви графика $x(t)$, все точки которого смещены после этого по вертикали так, что обе найденные ветви графика $S(t)$ совпадают в точке t_{max}. Подставляя числовые значения коэффициентов A, B, C, выражения для обеих ветвей функции $S(t)$ можно объединить в одно: $S(t) = 4 + (t-2)|t-2|$. Зависимость пройденного пути $S(t)$ от времени изображена на рис. 1.8 пунктирной линией. Проверим наши вычисления средней путевой скорости.

К моменту $t_1 = 1$ с пройденный путь равен $S(t_1) = 4 - 1 = 3$ м, к моменту $t_2 = 6$ с он составляет $S(t_2) = 20$ м. Поэтому путь, пройденный за интервал времени между t_1 и t_2, равен $\Delta S = S(t_2) - S(t_1) = 17$ м, что совпадает с полученным ранее результатом и ведет к той же самой средней скорости.

7. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} \text{ (м)}.$$

Найти уравнение траектории $y = f(x)$ точки, а также определить значения нормального, тангенциального и полного ускорения точки и радиус кривизны траектории в момент времени $t = 1$ с.

Дано: $\vec{r} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ (м); $t = 1$ с.

Найти: $y = f(x)$; a_n; a_t; a; R.

Решение. Для определения уравнения траектории материальной точки в виде $y = f(x)$ запишем закон движения в координатной форме.

$$x = 2t, \quad y = 3t^2.$$

Следовательно, $t = 0{,}5x$, $y = \frac{3}{4}x^2$.

В произвольный момент времени t скорость и ускорение точки равны

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{j} \text{ (м/с)}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = 6\vec{j} \text{ (м/с}^2\text{)},$$

а в момент времени t

$$\vec{u}(t) = 2\vec{i} + 6t\vec{j} = 2i + 6\vec{j} \text{ (м/с)}, \quad \vec{a}(t) = \vec{a}(t) = 6\vec{j} \text{ (м/с}^2\text{)}. \tag{1}$$

Поскольку точка движется по кривой, лежащей в плоскости *XOY*, то вектор ускорения можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие – нормальное и тангенциальное ускорения.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t,$$

причем

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \tag{2}$$

а их абсолютные значения

$$a_n = \frac{u^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{du}{dt}.$$

Так как модуль вектора скорости точки в произвольный момент времени равен

$$\upsilon = \sqrt{4 + 3tt^2} = 2\sqrt{1 + 9t^2}, \tag{3}$$

то тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{du}{dt} = \frac{18t}{\sqrt{1 + 9t^2}}$$

в момент времени t примет значение

$$a_\tau(\tau) = \frac{18t}{\sqrt{1 + 9t^2}} \approx 5{,}7 \text{ м/с}^2. \tag{4}$$

Нормальное ускорение точки можно найти из выражения (2). В момент времени t

$$a_n(\tau) = \sqrt{a^2(t) - a_t^2(t)},$$

или с учетом (1) и (4)

$$a_n(\tau) = \sqrt{36 - \frac{324t^2}{1 + 9t^2}} \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2. \tag{5}$$

Чтобы найти радиус кривизны траектории в момент времени t , воспользуемся приведенной выше формулой для a_n с учетом выражений (3) и (5):

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} \approx 21{,}1 \text{ м.}$$

8. Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \left(\beta t^2 - \gamma t^3\right)\vec{j}\,(\text{м}),$$

где $\alpha = 1$ м/с, $\beta = 3$ м/с^2, $\gamma = 4$ м/с^4.

Найти максимальную скорость точки.

Дано: $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \left(\beta t^2 - \gamma t^3\right)\vec{j}\,(\text{м}),$; $\alpha = 1$ м/с; $\beta = 3$ м/с^2; $\gamma = 4$ м/с^4.

Найти: u_{max}.

Решение. Из зависимостей координат точки от времени $x = \alpha t$, $y = \beta t^2 - \gamma t^3$ следует, что вдоль оси $0X$ точка движется с постоянной скоростью $u_x = a$, а вдоль оси $0Y$ – с некоторым ускорением a_y, которое меняется с течением времени. Следовательно, проекция вектора скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\vec{i} + \left(2\beta t - 3\gamma t^2\right)\vec{j} \qquad (1)$$

на ось 0Y

$$\upsilon_y = 2\beta t - 3\gamma t^2 \qquad (2)$$

и модуль скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(2\beta t - 3\gamma t^2\right)^2} \qquad (3)$$

с течением времени будут меняться. Легко понять, что скорость будет максимальна в момент времени, соответствующий максимуму величины проекции u_y.

Исследуем зависимость (2) на экстремум:

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = 2\beta - 6\gamma t; \quad \beta - 3\gamma t = 0; \quad \tau = \frac{\beta}{3\gamma}.$$

Так как вторая производная $u_y(t)$ по времени $\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -6\gamma$ отрицательна, то функция $u_y(t)$ имеет только максимум. Поэтому момент времени t соответствует максимуму проекции скорости u_y и максимуму величины скорости $\upsilon_{max} = \sqrt{\alpha^2 + \left(2\beta\tau - 3\gamma\tau^2\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1{,}25$ м/с.

9. Частица начинает движение в момент времени $t = 0$ и движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta - \gamma t)\vec{j} \text{ (м)},$$

где $\alpha = 1$ м/с; $\beta = 2$ м; $\gamma = 3$ м/с. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ частицы, ее положение (координаты и радиус-вектор), скорость (величину и направление относительно координатных осей) и ускорение в момент времени $\tau = 4$ с, а также вектор перемещения за пятую секунду движения.

Дано: $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta - \gamma t)\vec{j}$ (м), $\alpha = 1$ м/с; $\beta = 2$ м; $\gamma = 3$ м/с; $\tau = 4$ с; $t_5 = 5$ с.

Найти: $y = f(x)$; $x(t)$; $y(t)$; $\vec{r}(t)$; $\vec{u}(t)$; φ; ψ; $\vec{a}$; $\Delta\vec{r}$.

Решение. Из заданной зависимости радиуса-вектора частицы от времени следует, что движение происходит в плоскости *XOY*, при этом координаты частицы меняются с течением времени по законам

$$x = \alpha t, \quad y = \beta - \gamma t.$$

Выразив время из первого уравнения

$$t = \frac{x}{\alpha}$$

и подставив во второе, найдем уравнение траектории частицы в явном виде:

$$y = \beta - \frac{\gamma}{\alpha}x = 2 - 3x \text{ (м)}.$$

В момент времени t частица будет находиться в точке, координаты которой

$$x(\tau) = \alpha\tau = 4 \text{ м}, \quad y(\tau) = \beta - \gamma\tau = -10 \text{ м},$$

а радиус-вектор

$$\vec{r}(\tau) = \alpha\tau\vec{i} + (\beta - \gamma\tau)\vec{j} = 4\vec{i} - 10\vec{j} \text{ (м)}.$$

Скорость и ускорение по определению равны

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\vec{i} - \gamma\vec{j}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0.$$

Как видим, частица движется равномерно, причем проекции вектора скорости на оси координат имеют значения $\upsilon_x = \alpha$, $\upsilon_y = -\gamma$.

Следовательно, в любой момент времени

$$\vec{\upsilon} = \alpha\vec{i} - \gamma\vec{j} = 1\vec{i} - 3\vec{j} \text{ (м/с)}; \qquad |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \approx 3{,}16 \text{ м/с}.$$

Для определения направления вектора скорости относительно координатных осей можно воспользоваться любыми тригонометрическими функциями углов φ и ψ между $\vec{u}$ и осями *OX* и *OY* системы координат.

Например: $\cos\varphi = \dfrac{\upsilon_x}{|\vec{\upsilon}|}$; $\cos\psi = \dfrac{\upsilon_y}{|\vec{\upsilon}|}$.

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}};\quad \varphi = \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \approx 72°34';$$

$$\cos\psi = \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}};\quad \psi = \arccos\frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \approx 161°34'$$

Указанные углы φ и ψ можно также найти, воспользовавшись скалярным произведением векторов $\vec{u}$ и $\vec{i}$, $\vec{u}$ и $\vec{j}$ соответственно:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\,\vec{i}}{|\vec{\upsilon}||\vec{i}|} = \frac{\left(\alpha\vec{i}-\gamma\vec{j}\right)\vec{i}}{|\vec{\upsilon}||\vec{i}|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}};$$

$$\cos\psi = \frac{\vec{\upsilon}\,\vec{j}}{|\vec{\upsilon}||\vec{i}|} = \frac{\left(\alpha\vec{i}-\gamma\vec{j}\right)\vec{j}}{|\vec{\upsilon}||\vec{i}|} = \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}},$$

где учтено, что $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Вектор перемещения частицы за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равен

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \alpha\Delta t\vec{i} - \gamma\Delta t\vec{j} = 1\vec{i} - 3\vec{j}\ \text{(м)},$$

где $t_2 = 5$ с; $t_1 = 4$ с; $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ с.

10. Одно из тел бросили с высоты $h_1 = 18$ м вертикально вверх, другое в тот же момент бросили с высоты $h_2 = 32$ м горизонтально. Определить начальную скорость u_{01} первого тела, если оба тела на Землю упали одновременно.

Дано: $h_1 = 18$ м; $h_2 = 32$ м; $t_1 = t_2 = t$.

Найти: u_{01}.

Решение. Кинематическое уравнение движения тела в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе координат; $\vec{u}_0$ – начальная скорость тела; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

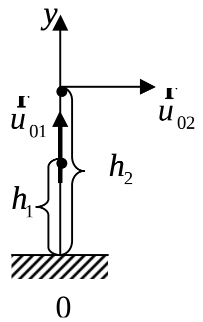


Рис. 1.9

Направив ось $У$ вертикально вверх (начало отсчета на уровне земли, см. рис. 1.9), получим уравнения движения первого и второго тел в проекции на эту ось для момента падения

$$0 = h_1 + u_{01}t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$0 = h_2 - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

(учли, что $t_1 = t_2 = t$).

Из уравнений (1) и (2) начальная скорость первого тела

$$\upsilon_{01} = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{\dfrac{2h_2}{g}}}.$$

После вычислений получим $\upsilon_{01} = 5{,}48$ м/с.

11. С вершины наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 37°$, горизонтально брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 8$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние l до точки падения камня на наклонную плоскость и угол β между вектором скорости $\vec{u}_1$ камня в момент его падения и наклонной плоскостью.

Дано: $\alpha = 37°$; $\upsilon_0 = 8$ м/с.

Найти: l; β.

Решение. Кинематические уравнения движения тела в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t; \quad \vec{a} = \vec{g},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор, определяющий положение тела в выбранной системе координат; $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость тела; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Направив оси координат из точки начала движения (рис. 1.10), получим уравнения движения по осям *X* и *Y*:

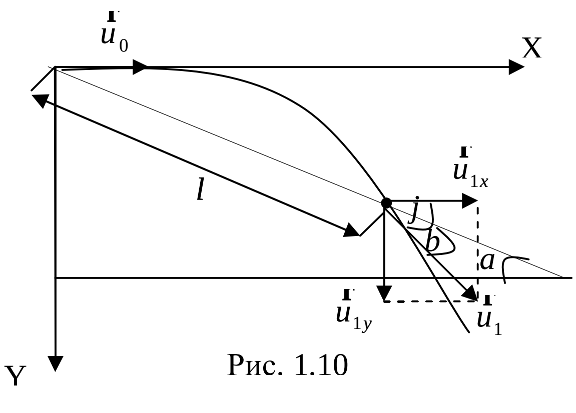


Рис. 1.10

$$x = \upsilon_{0x} t; \quad y = \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0; \quad \upsilon_y = gt. \qquad (2)$$

Обозначив координаты точки наклонной плоскости, в которую упадет камень, через x_1 и y_1, время падения через t_1, можно записать

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} \qquad (3)$$

Причем согласно (1) $x_1 = \upsilon_0 t_1$ и $y_1 = \frac{gt_1^2}{2}$. Подставив эти выражения в формулу (3), найдем

$$t_1 = \frac{2\upsilon_0}{g\,\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (4)$$

Искомое выражение для l (расстояние до точки падения камня на наклонную плоскость):

$$l=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+\frac{x_1^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}}=\upsilon_0 t_1\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{2\upsilon_0^2}{g\,\mathrm{tg}\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

(учли соотношения (3), (1), (4).

Если φ – угол между вектором скорости $\vec{u}_1$ и горизонтом в момент падения, то искомый угол между вектором скорости камня в момент падения и наклонной плоскостью $\beta=\varphi-\alpha$.

Из рисунка очевидно, что $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_{1x}}$ или учитывая (2) и (4) $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{gt_1}{\upsilon_0}=\dfrac{2}{\mathrm{tg}\alpha}$, тогда $\beta=\mathrm{arctg}\dfrac{2}{\mathrm{tg}\alpha}-\alpha.$

Вычисляя, получаем $l=28{,}5$ м; $\beta=32°21'$.

12. Камень брошен с некоторой высоты горизонтально со скоростью $u_0=10$ м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через $t=3$ с после начала движения, а также значения нормального a_n и тангенциального a_t ускорений в этот момент времени. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Дано: $u_0=10$ м/с; $t=3$ с; $g=10$ м/с^2.

Найти: R; a_n; a_t.

Решение. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.11. Рассмотрим, какую скорость $\vec{u}$ и какое ускорение $\vec{a}=\vec{g}$ имеет камень в момент времени t.

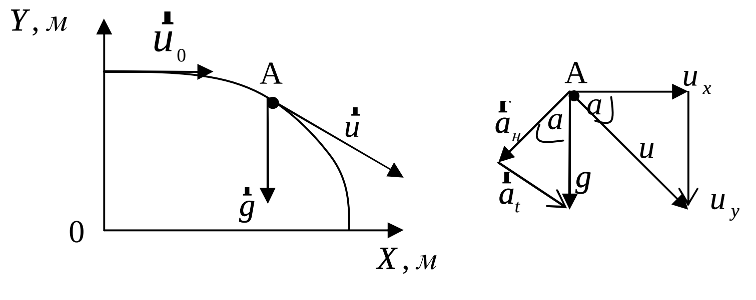


Рис. 1.11

Разложим полную скорость по осям, а также полное ускорение – на нормальную и тангенциальную составляющие, т.е. построим треугольники скорости и ускорения. Напишем геометрические соотношения, существующие между ними:

$$u_x=u_0;\ u_y=gt;\ \cos\alpha=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2+(gt)^2}};\ \sin\alpha=\frac{gt}{\sqrt{\upsilon_0^2+(gt)^2}};$$

$$a_n=g\cos\alpha\approx 3{,}16\text{ м/с}^2;\ a_\tau=g\sin\alpha\approx 9{,}49\text{ м/с}^2;$$

На основе (1.9) имеем $R=\dfrac{\upsilon^2}{a_n}=\dfrac{((\upsilon_0^2+(gt)^2)^{3/2}}{g\upsilon_0}=316{,}2$ м.

13. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $S=5$ м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на $h_1=1$ м меньше высоты, с которой брошен мяч. С какой скоростью u_0 был брошен мяч и под каким углом φ он подлетает к стенке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $S=5$ м; $h_1=1$ м.

Найти: u_0; φ.

Решение. Выбираем систему координат (рис. 1.12) так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания. Ось *OX* направляем горизонтально в сторону бросания, *OУ* – вертикально вниз. Составляем уравнения скорости и перемещения для их проекций по выбранным направлениям:

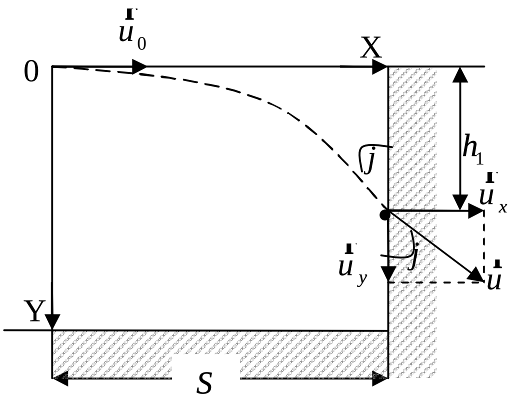


Рис. 1.12

$$\upsilon_x=\upsilon_0;\ \ x=\upsilon_x t=\upsilon_0 t;\ \ t=\upsilon_0 t;$$

$$\upsilon_y=\upsilon_{0y}+gt;\ \ y=\upsilon_{0y}t+\frac{gt^2}{2}.$$

Поскольку

$\upsilon_{0y}=0$, то $\upsilon_y=gt$ и $y=\dfrac{gt^2}{2}$.

В момент удара о стенку $x=S$ и $y=h_1$, значит, $S=u_0 t$, $h_1=\dfrac{gt^2}{2}$, откуда

$$\upsilon_0=S\sqrt{\frac{g}{2h_1}}=11{,}1\ \text{м/с}.$$

Угол φ определим из равенства $tg\varphi=\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y}=\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2h_1 g}}=2{,}5;\ \ \varphi=68°12'.$

14. С башни высотой $h=25$ м бросили камень со скоростью $u_0=15$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определить: время полета камня; дальность полета камня в горизонтальном направлении; скорость полета камня в момент падения на землю; угол φ, который составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю.

Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано: $h=25$ м ; $u_0=15$ м/с; $\alpha=30°$.

Найти: t; S; u; φ.

Решение. Сделав чертеж (рис. 1.13), выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены следующим образом: *OX* – вдоль поверхности земли; *OУ* – по нормали к ней в сторону начального смещения камня.

Сложное движение камня по параболе в данном случае можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного прямолинейного движения вдоль оси *OX* и движения тела, брошенного вертикально вверх, вдоль оси *OY*.

Составим уравнения скорости и перемещения для их проекций по каждому направлению:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \quad x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t;$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt; \quad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

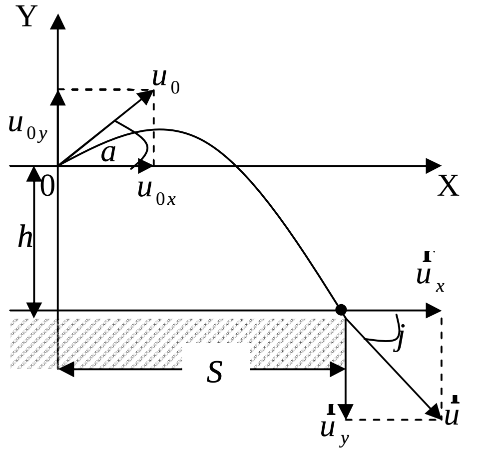


Рис. 1.13

В момент времени t, когда камень упадет на Землю, его координаты $x = S$, $y = -h$. Тогда для определения t получаем уравнение $-h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 3{,}16$ с.

Дальность полета камня S определим из уравнения

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{\upsilon_0^{\,2} \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \upsilon_0 \cos\alpha \sqrt{\upsilon_0^{\,2} \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 41{,}1 \text{ м}.$$

Скорость камня u в момент падения на землю можно выразить формулой $u = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2}}$, где $u_x = u_0 \cos\alpha$; $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt = -\sqrt{\upsilon_0^{\,2} \sin^2\alpha + 2gh}.$

Подставив вместо u_x и u_y их выражения, получим

$$u = \sqrt{u_0^{\,2} + 2gh} = 26{,}7 \text{ м/с}.$$

Угол, составленный траекторией движения камня с горизонтом в точке падения, найдем, используя рисунок:

$$tg\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = 1{,}8; \quad \varphi = 61°.$$

15. Пуля выпущена со скоростью 800 м/с под углом 30° к горизонту. Найти: 1) время полета пули до падения на землю; 2) скорость полета пули в верхней точке ее траектории; 3) горизонтальную дальность полета; 4) наибольшую высоту, на которую поднимается пуля при полете; 5) радиус кривизны траектории в ее верхней точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $u_0 = 800$ м/с; $\alpha = 30°$.

Найти: $t; u_в; S; h_{\max}; R$.

Решение

1. Начальную скорость пули u_0 разлагаем на две составляющие (рис. 1.14) – горизонтальную $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha = 800 \cdot \cos 30° = 694$ м/с и вертикальную $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha = 800 \cdot \sin 30° = 400$ м/с. Движение пули можно представить как совокупность двух движений: равномерного, происходящего в горизонтальном направлении по инерции с постоянной скоростью $\upsilon_{0x} = 694$ м/с, и равнопеременного, происходящего в вертикальном направлении под действием силы тяжести со скоростью u_{0y}.

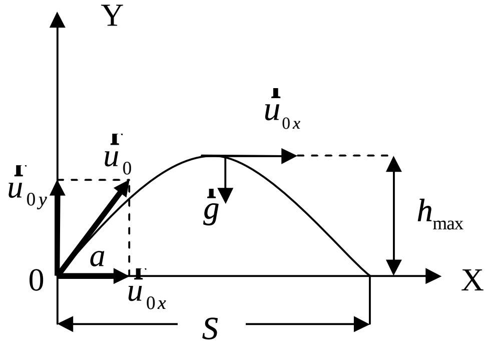


Рис. 1.14

При полете пули вверх скорость ее под влиянием силы тяжести будет постоянно уменьшаться по закону

$$u_y = u_{0y} - gt.$$

В верхней точке траектории эта вертикальная скорость будет равна нулю, следовательно, формула примет вид

$$0 = u_{0y} - gt.$$

Отсюда находим время t полета пули вверх

$$t = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{400}{9,81} = 40,7 \text{ с.}$$

Столько же времени будет продолжаться падение пули на поверхность Земли.

Следовательно, полная продолжительность полета пули будет равна $2t = 2 \cdot 40,7$ с $= 81,4$ с.

2. В верхней точке траектории результирующая скорость $u_в$ полета пули равна скорости ее в горизонтальном направлении, так как в этой точке вертикальная скорость равна нулю. Следовательно,

$$u_в = u_x = u_{0x} = 694 \text{ м/с.}$$

3. В горизонтальном направлении пуля летит с постоянной скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha = 694$ м/с.

За время полета пуля пройдет расстояние

$$S = \upsilon_x \cdot 2t = 694 \cdot 81,4 \text{ м} = 5,65 \cdot 10^4 \text{ м} = 56,5 \text{ км.}$$

4. За время подъема, равное 40,7 с, пуля пройдет в вертикальном направлении расстояние

$$h_{max} = \frac{gt^2}{2} = \frac{9,81 \cdot (40,7)^2}{2} \text{ м = 8100 м = 8,1 км.}$$

Это расстояние и определяет высоту верхней точки траектории над поверхностью земли.

5. В самой верхней точке траектории ускорение, сообщаемое пуле силой тяжести, направленное вертикально, по направлению совпадает с нормалью к траектории и поэтому является нормальным. Величина его выражается формулой

$$a_n = g = \frac{u_x^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в ее верхней точке.

Отсюда

$$R = \frac{u_x^2}{g} = \frac{694^2}{9{,}81} \text{ м} = 4{,}91\cdot 10^4 \text{ м} = 49{,}1 \text{ км}.$$

16. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$, где $A = 0{,}4$ м/с^2, $B = 0{,}1$ м/с, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты координатных осей X и $У$. Определить выражения для $\vec{u}(t)$ и $\vec{a}(t)$; модули скорости и ускорения, тангенциальную и нормальную составляющие ускорения в момент времени $t = 2$ с.

Дано: $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$; $A = 0{,}4$ м/с^2; $B = 0{,}1$ м/с; $t = 2$ с.

Найти: $\vec{u}(t)$; $\vec{a}(t)$; u; a; a_t; a_n.

Решение. Учитывая заданное уравнение $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$, искомые выражения для векторов мгновенной скорости и ускорения

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2At\vec{i} + B\vec{j}; \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 2A\vec{i}. \qquad (2)$$

Модуль скорости $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, где u_x и u_y – соответственно проекции векторов $\vec{u}$ на координатные оси X и $У$. Из выражения (1) следует, что $u_x = 2At$; $u_y = B$. Тогда искомый модуль скорости

$$u = \sqrt{4A^2t^2 + B^2}. \qquad (3)$$

Модуль ускорения, согласно формуле (2),

$$a = 2A = \text{const}. \qquad (4)$$

Тангенциальная составляющая ускорения с учетом формулы (3)

$$a_t = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{4A^2t^2 + B^2} = \frac{A^2t}{\sqrt{4A^2t^2 + B^2}}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^{\ 2}} = \sqrt{4A^2 - a_t^{\ 2}}$$ (учли формулу (4).

Вычисляя, получаем: $\vec{u}(t) = 2At\vec{i} + B\vec{j}$; $\vec{a}(t) = 2A\vec{i}$; $u = 1{,}6$ м/с; $a = 0{,}8$ м/с^2; $a_t = 0{,}2$ м/с^2; $a_n = 0{,}775$ м/с^2.

17. Диск радиусом $R = 5$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$ $\left(A = 2\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2},\ B = 1\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^5}\right)$. Определить для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала движения: 1) полное ускорение; 2) число оборотов, сделанных диском.

Дано: $R = 5$ см (0,05 м); $\omega = 2At + 5Bt^4$; $A = 2\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $B = 1\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^5}$; $t = 1$ с.

Найти: a; N.

Решение. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}}, \tag{1}$$

где тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \varepsilon R$ ($\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение); $a_n = \omega^2 R$ – нормальная составляющая ускорения.

По условию задачи $\omega = 2At + 5Bt^4$, следовательно,

$$a_\tau = \varepsilon R = R\frac{d\omega}{dt} = R\left(2A + 20Bt^3\right);$$

$$a_n = \omega^2 R = R\left(2At + 5Bt^4\right)^2,$$

откуда полное ускорение, согласно (1),

$$a = R\sqrt{(2A + 20Bt^3)^2 + (2At + 5Bt^4)^2}.$$

Число оборотов, совершаемых диском,

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}, \tag{2}$$

где угол поворота диска

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \left(2At + 5Bt^4\right)dt = At^2 + Bt^5 \tag{3}$$

(учли, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$).

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем число оборотов, сделанных диском:

$$N = \frac{At^2 + Bt^5}{2\pi}.$$

Вычисляя, получим: $a = 4{,}22$ м/с^2; $N = 0{,}478$.

18. Скорость автомобиля (радиус колес $R = 35$ см), движущегося равнозамедленно, за время $\Delta t = 2$ с уменьшилась с $u_1 = 65$ км/ч до $u_2 = 46$ км/ч. Определить угловое ускорение ε и число полных оборотов N колес за это время.

Дано: $R = 35$ см (0,35 м); $\Delta t = 2$ с ; $u_1 = 65$ км/ч (18,1 м/с); $u_2 = 46$ км/ч (12,8 м/с).

Найти: ε; N.

Решение. Поскольку $\upsilon_1 = \omega_1 R,\ \upsilon_2 = \omega_2 R$ (ω_1, ω_2 – угловые скорости в моменты времени t_1 и t_2), угловое ускорение при торможении за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{R\Delta t} < 0. \tag{1}$$

Угол поворота в случае равнозамедленного вращательного движения с учетом знака ε

$$\varphi = \omega_1 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2}$$

или, учитывая (1),

$$\varphi = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{R}\Delta t.$$

Число оборотов при торможении

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2\pi R}\Delta t.$$

Вычисляя, получаем: $\varepsilon = -7{,}57\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $N = 28$.

19. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3; $C = 9$ м/с^4).

Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение в момент времени $t_2 = 1$ с.

Дано: $r = 4$ м; $a_n = A + Bt + Ct^2$; $t_1 = 5$ с; $t_2 = 1$ с; $A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3; $C = 9$ м/с^4.

Найти: a_t; S_1; a_2.

Решение. Тангенциальное ускорение

$$a_t = \frac{du}{dt}. \tag{1}$$

Нормальное ускорение $a_n = \frac{u^2}{r}$. Согласно условию задачи $a_n = A + Bt + Ct^2$, получим

$$u = \sqrt{r(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 6t + 9t^2)} = 2(1 + 3t) = 2 + 6t. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) тангенциальное ускорение

$$a_t = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 6t) = 6 \text{ м/с}^2. \tag{3}$$

Искомый путь за время t_1

$$S_1 = \int_0^{t_1} u dt = \int_0^{t_1} (2 + 6t) dt = 2t_1 + 3t_1^{\ 2}.$$

Полное ускорение точки в момент времени t_2

$$a_2 = \sqrt{a_{t2}^{\ 2} + a_{n2}^{\ 2}} = \sqrt{a_t^{\ 2} + (\frac{u^2}{r})^2} = \sqrt{a_t^{\ 2} + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}$$

(учли, что a_t =const).

Вычисляя, получим: $a_t = 6$ м/с^2; $S_1 = 85$ м; $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

20. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки возрастает по закону $a = kt$ (k – постоянная) и через промежуток времени $t_1 = 8$ с достигает значения $a_1 = 6$ м/с^2. Определить для момента времени $t_2 = 5$ с: 1) скорость u_2 точки; 2) пройденный точкой путь S_2.

Дано: $a = kt$; $t_1 = 8$ с; $a_1 = 6$ м/с^2; $t_2 = 5$ с.

Найти: u_2; S_2.

Решение. Скорость материальной точки

$$u = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t kt dt = \frac{kt^2}{2} \tag{1}$$

(учли, что $a = kt$).

Согласно условию задачи

$$k = \frac{a}{t} = \frac{a_1}{t_1}. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), получим скорость для момента времени t_2:

$$u_2 = \frac{a_1 t_2^{\ 2}}{2t_1}.$$

Путь, пройденный материальной точкой,

$$S = \int_0^t u(t)dt = \int_0^t \frac{kt^2}{2}dt = \frac{kt^3}{6} \quad \text{(учли формулу (1)}$$

Для момента времени t_2 с учетом соотношения (2) получаем

$$S_2 = \frac{a_1 t_2^3}{6t_1}.$$

Вычисляя, имеем: $u_2 = 9{,}38$ м/с^2; $S_2 = 15{,}6$ м.

21. Тормозящий автомобиль движется по прямой. Абсолютная величина ускорения зависит от его текущей скорости по закону $a = a_0\sqrt{\frac{u}{u_0}}$, где начальные (при $t = 0$) значения скорости и ускорения автомобиля равны $u_0 = 90$ км/ч и $a_0 = 10$ м/с^2. Какой путь S пройдет автомобиль до остановки? За какое время T этот путь будет пройден?

Дано: $a = a_0\sqrt{\frac{u}{u_0}}$; $u_0 = 90$ км/ч (25 м/с); $a_0 = 10$ м/с^2.

Найти: S; T.

Решение. Сначала найдем зависимость скорости автомобиля от времени. Поскольку автомобиль тормозит и a – абсолютная величина ускорения, то

$$\frac{du}{dt} = -a = -a_0\sqrt{\frac{u}{u_0}}.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{a_0}{\sqrt{u_0}}du \Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{a_0}{\sqrt{u_0}}\int dt \Rightarrow 2\sqrt{u_0} = -\frac{a_0}{\sqrt{u_0}}t + 2\sqrt{u_0}.$$

Значение произвольной постоянной интегрирования (второе слагаемое в правой части) выбрано так, чтобы удовлетворялось начальное условие $u = u_0$ при $t = 0$. Отсюда скорость

$$u = u_0\left(1 - \frac{a_0 t}{2u_0}\right)^2,$$

которая обращается в нуль при $t = \frac{2u_0}{a_0}$, поэтому до остановки пройдет время

$$T = \frac{2u_0}{a_0} = \frac{2\cdot 25}{10} = 5 \text{ с}.$$

Пройденный путь находим по общей формуле

$$S = \int_0^T u(t)dt = u_0 \int_0^{\frac{2u_0}{a_0}} \left(1 - \frac{a_0 t}{2\upsilon_0}\right)^2 dt.$$

Выполняя замену переменных $x = 1 - \frac{a_0 t}{2u_0}$, приводим интеграл к виду

$$S = \frac{2\upsilon_0^2}{a_0}\int_0^1 x^2 dx = \frac{2\upsilon_0^2}{3a_0} = \frac{2\cdot 25^2}{3\cdot 10} \approx 41{,}7 \text{ м.}$$

22. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 630$ км над поверхностью и облетает Землю за время $T = 97$ мин. Найти скорость u спутника и ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Дано: $h = 630$ км; $T = 97$ мин.

Найти: u ; g_h.

Решение. Зная период вращения спутника $T = 97\cdot 60 = 5{,}82\cdot 10^3$ с, находим его угловую скорость $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}08\cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$.

Радиус орбиты $R = R_з + h = 7000$ км = $7\cdot 10^6$ м.

Отсюда находим скорость $\upsilon = \omega R = 7560$ м/с и нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = 8{,}16$ м/с^2. Поскольку спутник вращается равномерно, нормальное ускорение совпадает с полным, которое и есть ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Решив задачу, можно сделать наблюдение. Отношение ускорений свободного падения на высоте $h = 630$ км и на поверхности Земли $\frac{g_h}{g} = \frac{8{,}16}{9{,}81} = 0{,}83$ совпадает с отношением обратных квадратов радиуса орбиты и радиуса Земли $(\frac{R_з}{R})^2 = (\frac{6370}{7000})^2 = 0{,}83$. Отсюда вывод, что ускорение свободного падения обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли.

23. Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $u_0 = 54$ км/ч и, двигаясь с постоянным тангенциальным ускорением, проходит путь $\Delta S = 600$ м за время $\Delta t = 30$ с. Радиус закругления $R = 1$ км. Определить скорость и полное ускорение поезда в конце этого пути.

Дано: $u_0 = 54$ км/ч; $\Delta S = 600$ м; $\Delta t = 30$ с; $R = 1$ км.

Найти: u и a.

Решение. Рассмотрим произвольную точку в начале поезда, полагая, что все остальные точки будут двигаться по таким же законам.

При движении с постоянным тангенциальным ускорением угол поворота и угловая скорость точки изменяются с течением времени по законам

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость точки; ε – ее угловое ускорение.

В момент времени $t = \Delta t$

$$\Delta\varphi = \omega_0 \Delta t + \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2};, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon \Delta t. \tag{2}$$

Используя связь между линейными и угловыми характеристиками движения $\Delta S = R\Delta\varphi$; $\upsilon = R\omega$; $a_\tau = R\varepsilon$, уравнения (2) запишем в виде

$$\Delta S = \upsilon_0 \Delta t + \frac{a_\tau \Delta t^2}{2};, \qquad \upsilon = \upsilon_0 + a_\tau \Delta t.$$

Отсюда находим

$$a_t = \frac{2(\Delta S - u_0 \Delta t)}{\Delta t^2}, \qquad u = u_0 + \frac{2(\Delta S - u_0 \Delta t)}{\Delta t} = \frac{2\Delta S - u_0 \Delta t}{\Delta t} = 25 \text{ м/с}.$$

При плоском движении полное ускорение точки может быть представлено через нормальное и тангенциальное ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t, \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2},$$

где $a_n = \dfrac{u^2}{R} = \dfrac{(2\Delta S - u_0 \Delta t)^2}{R\Delta t^2}$.

Следовательно,

$$a = \frac{1}{\Delta t^2}\sqrt{\frac{(2\Delta S - u_0 \Delta t)^4}{R^2} + 4(\Delta S - u_0 \Delta t)^2} \approx 0{,}7 \text{ м/с}^2.$$

24. Две нити, намотанные на катушку, тянут со скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ так, как показано на рис. 1.15. С какой скоростью движется центр катушки? С какой угловой скоростью вращается катушка? Проскальзывания нет, радиусы катушки R и r заданы.

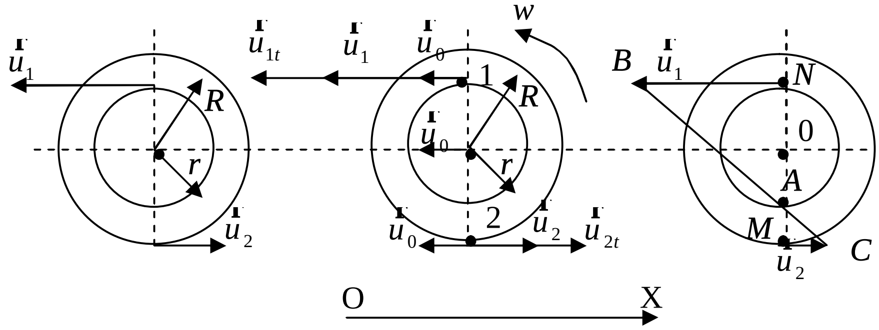


Рис. 1.15 Рис. 1.16 Рис. 1.17

Дано: $\vec{u}_1$; $\vec{u}_2$; R; r.

Найти: u_0; ω.

Решение. Движение каждой точки катушки будем рассматривать как сумму поступательного движения вместе с осью катушки со скоростью $\vec{u}_0$ (переносное движение) и вращательного движения вокруг этой оси с угловой скоростью ω (относительное движение).

Рассмотрим движение двух точек 1и 2 катушки (рис. 1.16). Поскольку нить по катушке не проскальзывает, то абсолютные скорости точек 1 и 2 равны скоростям $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, с которыми движутся нити. Пусть $u_1 > u_2$. Очевидно, что в этом случае скорость поступательного движения оси катушки $\vec{u}_0$ будет направлена влево и катушка будет вращаться против часовой стрелки.

Скорости $\vec{u}_{1t}$ и $\vec{u}_{2t}$, обусловленные вращательным движением катушки, равны

$$\upsilon_{1\tau} = \omega r, \qquad \upsilon_{2\tau} = \omega R \tag{1}$$

и направлены так, как показано на рис. 1.16.

Кроме скоростей $\vec{u}_{1t}$ и $\vec{u}_{2t}$ каждая из выбранных точек будет иметь скорость $\vec{u}_0$ поступательного движения оси катушки. Следовательно,

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \vec{u}_{1t}, \qquad \vec{u}_2 = \vec{u}_0 + \vec{u}_{2t}.$$

Записав эти уравнения в проекции на ось OX с учетом (1)

$$-\upsilon = -\upsilon_0 - \omega r, \qquad \upsilon_2 = -\upsilon_0 + \omega R$$

и решив относительно u_0 и ω, получим

$$u_0 = \frac{Ru_1 - ru_2}{R+r}, \qquad \omega = \frac{u_1 + u_2}{R+r}.$$

Угловую скорость катушки можно найти, используя понятие мгновенного центра скоростей, который расположен в точке A (рис. 1.17).

ΔABN и ΔAMC подобны, поэтому $\dfrac{BN}{MC} = \dfrac{NA}{MA}$,

где $BN = u_1$; $MC = u_2$; $NA = x$; $MA = R + r - x$; x – расстояние от мгновенного центра скоростей до точки N. Следовательно, $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{x}{R + r - x}$.

Отсюда находим $x = \dfrac{u_1(R+r)}{u_1 + u_2}$.

Точка N относительно мгновенного центра скоростей будет участвовать только во вращательном движении по окружности радиусом x с угловой скоростью ω. Поэтому

$$\upsilon_1 = \omega x = \frac{\omega\upsilon_1(R+r)}{\upsilon_1+\upsilon_2}. \qquad (2)$$

Из (2) получим

$$\omega = \frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{R+r}.$$

25. Колесо диаметром $d = 7$ см, насаженное на горизонтальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $u = 16{,}8$ см/с, описывая окружность радиусом $R = 12$ см. Найти величину результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

Дано: $d = 7$ см; $u = 16{,}8$ см/с; $R = 12$ см.

Найти: ω; α.

Решение. Пусть колесо катится так, что сверху его движение видно происходящим по часовой стрелке (рис. 1.18). Колесо одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ и вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, направленной вдоль радиуса от оси OO'. Вектор результирующей угловой скорости равен сумме $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

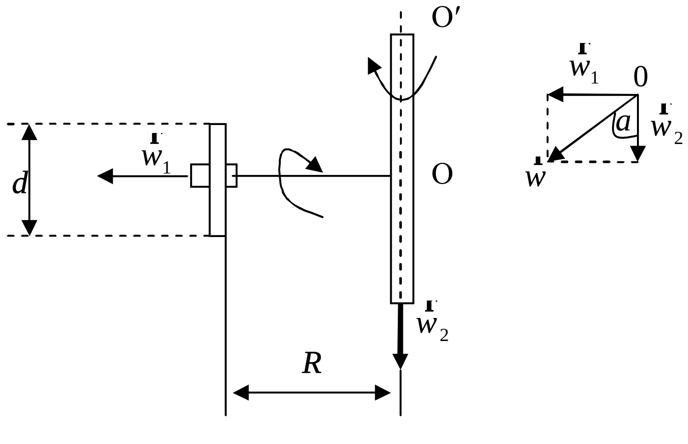


Рис. 1.18

Так как векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$\vec{\omega} = \sqrt{\vec{\omega}_1^2 + \vec{\omega}_2^2} \qquad (1)$$

и

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (2)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}_2$ численно равна отношению линейной скорости к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

Численное значение угловой скорости $\vec{\omega}_1$ найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что линейная скорость $\vec{u}_1$ точки колеса, касающейся плоскости, равна скорости плоскости, т.е. равна нулю. Скорость $\vec{u}_1$ численно равна разности линейной скорости u вращения колеса вокруг оси OO' и линейной скорости $\omega_1 \dfrac{d}{2}$ вращения колеса вокруг собственной оси

$$\upsilon_1 = \upsilon - \frac{\omega_1 d}{2} = 0.$$

Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2\upsilon}{d}. \qquad (4)$$

Заменив в формулах (1) и (2) ω_1 и ω_2 выражениями (3) и (4), получим окончательно

$$\omega = \sqrt{\frac{4u^2}{d^2} + \frac{u^2}{R^2}} = \frac{u}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2}$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2R}{d}.$$

Проведем вычисления

$$\omega = \frac{u}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2} = \frac{16{,}8}{7 \cdot 12}\sqrt{4 \cdot 144 + 49} = 5\ \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2R}{d} = \operatorname{arctg}\frac{2 \cdot 12}{7} = 73^\circ 45'.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1 – 1.25. У диспетчера аэропорта к моменту начала дежурства (24 ч. 00 мин. 00 с) имеется информация о движении двух самолетов (табл. 1.1). Используемая система координат имеет начало в точке размещения диспетчера, ось *OX* направлена на восток, а ось *OУ* – на север.

1. Отметить на координатной плоскости *OXУ* положения воздушных судов и направления их полетов.

2. Записать законы движения самолетов.

3. Определить время вылета одного из самолетов из аэропорта.

4. Определить минимальное расстояние, на которое сближаются самолеты, и время, когда произойдет сближение.

5. Найти модуль скорости первого самолета в системе отсчета, движущейся вместе со вторым самолетом.

Скорости самолетов считать неизменными. Размерами аэропорта пренебречь.

Таблица 1.1

Условия к задачам 1.1 – 1.25

Номер задачи	Координаты самолетов (км)						Проекции скоростей самолетов (км/ч)			
	первого			второго			первого		второго	
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	u_{x1}	u_{y1}	u_{x2}	u_{y2}
1.1	30	40	2	30	80	3	432	576	576	–288
1.2	40	30	2	60	–60	3	576	432	0	720
1.3	60	60	3	–30	40	2	–720	0	–432	576
1.4	0	80	3	40	50	5	720	0	576	720
1.5	–40	50	3	–90	–20	3	–576	720	0	720
1.6	30	80	8	–40	30	3	–720	360	–576	432
1.7	–30	–30	2	–80	30	8	–432	–432	0	–720
1.8	–80	0	6	–30	30	2	432	432	–432	432
1.9	40	–30	3	100	0	8	576	–432	–432	–432
1.10	0	90	6	30	30	3	576	–432	540	540
1.11	40	–40	4	0	–90	6	432	–432	648	0
1.12	–40	40	3	–90	0	7	–576	576	0	576
1.13	0	–90	4	–40	–40	5	–432	432	–576	–576
1.14	50	50	3	50	–20	4	360	–360	720	–288
1.15	–50	–20	3	0	–90	3	–720	–288	–360	360
1.16	–30	50	2	0	100	9	–432	720	–360	–360
1.17	100	0	3	20	–50	2	–360	–360	288	–720
1.18	0	50	3	80	80	2	0	576	–576	–144
1.19	–50	40	2	–90	0	4	–720	576	576	576
1.20	50	70	1	50	0	3	288	–432	720	0
1.21	0	–60	3	–40	–30	2	–432	0	–576	–432
1.22	–50	30	4	0	90	2	–720	432	–576	0
1.23	30	–40	5	100	0	3	432	–576	–432	–432
1.24	0	80	3	–50	50	4	–432	–144	–720	720
1.25	50	50	5	90	30	3	720	720	–144	–432

1.26 – 1.52. Радиус-вектор материальной точки относительно начала координат изменяется со временем по известному закону, в котором $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей *X* и *У*. Найти: 1) уравнение траектории и изобразить ее графически; 2) проекции скорости на оси координат; 3) зависимости от времени векторов скорости и ускорения и модули обеих величин в момент времени t_1 согласно номеру задачи в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Условия к задачам 1.26 – 1.52

Номер задачи	Закон изменения радиуса-вектора $r = r(t)$, м	*A*	*B*	*t*, с
1.26	$\vec{r} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$	2 м/с^2	6 м/с^2	1,5
1.27		1 м/с	5,5 м/с^2	3
1.28		4 м/с	48 м/с^2	0,5
1.29		3 м/с	18 м/с^2	1
1.30	$\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt^2\vec{j}$	3 м/с^2	5 м/с^2	2
1.31		2 м/с^2	4 м/с^2	3
1.32		2 м/с^2	3 м/с^2	0,5
1.33		4 м/с^2	6 м/с^2	0,2
1.34	$\vec{r} = At^2\vec{i} - Bt\vec{j}$	16 м/с^2	12 м/с	0,1
1.35		4 м/с^2	7 м/с	4
1.36		9 м/с^2	15 м/с	2
1.37		25 м/с^2	7,5 м/с	0,4
1.38	$\vec{r} = At\vec{i} - Bt^2\vec{j}$	1,5 м/с	5 м/с^2	1
1.39		2 м/с	6 м/с^2	2
1.40		0,5 м/с	2 м/с^2	0,5
1.41		3 м/с	4,5 м/с^2	5
1.42	$\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$	36 м/с^2	12 м/с	0,3
1.43		16 м/с^2	16 м/с	0,6
1.44		9 м/с^2	3 м/с	0,8
1.45		4 м/с^2	5 м/с	3
1.46	$\vec{r} = At^2\vec{i} - Bt^2\vec{j}$	0,2 м/с^2	1,2 м/с^2	2
1.47		1,5 м/с^2	3 м/с^2	2,5
1.48		0,5 м/с^2	2 м/с^2	1,5
1.49		2 м/с^2	5 м/с^2	0,2
1.50	$\vec{r} = At\vec{i} + Bt\vec{j}$	0,4 м/с	2 м/с	0,25
1.51		2,5 м/с	5 м/с	4
1.52		3 м/с	4,5 м/с	1,3

1.53 – 1.80. Две материальные точки движутся в одной и той же системе отсчета согласно заданным уравнениям. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Найти скорости и ускорения точек в этот момент времени согласно номеру задачи в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Условия к задачам 1.53 – 1.80

Номер задачи	Уравнение движений первой точки, м	Уравнение движений второй точки, м
1.53	$x = 20 + 4t - 4{,}5t^2$	$x = 2 + 2t + 0{,}5t^2$
1.54	$x = 12 + 19t + 0{,}6t^2$	$x = 21 + 16t + 1{,}6t^2$
1.55	$x = 8 + 12t - 0{,}3t^2$	$x = 9 + 15t - 0{,}9t^2$
1.56	$x = 23 + 2{,}6t + 1{,}5t^2$	$x = 16 + 8t - 0{,}75t^2$
1.57	$x = 24 + 6t + 0{,}5t^2$	$x = 8 + 20t - 1{,}5t^2$
1.58	$x = 6 + 17{,}8t - 1{,}75t^2$	$x = 17 + 3t + 0{,}1t^2$
1.59	$x = 30 + 15t - 1{,}25t^2$	$x = 25 + 14t + 1{,}25t^2$
1.60	$x = 11 + 3t - 0{,}1t^2$	$x = 10 + 6t - 0{,}4t^2$
1.61	$x = 13 + 12{,}9t - 1{,}8t^2$	$x = 30 + 5{,}2t - 0{,}7t^2$
1.62	$x = 7 + 1{,}2t + 1{,}6t^2$	$x = 4 + 18t - 0{,}8t^2$
1.63	$x = 29 + 10t + 0{,}5t^2$	$x = 18 + 14t + 0{,}3t^2$
1.64	$x = 15 + 9{,}4t - 1{,}5t^2$	$x = 24 + 7t - 0{,}7t^2$
1.65	$x = 4 + 16t + 0{,}15t^2$	$x = 5 + 19{,}5t - 1{,}6t^2$
1.66	$x = 21 + 19{,}4t - 0{,}35t^2$	$x = 15 + 8t + 0{,}6t^2$
1.67	$x = 26 + 2{,}2t + 1{,}8t^2$	$x = 32 + 15t + 0{,}2t^2$
1.68	$x = 19 + 6{,}2t - 0{,}8t^2$	$x = 20 + 4t + 1{,}4t^2$
1.69	$x = 18 + 10t + 0{,}45t^2$	$x = 11 + 11t + 0{,}4t^2$
1.70	$x = 3 + 18t - 1{,}25t^2$	$x = 26 + 7t + 1{,}5t^2$
1.71	$x = 25 + 20t - 0{,}2t^2$	$x = 6 + 16t - 0{,}1t^2$
1.72	$x = 10 + 7t + 0{,}65t^2$	$x = 19 + 13t - 0{,}85t^2$
1.73	$x = 27 + 14{,}7t + 1{,}2t^2$	$x = 3 + 30t - 0{,}5t^2$
1.74	$x = 2 + 16t - 0{,}7t^2$	$x = 29 + 17t - 0{,}9t^2$
1.75	$x = 22 + 6{,}2t + 1{,}5t^2$	$x = 23 + 14t + 0{,}2t^2$
1.76	$x = 14 + 15t - 0{,}2t^2$	$x = 12 + 10{,}2t + 1{,}4t^2$
1.77	$x = 5 + 12t + 1{,}7t^2$	$x = 14 + 14{,}2t + 0{,}6t^2$
1.78	$x = 28 + 20t - 0{,}4t^2$	$x = 28 + 13{,}4t + 1{,}8t^2$
1.79	$x = 16 + 14{,}3t - 2t^2$	$x = 7 + 12t + 0{,}3t^2$
1.80	$x = 9 + 9t + 0{,}8t^2$	$x = 22 + 7t + 1{,}2t^2$

1.81 – 1.108. Мяч, брошенный горизонтально с начальной скоростью u_0, ударяется о стену, находящуюся на расстоянии $\mathbf{l}$ от места бросания. Угол, под которым мяч подлетает к поверхности стенки, равен φ, высота места удара мяча о стену на Δh меньше высоты, с которой брошен мяч. Сопротивление воздуха не учитывают. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Условия к задачам 1.81 – 1.108

Номер задачи	$\mathbf{l}$, м	u_0, м/с	φ, град	Δh, м
1.81	?	11,2	?	2,5
1.82	6	?	36,9	?
1.83	?	24,75	81	?
1.84	10,5	?	?	6
1.85	5	5,92	?	?
1.86	?	11,88	?	5
1.87	8,5	?	46,7	?
1.88	?	18,78	80,5	?
1.89	7	?	?	3
1.90	11	9,94	?	?
1.91	?	10,58	?	0,7
1.92	9	?	66	?
1.93	?	22,27	84,9	?
1.94	4,5	?	?	2,5
1.95	8	25,04	?	?
1.96	?	22,27	?	0,8
1.97	10	?	84,3	?
1.98	?	11,07	68,2	?
1.99	12	?	?	4
1.100	5,5	7,7	?	?
1.101	?	10,51	?	7,5
1.102	6,5	?	81,25	?
1.103	?	8,95	49,4	?
1.104	4	?	?	1
1.105	7,5	26,25	?	?
1.106	?	24,35	?	1
1.107	9,5	?	40,8	?
1.108	?	20,35	72,9	?

1.109 – 1.136. Точка движется по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_t. Через время t после начала движения нормальное ускорение точки $a_n = na_\tau$. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Условия к задачам 1.109 – 1.136

Номер задачи	R, см	a_τ, м/с^2	t, с	n
1.109	?	0,5	2,1	0,6
1.110	87,27	?	0,8	2,2
1.111	840	2,8	?	0,75
1.112	115,2	1,6	1,2	?
1.113	?	0,8	1,5	1
1.114	14,4	?	0,6	1,25
1.115	4	0,4	?	1,6
1.116	270,75	3	1,9	?
1.117	?	1,4	0,5	0,5
1.118	320	?	2	2,5
1.119	8,33	0,25	?	3
1.120	887,47	2,6	1,6	?
1.121	?	1,5	0,8	1,75
1.122	28,17	?	1,3	2,4
1.123	176	2,2	?	5
1.124	8	0,7	0,2	?
1.125	?	1,2	0,4	2
1.126	125	?	1	0,8
1.127	168	3,5	?	3
1.128	324	0,2	1,8	?
1.129	?	1	1,4	1,2
1.130	5,4	?	0,3	2,5
1.131	33,3	2,4	?	1,8
1.132	173,4	0,6	1,7	?
1.133	?	2	0,9	0,4
1.134	162,9	?	1,1	2,6
1.135	546,13	3,2	7	1,5
1.136	35,28	1,8	0,7	?

1.137. Закон движения материальной точки имеет вид $x = b_1 t + d_1 t^3$, $y = b_2 t + c_2 t^2$, $z = 0$, где $b_1 = 27$ м/с; $d_1 = -1$ м/с^3; $b_2 = 32$ м/с; $c_2 = -8$ м/с^2. Построить траекторию движения точки в первые 6 с. Определить тангенциальное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в момент времени t_1 = 2 с.

1.138. Камень, брошенный с высоты h = 2,1 м под углом α = 45° к горизонту, падает на землю на расстоянии S = 42 м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, время полета и максимальную высоту подъема над уровнем земли. Определить также радиусы кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.

1.139. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом r =10 см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,4$ см/с^2. Через какой промежуток времени вектор ускорения $\vec{a}$ образует с вектором скорости $\vec{u}$ угол β, равный: а) 60º; б) 80º? Какой путь пройдет за это время движущаяся точка? На какой угол повернется радиус-вектор, проведенный из центра окружности к движущейся точке, если в начальный момент времени он направлен вертикально вверх? Движение происходит по часовой стрелке.

1.140. Автомобиль едет по прямой из пункта *A* в пункт *B*, преодолевая это расстояние за время T = 1 ч. Известно, что скорость автомобиля меняется по закону $\upsilon(t) = \upsilon_0 \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, где время t отсчитывается с момента выезда из пункта *A*, а максимальная скорость автомобиля $u_0 = 80$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость $\upsilon_{ср}$ автомобиля и расстояние S между *A* и *B*.

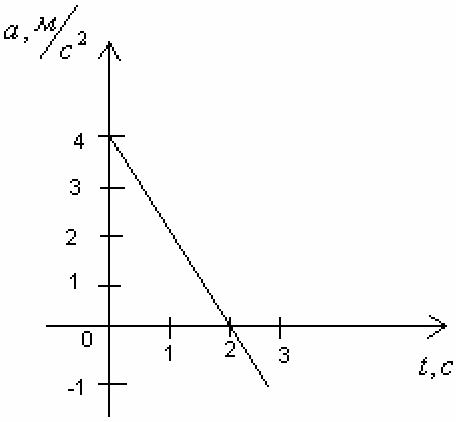
1.141. Автомобиль едет по прямой из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми l = 1 км. Скорость автомобиля меняется в зависимости от пройденного пути S по закону $u(S) = u\sqrt{\frac{S}{l}}$, где $u = 72$ км/ч – скорость, достигнутая автомобилем в конце пути. Определить скорость автомобиля u_1 через время t_1 = 1 мин после начала путешествия, полное время пути T и среднюю путевую скорость $\upsilon_{ср}$.

1.142. Тело брошено с начальной скоростью u_0 = 19,6 м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) наименьшую скорость тела во время движения; 2) координаты точки, в которой угол между направлениями скорости и ускорения β = 45°; 3) тангенциальное и нормальное ускорения в начале и конце траектории, а также в ее высшей точке.

1.143. Автомашина начинает движение с нулевой скоростью по прямому пути сначала с ускорением $a = 5$ м/с^2, затем движется равномерно и, наконец, замедляется до остановки с тем же ускорением a. Полное время движения t = 25 с. Средняя путевая скорость оказалась равной $\upsilon_{ср} = 72$ км/ч. Сколько времени t автомашина двигалась равномерно? Найти скорость равномерного движения.

1.144. Маховик начал вращаться равноускоренно и за время t =10 с достиг частоты вращения $\nu = 300$ об/мин. Определить угловое ускорение ε маховика и число оборотов N, которое он сделал за это время.

1.145. На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определить скорость u и координату X точки через t = 3 с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?



1.146. Ускорение движущейся прямолинейно материальной точки изменяется по закону $a = A + Bt$, где $A = 9$ м/с^2; $B = –6$ м/с^3. Определить скорость u точки через $t_1 = 4$ с после начала движения, а также координату X и путь S, пройденный точкой за этот промежуток времени.

1.147. Движение материальной точки в плоскости XOY описывается законом $x = At$, $y = A(1 + Bt)t$, где A и B – положительные постоянные; t – время. Определить уравнение траектории материальной точки; радиус-вектор точки в зависимости от времени; модули скорости и ускорения в зависимости от времени.

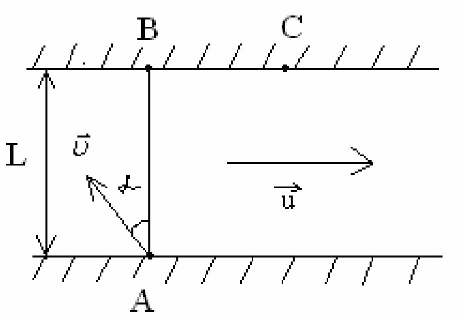
1.148. Воздушный шар поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}9$ м/с^2.Через t_1 = 12 с после начала его движения пассажир уронил гайку. Определите время $t_{пад}$ падения гайки на землю; ее скорость $u_{пад}$ в момент удара о землю.

1.149. Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить этот угол, если максимальная высота подъема $h_{\max}$ меньше дальности полета S в $n = 2{,}4$ раза.

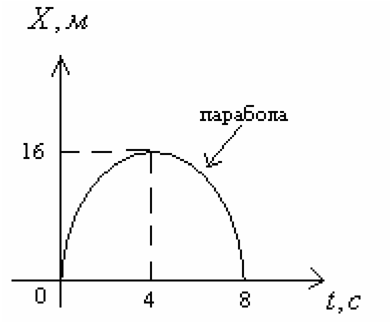
1.150. Материальная точка начинает вращаться с постоянным угловым ускорением. Определите угловое ускорение ε точки, если через промежуток времени t = 5 с угол α между векторами полного ускорения $\vec{a}$ и скорости $\vec{\upsilon}$ составляет 51°.

1.151. Радиус-вектор материальной точки, движущейся в поле тяготения Земли, описывается уравнением $\vec{r} = \upsilon_0 t\vec{i} - \dfrac{gt^2}{2}\vec{j}$, где $u_0 = 76$ м/с, g – ускорение свободного падения; $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей X и Y. Определите момент времени t_1 после начала движения, когда вектор скорости $\vec{\upsilon}$ точки направлен под углом α = 35° к горизонту. Чему равна скорость υ в этот момент времени?

1.152. Вентилятор после выключения за время t = 5,5 с, двигаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 22 оборота. Определите угловую скорость ω_0 и частоту вращения n вентилятора в рабочем режиме, а также угловое ускорение вентилятора ε.



1.153. Человек в лодке переплывает реку, отправляясь из точки *A* (см. рис.). Если он будет держать курс перпендикулярно к берегам, то через t_1 = 10 мин после отправления попадет в точку *C*, лежащую на расстоянии S = 120 м ниже точки *B* по течению реки. Если он будет держать курс под некоторым углом α к прямой *AB* против течения, то через t_2 = 12,5 мин попадет в точку *B*. Определить ширину реки L, скорость лодки относительно воды υ, угол α, под которым плыл лодочник во втором случае, скорость течения реки u.



1.154. Точка движется вдоль оси X согласно графику, изображенному на рисунке. Построить графики изменения ускорения $a(t)$ и скорости $\upsilon(t)$ движения. Определить начальную υ_0 и среднюю $<\upsilon>$ скорости движения.

1.155. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с и с постоянным ускорением $a = -5$ м/с^2. Определить, чему равен путь S, пройденный точкой, и модуль ее перемещения Δr спустя время t = 4 с после начала отсчета времени.

1.156. За время τ тело прошло путь S, причем его начальная скорость увеличилась в K раз. Определить величину ускорения тела a.

1.157. По прямой начинает двигаться материальная точка с постоянным ускорением. Спустя время *T* после начала ее движения ускорение меняет знак на противоположный, оставаясь неизменным по величине. Определить, через какое время t_1 после начала движения точка вернется в исходное положение.

1.158. Камень бросают со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Через какое время t скорость камня будет составлять угол β с горизонтом? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.159. Материальная точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением $\vec{a}$, модуль которого зависит от ее скорости υ по закону $|\vec{a}| = b\sqrt{\upsilon}$, где b – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна υ_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время она пройдет этот путь?

1.160. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = At\vec{i} - B\vec{j}$, где $A = 4$ м/с^3, $B = 4$ м/с^2. Найти, на каком расстоянии от начала координат она будет находиться в момент времени $t = 1$с, если при $t = 0$ $r_0 = 0$, $\vec{\upsilon}_0 = 0$.

1.161. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом α = 60° к горизонту. Начальная скорость каждого тела $\upsilon_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через $t_0 = 1{,}7$ с.

1.162. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор; α – положительная постоянная. Найти: а) скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы в зависимости от времени; б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь, который она пройдет при этом.

1.163. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $\upsilon = At + Bt^2$ ($A = 0{,}3$ м/с^2, $B = 0{,}1$ м/с^3). Определить момент времени, для которого вектор полного ускорения $\vec{a}$ образует с радиусом колеса угол $\varphi = 4°$.

1.164. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы: а) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности; б) радиус кривизны начала его траектории был в n = 8 раз больше, чем в вершине?

1.165. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость его подъема постоянна и равна υ_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $\upsilon_x = \alpha y$, где α – постоянная, y – высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема: а) величины сноса шара $x(y)$; б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

1.166. Точка движется по окружности со скоростью $\upsilon = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}5$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет n = 0,1 длины окружности после начала движения.

1.167. Уравнение движения материальной точки по прямой (ось X) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м; $B = 2$ м/с; C = –0,5 м/с^3. Для момента времени t_1 = 2 с определить: а) координату x_1 точки; б) мгновенную скорость u_1; в) мгновенное ускорение a_1.

1.168. Уравнение движения материальной точки по прямой (ось X) имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с^2. Построить график зависимости координаты x и пути S от времени. Определить среднюю скорость $< u_x >$ за интервал времени от t_1 = 1с до t_2 = 6 с. Найти среднюю путевую скорость υ_{cp} за тот же интервал времени.

1.169. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $\xi(t) = A + Bt + Ct^2$, где ξ – криволинейная координата, отсчитанная по дуге окружности, A = 10 м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти: а) скорость u автомобиля, его тангенциальное a_t, нормальное a_n и полное a ускорения в момент времени $t = 5$ с; б) длину пути S и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ автомобиля за интервал времени $t = 10$ с, отсчитанный с момента начала движения.

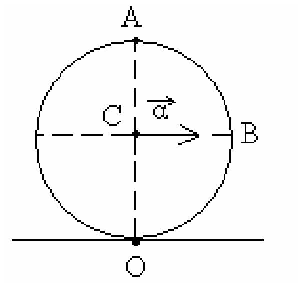
1.170. Маховик, вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10$ с$^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова стало равномерным, но уже с частотой $n = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

1.171. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки A в этот момент $u = 0{,}65$ м/с.

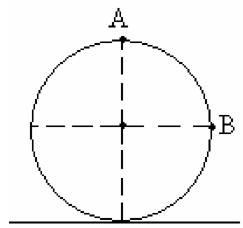
1.172. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}$. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60°$ с ее вектором скорости?

1.173. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где ω_0 и α – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости.

1.174. Точка A находится на ободе колеса радиусом $R = 0{,}5$ м, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $u = 1$ м/с. Найти: а) модуль и направление ускорения точки A; б) полный путь S, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания поверхности.



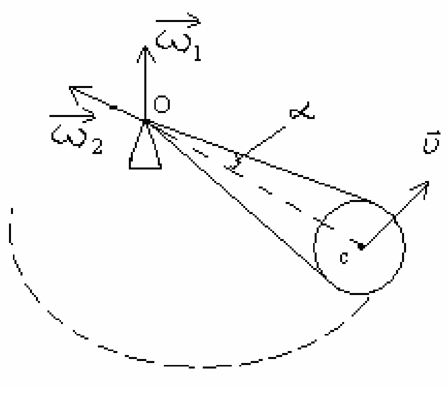
1.175. Шар радиусом $R = 10$ см катится без скольжения по горизонтальной поверхности так, что его центр (точка C на рисунке) движется с постоянным ускорением $a = 2{,}5$ см/с^2. Через $t = 2$ с после начала движения его положение соответствует рисунку. Найти: а) скорости точек A и B; б) ускорения точек A и O.



1.176. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус цилиндра равен r. Найти радиусы кривизны траекторий точек A и B(см. рис.).

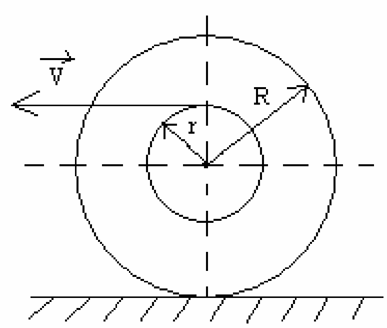
1.177. Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = 3\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и $\omega_2 = 4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

1.178. Круглый конус с углом полураствора $\alpha = 30°$ и радиусом основания $R = 5$ см катится равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности, как показано на рисунке. Вершина конуса закреплена шарнирно в точке O, которая находится на одном уровне с точкой C – центром основания конуса . Скорость точки C равна $u = 10$ см/с. Найти модули: а) угловой скорости конуса; б) углового ускорения конуса.

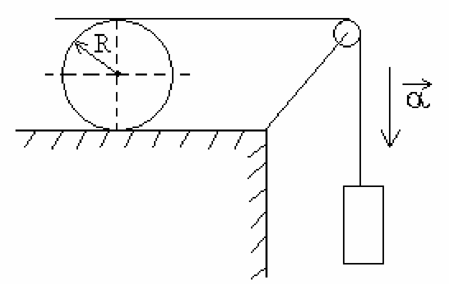


1.179. Точка движется по окружности радиусом $R=15$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_t. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $u_1=15$ см/с. Определить нормальное ускорение a_{n2} точки через $t_2=16$ с после начала движения.

1.180. Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время $t=2$ мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин$^{-1}$. Определите: а) угловое ускорение колеса; б) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.



1.181. Нить, намотанную на катушку, тянут со скоростью $\vec{u}$ (см. рис.). С какой скоростью движется центр катушки? Проскальзывания нет, радиусы катушки R и r заданы.



1.182. Нить намотана на цилиндр радиусом R и перекинута через невесомый блок (см. рис.). Груз на конце нити начинает падать с постоянным ускорением $\vec{a}$. За какое время от начала движения цилиндр пройдет расстояние S? Проскальзывания нет.

1.183. Снаряд вылетает со скоростью u_0 из пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол β с горизонтом, под углом α к поверхности горы. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить дальность S полета снаряда вдоль склона и максимальную высоту h_{max} подъема над склоном.

1.184. С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой h с расстояния S от дома? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Решение задач динамики основано на последовательном применении законов Ньютона.

При использовании законов Ньютона особое внимание надо уделять анализу сил, действующих на рассматриваемое тело. Этот анализ должен включать: происхождение сил – в результате взаимодействия с каким телом возникла данная сила; природу сил – тяготение, упругость, трение; характер – от каких величин и как зависит данная сила.

Уравнения второго закона Ньютона следует обязательно записывать в векторной форме, а затем переходить к скалярным равенствам, связывающим проекции ускорения и действующих сил на координатные оси, выбранные в зависимости от условия задачи. Эту систему координат, применяемую для решения векторных уравнений, не следует смешивать с системой отсчета, относительно которой рассчитываются скорости и ускорения тел.

При описании движения тел, связанных между собой, второй закон Ньютона применяют к каждому телу в отдельности, установив предварительно связь между координатами и кинематическими параметрами этих тел. При этом часто приходится накладывать дополнительные условия на характер связей.

Законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем отсчета. Почти во всех рассматриваемых задачах систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной, если пренебречь ее ускорением относительно системы неподвижных звезд.

Основной задачей нерелятивистской динамики МТ является поиск закона движения или других кинематических характеристик по заданному внешнему воздействию и начальным условиям. Решение этой задачи выполняется с помощью второго закона Ньютона

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \vec{F}\,, \tag{2.1}$$

где $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ – импульс МТ, m – ее масса, $\vec{a}$ – ее ускорение; $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма всех сил $\vec{F}_i$, действующих на МТ (результирующая сила), n – число действующих сил.

Многообразие законов зависимости сил от координат, скорости, времени и других величин не позволяет выработать универсальный способ решения этого дифференциального уравнения. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай 1. $\vec{F} =$ const, т.е. на МТ действуют постоянные силы. В этом случае по уравнению $m\vec{a} = \vec{F}$ определяется постоянное ускорение, а затем и другие кинематические характеристики.

Случай 2. $\vec{F} = \vec{F}(t)$, т.е. результирующая сила зависит только от времени. Тогда после применения метода разделения переменных первое из уравнений (2.1) следует переписать в виде

$$d\vec{\upsilon} = \frac{\vec{F}(t)}{m} dt. \quad (2.2)$$

Интегрируя это уравнение, определяем скорость тела

$$\vec{\upsilon} = \int \frac{\vec{F}(t)}{m} dt + C_1,$$

где постоянную интегрирования C_1 находят из начальных условий.

Случай 3. Движение одномерное поступательное и сила зависит от скорости, например $\vec{F} = \{F_x(\upsilon_x); 0; 0\}$. В этом случае первое из уравнений (2.1) после применения метода разделения переменных принимает в координатной форме вид

$$\frac{1}{F_x(\upsilon_x)} d\upsilon_x = \frac{1}{m} dt. \quad (2.3)$$

Интегрируя левую и правую части этого равенства, можно получить зависимость скорости от времени. Более сложные случаи зависимости силы от координаты, скорости и времени, они требуют специальных методов решения дифференциальных уравнений.

При решении некоторых задач целесообразно использовать определения работы силы A на траектории L и мощности N силы:

$$A_L = \int_L \vec{F} d\vec{r}; \quad (2.4)$$

$$N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha. \quad (2.5)$$

Особую группу составляют задачи, в которых масса объекта наблюдения непрерывно изменяется из-за потери или приобретения вещества, например при выбрасывании струи газа реактивным двигателем или при «налипании» на тело встречного потока частиц. В этом случае необходимо использовать обобщение второго закона Ньютона на систему материальных точек:

$$d(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n) = \vec{F} dt, \quad (2.6)$$

где $\vec{F}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, $\vec{P}_i$ – импульсы составляющих систему тел (в том числе потерянной или приобретенной массы).

Следствием (2.6) является уравнение движения точки переменной массы, полученное И.В. Мещерским.

$$m(t)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\mu_1\vec{u}_1+\mu_2\vec{u}_2, \qquad (2.7)$$

где $\mu_1=\frac{dm_1}{dt}>0$ – увеличение массы за одну секунду, $\mu_2=\frac{dm_2}{dt}<0$ – уменьшение массы за одну секунду, $\vec{u}_1$ – скорость относительно ракеты присоединяющихся частиц, $\vec{u}_2$ – скорость относительно ракеты отделяющихся частиц.

Для реактивных двигателей величину $\mu_1\vec{u}_1$ называют тормозящей силой, а $\mu_2\vec{u}_2$ – реактивной силой тяги.

При использовании этого уравнения в проекциях на направление движения рассматриваемой точки относительную скорость встречного потока частиц надо записывать с отрицательным знаком, т.е. $-u_1$, проекцию относительной скорости выбрасываемых частиц для разгоняющих двигатель – тоже с отрицательным знаком $-u_2$, а для тормозных двигателей – с положительным знаком $+u_2$.

Если не известен точный закон, по которому изменяется полная сила $\vec{F}(t)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(t)$, действующая на тело, то можно использовать понятие средней силы $<\vec{F}>$ за какой-то промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$ от момента t_1 до t_2: $<\vec{F}>=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt$.

Тогда уравнение второго закона Ньютона можно записать в виде $\Delta\vec{P}=<\vec{F}>\Delta t$, где $\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$ – изменение импульса за тот же промежуток времени.

Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой, может быть разложена на две составляющие – тангенциальную и нормальную.

Тангенциальная (или касательная) сила

$$\vec{F}_\tau=m\vec{a}_\tau=m\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau},$$

где $\vec{t}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Нормальная (центростремительная) сила

$$\vec{F}_n=m\vec{a}_n=m\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n},$$

где R – радиус кривизны траектории; $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к траектории.

Сила трения скольжения

$$\vec{F}_{тр} = -\mu N \vec{e}_v,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – абсолютная величина силы нормального давления; $\vec{e}_v$ – единичный вектор в направлении скорости тела.

Сила упругости

$$F_{упр} = -k\Delta l = -k\left(x - x_0\right),$$

где k – коэффициент жесткости; x – координата незакрепленного конца пружины; x_0 – она же для нерастянутой пружины. Знак «минус» показывает, что сила направлена в сторону, обратную деформации.

Сила гравитационного взаимодействия

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная; $r = \left|\vec{r}_{12}\right|$; $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор тела 2 относительно тела 1. Знак «минус» указывает на притяжение тел.

Закон сохранения импульса: полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная: $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{P}_i = \text{const}$.

Применение закона сохранения импульса к соударению двух тел:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{\upsilon}_i, \vec{u}_i\ (i = 1, 2)$ – скорости тел 1 и 2 до и после соударений соответственно.

При неупругом ударе, когда тела слипаются после соударения, их общая скорость $\vec{u}$ становится равной $\vec{u} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$.

При решении задач в неинерциальных системах отсчета предполагается, что в них, так же как и в инерциальных, ускорения вызываются силами, но наряду с «обычными» силами взаимодействия существуют еще силы особой природы, называемые силами инерции. Поэтому второй закон Ньютона в неинерциальной системе имеет вид

$$m\vec{a}_{ин} = \vec{F} + \vec{F}_{ин}, \tag{2.8}$$

где $\vec{a}_{ин}$ – ускорение в неинерциальной системе отсчета (относительное ускорение); $\vec{F}$ – обычные силы, появляющиеся в результате взаимодействия тел; $\vec{F}_{ин}$ – силы инерции.

В неинерциальных системах отсчета, движущихся прямолинейно и поступательно, сила инерции определяется выражением

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0, \tag{2.9}$$

где $\vec{a}_0$ –ускорение неинерциальной системы отсчета (переносное ускорение). Сила инерции направлена противоположно переносному ускорению.

В неинерциальных вращающихся системах координат следует учитывать две силы инерции:
центробежную силу инерции

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R} \tag{2.10}$$

и силу Кориолиса

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}_{отн}], \tag{2.11}$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращающейся системы координат, $\vec{R}$ – перпендикулярная к оси вращения составляющая радиуса-вектора рассматриваемого тела, $\vec{\upsilon}_{отн}$ – относительная скорость, т.е. скорость движения тела в неинерциальной системе отсчета.

2.2. Примеры решения задач

1. Двигатель самолета на взлетной полосе обеспечивает силу тяги $F_T = 40$ кН. Масса самолета $m = 10^4$ кг. Взлет самолета данного типа разрешается при достижении скорости $\upsilon_0 = 360$ км/ч. 1. Какова длина разгона самолета, если на него действует сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha\vec{\upsilon}$, где коэффициент пропорциональности $\alpha = 200\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$? 2. Какая часть работы силы тяги затрачивается на увеличение кинетической энергии самолета к моменту взлета?

Дано: $F_T = 40$ кН; $m = 10^4$ кг; $\upsilon_0 = 360$ км/ч; $\alpha = 200\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$.

Найти: L, T, η.

Решение. Пусть направление взлетной полосы совпадает с осью *OX*. Результирующая сила F_x, действующая на самолет, равна разности силы тяги и силы сопротивления: $F_x = F_T - \alpha\upsilon_x$.

Второй закон Ньютона запишем в проекции на ось *OX*:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_T - \alpha\upsilon_x.$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение, применив метод разделения переменных:

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha}{F_T}\upsilon_x}d\upsilon_x=\frac{F_T}{m}dt.$$

Введем безразмерную переменную, обозначив $u=1-\frac{\alpha}{F_T}\upsilon_x$. Тогда $d\upsilon_x=-\frac{F_T}{\alpha}du$ и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{u}du=-\frac{a}{m}dt.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения:

$$\ln u=-\frac{a}{m}t+C_1.$$

После обратной замены переменной это уравнение приобретает вид

$$\ln\left(1-\frac{\alpha}{F_T}\upsilon_x\right)=-\frac{\alpha}{m}t+C_1. \qquad (*)$$

С помощью начального условия $\upsilon(t=0)=0$ находим постоянную интегрирования $C_1=0$. Подставим это значение постоянной в последнее равенство $(*)$ и, сделав преобразования, получим $\ln\left(1-\frac{\alpha\upsilon_x}{F_T}\right)=-\frac{\alpha}{m}t$. Используя определение логарифмической функции, это выражение представим в виде

$$1-\frac{\alpha\upsilon_x}{F_T}=e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \text{или} \quad \upsilon_x=\frac{F_T}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

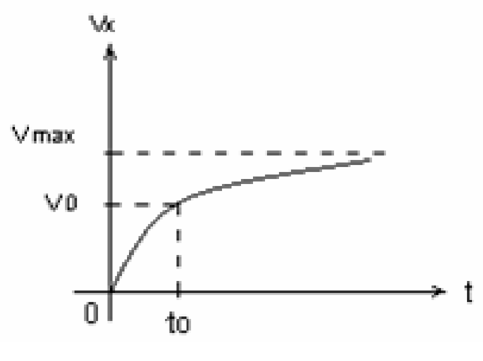


Рис. 2.1

Построим график зависимости скорости от времени (рис. 2.1). Из него следует, что скорость самолета с увеличением времени асимптотически стремится к предельному значению

$$\upsilon_{max}=\frac{F_T}{\alpha}=200 \text{ м/с}=720 \text{ км/ч}.$$

Это скорость установившегося движения самолета.

Решая уравнение $\upsilon_0 = \frac{F_T}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t_0}\right)$ и преобразуя его, находим момент взлета самолета:

$$t_0 = -\frac{m}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha\upsilon_0}{F_T}\right) = 35 \text{ с}.$$

По известной функции $\upsilon_x(t)$ запишем закон движения и, подставив в него полученное значение t_0, определим длину разгона самолета. Используем формулу (1.6)

$$x = \int \upsilon_x(t)dt = \int \frac{F_T}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)dt = \frac{F_T}{\alpha}\left(t + \frac{m}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 находим из начального условия $x(t=0)=0$:

$$0 = \frac{mF_T}{a^2} + C_2 \quad \text{или} \quad C_2 = -\frac{mF_T}{a^2}.$$

Окончательно закон движения принимает вид

$$x = \frac{F_T t}{a} - \frac{mF_T}{a^2}(1 - e^{-\frac{a}{m}t}).$$

Подставив в него значение $t_0 = 35$ с, рассчитаем длину разгона $L = 1931$ м.

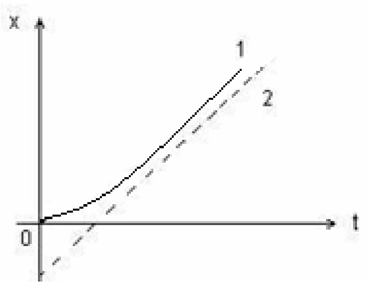


Рис. 2.2

График закона движения приведен на рис. 2.2 (кривая 1). При анализе уравнения (*) было показано, что с увеличением времени скорость самолета растет до предельного значения $\upsilon_{\max}$. Соответственно увеличивается наклон касательной к графику закона движения, а сам график асимптотически стремится к пунктирной прямой 2, изображающей зависимость

$$x_A = \frac{F_T}{\alpha}t - \frac{mF_T}{\alpha^2}.$$

2. Найдем работу силы тяги во время разгона. Учитывая, что сила тяги не изменяется и совпадает с направлением движения, формулу (2.4) запишем в виде

$$A = F_L L\cos 0 = 77 \text{ МДж}.$$

Кинетическая энергия самолета в момент взлета равна

$$T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = 50 \text{ МДж}.$$

Это значение составляет только $\eta = \frac{A}{T} \cdot 100$ % = 65 % от работы силы тяги.

2. Водометный двигатель катера выбрасывает назад струю воды со скоростью $u = 8$ м/с относительно катера. Расход воды в его турбине $\mu = 70$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить его скорость υ_1 в спокойной воде через $t_1 = 50$ с после начала движения. Масса катера $m_0 = 5$ т.

Дано: $u = 8$ м/с; $\mu = 70$ кг/с; $t_1 = 50$ с; $m_0 = 5$ т = 5000 кг.

Найти: υ_1.

Решение. Выберем систему отсчета, связанную со спокойной водой, ось координат *OX* – вдоль направления движения катера. Пусть в некоторый момент времени скорость катера равна υ. Масса катера m_0 не изменяется, внешние силы отсутствуют, проекция относительной скорости поступающей в турбину воды равна $-\upsilon$, а для выбрасываемой $-u$. Уравнение (2.7) запишем в проекции на ось *OX*:

$$m_0 \frac{d\upsilon}{dt} = -\mu\upsilon + \mu u \quad \text{или} \quad m_0 \frac{d\upsilon}{dt} = \mu u \left(1 - \frac{\upsilon}{u}\right).$$

Введем безразмерную переменную $\omega = 1 - \frac{\upsilon}{u}$. Тогда $d\upsilon = -u d\omega$, и после замены и разделения переменных получим $\frac{1}{\omega} d\omega = -\frac{\mu}{m_0} dt$.

Интегрируем это уравнение:

$$\ln\omega = -\frac{\mu}{m_0} t + C \quad \text{или} \quad \ln\left(1 - \frac{\upsilon}{u}\right) = -\frac{\mu}{m_0} t + C.$$

Из начального условия $\upsilon(t=0) = 0$ находим $C = 0$, и уравнение примет вид

$$\ln\left(1 - \frac{\upsilon}{u}\right) = -\frac{\mu}{m_0} t.$$

Используя определение логарифмической функции, получим

$$1 - \frac{\upsilon}{u} = e^{-\frac{\mu}{m_0} t} \quad \text{или} \quad \upsilon = u\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m_0} t}\right). \qquad (**)$$

График этой функции приведен на рис. 2.3. Скорость асимптотически стремится к предельному значению $\upsilon_{max} = u$.

В этом случае скорость выбрасываемой струи воды в выбранной системе отсчета равна нулю, т.е. $\upsilon_в = u - \upsilon_{max} = 0$ и ускорения не будет. Подставив из условия $t_1 = 50$ с в выражение $(**)$ и выполнив вычисления, получим ответ $\upsilon_1 = 4$ м/с.

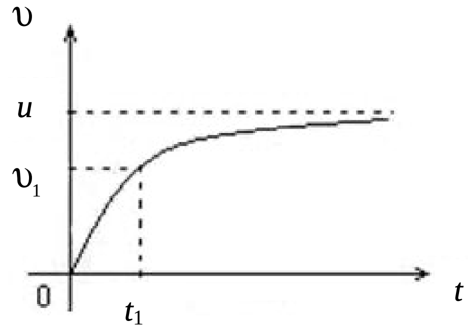


Рис. 2.3

3. Определить положение центра масс (радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ и его модуль r_c) системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 1{,}4$ кг, $m_2 =$ 1,2 кг, $m_3 =$ 1,8 кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a =$ 0,6 м. Определить также угол α (рис. 2.4).

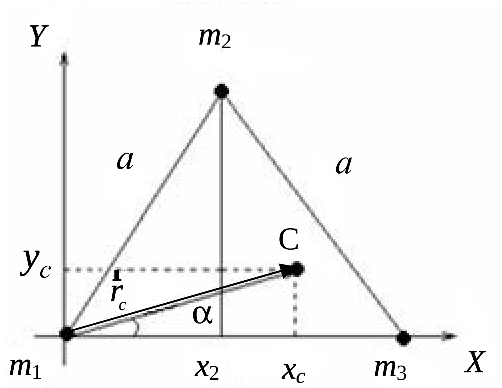


Рис. 2.4

Дано: $m_1 = 1{,}4$ кг, $m_2 =$ 1,2 кг, $m_3 =$ 1,8 кг, $a =$ 0,6 м.

Найти: $\vec{r}_c$, r_c.

Решение. Начало координат поместим в точку расположения массы m_1, а ось X направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки m_1 и m_3 (см. рис. 2.4). Тогда координаты соответствующих материальных точек массами m_1, m_2 и m_3:

$$x_1 = 0;\ \ y_1 = 0$$

$$x_2 = a\sin\frac{\pi}{6};\ \ y_2 = a\cos\frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = a;\ \ y_3 = 0$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек,

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i, y_i – координаты i-ой точки; m_i – масса i-ой точки; n – число материальных точек системы, можем записать

$$X_c = \frac{m_2 a\sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad Y_c = \frac{m_2 a\cos\frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{1}$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = \frac{m_2 a\sin\frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1+m_2+m_3}\vec{i} + \frac{m_2 a\cos\frac{\pi}{6}}{m_1+m_2+m_3}\vec{j}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \frac{a\sqrt{\left(m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1+m_2+m_3}.$$

Искомый угол (см. рис. 2.4)

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2\cos\frac{\pi}{6}}{m_2\sin\frac{\pi}{6} + m_3}.$$

Вычисляя, получим

$$\vec{r}_c = \left(32{,}7\vec{i} + 14\vec{j}\right)\ \text{см};\ r_c = 35{,}7\ \text{см};\ \alpha = 23°25'.$$

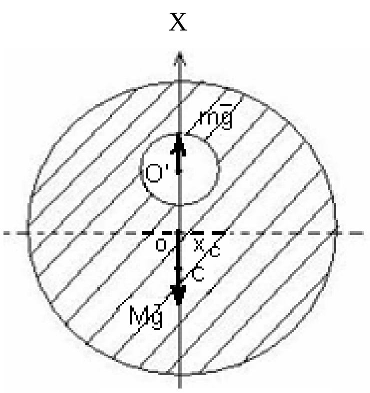


Рис. 2.5

4. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус $R = 60$ см), в котором вырезано круглое отверстие (радиус $r = 25$ см), с центром, лежащим на середине вертикального радиуса пластинки (рис. 2.5). Определить положение центра масс этой фигуры.

Дано: $R = 60$ см, $r = 25$ см, $OO' = \frac{R}{2}$.

Найти: x_c.

Решение. Представим, что круглое отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделана пластинка. Тогда центр масс, к которому приложена сила тяжести $M\vec{g}$, будет находиться в центре круга (точка O на рис. 2.5). Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, представим, что в центре кругового отверстия приложена сила $m\vec{g}$, направленная вертикально вверх.

Из соображений симметрии очевидно, что центр масс фигуры находится на вертикальной оси, проходящей через точки O и O'. Помещая начало вертикальной оси X в точку O, запишем выражение для центра масс

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

где m_i – масса i-го тела; x_i – координата центра масс i-го тела.

Учитывая условие задачи и вышеприведенные рассуждения, можем записать

$$x_c = -\frac{m\frac{R}{2}}{M-m}. \qquad (1)$$

Если плотность пластинки ρ, толщина h, то $M = \rho\pi R^2 h$, $m = \rho\pi r^2 h$. Подставляя эти формулы в выражение (1), найдем искомое положение центра масс

$$x_c = -\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}.$$

(знак «минус» означает, что центр масс находится ниже центра пластинки О).

Вычисляя, получим $x_c = 6{,}3$ см.

5. Две лодки (масса каждой с рыбаком равна m) движутся со скоростями $\upsilon_1 = 2{,}2$ м/с и $\upsilon_2 = 1{,}9$ м/с, причем скорость второй лодки направлена под углом $\alpha = 35°$ к первой (рис. 2.6). При сближении лодок рыбаки обменялись мешками (масса обоих мешков одинакова и в $n = 5$ раз меньше массы m). Определить скорости лодок υ_1' и υ_2' после обмена мешками.

Дано: $\upsilon_1 = 2{,}2$ м/с, $\upsilon_2 = 1{,}9$ м/с, $\alpha = 35°$, $n = 5$.

Найти: υ_1', υ_2'.

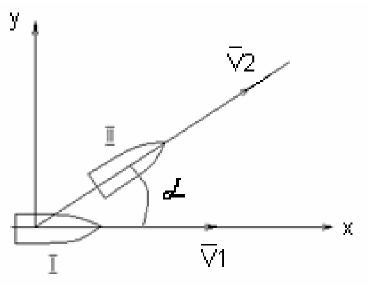


Рис. 2.6

Решение. В соответствии с условием задачи масса мешка равна $\frac{m}{n}$, тогда масса лодки с рыбаком без мешка равна $m - \frac{m}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)m$. После обмена мешками импульсы первой и второй лодок

$$m\vec{\upsilon}_1' = \frac{m}{n}\vec{\upsilon}_2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)m\vec{\upsilon}_1; \qquad (1)$$

$$m\vec{\upsilon}_2' = \frac{m}{n}\vec{\upsilon}_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)m\vec{\upsilon}_2. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные оси x и y (см. рис. 2.6) запишутся в виде

$$\begin{cases} m\upsilon'_{1x} = \dfrac{m}{n}\upsilon_2 \cos\alpha + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)m\upsilon_1 \\ m\upsilon'_{2x} = \dfrac{m}{n}\upsilon_1 + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)m\upsilon_2 \cos\alpha \\ m\upsilon'_{1y} = \dfrac{m}{n}\upsilon_2 \sin\alpha \\ m\upsilon'_{2y} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)m\upsilon_2 \sin\alpha \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, найдем проекции скоростей лодок после обмена мешками:

$$\upsilon'_{1x} = \frac{\upsilon_2 \cos\alpha + (n-1)\upsilon_1}{n}; \quad \upsilon'_{1y} = \frac{\upsilon_2 \sin\alpha}{n}; \tag{3}$$

$$\upsilon'_{2x} = \frac{\upsilon_1 + (n-1)\upsilon_2 \cos\alpha}{n}; \quad \upsilon'_{2y} = \frac{(n-1)\upsilon_2 \sin\alpha}{n}. \tag{4}$$

Учитывая, что $\upsilon'_1 = \sqrt{(\upsilon'_{1x})^2 + (\upsilon'_{1y})^2}$, $\upsilon'_2 = \sqrt{(\upsilon'_{2x})^2 + (\upsilon'_{2y})^2}$ и согласно уравнениям (3) и (4) получаем

$$\upsilon'_1 = 2{,}08 \text{ м/с}; \ \upsilon'_2 = 1{,}9 \text{ м/с}.$$

6. Движение материальной точки массой $m = 0{,}25$ кг описывается уравнением $\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$, где $A = 2$ м, $\omega = 0{,}7\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей X и $У$. Определить путь S, пройденный точкой за время $t_1 = 8$ с, и силу F, действующую на точку в конце указанного промежутка времени.

Дано: $m = 0{,}25$ кг, $\vec{r} = A\sin\omega t\vec{i} + A\cos\omega t\vec{j}$, $A = 2$ м, $\omega = 0{,}7\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $t_1 = 8$ с.

Найти: S, F.

Решение. Выбрав прямоугольную систему координат с началом в точке при $t = 0$ и учитывая условие задачи, можем записать:

$x = A\sin\omega t$, $y = A\cos\omega t$.

Согласно этим уравнениям траекторией тела является окружность радиусом A с центром в начале координат.

Учитывая, что линейная скорость тела $\upsilon = \omega A$ (A – радиус окружности), искомый путь (длина дуги), пройденный телом за время t_1:

$$S = \upsilon t_1 = \omega A t_1.$$

Скорость и ускорение материальной точки:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\omega\cos\omega t\vec{i} - A\omega\sin\omega t\vec{j};$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t\vec{i} - A\omega^2\cos\omega t\vec{j}. \qquad (1)$$

Поскольку $\vec{F} = m\vec{a}$, с учетом выражения (1) получаем

$$\vec{F} = -mA\omega^2\left(\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right).$$

Откуда модуль силы

$$F = mA\omega^2$$

(не зависящая от времени постоянная величина).

После вычисления имеем: $S = 11{,}2$ м; $F = 0{,}245$ Н.

7. На неподвижное тело массой $m =$ 0,5 кг начинает действовать сила, изменяющаяся по закону $\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 2$ Н, $B = 3$ Н/с, $C = 0{,}5$ Н, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей *x*, *y* и *z*. Определить: скорость $\vec{\upsilon}$ тела; модуль скорости υ в момент времени $t = 2$ с после начала движения.

Дано: $m =$ 0,5 кг, $\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, $A = 2$ Н, $B = 3$ Н/с, $C = 0{,}5$ Н, $t = 2$ с.

Найти: $\vec{\upsilon}$, υ.

Решение. Согласно второму закону Ньютона и условию задачи $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}(A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k})$ проекции ускорения на оси *x*, *y*, *z* равны

$$a_x = \frac{A}{m};\ a_y = \frac{Bt}{m};\ a_z = \frac{C}{m}. \qquad (1)$$

Из формулы для ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ можем записать

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \vec{a}dt \qquad (2)$$

(учли, что в момент времени $t = 0$ начальная скорость $\upsilon_0 = 0$).

Искомый вектор скорости, согласно выражениям (2) и (1),

$$\vec{\upsilon} = \frac{At}{m}\vec{i} + \frac{Bt^2}{2m}\vec{j} + \frac{Ct}{m}\vec{k}.$$

Модуль вектора скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \frac{t}{m}\sqrt{A^2 + \frac{B^2t^2}{4} + C^2}.$$

Вычисляя, получим $\upsilon = 14{,}6$ м/с.

8. Через невесомый блок перекинула невесомая нерастяжимая нить с грузами одинаковой массы $M = 1{,}4$ кг (рис. 2.7). На один из грузов положен перегрузок массой $m = 0{,}2$ кг. Считая, что грузы первоначально находятся на одном уровне и пренебрегая трением, определить разность высот Δh, на которых будут находиться грузы через промежуток времени $t = 1$ с.

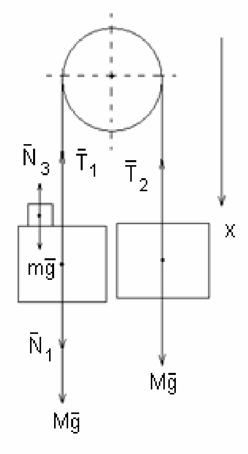


Рис. 2.7

Дано: $M = 1{,}4$ кг, $m = 0{,}2$ кг, $t = 1$ с.

Найти: Δh.

Решение. На каждый из грузов действуют: сила тяжести $M\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (вследствие невесомости нити силы натяжения одинаковы), на второй груз действует также сила давления со стороны перегрузка $\vec{N}_1$.

На перегрузок действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления $\vec{N}_3$ со стороны груза ($\left|\vec{N}_3\right| = \left|\vec{N}_1\right|$ по третьему закону Ньютона). Поскольку нить нерастяжима, ускорения обоих тел (и перегрузка) одинаковы.

Второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме:

$$\begin{cases} M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 \\ M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}_2 \\ m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3 \end{cases}.$$

Эти уравнения в проекции на выбранную ось (см. рис. 2.7) запишутся в виде

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - T \\ -Ma = Mg - T \\ ma = mg - N \end{cases}$$

(учли, что $T_1 = T_2 = T$ и $N_1 = N_3 = N$), откуда найдем ускорение

$$a = \frac{m}{2M + m} g \cdot \qquad (1)$$

За время t каждый из грузов пройдет расстояние $h = \dfrac{at^2}{2}$, поэтому, учитывая выражение (1), искомая разность высот $\Delta h = 2h = \dfrac{m}{2M + m} gt^2$.

Вычисляя, получаем $\Delta h = 65{,}4$ см.

9. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы (рис. 2.8), один из которых ($m_1 = 400$ г) движется по поверхности стола, а другой ($m_2 = 600$ г) – вдоль вертикали вниз. Коэффициент трения μ груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения T нити.

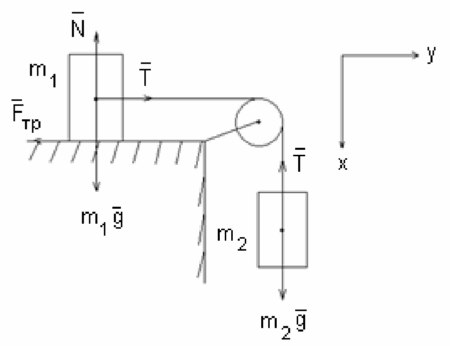


Рис. 2.8

Дано: $m_1 = 400$ г, $m_2 = 600$ г, $\mu = 0{,}1$.

Найти: T, a.

Решение. На оба бруска действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, а на брусок массой m_1 – еще сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме (см. рис. 2.8):

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{тр}; \quad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \quad (2)$$

(силы натяжения $\vec{T}$ по обе стороны блока равны, так как нить и блок невесомы).

Уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные оси (см. рис. 2.8) запишутся в виде

$$m_1 a = T - F_{тр}$$

$$m_2 a = m_2 g - T$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu m_1 g$, получим

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - \mu m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - T, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда $a = \dfrac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1 + m_2}$.

Сила натяжения нити $T = m_2(g - a)$ – из (3).

После вычисления имеем: $a = 5{,}49$ м/с^2, $T = 2{,}59$ Н.

10. Определить ускорения a_1 и a_2 тел и натяжение нитей $\vec{T}$ и $\vec{T}_1$ в системе, представленной на рис. 2.9. Масса одного тела $m_1 = 0{,}6$ кг, масса другого $m_2 = 0{,}4$ кг. Нити невесомы и нерастяжимы, массой блока и силами трения пренебречь.

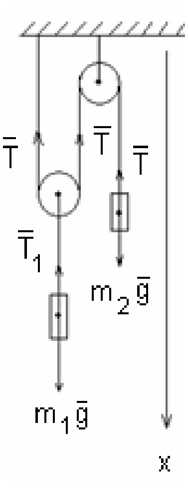


Рис. 2.9

Дано: $m_1 = 0{,}6$ кг, $m_2 = 0{,}4$ кг.

Найти: a_1, a_2, T, T_1.

Решение. На каждый из грузов действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (рис. 2.9). Поскольку нить невесома, силы натяжения нити одинаковы и равны T, а блок невесом, поэтому $T_1 = 2T$ (см. рис. 2.9). Второй закон Ньютона для обоих тел в векторной форме:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}. \qquad (2)$$

Предположим, что груз m_1 движется вниз, а груз m_2 – вверх, тогда уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранную ось (см. рис. 2.9) запишутся в виде

$$m_1a_1 = m_1g - 2T \qquad (3)$$

$$-m_2a_2 = m_2g - T. \qquad (4)$$

Если второе тело поднимется на высоту h_2, то первое тело за это же время опустится на расстояние $\frac{h_2}{2}$. Поскольку $h = \frac{at^2}{2}$, $a_1 = \frac{a_2}{2}$, то уравнения (3) и (4) запишутся в виде

$$m_1a_1 = m_1g - 2T$$

$$-2m_2a_1 = m_1g - T$$

Из этих уравнений находим искомые

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g; \quad T = \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2}g;$$

$$a_2 = 2a_1; \quad T_1 = 2T.$$

Вычисляя, имеем: $a_1 = 1{,}78$ м/с^2; $a_2 = 3{,}56$ м/с^2; $T = 3{,}21$ Н; $T_1 = 6{,}42$ Н.

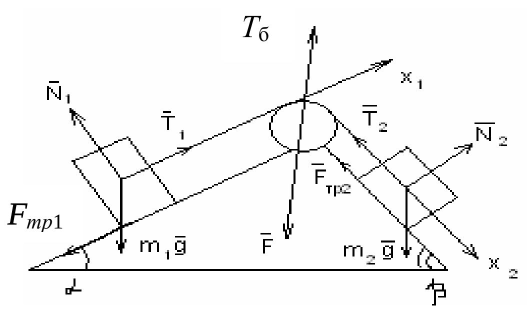


Рис. 2.10

11. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$, укреплен невесомый блок (рис. 2.10). Бруски массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок.

Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковы и равны $\mu = 0{,}08$. Пренебрегая трением в оси блока, определить ускорения a брусков, натяжение T нити и силу давления F на блок.

Дано: $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $\mu = 0{,}08$.

Найти: a, T, F.

Решение. На каждый из брусков действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и натяжения $\vec{T}$ нитей. Ввиду того, что нить невесома и нерастяжима, силы натяжения нитей одинаковы по величине и бруски будут двигаться с одинаковым ускорением $\vec{a}$.

Второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме с учетом перечисленного (см. рис. 2.10)

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр1} \tag{1}$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр2}. \tag{2}$$

Предположим, что груз m_1 движется вверх, а груз m_2 – вниз. Выбрав оси так, чтобы они совпадали с выбранным направлением ускорения, уравнения (1) и (2) в проекциях на эти оси запишутся в виде

$$m_1 a = T - m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha \tag{3}$$

$$m_2 a = m_2 g\sin\beta - T - \mu m_2 g\cos\beta \tag{4}$$

(учли, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$, $F_{тр1} = \mu N_1 = \mu m_1 g\cos\alpha$ и $F_{тр2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\beta$).

Из уравнений (3) и (4) найдем искомое ускорение брусков.

$$a = \frac{m_2(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g \tag{5}$$

(знак ускорения при подстановке числовых данных покажет правильность выбора направления движения тел) и силу натяжения нитей

$$T = \frac{\left[\sin\beta + \sin\alpha - \mu(\cos\beta - \cos\alpha)\right] m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Векторное уравнение для блока $\vec{T}_б + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ или $\vec{T}_б + \vec{F} = 0$, где $\vec{T}_б$ – сила реакции опоры; $\vec{F}$ – сила давления на блок. Поскольку по модулю все силы натяжения равны T, сила давления на блок со стороны нити (см. рис. 2.10)

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 - 2T^2\cos(\alpha + \beta)} = T\sqrt{2(1 - \cos(\alpha + \beta))} = 2T\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Вычисляя, получаем: $a = 2{,}38$ м/с^2; $T = 7{,}98$ Н; $F = 15{,}4$ Н.

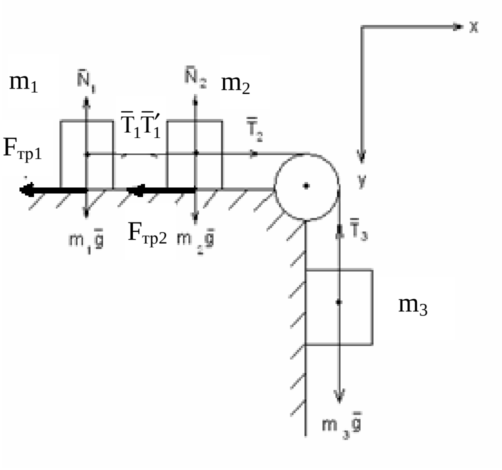


Рис. 2.11

12. Три бруска массами $m_1 = 0{,}16$ кг, $m_2 = 0{,}29$ кг и $m_3 = 0{,}21$ кг соединены перекинутой через блок нерастяжимой и невесомой нитью (рис. 2.11). Определить, при каких значениях коэффициента трения μ между брусками и поверхностью возможно скольжение тел.

Дано: $m_1 = 0{,}16$ кг, $m_2 = 0{,}29$ кг, $m_3 = 0{,}21$ кг.

Найти: μ.

Решение. На каждый из брусков действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, а на бруски с массами m_1 и m_2 – еще сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме (см. рис. 2.11)

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр1}; \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{T}' + \vec{F}_{тр2}; \qquad (2)$$

$$m_3\vec{a} = m_3 g + \vec{T}_3 \qquad (3)$$

(учли, что вследствие нерастяжимости нити все тела движутся с одинаковыми ускорениями).

Уравнения (1) – (3) в проекциях на выбранные оси координат X и $У$ (см. рис. 2.11) запишутся в виде

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - \mu m_1 g \\ m_2 a = T_2 - \mu m_2 g - T_1 \\ m_3 a = m_3 g - T_2 \end{cases}$$

(учли, что $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_3$).

Решая эту систему уравнений, найдем выражение для ускорения

$$a = g\frac{m_3 - \mu(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (4)$$

При движении грузов $a \geq 0$, т.е. согласно выражению (4) можем записать

$$\mu \leq \frac{m_3}{m_1 + m_2} \leq 0{,}467.$$

13. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 33°$ к горизонту находится брусок массой $m = 2{,}3$ кг, на который действует горизонтальная прижимающая сила F (рис. 2.12). Определить коэффициент трения μ между бруском и наклонной плоскостью, если брусок начинает скользить, когда сила $F = 7{,}5$ Н.

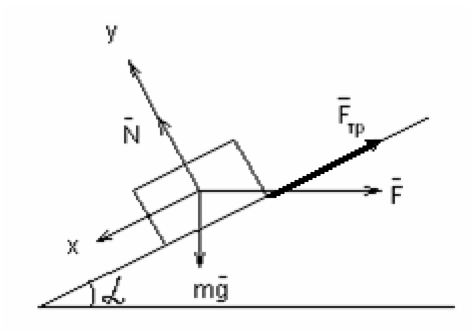


Рис. 2.12

Дано: $\alpha = 33°$, $m = 2{,}3$ кг, $F = 7{,}5$ Н.

Найти: μ.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F} \quad (1)$$

При начале скольжения ($\vec{a} = 0$) уравнение (1) в проекциях на выбранные оси (см. рис. 2.12) запишется в виде

$$0 = mg\sin\alpha - \mu N - F\cos\alpha \quad (2)$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N - F\sin\alpha \quad (3)$$

(учли, что $F_{тр} = \mu N$).

Из уравнения (3) находим

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha. \quad (4)$$

Уравнение (2) с учетом выражения (4) запишется в виде

$$mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\right) - F\cos\alpha = 0,$$

откуда искомый коэффициент трения

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha - F\cos\alpha}{mg\cos\alpha + F\sin\alpha} = \frac{mg\,\mathrm{tg}\alpha - F}{mg + F\,\mathrm{tg}\alpha} = 0{,}26.$$

14. Определить, за какое время t тело, соскальзывая вдоль наклонной плоскости длиной $l = 3{,}1$ м, пройдет вторую половину пути, если угол наклона α плоскости к горизонту равен $32°$, коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}4$.

Дано: $l = 3{,}1$ м, $\alpha = 32°$, $\mu = 0{,}4$.

Найти: t.

Решение. На тело действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Второй закон Ньютона для тела в векторной форме (рис. 2.13)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \quad (1)$$

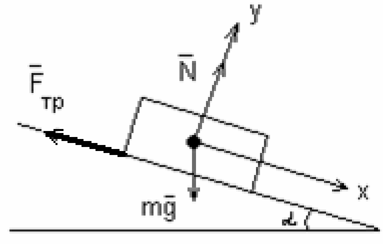


Рис. 2.13

Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси *X* и *У*:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu N \qquad (2)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \qquad (3)$$

(учли, что $F_{тр} = \mu N$).

Из уравнений (2) и (3) ускорение тела, соскальзывающего вдоль наклонной плоскости,

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Время, затраченное телом на прохождение всей наклонной плоскости,

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}} \qquad (4)$$

(учли, что $\upsilon_{0x} = 0;\ l = \dfrac{at^2}{2}$).

Время, затраченное на прохождение первой половины пути,

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}}. \qquad (5)$$

Искомое время t определится из выражений (4) и (5)

$$t = t_0 - t_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{l}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}} = 0{,}533\ \text{с}.$$

15. Брусок массой $m =$ 1,1 кг лежит на горизонтальной доске массой $M =$ = 3,2 кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}4$, между доской и горизонтальной поверхностью трение отсутствует. Определить, при какой минимальной силе $F_{\min}$, приложенной к доске (рис. 2.14), брусок начнет скользить по доске.

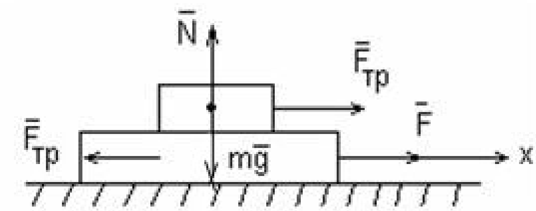


Рис. 2.14

Дано: $m =$ 1,1 кг, $M =$ 3,2 кг, $\mu = 0{,}4$.

Найти: $F_{\min}$.

Решение. До тех пор, пока не достигнуто предельное значение силы

$$F_{тр} = \mu mg, \qquad (1)$$

оба тела (доска и брусок) будут двигаться с одинаковым ускорением.

При скольжении на брусок действует максимальная сила трения (1); на доску, согласно третьему закону Ньютона, действует такая же сила в противоположном направлении (см. рис. 2.14).

Выбрав ось *X*, совпадающую по направлению с силой $\vec{F}$, уравнения второго закона Ньютона в проекции на эту ось запишем в виде

$$ma_1 = \mu mg \qquad (2)$$

$$Ma_2 = F - \mu mg. \qquad (3)$$

При проскальзывании бруска по доске $a_2 \geq a_1$. Из выражений (2) и (3) получаем, что

$$a_2 - a_1 = \frac{F}{M} - \mu g\left(\frac{m}{M} + 1\right) \geq 0. \quad (4)$$

Согласно выражению (4) брусок будет скользить по доске, если

$$\frac{F}{M} \geq \mu g\left(\frac{m}{M} + 1\right),$$

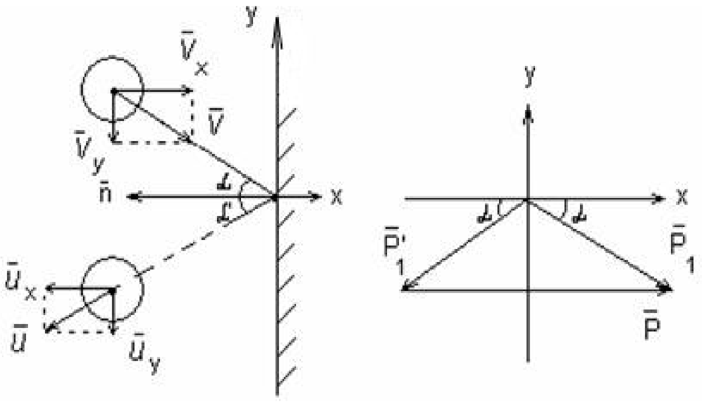
откуда искомая минимальная сила

$$F_{\min} = \mu g(m + M) = 16{,}9 \text{ Н}.$$

16. Шар массой $m = 0{,}3$ кг, двигаясь со скоростью $\upsilon = 10$ м/с, упруго ударяется о гладкую неподвижную стенку так, что скорость его направлена под углом $\alpha = 30°$ к нормали. Определить импульс P, полученный стенкой.

Дано: $m = 0{,}3$ кг, $\upsilon = 10$ м/с, $\alpha = 30°$

Найти: P.



а) б)

Рис. 2.15

Решение. Стенка неподвижна, поэтому система отсчета, связанная с ней, будет инерциальной. Удар о стенку упругий, следовательно, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. Из него, учитывая, что масса стенки много больше массы шара, следует равенство модулей скоростей шара $|\vec{\upsilon}|$ до и после удара.

Покажем, что угол α' отражения шара от стенки равен углу α падения шара. Спроецируем векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{u}$ на координатные оси *OX* и *OY* (рис. 2.15, *а*). Так как стенка гладкая, то $\vec{u}_y = \vec{\upsilon}_y$. Учитывая, кроме того, что $|\vec{u}| = |\vec{\upsilon}|$, получим $u_x = -\upsilon_x$, а отсюда следует равенство углов падения и отражения $(\alpha' = \alpha)$. Для определения импульса, полученного стенкой, воспользуемся законом сохранения импульса. Для нашего случая этот закон можно записать в виде

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P},$$

где $\vec{P}_1$ и $\vec{P}'_1$ – импульсы шара до и после удара $\left(|\vec{P}_1| = |\vec{P}'_1|\right)$.

Отсюда импульс, полученный стенкой,

$$\vec{P} = \vec{P}_1 - \vec{P}_1'.$$

Из. рис. 2.15, *б* видно, что вектор $\vec{P}$ сонаправлен с осью OX и его модуль

$$P = \left|\vec{P}\right| = 2P_1 \cos\alpha.$$

Подставив сюда выражение импульса $P_1 = m\upsilon$, получим

$$P = 2m\upsilon\cos\alpha.$$

После вычислений получим

$$P = 2\cdot 0{,}3\cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5{,}2\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

17. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту со скоростью υ_0, в верхней точке траектории разрывается на два осколка, причем масса первого m_1 в $n = 1{,}4$ раза меньше массы второго m_2. Меньший осколок полетел горизонтально в обратном направлении со скоростью υ_1, равной скорости υ снаряда перед разрывом (рис. 2.16). Определить, на каком расстоянии S от орудия упадет больший осколок, если место разрыва отстоит от места выстрела на расстоянии $l = 2{,}1$ км (по горизонтали). Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано: $m_2 = nm_1$; $n = 1{,}4$; $\upsilon_1 = \upsilon$; $l = 2{,}1$ км; $l = \dfrac{X_{max}}{2}$.

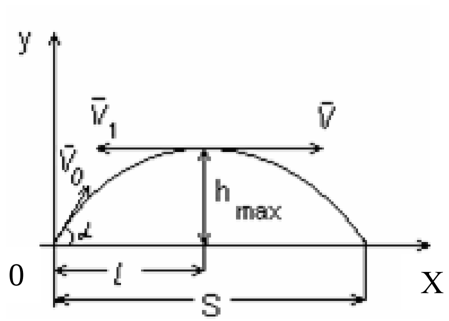


Рис. 2.16

Найти: S.

Решение. Мы знаем, что максимальная высота подъема равна

$$h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \tag{1}$$

а дальность полета

$$X_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{2}$$

при движении тела под углом к горизонту.

Согласно закону сохранения импульса (при разрыве снаряда импульс системы сохраняется)

$$(m_1 + m_2)\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2, \tag{3}$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости первого и второго осколков соответственно.

Уравнение (3) в проекции на выбранную ось X запишется в виде

$$(n+1)m_1\upsilon = -m_1\upsilon_1 + nm_1\upsilon_2$$

(учли, что $\upsilon_1 = -\upsilon$ и $m_2 = nm_1$), откуда

$$\upsilon_2 = \frac{n+2}{n}\upsilon = \frac{n+2}{n}\upsilon_0\cos\alpha. \tag{4}$$

Поскольку импульс – величина векторная, по закону его сохранения больший осколок будет двигаться в горизонтальном направлении.

Для большего осколка уравнения движения запишутся в виде

$$x = x_0 + \upsilon_2 t\,; \tag{5}$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}\,, \tag{6}$$

где, согласно условию задачи, $x_0 = l$; $y_0 = h_{\max}$.

В момент падения $y = 0$, поэтому из уравнения (6) время падения большего осколка $t = \sqrt{\dfrac{2h_{\max}}{g}}$. Подставив это выражение в формулу (5) при учете соотношения (1) и $l = \dfrac{X_{\max}}{2}$ (условие разрыва в верхней точке), получим искомую дальность полета

$$S = \frac{2l(n+1)}{n} = 7{,}2 \text{ км.}$$

18. Бак с водой движется по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Определить угол наклона β поверхности воды с горизонтом, считая положение воды в баке установившимся. Коэффициент трения между баком и плоскостью равен $\mu(\mu < \mathrm{tg}\alpha)$.

Дано: α, $\mu(\mu < \mathrm{tg}\alpha)$.

Найти: β.

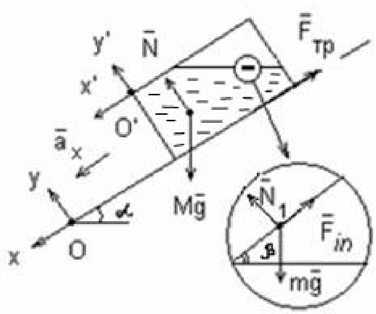


Рис. 2.17

Решение. Запишем уравнения движения бака с водой в системе координат *XOY* (рис. 2.17).

$$OX\text{:}\ Ma_x = Mg\sin\alpha - F_{тр} = Mg\sin\alpha - \mu N\,;$$

$$OY\text{:}\ N - Mg\cos\alpha = 0\,,$$

из них получим

$$a_x = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Перейдем сейчас в неинерциальную систему координат $X'O'Y'$, связанную с баком.

В установившемся режиме движения вода в системе координат $X'O'Y'$ покоится. Рассмотрим тонкий слой воды на поверхности (см. заштрихованный участок на рисунке). На этот слой массой m действует сила тяжести mg, сила реакции N_1 со стороны нижележащих слоев воды и сила инерции $F_{in} = -ma_x$.

Второй закон Ньютона для слоя массы m в системе координат $X'O'Y'$ запишется следующим образом:

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{in} = 0.$$

Переписав это уравнение в проекциях на координатные оси

$$O'X': \; mg\sin\alpha - N_1\sin(\alpha-\beta) - mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0;$$

$$O'Y': \; N_1\cos(\alpha-\beta) - mg\cos\alpha = 0,$$

исключив N_1, получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \mu.$$

Отсюда искомый угол равен $\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\mu$.

В случае отсутствия трения, когда $\mu = 0$, имеем $\beta = \alpha$, что и следовало ожидать.

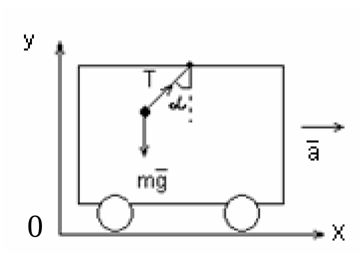


Рис. 2.18

19. В вагоне, движущемся горизонтально с ускорением $a =$ 2 м/с^2, висит на шнуре груз массой $m =$ 200 г. Найти силу натяжения шнура и угол отклонения шнура от вертикали (рис. 2.18).

Дано: $a =$ 2 м/с^2, $m =$ 200 г.

Найти: T, α.

Решение. На груз действуют только две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}$ шнура (независимо от того, покоится вагон или движется). При движении вагона с ускорением шнур отклонится от вертикали в сторону, противоположную направлению ускорения, и обе действующие на груз силы должны сообщить грузу относительно Земли ускорение, равное ускорению вагона. Т.к. вагон движется по отношению к Земле с ускорением, следует выбрать систему координат, не связанную с движущимся вагоном. В системе координат, жестко связанной с Землей, второй закон Ньютона имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \tag{1}$$

где $\vec{a}$ – ускорение груза относительно Земли; $\vec{T}$ – искомая сила натяжения.

Заменяя уравнение (1) двумя скалярными равенствами, связывающими между собой проекции сил и ускорения на оси *OX* и *OY*, получаем:

$$ma = T\sin\alpha;$$

$$0 = T\cos\alpha - mg.$$

Решив совместно эти два уравнения, найдем:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} = \operatorname{arctg}0,204 = 11,5°;$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2} = 20 \text{ Н}.$$

20. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной l. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол α (конический маятник). Вся система установлена в ракете, поднимающейся с ускорением $\vec{a}$ вертикально вверх. Сколько оборотов n сделает шарик за время t ?
Дано: l, α, $\vec{a}$, t .
Найти: n.
Решение. Рассмотрим силы, действующие на шарик. Выберем направление координатных осей x и y (рис. 2.19) и напишем уравнение движения шарика в системе координат, связанной с Землей. Шарик участвует в двух движениях: вращается с ускорением $a_к = \omega^2 R$ и поднимается вместе с ракетой вверх с ускорением $\vec{a}$, таким образом, полное ускорение шарика $\vec{a}_o = \vec{a}_к + \vec{a}$.

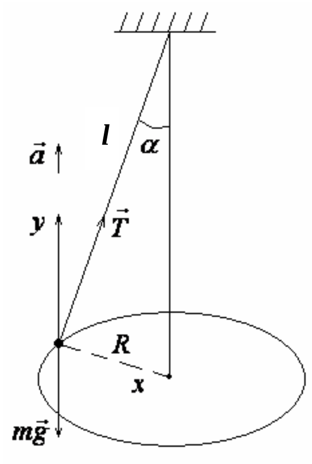


Рис. 2.19

Уравнение движения $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_o$.

$$\left.\begin{aligned} X&:\ T\sin\alpha = m\omega^2 R \\ Y&:\ T\cos\alpha - mg = ma \\ R &= l\sin\alpha,\ n = \omega\tau/2\pi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} T &= \frac{m(g+a)}{\cos\alpha} \\ T\sin\alpha &= m\omega^2 l\sin\alpha \end{aligned}$$

Получаем

$$n = \frac{\tau}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l\cos\alpha}}.$$

21. Груз массой $m =$ 200 г, привязанный к нити длиной $l =$ 40 см, вращают в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 37°$ (рис. 2.20). Найти угловую скорость ω вращения груза и силу натяжения нити.
Дано: $m =$ 200 г, $l =$ 40 см, $\alpha = 37°$.
Найти: ω, T.

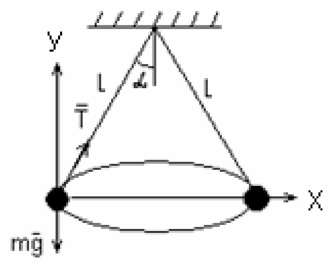


Рис. 2.20

Решение. Груз можно принять за материальную точку, движущуюся с постоянной скоростью по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости. Это значит, что тангенциальное ускорение

$a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$. Следовательно, трение и сопротивление движению отсутствуют и полное ускорение равно нормальному

$$a = a_n = \omega^2 r, \qquad (1)$$

где r – радиус окружности.

Тогда на тело действуют только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Для перехода к скалярным соотношениям введем оси координат. Одну из осей следует направить по нормали к траектории к центру окружности, вторую – вертикально.

Заменяя векторную запись соотношениями между проекциями сил и ускорения на указанные оси, получаем:

$$ma_n = T\sin\alpha; \quad 0 = -mg + T\cos\alpha.$$

На основании этих уравнений имеем:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 2{,}4 \text{ Н}; \;\; ma_n = mg\,\text{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Радиус окружности, по которой движется тело, $r = l\sin\alpha$. Подставляя выражение (1) в (2), находим:

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha} \to \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} = 5{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

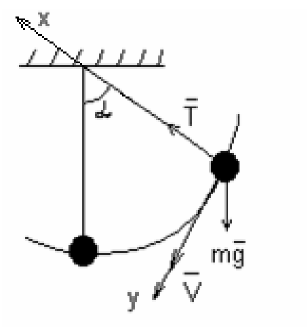


Рис. 2.21

22. Шарик массой m = 200 г, подвешенный на нити длиной l = 56 см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Сила натяжения нити T, когда нить составляет угол $\alpha = 50°$ с вертикалью, равна 4,5 Н. Определить скорость υ шарика в этот момент времени.

Дано: m = 200 г, l = 56 см, $\alpha = 50°$, T = 4,5 Н.

Найти: υ.

Решение. При движении шарика на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (рис. 2.21). Второй закон Ньютона для шарика в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в проекции на выбранные оси (см. рис. 2.21) запишется в виде

$$ma_n = T - mg\cos\alpha, \qquad (2)$$

где a_n – нормальная составляющая ускорения (направлена перпендикулярно к скорости движения).

Из выражения (2) найдем

$$a_n = \frac{T - mg\cos\alpha}{m}. \qquad (3)$$

Подставив в выражение (3) $a_n = \frac{\upsilon^2}{l}$, выразим искомую скорость

$$\upsilon = \sqrt{\left(\frac{T}{m} - g\cos\alpha\right)l} = 3{,}01 \text{ м/с}.$$

23. Сфера радиусом R вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг вертикальной оси. При каком минимальном значении коэффициента трения μ_0 тело будет удерживаться на поверхности, не скользя по ней? Угол равен α, тело – на внешней поверхности сферы (рис. 2.22, *а*).

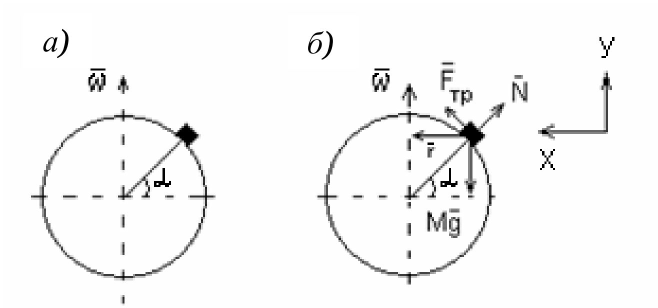


Рис. 2.22

Дано: R, ω, α.

Найти: μ_0.

Решение. Определим силы, действующие на тело (см. рис. 2.22, *б*). Напишем уравнение движения:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

и определим проекции этих сил на координатные оси *X* и *У*:

$$X:\ F_{тр}\sin\alpha - N\cos\alpha = M\omega^2 r$$

$$Y:\ N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha - Mg = 0$$

$$F_{тр} = \mu_0 N;\quad r = R\cos\alpha$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \mu_0 N\sin\alpha - N\cos\alpha = M\omega^2 R\cos\alpha \\ N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = Mg \end{cases}$$

Поделим уравнения почленно

$$\frac{\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha} = \frac{\omega^2 R\cos\alpha}{g}.$$

$$g\mu_0\sin\alpha - g\cos\alpha = \omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha + \mu_0\omega^2 R\cos^2\alpha;$$

$$\mu_0(g\sin\alpha - \omega^2 R\cos^2\alpha) = g\cos\alpha + \omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha.$$

Получаем

$$\mu_0 = \frac{g\cos\alpha + 0{,}5\omega^2 R\sin 2\alpha}{g\sin\alpha - \omega^2 R\cos^2\alpha}.$$

24. На внутренней поверхности конической воронки с углом 2α при вершине на высоте h от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и воронкой равен μ. Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси $\omega_{\min}$, при которой тело будет неподвижно в воронке. Задачу решать в неинерциальной системе координат, связанной с вращающимся конусом.

Дано: 2α, h, μ.

Найти: $\omega_{\min}$.

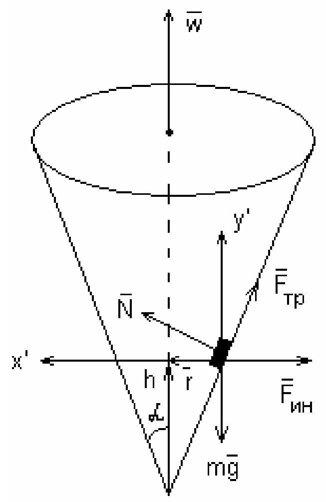


Рис. 2.23

Решение. Выберем систему координат $X'Y'$, связанную с вращающимся конусом. Относительно этой системы тело покоится. Принимая во внимание силы, действующие на тело (рис. 2.23), напишем уравнение движения в векторном виде:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{ин} = 0.$$

Вспомним, что во вращающейся системе координат силы инерции определяются соотношениями (2.10) и (2.11) и

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{к},$$

где $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}$ – центробежная сила инерции, направленная вдоль радиуса от оси вращения; $\vec{F}_{к} = -2m[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}']$ – сила Кориолиса. Последняя перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы угловой $\vec{\omega}$ и относительной $\vec{\upsilon}'$ скоростей. В данной задаче сила инерции определяется только центробежной силой, поскольку тело в воронке неподвижно. Напишем проекции сил на оси X', Y':

$$X':\ N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha - m\omega_{\min}^2 r = 0;$$

$$Y':\ N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha - mg = 0.$$

$F_{тр} = \mu N$, т.к. в нашем случае сила трения имеет максимальное значение.

Из рисунка видно, что $r = h\,\mathrm{tg}\alpha$. Данную систему уравнений

$$X':\ N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha = m\omega_{\min}^2 h\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$Y':\ N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha = mg$$

можно решить, поделив первое уравнение на второе

$$\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{\omega_{\min}^2 h\,\mathrm{tg}\alpha}{g},$$

отсюда следует, что

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{h\operatorname{tg}\alpha(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

25. Замкнутая однородная цепочка массой $m =$ 0,4 кг, надетая вплотную на гладкий круговой конус с углом полураствора $\theta = 20°$, вращается вокруг оси конуса с угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$ (рис. 2.24). При этом цепочка образует окружность, радиус которой $r =$ 10 см. Найти силу натяжения цепочки.

Дано: $m =$ 0,4 кг, $\theta = 20°$, $\omega = 10$ с$^{-1}$, $r =$ 10 см.

Найти: T.

Решение. Найти силу натяжения цепочки означает найти силу, с которой один элемент цепочки действует на другой. Поэтому следует рассмотреть движение какого-либо элемента длиной Δl, массой Δm. Такой элемент движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом r с постоянной по модулю скоростью. На такой элемент кроме силы тяжести $\Delta m\vec{g}$ и силы реакции $\Delta\vec{N}$ со стороны конуса (см. рис. 2.24, *а*) действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (см. рис. 2.24, *б*) со стороны элементов, соседних с данным. Силы эти направлены по касательным к окружности, образуемой цепочкой, в точках, где расположены концы элемента Δl.

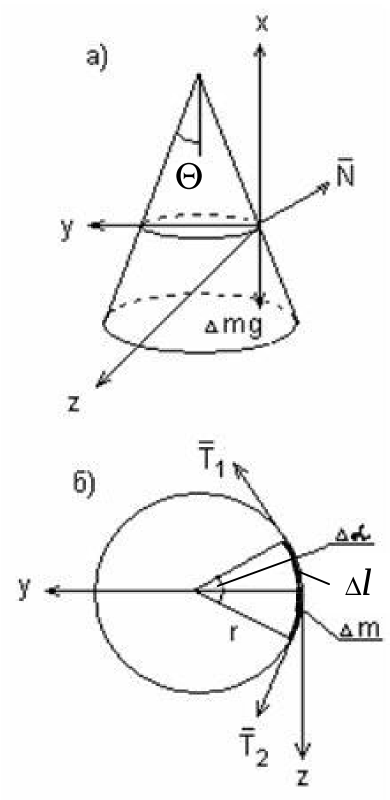


Рис. 2.24

По условию силы трения отсутствуют. Уравнение второго закона Ньютона для элемента Δl имеет вид

$$\Delta m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \Delta\vec{N} + \Delta m\vec{g}.$$

Вследствие полной симметрии все элементы, составляющие цепочку, находятся в одинаковых условиях, поэтому можно считать, что $T_1 = T_2$. Если выбрать оси координат, как показано на рисунке, то

$$a_x = 0,\ a_y = a_n = \omega^2 r,\ a_z = a_t = 0.$$

В проекции на ось *OX*

$$0 = \Delta N\sin\theta - \Delta mg \qquad (1)$$

(силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ лежат в горизонтальной плоскости и проекций на ось X не дают).

В проекции на ось OY

$$\Delta m\omega^2 r = T_1 \sin\frac{\Delta\alpha}{2} + T_2 \sin\frac{\Delta\alpha}{2} - \Delta N \cos\theta, \qquad (2)$$

где $\Delta\alpha$ – центральный угол, соответствующий элементу дуги Δl. Очевидно, что $\Delta l = r\Delta\alpha$.

Проекции на ось OZ рассматривать нецелесообразно, так как $T_{1z} + T_{2z} = 0$; другие силы проекций на ось OZ не дают, $a_z = a_t = 0$ по условию.

При совместном решении уравнений (1) и (2) с учетом равенства сил натяжения получим

$$\Delta m\omega^2 r = 2T \sin\frac{\Delta\alpha}{2} - \Delta m g \operatorname{ctg}\theta.$$

Однородность цепочки позволяет найти

$$\Delta m = \frac{m\Delta l}{2\pi r} = \frac{m\Delta\alpha}{2\pi}.$$

Так как элемент Δl очень мал, то мал и угол $\Delta\alpha$, поэтому $\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$. Тогда

$$T = \frac{m\left(\omega^2 r + g\operatorname{ctg}\theta\right)}{2\pi} = 2{,}3 \text{ Н}.$$

2.3. Задачи для самостоятельно решения

2.1 – 2.28. Материальная точка массой m начинает двигаться прямолинейно из состояния покоя с ускорением, изменяющимся по закону $a = A + Bt$, где A и B – постоянные величины. Значение ускоряющей силы в момент времени t равно F. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 2.1.

2.29 – 2.56. Аэростат, масса которого вместе с балластом равна m, а объем V, равномерно поднимается. Если сбросить балласт массой m_1, аэростат начнет равномерно подниматься с той же скоростью. Подъемная сила аэростата равна F. Плотность воздуха на высоте, где находится аэростат – $\rho_в$. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 2.2. Силу сопротивления воздуха при спуске и при подъеме считать одинаковой.

Таблица 2.1

Условия к задачам 2.1 – 2.28

Номер задачи	m_1, кг	A_1, м/с	B_1, м/с^2	C_1, м/с^3	D_1, м/с^4	m_2, кг	A_2, м/с	B_2, м/с^2	C_2, м/с^3	D_2, м/с^4
2.1	2,5	–3,2	–4,8	1	0,267	0,2	20	40	10	1,667
2.2	2	2,4	–3,5	1,5	0,5	2,5	2,5	2	1,4	0,267
2.3	1	2	–1	0,75	1,333	0,5	3	6	–1,5	2
2.4	2	5	1	–1,25	0,667	1	–4	10	–3,5	1
2.5	2	3	4,5	–1	0,333	3	2,5	1	–1,5	0,333
2.6	0,4	6	–12,5	7,5	–2,5	0,666	10	15	3	–2
2.7	5	0,9	2	0,5	0,067	2	–2	–10	1,5	0,333
2.8	0,2	3,5	–5	2,5	3,33	0,333	4	6	–1,5	1
2.9	4	–0,8	–0,5	1	0,5	2	0,25	3	1,5	0,833
2.10	3	1,2	–3	–0,5	0,333	4	–2,5	0,25	0	0,167
2.11	2	6	8	2,25	0,333	6	1	–2	0,5	0,167
2.12	1	–1,5	1	2	1	2	5	3,5	1,25	0,333
2.13	0,5	5,5	–6	–2	4	2	–1,4	0	–1	0,833
2.14	3	0,75	1	–0,5	0,667	2	3	4	0,25	0,833
2.15	2	3	–2,5	–2	2	1	3,5	3	–5	3,67
2.16	2,5	5	–3,2	–2,4	1,2	4	2	1	–1	0,667
2.17	1	4	–10	0,5	1,333	2	1	7	–0,25	0,5
2.18	2	–1,5	–2	0,75	1,5	2	0,8	–1	0,5	1,333
2.19	6	1	–1,5	0	0,333	2,5	3	2	1	0,667
2.20	4	7,5	–2	–0,25	–0,333	0,333	7	12	–4,5	–5
2.21	2	3	6	–0,5	1	1	1	0	3	1,667
2.22	1	4	6	–0,5	0,667	0,5	–2	4	3	0,667
2.23	1,5	5	2	–1	0,667	2	1,2	–1	0,75	0,333
2.24	0,333	2,8	–4,5	4,5	3	0,5	3	5	–2	2,667
2.25	2	2,2	0,5	0,5	1	3	1,3	–1	1	0,555
2.26	0,667	3	–7,5	–2,25	2,5	2	1	1,5	–0,25	0,667
2.27	2	–0,67	–2	–1	0,333	0,8	1,5	–1,25	–1,25	0,417
2.28	3	1,66	3	0	1	2	0,75	1	2	1,333

Таблица 2.2

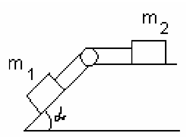
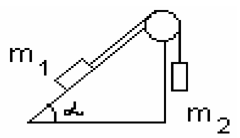
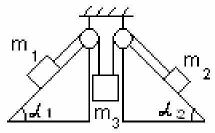
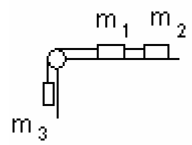
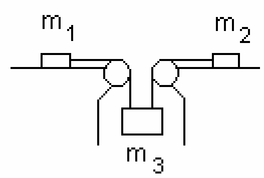
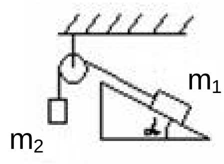
Условия к задачам 2.29 – 2.56

Номер задачи	m, кг	V, м^3	m_1, кг	F, Н	$\rho_в$, кг/м^3
2.29	?	–	36,73	800	–
2.30	90	?	24	–	1,05
2.31	135	156,25	?	–	0,8
2.32	120	–	15,5	?	–
2.33	85	86,11	15	–	?
2.34	?	–	34,7	1300	–
2.35	110	?	22	–	1
2.36	125	–	?	1150	–
2.37	140	–	24,9	?	–
2.38	85	80	10	–	?
2.39	?	–	35,92	1000	–
2.40	105	?	18	–	1,25
2.41	115	122,2	?	–	0,9
2.42	150	–	14,29	?	–
2.43	75	64,55	8	–	?
2.44	?	–	32,65	1800	–
2.45	160	?	23	–	1,2
2.46	148	–	?	1400	–
2.47	180	–	33,45	?	–
2.48	70	83,44	6,5	–	?
2.49	?	103	5,5	–	0,75
2.50	140	?	19	–	1,1
2.51	100	–	?	900	–
2.52	135	–	4,7	?	–
2.53	95	72,92	15	–	?
2.54	?	–	25,51	1100	–
2.55	170	?	34	–	0,85
2.56	130	–	?	1250	–

2.57 – 2.84. Два или три тела соединены невесомыми нерастяжимыми нитями, перекинутыми через блоки, массами которых можно пренебречь. Массы тел (m_1, m_2, m_3) даны, углы, которые составляют наклонные плоскости с горизонталью (α_1, α_2), и коэффициенты трения тел о поверхности (μ_1, μ_1) известны. Найти ускорения, с которыми движутся тела, и силы натяжения нитей согласно номеру задачи в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Условия к задачам 2.57 – 2.84

Номер задачи	Система тел	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	α_1, град	α_2, град	μ_1	μ_2
2.57 2.58 2.59 2.60		2	1	–	30 40 50 60	–	0,12	0,15
2.61 2.62 2.63 2.64		0,3 0,4 0,5 0,6	0,1	–	30	45	0,1	0,15
2.65 2.66 2.67 2.68		3	1	–	45	–	0,1 0,2 0,3 0,4	–
2.69 2.70 2.71 2.72		0,1	0,1	0,2 0,3 0,4 0,5	30	30	0,2	0,2
2.73 2.74 2.75 2.76		0,2	0,1	0,5	–	–	0,1 0,2 0,3 0,4	0,1 0,2 0,3 0,4
2.77 2.78 2.79 2.80		0,1	0,1	0,2 0,4 0,6 0,8	–	–	0,15	0,15
2.81 2.82 2.83 2.84		2	0,5	–	30	–	0,1 0,15 0,20 0,25	–

2.85 – 2.112. На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью υ_1, установлено орудие. Масса платформы с орудием и снарядами – m_1. Орудие производит выстрел в направлении движения платформы под углом α к горизонту. Масса снаряда равна m_2, и он вылетает со скоростью υ_2. Вследствие отдачи скорость платформы с орудием изменилась и стала равной u_1. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Условия к задачам 2.85 – 2.112

Номер задачи	m_1, т	υ_1, км/ч	α, град	m_2, кг	υ_2, м/с	u_1, км/ч
2.85	?	26	30	95	465	18,49
2.86	24	?	60	110	–400	21,38
2.87	11	34	?	80	490	27,83
2.88	15,5	21	45	?	–475	28,14
2.89	14	30	45	90	?	37,72
2.90	18,5	24	60	100	445	?
2.91	?	38	30	115	430	30,87
2.92	17	?	60	105	–410	40,88
2.93	12,5	35	?	65	510	26,91
2.94	23	20	45	?	495	14,34
2.95	10	40	60	70	?	45,82
2.96	20,5	29	30	120	435	?
2.97	?	32	60	110	425	28,77
2.98	14,5	?	30	90	–450	32,86
2.99	12	37	?	75	–500	45,19
2.100	17,5	18	45	?	480	12,5
2.101	20	31	30	105	?	22,98
2.102	11,5	39	45	85	–470	?
2.103	?	23	60	100	405	17,57
2.104	19,5	?	45	95	460	24,44
2.105	9	22	?	70	–505	29,24
2.106	16	36	45	?	415	29,62
2.107	13,5	27	30	75	?	18,84
2.108	22	19	60	100	440	?
2.109	?	25	60	115	420	19,4
2.110	16,5	?	30	85	–455	31,43
2.111	10,5	28	?	80	–485	39,73
2.112	19	33	30	?	450	26,15

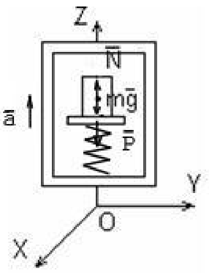
2.113 – 2.140. Тело массой m, летящее со скоростью υ, ударяется о стену под углом α к нормали и под таким же углом упруго отскакивает от нее без потери скорости. Стенка за время удара получает импульс силы, величина которого равна $F\Delta t$. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Условия к задачам 2.113 – 2.140

Номер задачи	m, г	υ, м/с	α, град	$F\Delta t$, $Н \cdot с$
2.113	?	24	30	3,12
2.114	50	?	45	1,273
2.115	15	30	?	0,45
2.116	80	8	60	?
2.117	?	6,5	60	0,26
2.118	125	?	45	0,884
2.119	10	22	?	0,22
2.120	45	10	30	?
2.121	?	12	60	0,72
2.122	75	?	30	1,04
2.123	40	9	?	0,509
2.124	100	15	45	?
2.125	?	18	45	2,546
2.126	30	?	30	1,04
2.127	120	5	?	0,85
2.128	70	26	60	?
2.129	?	16	30	0,416
2.130	65	?	45	0,92
2.131	110	4,5	?	0,857
2.132	20	7,5	60	?
2.133	?	25	45	1,77
2.134	60	?	60	0,9
2.135	25	6	?	0,15
2.136	85	15	30	?
2.137	?	4,5	30	0,624
2.138	55	?	45	0,933
2.139	90	20	?	2,546
2.140	35	14	60	?

2.141. Из пущенной с поверхности Земли вертикально вверх ракеты вырывается вниз струя газа со скоростью u относительно ракеты. Начальная масса ракеты с топливом равна m_0, ежесекундный расход топлива равен μ (кг/с). Определить ускорение ракеты через время t_1 после старта, считая поле тяготения однородным.



2.142. В лифте на пружинных весах находится тело массой m = 10 кг (см. рис.). Лифт движется с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определить показания весов в двух случаях, когда ускорение лифта направлено: 1) вертикально вверх; 2) вертикально вниз.

2.143. На спокойной воде пруда стоит лодка длиной L и массой M перпендикулярно берегу, обращенная к нему носом. На корме стоит человек массой m. На какое расстояние S сместится лодка относительно берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Трением о воду и воздух пренебречь.

2.144. Ракета начальной массой m_0 = 500 г выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью u = 400 м/с. Расход газа $\mu = 150$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить, какую скорость относительно Земли приобретает ракета через время t = 2 с после начала движения, если ее начальная скорость равна нулю.

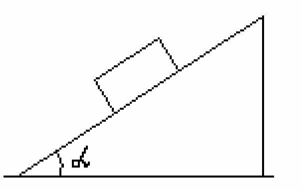
2.145. Ракета начальной массой m_0 поднимается вертикально вверх с нулевой начальной скоростью. Скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поле тяготения одинаковым, записать зависимость скорости ракеты V от массы m и времени t ее подъема.

2.146. Частица движется вдоль оси X по закону $X = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $X = 0$.

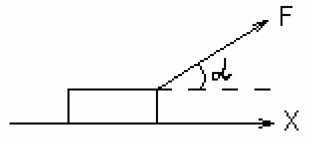
2.147. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15°$ с горизонтом. Найти коэффициент терния, если время подъема тела оказалось в $n = 2$ раза меньше времени спуска.

2.148. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1 и на ней брусок массой m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = \alpha t$, где α – постоянная. Найти зависимость от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ.

2.149. Призме, на которой находится брусок массой m, сообщили влево горизонтальное ускорение a (см. рис.). При каком максимальном значении этого ускорения брусок будет оставаться еще неподвижным относительно призмы, если коэффициент трения между ними $\mu < \mathrm{ctg}\alpha$?



2.150. К бруску массой m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную силу $F = \frac{mg}{3}$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = KS$, где K – постоянная, S – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

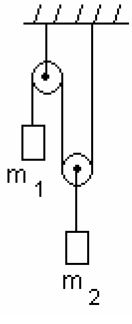


2.151. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением a_t = 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса R = 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью $\mu = 0,2$. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

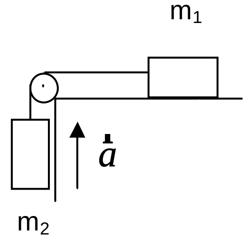
2.152. Через блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены тела с массами m_1 и m_2. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найти ускорение центра масс этой системы.

2.153. Частица массой m движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos\omega t$, где $\vec{F}_0$ и ω – некоторые постоянные. Определить положение частицы, т.е. выразить ее радиус-вектор $\vec{r}$ как функцию времени, если в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{r}(0) = 0$ и $\vec{\upsilon}(0) = 0$.

2.154. На рисунке изображена система блоков, к которым подвешены грузы массами m_1 = 200 г и m_2 = 500 г. Считая, что силы трения отсутствуют и нить нерастяжимая и невесомая, определить силу натяжения нитей и ускорения, с которыми движутся тела.

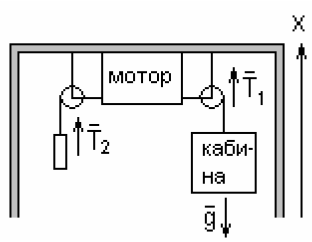


2.155. Система грузов массами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,6 кг находится в лифте, движущемся с ускорением a = 4,9 м/с^2 (см. рис.) Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массой m_1 и опорой $\mu = 0,1$.



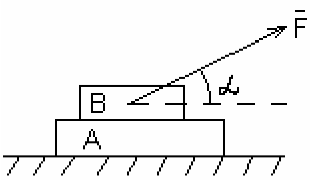
2.156. На гладкой горизонтальной поверхности находится доска массой m_2, на которой лежит брусок массой m_1. Коэффициент трения бруска о поверхность доски равен μ. К доске приложена горизонтальная сила F, зависящая от времени по закону $F = At$, где A – некоторая постоянная. Определить момент времени t_0, когда доска начнет выскальзывать из-под бруска, и ускорения бруска a_1 и доски a_2 в процессе движения.

2.157. На наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha = 35°$ положена доска массой $m_2 = 2$ кг, а на доску – брусок массой 1 кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}1$, а между доской и плоскостью $\mu_2 = 0{,}2$. Определить ускорения бруска и доски и коэффициент трения μ_2', при котором доска не будет двигаться.



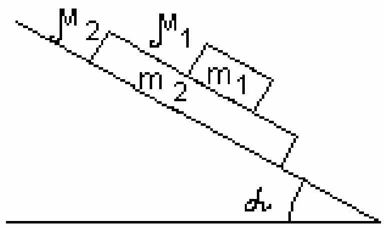
2.158. Лифт состоит из кабины, мотора, приводящего ее в движение, и противовеса (см. рис.). Масса кабины с нагрузкой $m = 1000$ кг, масса противовеса $M = 1400$ кг. Лифт поднимается с ускорением a = 2м/с^2. Пренебрегая трением, массой троса и блоков и считая трос нерастяжимым, найти натяжения тросов T_1 и T_2. Какова сила T, действующая на мотор? Как изменятся силы, если лифт начнет опускаться с тем же ускорением?

2.159. К динамометру, подвешенному к кабине лифта, прикреплен груз массой $m =$ 5 кг. Лифт движется вверх. На сколько будет отличаться показание динамометра во время разгона от показания при торможении, если известно, что лифт обладал одинаковым по величине ускорением a_0 = 2м/с^2 при разгоне и торможении?

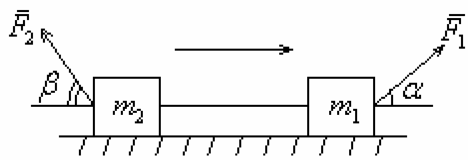


2.160. Бруски А и В массами m_2 и m_1 находятся на столе (см. рис.). К бруску В приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом α к горизонту. Найти ускорения движения брусков, если коэффициенты трения брусков друг о друга и бруска о стол равны соответственно μ_1 и μ_2. Сила трения между поверхностями максимальна.

2.161. На наклонную плоскость с углом α помещена плоская плита массой m_2, а на нее – брусок массой m_1. Коэффициент трения между бруском и плитой μ_1. Определить, при каких значениях коэффициента трения μ_2 между плитой и плоскостью плита не будет двигаться, если известно, что брусок скользит по плите (см. рис.).

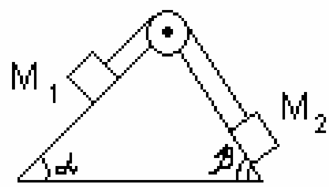


2.162. Два тела, массы которых m_1 и m_2, связаны нерастяжимой и невесомой нитью и лежат на горизонтальной поверхности (см. рис.). Коэффициенты трения тел о поверхность равны соответственно μ_1 и μ_2. К телам приложены силы F_1 и F_2 под углами α и β к горизонту. Система движется вправо. Определить ускорение движения $\vec{a}$ системы и силу натяжения нити T.

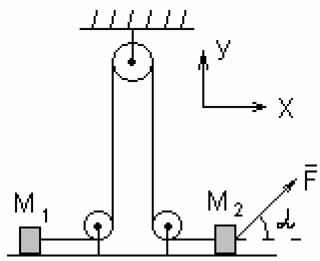


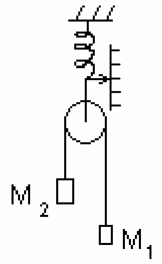
2.163. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона α пущена шайба. Через некоторое время она останавливается и соскальзывает вниз. Определить коэффициент трения шайбы о плоскость, если время спуска в n раз больше времени подъема.

2.164. Два груза связаны между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Плоскости, на которых лежат грузы, составляют с горизонтом углы α и β (см. рис.). Правый груз находится ниже левого на h м. Через t секунд после начала движения оба груза оказались на одной высоте. Коэффициент трения между грузами и плоскостью μ. Определить отношение масс грузов M_1 и M_2.

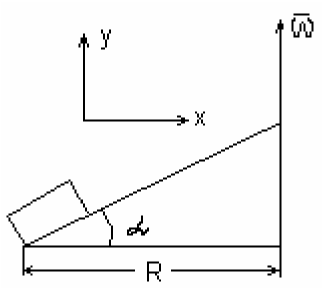


2.165. Дана система блоков и тел, показанная на рисунке. К телу массой M_2 приложили силу $\vec{F}$, направленную под углом α к горизонту. Коэффициенты трения между горизонтальной поверхностью и телами массами M_1 и M_2 равны соответственно μ_1 и μ_2. Нить, соединяющая тела, невесома и нерастяжима. Блоки неподвижны и невесомы. Определить ускорение $\vec{a}$ тел и натяжение нити T.

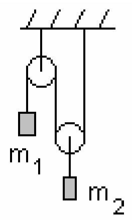




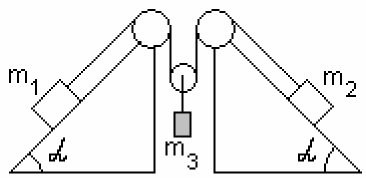
2.166. На рисунке показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 5$ кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Трение в блоке отсутствует. Что покажут весы?



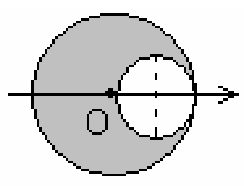
2.167. На краю наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело. Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Расстояние от тела до оси вращения R (см. рис.). Определить наименьший коэффициент трения μ_0, при котором тело удерживается на вращающейся наклонной плоскости. Рассмотреть два предельных случая: 1) тело находится на горизонтальной плоскости, которая равномерно вращается вокруг вертикальной плоскости; 2) тело лежит на неподвижной наклонной плоскости.



2.168. Две гири, находящиеся на блоках, установлены на высоте $h = 3$ м друг от друга (см. рис.). Предоставленные самим себе гири через $t = 1$ с после начала движения оказались на одной высоте. Какова масса гири m_1, подвешенной к свободному концу веревки, если масса другой гири $m_2 = 0{,}3$ кг?



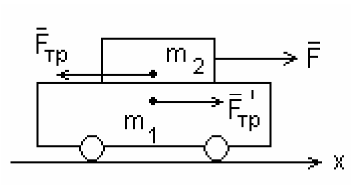
2.169. Определить ускорение a_3 тела массой m_3 в системе, изображенной на рисунке. Массой блоков и силой трения пренебречь. Наклонные плоскости считать закрепленными жестко.



2.170. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус $R = 0{,}3$ м), в котором вырезано круглое отверстие (радиус $r = \frac{R}{2}$), центр которого лежит на середине горизонтального радиуса пластинки (см. рис.). Определить положение центра масс этой фигуры.

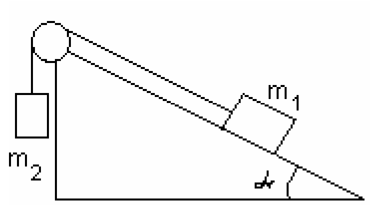
2.171. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью $\upsilon_0 = 3$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием $M = 10$ т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой $m = 10$ кг вылетает из ствола под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определить скорость υ снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в $n = 2$ раза.

2.172. На тележке массой $m_1 = 20$ кг, которая может свободно перемещаться вдоль горизонтальных рельсов, лежит брусок массой $m_2 = 5$ кг (см. рис.). Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu = 0,2$. Брусок тянут с силой $\vec{F}$, направленной параллельно рельсам. Найти ускорение бруска и тележки, если сила изменяется по закону $F = ct$, где $c = 4$ Н/с. Построить график зависимости найденных ускорений от времени.

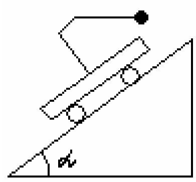


2.173. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы $m_1 = 0,5$ кг и $m_2 = 0,6$ кг. Найти силу давления блока на ось при движении грузов в двух случаях: лифт поднимается равномерно и с ускорением $a_0 = 1,2$ м/с^2. Масса блока пренебрежимо мала. Трением в оси пренебречь.

2.174. На наклонной плоскости находится груз $m_1 = 5$ кг, связанный нитью, перекинутой через блок, с другим грузом $m_2 = 2$ кг (см. рис.). Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью $\mu = 0,1$; угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 37°$. Определить ускорения грузов. При каких значениях m_2 система будет находиться в равновесии?

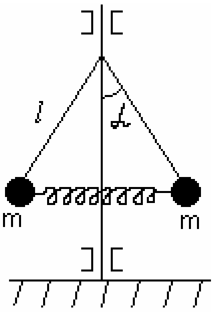


2.175. Маятник массой m подвешен к подставке, укрепленной на тележке, которая свободно скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (см. рис.). Определить уравнение движения маятника относительно подставки и направление нити маятника. Трение отсутствует.

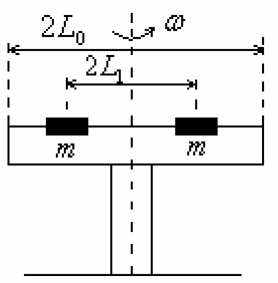


2.176. Тело, находящееся на наклонной плоскости, удерживается силой трения. За какое время t тело опустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a_0 = 1$ м/с^2? Длина плоскости $L = 1$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,6$. Задачу решать в неинерциальной системе координат, связанной с наклонной плоскостью.

2.177. На Земле, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, по экватору с востока на запад с относительной скоростью $\vec{\upsilon}'$ движется поезд массой m. Не учитывая сил трения, принимая поезд за единое твердое тело, определить силу $\vec{N}$, действующую на поезд со стороны рельсов.



2.178. Шары центробежного регулятора соединены горизонтальной пружиной, имеющей посредине кольцо, через которое проходит, не касаясь его, ось регулятора (см. рис.). Масса каждого шара m = 5 кг, длина стержней, на которых закреплены шары, l = 60 см. Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_1 = 40$ см, жесткость пружины k = 200 Н/м. С какой частотой n вращается регулятор, если угол отклонения его стержней от вертикали $\alpha = 30°$? Массой стержней пренебречь.



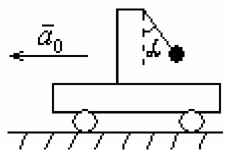
2.179. На центробежной машине укреплен гладкий горизонтальный стержень длиной $2L_0 = 1$ м, ось вращения вертикальна и проходит через середину стержня (см. рис.). На стержень надеты две небольшие муфты массой $m = 400$ г каждая. Муфты связаны нитью длиной $2L_1 = 20$ см и расположены симметрично относительно оси вращения. Машина вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. С какой радиальной скоростью υ' подойдут муфты к концу стержня, если пережечь нить?

2.180. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг оси, проходящей через его конец, с постоянной угловой скоростью $\omega = 1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Расстояние от оси до другого конца стержня L = 1 м. На стержень надета муфта массой m = 0,1 кг. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии L_0 = 0,1 м от оси вращения. В момент $t = 0$ с нить пережигают и муфта начинает скользить по стержню практически без трения. Найти: 1) время t, спустя которое муфта слетит со стержня; 2) силу F, с которой стержень действует на муфту в момент t; 3) работу A, которая совершается над муфтой за время t.

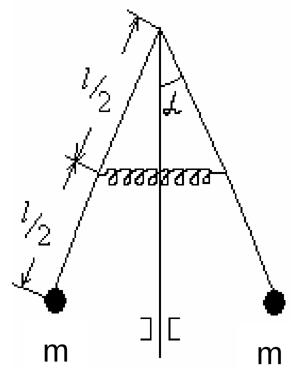
2.181. В потолок лифта вмонтирована вертикальная ось, к которой на нити длиной $L = 40$ см прикреплено тело массой $m = 800$ г. Ось вращается с частотой n = 90 об/мин. Найти силу натяжения нити T и угол α отклонения нити от вертикали, когда лифт движется вверх с ускорением $a_0 = 3$ м/с^2. Массой нити пренебречь.

2.182. Электровоз массой $m = 184$ т движется вдоль меридиана со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч на широте $\varphi = 45°$. Определить горизонтальную составляющую силы, с которой электровоз давит на рельсы.

2.183. Маятник массой m подвешен к подставке, укрепленной на тележке (см. рис.). Тележка движется горизонтально с ускорением $\vec{a}_0$. Найти уравнение движения маятника относительно подставки и угол α, который составляет нить маятника с вертикалью. Трение отсутствует.



2.184. Стержни центробежного регулятора, на которых закреплены шары массой $m = 5$ кг каждый, имеют длину $L = 60$ см и соединяются посредине горизонтальной пружиной с кольцом в центре, через которое проходит, не касаясь его, ось регулятора (см. рис.). Длина пружины в ненапряженном состоянии $L_0 = 20$ см, жесткость пружины $k = 200$ Н/м. С какой частотой n вращается регулятор, если угол отклонения стержней от вертикали $\alpha = 30°$? Массой стержней пренебречь.



3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

3.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

При решении задач классической нерелятивистской механики во многих случаях необходимо определить лишь отдельные состояния заданной системы без подробного описания промежуточных этапов. При решении подобных задач наиболее эффективно использовать законы сохранения импульса $\vec{P}$, момента импульса $\vec{L}$ и полной механической энергии $E = T + П$, где T – кинетическая, а $П$ – потенциальная энергия тела.

Ниже приведены условия применения и типичные ситуации, в которых рекомендуется использовать тот или иной закон сохранения.

Типичные ситуации	Закон сохранения	Условия применения
Столкновение, объединение и разъединение поступательно движущихся тел (взрывы, удары, выстрелы и т.д.)	импульса	Для изолированных систем
Столкновение, объединение и разъединение тел, совершающих вращательное движение, изменение формы вращающегося тела	момента импульса	Для изолированных систем и в поле центральных сил
Изменение потенциальной энергии (сжатие пружины, изменение высоты или взаимного расположения тел и т.д.)	полной механической энергии	В поле только консервативных сил

Эти физические законы позволяют найти связь между динамическими величинами системы в различных состояниях.

При использовании модели материальной точки импульс, момент импульса и кинетическая энергия определяются формулами

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}; \qquad \vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{P}\right]; \qquad T = \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{3.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор МТ. В большинстве случаев момент импульса точки рассматривается относительно оси поворота OZ. Если скорость точки перпендикулярна этой оси, то $L_Z = r_\perp P$, где $r_\perp$ – «плечо» импульса.

Вид формулы потенциальной энергии зависит от конкретных действующих консервативных сил.

Для растянутой или сжатой пружины она записывается в виде

$$П = \frac{kx^2}{2}, \tag{3.2}$$

где k – жесткость пружины, x – ее растяжение (разность длин в деформированном и недеформированном состояниях).

В однородном поле силы тяжести (например, вблизи поверхности планеты при $h << R_{пл}$) потенциальная энергия определяется по формуле

$$П = mg_{пл}h, \tag{3.3}$$

где высота h отсчитывается от выбранного нулевого уровня, $g_{пл}$ – ускорение свободного падения на поверхности планеты.

При гравитационном взаимодействии двух материальных точек или шаров (планет) с симметрично распределенной массой потенциальную энергию на бесконечно большом удалении их друг от друга обычно принимают равной нулю. При таком соглашении расчетная формула для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{3.4}$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ $м^3/(кг \cdot с^2)$ – гравитационная постоянная, r – расстояние между МТ или центрами шаров.

В некоторых случаях при решении задач более эффективными оказываются частные законы сохранения, т.е. действующие в частных случаях. Например, если на систему из n_1 частиц действуют внешние силы, но их проекции на одну из осей координат равны нулю, то выполняется закон сохранения суммы проекций импульсов на эту ось (например, на ось OX), т.е.

$$\sum_i P_{ix} = \text{const}. \tag{3.5}$$

Если система неизолированная, но моменты внешних сил относительно какой-либо оси отсутствуют (например, оси OZ), то суммарная проекция момента импульса на эту ось остается постоянной, т.е.

$$\sum_i L_{iz} = \text{const}, \tag{3.6}$$

где L_{iz} – момент импульса i-го тела относительно оси OZ .

Например, суммарный момент импульса всех искусственных спутников Земли (и каждого в отдельности) остается постоянным, так как момент силы тяготения равен нулю.

В изолированной системе не взаимодействующих частиц сохраняется их суммарная кинетическая энергия

$$\sum_i T_i = \text{const}. \tag{3.7}$$

Эта ситуация возникает и при абсолютно упругих взаимодействиях между частицами.

Если, кроме консервативных сил, на частицы системы действуют и неконсервативные силы (трение, неупругая деформация и т.п.), то полная механическая энергия не сохраняется, но ее изменение равно работе неконсервативных сил:

$$E_{мех2} - E_{мех1} = A_{неконс}. \tag{3.8}$$

Движение изолированной системы взаимодействующих частиц оказывается очень сложным. Однако в такой системе имеется точка, которая либо покоится, либо движется с постоянной скоростью. Эта точка называется *центром масс*, а ее координаты определяются по формулам

$$X_{цм} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}; \qquad Y_{цм} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}; \qquad Z_{цм} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}, \tag{3.9}$$

где m_i, x_i, y_i, z_i – масса и координаты i-й частицы.

Скорость центра масс равна

$$\vec{\upsilon}_{цм} = \frac{\sum_i m_i \vec{\upsilon}_1}{\sum_i m_i}. \tag{3.10}$$

Законы сохранения и следствия из них используют при решении многих задач, при этом они требуют анализа условий их выполнения. Поэтому с такого анализа и необходимо начинать решение задач.

Элементарная работа, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$,

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = FdS\cos\alpha = F_S dS,$$

где α – угол между направлением векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – элементарный путь; F_S – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Работа, совершаемая переменной силой на пути S,

$$A = \int_S F_S dS = \int_S FdS\cos\alpha.$$

Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мощность (мгновенная мощность)

$$N = \frac{dA}{dt}; \quad N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = F_S \upsilon = F\upsilon\cos\alpha,$$

где $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости, с которой движется точка приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{\upsilon}$.

Энергия:

– кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где m – масса тела; υ – его скорость;

– потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$\Pi = mgh;$$

– потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где x – деформация; k – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость).

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const};$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \text{const} \\ \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = \text{const} \end{cases}$$

Применение законов сохранения энергии и импульса к столкновению абсолютно упругих тел: при центральном ударе скорости тел после соударения равны

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}; \quad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ и после $(\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2')$ удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту прямую равны модулям скоростей.

Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Изменение кинетической энергии тел при абсолютно неупругом центральном ударе (разность кинетической энергии тел до и после удара)

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\cdot\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} - (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

3.2. Примеры решения задач

1. Тело массой $m = 4$ кг под действием некоторой силы движется прямолинейно согласно уравнению $S = Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 0,5$ м/с; $C = 3$ м/с^2; $D = 2$ м/с^3. Определить работу A силы в течение первых двух с половиной секунд.

Дано: $m = 4$ кг; $S = Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = 0,5$ м/с; $C = 3$ м/с^2; $D = 2$ м/с^3; $t = 2,5$ с.

Найти: A.

Решение. Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$

$$dA = F_S dS,$$

где F_S – проекция вектора силы на направление перемещения; dS – элементарный путь.

Работа за конечный промежуток времени

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F_S dS = \int_{t_1}^{t_2} F dS$$

(поскольку движение прямолинейно, $F_S = F$).

Учитывая, что $F = ma$; $dS = \upsilon dt$, получаем

$$A = \int_{t_1}^{t_2} ma\upsilon dt. \qquad (1)$$

Скорость и ускорение тела, согласно заданному уравнению,

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2;$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2C + 6Dt.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомую работу

$$A = \int_0^t m\left(2C + 6Dt\right)\left(B + 2Ct + 3Dt^2\right)dt = 2m\left(BCt + C^2t^2 + \frac{3}{2}BDt^3 + \frac{9}{4}D^2t^4\right).$$

Вычисляя, получим $A = 5,62$ кДж.

2. Автомобиль, мощность двигателя которого P постоянна и равна 50 кВт, поднимается в гору с уклоном $\frac{h}{l} = 0,15$ с постоянной скоростью $\upsilon = 54$ км/ч (15 м/с). Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, он движется равномерно с той же скоростью. Определить массу автомобиля.

Дано: $P = 50$ кВт ($50 \cdot 10^3$ Вт); $\frac{h}{l} = 0,15$; $\upsilon = 54$ км/ч (15 м/с).

Найти: m.

Решение. Согласно второму закону Ньютона уравнение движения автомобиля по наклонной плоскости

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}, \qquad (1)$$

где $\vec{N}$ – сила реакции опоры; $\vec{F}_{тр} = \mu\vec{N}$ – сила трения (μ – коэффициент трения), $\vec{F}$ – сила тяги.

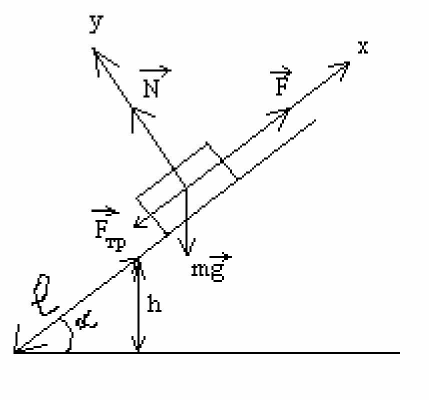


Рис. 3.1

Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси X и Y (рис. 3.1) при условии равномерности движения в случае подъема запишется:

$$0 = -mg\sin\alpha - \mu N + F; \qquad (2)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha; \qquad (3)$$

в случае спуска:

$$0 = -mg\sin\alpha + \mu N; \qquad (4)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \qquad (5)$$

(учли, что $F_{тр} = \mu N$, при спуске $F = 0$).

Из уравнений (2) и (3), (4) и (5)

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha; \qquad (6)$$

$$\mu = tg\alpha. \qquad (7)$$

Подставив (7) в выражение (6), получаем

$$F = 2mg\cos\alpha. \qquad (8)$$

Подставив выражение (8) в формулу для мощности $P = F\upsilon$ и учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ (см. рис. 3.1), получаем искомую массу:

$$m = \frac{Pl}{2g\upsilon h} = 1{,}13 \text{ т.}$$

3. Медную игральную кость с ребром $a = 2$ см перекатывают таким образом, чтобы она, сделав один оборот, вернулась в исходное положение. Определить затраченную работу A. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3.

Дано: $a = 2$ см; $\rho = 8{,}93$ г/см^3.

Найти: A.

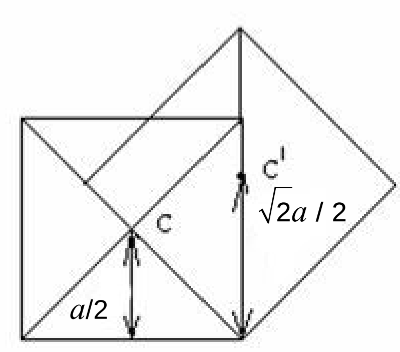


Рис. 3.2

Решение. При перекатывании кубика на соседнюю грань его центр масс (рис. 3.2) необходимо поднять на высоту $\Delta h = h_1 - h = \dfrac{\sqrt{2}a}{2} - \dfrac{a}{2}$, где h – первоначальная высота центра масс C; h_1 – наивысшее положение центра масс C'. Работа при этом идет на увеличение потенциальной энергии кубика

$$A_1 = mg\Delta h, \tag{1}$$

где m – масса кубика.

Подставив значение Δh в формулу (1) и учитывая, что $m = \rho a^3$, получим

$$A_1 = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\rho g a^4}{2}.$$

При полном обороте кость перекатывают на соседнюю грань четыре раза. Таким образом, искомая работа $A = 4A_1 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\rho g a^4 = 1{,}88$ Дж.

4. Материальная точка массой $m = 1$ кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси X, согласно уравнению $X = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Определить мощность P, затрачиваемую на движение точки за время $t = 2$ с.

Дано: $m = 1$ кг; $X = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3; $t = 2$ с.

Найти: P.

Решение. Мощность характеризует скорость совершения работы

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{1}$$

Работа dA силы на пути, который точка прошла за время возрастания скорости от 0 до υ, идет на увеличение кинетической энергии dT точки.

Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$P = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = m\upsilon a. \tag{2}$$

Скорость и ускорение материальной точки с учетом уравнения движения

$$\upsilon = \frac{dX}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2; \quad a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2C + 6Dt.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), найдем искомую мощность

$$P = m\left(B + 2Ct + 3Dt^2\right)\left(2C + 6Dt\right) = 0{,}16 \text{ Вт}.$$

5. Снаряд, летевший на высоте $H = 40$ м горизонтально со скоростью $\upsilon = 100$ м/с, разорвался на две равные части. Одна часть снаряда спустя время $t = 1$ с упала на Землю точно под местом разрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва.

Дано: $H = 40$ м; $\upsilon = 100$ м/с; $t = 1$ с; $m_1 = m_2 = m = \dfrac{M}{2}$.

Найти: υ_2.

Решение. Скорость каждой части снаряда изменяется вследствие взрыва. Если обе части снаряда рассматривать как систему тел, то силы при взрыве будут внутренними, а поэтому не будут изменять импульс системы. Силы, возникающие при взрыве, велики, и по сравнению с ними действием всех других сил (тяжести, сопротивления воздуха) на каждую часть снаряда можно пренебречь. В этом случае систему можно считать замкнутой в течение времени взрыва. Следовательно, вектор импульса системы во время взрыва постоянен

$$\vec{P}_{\mathrm{I}} = \vec{P}_{\mathrm{II}} \qquad (1)$$

До взрыва импульс системы $\vec{P}_1 = 2m\vec{\upsilon}$ (m – масса одной части снаряда) направлен горизонтально. После взрыва импульс системы равен векторной сумме импульсов обеих частей снаряда:

$$\vec{P}_{\mathrm{II}} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2$$

($\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости соответственно первой и второй частей снаряда сразу после взрыва).

Один из векторов ($\vec{u}_1$) направлен вертикально (либо равен нулю) (из условия задачи). Модуль и направление скорости $\vec{u}_1$ могут быть найдены из закона движения этой части снаряда после взрыва. Тогда скорость $\vec{u}_2$ можно найти из закона сохранения импульса (1). Чтобы от векторного уравнения (1) перейти к скалярным соотношениям, введем оси координат (рис. 3.3).

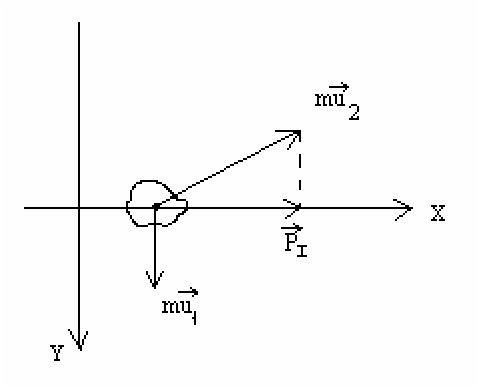


Рис. 3.3

В проекции на оси OX и OY

$$P_{\mathrm{I}X} = 2m\upsilon; \qquad P_{\mathrm{II}X} = mu_2\cos\alpha; \qquad (2)$$

$$P_{\mathrm{I}Y} = 0; \quad P_{\mathrm{II}Y} = mu_{\mathrm{I}Y} - mu_2\sin\alpha. \qquad (3)$$

Заменим векторное равенство (1) двумя скалярными

$$P_{\mathrm{I}X} = P_{\mathrm{II}X}; \quad P_{\mathrm{I}Y} = P_{\mathrm{II}Y}.$$

Тогда, учитывая выражения (2) и (3), получаем:

$$2m\upsilon = mu_2\cos\alpha; \quad 0 = mu_{1Y} - mu_2\sin\alpha.$$

Эти уравнения образуют систему, решая которую, находим

$$u_2 = \sqrt{4\upsilon^2 + u_1^2}; \quad a = \mathrm{arctg}\frac{u_{\mathrm{I}Y}}{2\upsilon}. \qquad (4)$$

Движение первой части снаряда после взрыва – падение с начальной скоростью $u_{0Y} = u_{2Y}$. Поэтому, если пренебречь сопротивлением воздуха,

$$H = u_{1Y}t + \frac{gt^2}{2},$$

откуда $u_{1Y} = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2} = 35 \text{ м/с}$.

Тогда (см. (4) скорость второй части снаряда $u_2 = 203 \text{ м/с}$, вектор скорости $\vec{u}_2$ направлен к горизонту под углом $\alpha = \text{arctg}0{,}17 = 10°$.

6. Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 6$ м/с и $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определить: 1) скорости шаров после удара; 2) кинетические энергии шаров до и после удара; 3) энергию, затраченную на деформацию шаров при ударе. Удар считать прямым, неупругим.

Дано: $m_1 = 2{,}5$ кг; $m_2 = 1{,}5$ кг; $\upsilon_1 = 6$ м/с; $\upsilon_2 = 2$ м/с.

Найти: u; T_0; T; E.

Решение. После неупругого соударения шары движутся совместно с одинаковой скоростью $\vec{u}$. Эта скорость определяется из закона сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Проектируем векторы скоростей на направление скорости первого шара, считая его положительным. Тогда скорость второго шара будет отрицательной, и мы получим

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{2{,}5 \cdot 6 - 1{,}5 \cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3 \text{ м/с}.$$

Положительная скорость u означает, что шары движутся в ту же сторону, куда двигался первый шар.

Кинетическую энергию шаров до удара определим по формуле

$$T_0 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 36}{2} + \frac{1{,}5 \cdot 4}{2} = 48 \text{ Дж}.$$

Кинетическую энергию шаров после удара – по формуле

$$T = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18 \text{ Дж}.$$

Энергия деформации равна разности энергий шаров до и после удара:

$$E = T_0 - T = 48 - 18 = 30 \text{ Дж}.$$

7. Упруго сталкиваются два одинаковых шара, причем один из них покоится, а другой налетает на него со скоростью $\upsilon_1 = 0{,}5$ м/с . После соударения этот шар отлетает под углом $\theta = 60°$ к первоначальному направлению движения (рис. 3.4). В каком направлении полетит второй шар?

Дано: $\upsilon_1 = 0{,}5$ м/с; $\theta = 60^{\mathbf{0}}$.

Найти: φ.

Решение. Здесь скорости не колинеарны, и для законов сохранения энергии и импульса мы имеем векторные соотношения

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2;$$

$$\frac{m_1\vec{\upsilon}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{\upsilon}_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1\vec{u}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{u}_2^{\,2}}{2},$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости шаров до удара; $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – после удара.

Поскольку массы шаров одинаковы, закон сохранения энергии сводится к равенству суммы квадратов скоростей, а закон сохранения импульса – к равенству суммы скоростей до и после соударения.

$$\vec{\upsilon}_1^{\,2} = \vec{u}_1^{\,2} + \vec{u}_2^{\,2}; \qquad (1)$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2. \qquad (2)$$

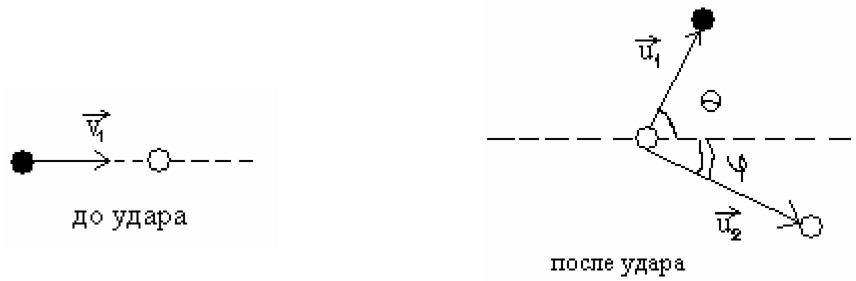


Рис. 3.4

Из равенства (2) следует, что векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{\upsilon}_1$ образуют треугольник. Тогда из (1) вытекает, что этот треугольник – прямоугольный, причем длины катетов равны $u_1, u_2,$ а гипотенуза – υ_1.

Вывод: при столкновении одинаковых шаров, один из которых покоится, угол разлета всегда составляет 90º. Следовательно, второй шар полетит под углом $\varphi = 90 - \theta = 30°$.

8. Молот массой $m = 200$ кг падает на заготовку детали, закрепленную на наковальне. Масса заготовки вместе с наковальней $M = 2500$ кг . Найти коэффициент полезного действия η удара молота, считая его абсолютно неупругим. Взаимодействием наковальни с фундаментом во время удара пренебречь.

Дано: $m = 200$ кг; $M = 2500$ кг.

Найти: η.

Решение. Коэффициент полезного действия удара молота о заготовку равен отношению энергии, затраченной на деформацию заготовки $E_{деф}$, ко всей затраченной энергии, которая равна кинетической энергии молота перед ударом T_0:

$$\eta = \frac{E_{деф}}{T_0} \cdot 100\ \%.$$

Используя закон сохранения, определим энергию, затраченную на деформацию заготовки, как разность между кинетической энергией молота до удара T_0 и кинетической энергией молота с наковальней после удара T_1:

$$E_{деф} = T_0 - T_1$$

(непосредственно после неупругого удара молот и наковальня начинают двигаться как одно целое со скоростью υ_1, которая затем гасится в результате сопротивления фундамента наковальни).

Для определения скорости υ_1 применим закон сохранения импульса, который при неупругом ударе в проекции на ось OY имеет вид $m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon_1$.

Из этой формулы выразим скорость $\upsilon_1 = \dfrac{m\upsilon_0}{m+M}$.

Тогда $E_{деф} = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - \dfrac{(m+M)\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - \dfrac{m^2\upsilon_0^2}{2(m+M)}$.

Найдем коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{E_{деф}}{T_0} \cdot 100\ \% = \frac{\dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - \dfrac{m^2\upsilon_0^2}{2(m+M)}}{\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}} \cdot 100\ \% = \frac{M}{m+M} \cdot 100\ \%.$$

После подстановки заданных значений получим $\eta = 92{,}6\ \%$.

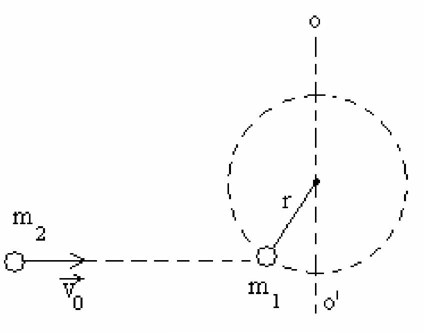


Рис. 3.5

9. Жесткий покоящийся стержень длиной r расположен горизонтально и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня. На другом конце закреплен небольшой шар массой m_1, в который абсолютно упруго ударяется другой шар массой $m_2 = m_1$, летящий перпендикулярно к стержню и оси вращения со скоростью υ_0 (рис. 3.5). Считая удар шаров центральным, шары точечными, а стержень невесомым, определить угловую скорость вращения стержня после удара.

Дано: r; m_1; $m_2 = m_1$, υ_0.
Найти: ω.
Решение. В условии задачи задано начальное состояние системы и требуется определить конечное состояние без учета промежуточных этапов. В таких случаях оптимальное решение получается с помощью законов сохранения. Необходимо только проверить условия их выполнения. Рассматриваемая система «стержень с двумя шарами» не является замкнутой, так как на нее действуют сила тяжести и сила реакции опоры в точке контакта стержня с осью вращения OO'. Поэтому закон сохранения импульса использовать нельзя. Но моменты этих сил относительно вертикальной оси OO' равны нулю (так как сила тяжести параллельна ей, а сила реакции опоры проходит через ось). Это позволяет использовать закон сохранения проекции момента импульса системы на ось OO'. Запишем его с учетом того, что длина стержня r является «плечом» импульсов:

$$rm_2\upsilon_0 = rm_2\upsilon_2 + rm_1\upsilon_1.$$

Слева записан момент импульса системы до удара, а справа – после (υ_1 и υ_2 – скорости соответствующих шаров после удара). Сокращая на r, получим

$$m_2\upsilon_0 = m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1. \qquad (1)$$

Следовательно, несмотря на действие внешних сил, суммарный импульс системы в процессе удара сохранился. Кроме того, при абсолютно упругом ударе нет перехода кинетической энергии во внутреннюю энергию, т.е. суммарная кинетическая энергия системы сохраняется. Поэтому

$$\frac{m_2\upsilon_0^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), с учетом равенства масс шаров находим скорости шаров после удара:

$$\upsilon_2 = 0 \text{ и } \upsilon_1 = \upsilon_0.$$

Угловую скорость вращения стерня с шаром после удара определим по знакомой из школьного курса формуле

$$\omega = \frac{\upsilon_0}{r}.$$

10. Пуля массой $m_1 = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $\upsilon = 400$ м/с, попадает в мешок, набитый ватой, массой $m_2 = 4$ кг, висящий на длинном шнуре. Найти высоту, на которую поднимется мешок, и долю кинетической энергии пули, которая будет израсходована на пробивание ваты (рис. 3.6).

Дано: $m_1 = 10$ г; $\upsilon = 400$ м/с; $m_2 = 4$ кг.

Найти: h; $\dfrac{|\Delta K|}{K_1}$.

Решение. Мешок приобретает некоторую скорость $\vec{u}$ и начинает двигаться по окружности радиусом l (l – длина шнура) в результате попадания в него пули. Во все время движения на мешок действует суммарная сила тяжести $(m_1 + m_2)\vec{g}$ и сила натяжения шнура $\vec{T}$. Вследствие действия силы тяжести скорость мешка непрерывно убывает до нуля. Зная начальную скорость мешка $\vec{u}$, можно найти высоту h его подъема кинематически, однако тангенциальное ускорение a_τ мешка является функцией угла отклонения α, поэтому решение связано с математическими трудностями.

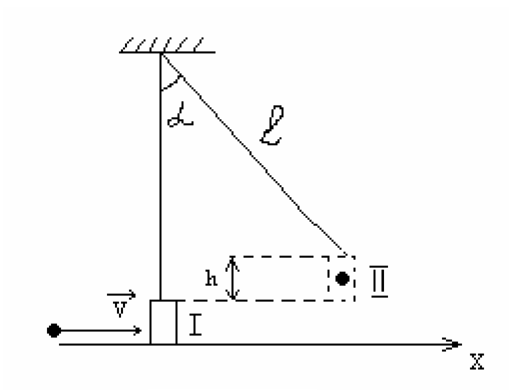


Рис. 3.6

Рассмотрим движение мешка в поле тяготения Земли. Сила натяжения шнура работы не совершает, так как во все время движения она перпендикулярна перемещению. Следовательно, к движению мешка после попадания в него пули можно применить закон сохранения энергии

$$\Delta E = \Delta K + \Delta \Pi = 0.$$

Если применить этот закон к переходу из положения I сразу после удара, когда процесс взаимодействия пуля – мешок закончен, в положение II, то

$$\Delta \Pi = (m_1 + m_2) gh;$$

$$\Delta K = -(m_1 + m_2)\frac{u^2}{2}.$$

Знак «минус» показывает, что при подъеме мешка его кинетическая энергия убывает до нуля. Несмотря на то, что мешок движется по окружности, можно считать, что все точки его обладают одинаковой скоростью u, так как длина шнура велика по сравнению с размерами самого мешка.

Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$(m_1 + m_2) gh - (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2} = 0. \qquad (1)$$

Для нахождения скорости u надо рассмотреть процесс взаимодействия мешка с пулей. Ни характер изменения силы этого взаимодействия со временем, ни само время взаимодействия не известны. Но для системы пуля – мешок эта сила взаимодействия внутренняя и не изменяет импульса системы. В течение кратковременного взаимодействия двух этих тел внешние силы тяжести и натяжения шнура вертикальны, поэтому проекция импульса системы на горизонтальную ось постоянна. Это утверждение справедливо в предположении, что промежуток времени Δt взаимодействия мешка и пули мал и поэтому перемещение мешка за это время практически равно нулю. Следовательно,

$$\vec{P}_{IX} = \vec{P}_{IIX}; \quad m_1\upsilon = (m_1 + m_2)u. \qquad (2)$$

Долю энергии пули, израсходованную на пробивание ваты, можно найти, рассчитав кинетическую энергию системы до и сразу после удара.

Из уравнения (2) найдем скорость мешка

$$u = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (1) и производя соответствующие преобразования, получаем

$$h = \frac{m_1^2\upsilon^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = 5 \text{ см}.$$

Поскольку скорость, полученная мешком в результате взаимодействия с пулей, известна, то энергия, затраченная на пробивание ваты, т.е. на совершение работы против сил неупругой деформации,

$$A = K_\text{I} - K_\text{II} = \frac{m_1\upsilon^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (4), получим

$$A = |\Delta K| = \frac{m_1\upsilon^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).$$

Тогда доля кинетической энергии, израсходованная на эту работу,

$$\frac{(\Delta K)}{K_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 99{,}75\ \%.$$

Замечание. Что изменится, если мешок с ватой заменить абсолютно упругим телом той же массы m_2? Вследствие того, что масса тела велика по сравнению с массой пули, последняя отскочит со скоростью, близкой к начальной по значению, но противоположно направленной, т.е. изменение импульса пули при упругом ударе вдвое больше, чем при неупругом ударе. Поэтому груз m_2 приобретет скорость вдвое большую, чем u (см. (3). Высота подъема в этом случае будет в четыре раза больше найденной.

11. С вершины идеально гладкой сферы соскальзывает небольшой груз. С какой высоты h, считая от вершины, груз сорвется со сферы? Радиус сферы $R = 90$ см.

Дано: $R = 90$ см.

Найти: h.

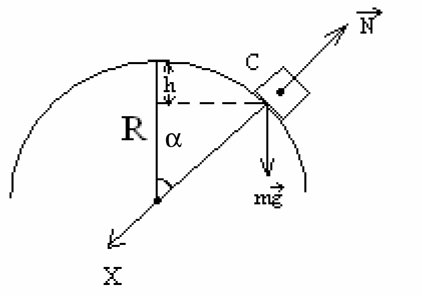


Рис. 3.7

Решение. На груз во время его движения по сфере действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны сферы (рис. 3.7). Уравнение второго закона Ньютона для этой части траектории имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

Проекции этих сил на направление, нормальное к траектории, сообщают телу нормальное ускорение $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, где υ – мгновенная (и, очевидно, непрерывно возрастающая) скорость тела. В точке C отрыва прекращается взаимодействие между движущимся телом и поверхностью сферы, и, следовательно, сила давления тела на сферу и соответственно сила нормальной реакции N обращаются в нуль (начиная с этой точки тело движется только под действием силы тяжести, и траектория его будет зависеть от модуля и направления скорости $\vec{\upsilon}_C$ в точке отрыва от сферы). Таким образом, в этой точке нормальное ускорение, однозначно зависящее от скорости, сообщает телу только проекция силы тяжести. Для того чтобы определить высоту, на которой находится точка отрыва, надо найти связь скорости тела при его движении по сфере с его координатами, в частности с высотой. Такую связь можно найти, зная законы изменения со временем координат и скорости тела. Можно это сделать и рассматривая движение тела в поле тяготения Земли. Поскольку сила нормальной реакции работы не совершает, полная энергия тела остается постоянной, т.е.

$$\Delta E = \Delta K + \Delta \Pi = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что применение закона сохранения энергии к переходу из начального состояния в точку отрыва дает в явном виде связь между скоростью тела и высотой рассматриваемой точки.

При скольжении груза по сфере потенциальная энергия изменяется на $\Delta \Pi = -mgh$, где h – искомая высота, отсчитываемая от вершины сферы.

Кинетическая энергия груза возрастает на

$$\Delta K = \frac{m\upsilon_C^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

На вершине сферы груз находится в положении неустойчивого равновесия, и скорость υ_0, необходимую для начала движения, можно считать пренебрежимо малой.

Тогда, подставляя найденные выражения в (2), получим

$$-mgh + \frac{m\upsilon_C^2}{2} = 0. \quad (3)$$

Чтобы от векторного уравнения (1) перейти к скалярным соотношениям, введем ось X. Тогда

$$a_x = a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

На основании уравнения (1)

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = mg\cos\alpha - N.$$

В точке отрыва от сферы $a_n = \dfrac{\upsilon_C^2}{R}$; $N = 0$.

Следовательно,

$$\frac{m\upsilon_C^2}{R} = mg\cos\alpha.$$

Как видно из рис. 3.7, $\cos\alpha = \dfrac{R-h}{R}$.

Тогда

$$m\upsilon_C^2 = mg\left(R-h\right). \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) содержат скорость υ_C и высоту h, относящиеся к одной и той же точке, и образуют систему уравнений, совместное решение которой позволяет найти

$$h = \frac{R}{3} = 0{,}3 \text{ м}.$$

12. Зависимость потенциальной энергии Π тела в центральном силовом поле от расстояния r задается функцией $\Pi\left(r\right) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$, где A и B – положительные постоянные. Определить значение r, при котором сила, действующая на тело, максимальна.

Дано: $\Pi\left(r\right) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$; $A = \text{const}$; $B = \text{const}$; $F = F_{\max}$.

Найти: r.

Решение. Значение r, при котором сила, действующая на тело, максимальна, определяется из условия

$$\frac{dF}{dr} = 0. \qquad (1)$$

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела

$$F = -\frac{d\Pi}{dr}.$$

Для заданной в условии функции

$$F = \frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}. \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) по r и результат, согласно (1), приравняем нулю

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}\right) = -\frac{6A}{r^4} + \frac{2B}{r^3} = \frac{2}{r^4}(Br - 3A) = 0.$$

Откуда искомое

$$r = \frac{3A}{B}.$$

13. Стальной шарик массой $m = 20$ г положен на пружинные весы массой $M = 40$ г. При этом чашка весов отклонилась на $x_0 = 3$ см. Определить максимальное показание x весов, если шарик бросить на весы без начальной скорости с высоты $h = 40$ см, и после удара он подпрыгнул на высоту $h_1 = 17$ см. Удар считать абсолютно упругим.

Дано: $m = 20$ г; $M = 40$ г; $x_0 = 3$ см; $h = 40$ см; $h_1 = 17$ см.

Найти: x.

Решение. Когда шарик положен на весы, согласно закону Гука

$$kx_0 = mg.$$

Откуда коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{mg}{x_0}. \qquad (1)$$

При падении шарика выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mgh,$$

где скорость шарика перед ударом о чашку

$$\upsilon = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

При ударе выполняется закон сохранения импульса

$$m\upsilon = -m\upsilon' + Mu,$$

где υ' и u – соответственно скорости шарика и чашки после удара.

Тогда

$$u = \frac{m\upsilon + m\upsilon'}{M}. \qquad (3)$$

При движении шарика вверх, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{m(\upsilon')^2}{2} = mgh_1.$$

Откуда скорость шарика после удара

$$\upsilon' = \sqrt{2gh_1}\,. \qquad (4)$$

Подставляем (2) и (4) в выражение (3), находим

$$u = \frac{m\left(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gh_1}\right)}{M}.$$

При движении чашки выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Тогда с учетом (1) искомое максимальное показание весов

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}}u = \sqrt{\frac{2x_0 m}{M}}\left(\sqrt{h} + \sqrt{h_1}\right).$$

Вычисляя, получаем

$$x = 1{,}8\ \text{см}.$$

14. На край тележки массой $M = 6$ кг, движущейся горизонтально без трения с постоянной скоростью $\upsilon = 2$ м/с, опускают с небольшой высоты короткий брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu = 0{,}4$. Определить, на какое расстояние S переместится брусок по тележке; какое количество теплоты Q при этом выделится?

Дано: $M = 6$ кг; $\upsilon = 2$ м/с; $m = 1$ кг; $\mu = 0{,}4$.

Найти: S; Q.

Решение. Поскольку в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, в проекции на горизонтальную ось закон сохранения импульса можно записать в виде

$$M\upsilon = (M + m)\cdot u, \qquad (1)$$

где υ – скорость тележки; u – скорость тележки с бруском.

Согласно закону сохранения энергии, изменение кинетической энергии системы тележка – брусок равно работе сил трения скольжения

$$\frac{(M + m)u^2}{2} - \frac{M\upsilon^2}{2} = -\mu mgS, \qquad (2)$$

где S – расстояние, пройденное бруском по тележке.

Из уравнений (1) и (2) найдем искомое расстояние

$$S = \frac{M\upsilon^2}{2\mu(M + m)g}.$$

Количество теплоты, выделившееся при движении бруска по тележке, определяется работой сил трения скольжения (см. (2)

$$Q = \mu mgS.$$

Вычисляем, получим $S = 43{,}7$ см; $Q = 1{,}71$ Дж.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.1 – 3.28. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием некоторой силы так, что координата со временем изменяется по закону $x = B + Ct + Dt^2$, где B, C, D – постоянные величины. Какая работа A совершается силой за первые t_1 секунд? Какая мощность P развивается при движении точки в момент времени t_2? Построить графики зависимостей $A = f(t)$ и $P = f(t)$ согласно номеру задачи в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Условия к задачам 3.1 – 3.28

Номер задачи	m, кг	B, м	C, м/с	D, м/с^2	t_1, с	t_2, с
3.1 3.2 3.3 3.4	2	10	–2	1	5 10 15 20	2 4 6 8
3.5 3.6 3.7 3.8	3	5	8	2	1 2 3 4	0,5 1 1,5 2
3.9 3.10 3.11 3.12	1,5	–4	–1	5	2 4 6 8	1 2 3 4
3.13 3.14 3.15 3.16	2,5	–9	3	2	2,5 5 7,5 10	0,5 1 1,5 2
3.17 3.18 3.19 3.20	1	7	–4	3	1 1,5 2 2,5	1 1,5 2 2,5
3.21 3.22 3.23 3.24	0,5	–8	–3	4	2 4 6 8	0,4 0,6 0,8 1
3.25 3.26 3.27 3.28	4	6	2	–1	10 20 30 40	5 10 15 20

3.29 – 3.56. Материальная точка массой m под действием консервативной силы переместилась из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2. Составляющая силы F_X вдоль оси X зависит от координаты по закону

$F_X = f(x)$. Найти работу, производимую силой, по перемещению материальной точки. Построить график зависимости работы от величины перемещения согласно номеру задачи в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Условия к задачам 3.29 – 3.56

Номер задачи	m, *кг*	Закон изменения составляющей силы $F_X = f(x)$, Н	B	C	x_1, м	x_2, м
3.29 3.30 3.31 3.32	0,5	$F_X = \frac{Bm}{x^2} + C$	$4\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	0,2 Н	2 4 6 8	4 6 8 10
3.33 3.34 3.35 3.36	1	$F_X = B + Cmx$	2,5 Н	$1{,}5\ \frac{1}{\text{с}^2}$	0,2 0,4 0,6 0,8	0,4 0,6 0,8 1
3.37 3.38 3.39 3.40		$F_X = \frac{B}{x} + C$	$2\ \text{Н} \cdot \text{м}$	0,5 Н	1 2 3 4	2 3 4 5
3.41 3.42 3.43 3.44	2	$F_X = Bm + C$	$0{,}3\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$	1 Н	0 0 0 0	0,5 1 1,5 2
3.45 3.46 3.47 3.48		$F_X = -Bx + C$	$5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	0,6 Н	0,1 0,2 0,3 0,4	0,2 0,3 0,4 0,5
3.49 3.50 3.51 3.52	1	$F_X = B\frac{m}{x^2} + Cx$	$1{,}5\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	$4\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	0,5 1 1,5 2	1 1,5 2 2,5
3.53 3.54 3.55 3.56		$F_X = B + Cx^2$	1 Н	$3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	0 0,25 0,5 0,75	0,25 0,5 0,75 1

3.57 – 3.84. Потенциальная энергия частицы в силовом поле изменяется по заданному закону. Найти работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе из точки с координатами x_1, y_1, z_1 в точку с координатами x_2, y_2, z_2. Найти выражение для силы, действующей на частицу, и величину этой силы в начальной и конечной точках согласно номеру задачи в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Условия к задачам 3.57 – 3.84

Номер задачи	Закон изменения потенциальной энергии, Дж	x_1, м	y_1, м	z_1, м	x_2, м	y_2, м	z_2, м
3.57	$\Pi = 2x^2 + 3y^2 + 0{,}5z$	0,5	1	0,2	0,1	0,75	0,1
3.58	$\Pi = -\frac{4}{x} - 6z + 2$	2	0	0,5	0,5	0	0,2
3.59	$\Pi = 2{,}5x^2 + 2y^2 - \frac{3}{z}$	1	2	1,5	2	3	0,75
3.60	$\Pi = x + 2\left(y^2 + z^2\right)$	6,2	4	5,5	2,4	2,5	3
3.61	$\Pi = -y^2 - 3{,}5z + 0{,}8$	0,8	0,5	0,1	0,4	0,7	0,5
3.62	$\Pi = \frac{2}{x} + 5y^2 + 2z^2$	4,5	2,5	1,2	3	3,5	1
3.63	$\Pi = x^2 + 1{,}2y - \frac{2}{z}$	1,2	0,8	1,5	1	1,2	1,4
3.64	$\Pi = 3x - \frac{1{,}5}{y} + 1{,}1z$	2,4	0,5	2	1,5	0,4	1,5
3.65	$\Pi = -x + 2{,}2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$	4	1,4	2,5	3,5	0,6	2
3.66	$\Pi = x^2 + 4z + 5$	0,3	1,75	0,6	0,15	0,75	0,5
3.67	$\Pi = \frac{1}{x} + 6y^2 - 4{,}8z$	1,4	1	1,25	1,2	0,8	1
3.68	$\Pi = -y - z^2 + 1{,}5$	0,6	0,8	1	0,3	0,5	0,8
3.69	$\Pi = \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z}$	2,5	2	1,7	1,5	1,3	1,2
3.70	$\Pi = y + 5\left(x^2 + z^2\right)$	0,7	0,4	0,5	0,5	0,4	0,6
3.71	$\Pi = -x^2 + 2y^2 - 4$	6	2,5	0	4	2	0
3.72	$\Pi = 1{,}5x + y - 1{,}4z$	0,5	0,8	1,2	0,75	0,9	1
3.73	$\Pi = 3{,}8/y - 2z^2 + 0{,}6$	5	2,2	4	3,5	1,8	3
3.74	$\Pi = 2x + 1{,}6y^2 - \frac{1}{z}$	0,4	0,7	0,6	0,6	0,5	1
3.75	$\Pi = \frac{5}{x} - \frac{4}{z}$	3	1,5	2	2,5	1,1	1,4
3.76	$\Pi = x^2 - 4(y + z) + 0{,}75$	1,25	1,1	1,6	1	1,5	1,5
3.77	$\Pi = 2x^2 - 0{,}4y + 5/z$	0,1	0,4	0,2	0,25	0,6	0,4
3.78	$\Pi = 8/x + 1{,}25z^2 + 2$	1,6	1,2	1	2	1,4	0,6
3.79	$\Pi = 2x - y^2 + 1{,}8$	5,5	4	3,6	5	3,5	3
3.80	$\Pi = 6/y + 2{,}2z^2$	0,75	1	0,9	0,5	0,6	1

Окончание табл. 3.3

3.81	$П = 4x - \frac{1}{y} - 2,6$	3,5	3	0	3	3,5	0
3.82	$П = \frac{3,5}{x} + 2y + z$	6,5	4,5	5	5	4	3,5
3.83	$П = 2,2\left(x^2 + y\right) + 1,5$	0,2	0,75	0,5	0,4	1	0,75
3.84	$П = 2y^2 + 4z^2 + 1$	0,9	1,2	1,4	1	1,5	1,2

3.85 – 3.112. Два движущихся тела ударяются неупруго. Скорость первого тела до удара равна υ_1, скорость второго – υ_2. Общая скорость тел после удара равна υ. Кинетическая энергия первого тела до удара была больше кинетической энергии второго тела в n раз. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Условия к задачам 3.85 – 3.112

Номер задачи	υ_1, м/с	υ_2, м/с	υ, м/с	n
3.85	?	–4	1	1,25
3.86	2,5	?	1,5	25
3.87	1,4	–5	?	0,1223
3.88	3,6	1	1,2	?
3.89	?	–1,2	–0,5	0,159
3.90	3,2	?	0,2	2,786
3.91	1,75	2,5	?	0,98
3.92	2,2	0,6	1,3	?
3.93	?	1,8	1,7	0,347
3.94	1,6	?	2,1	0,55
3.95	2,8	–3,5	?	0,75
3.96	1	–1,6	–0,25	?
3.97	?	4,5	3	2,9
3.98	0,75	?	–0,1	0,41
3.99	2	3,6	?	0,679
3.100	1,4	–0,8	1,25	?
3.101	?	–1,3	0,2	1,027
3.102	2,4	?	0,75	4,727
3.103	1,25	2	?	0,142
3.104	3	–3,4	0,5	?
3.105	?	–0,75	1,6	30,08
3.106	0,5	?	–0,4	0,11
3.107	1,8	–2,2	?	0,606
3.108	2,25	1,5	1,75	?
3.109	?	4,4	3,8	0,529
3.110	1,2	?	1	2,25
3.111	2,6	–3	?	1,252
3.112	0,4	1,6	0,6	?

3.113 – 3.140. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара равна m_1, масса второго – m_2. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту H, и отпускают. После упругого соударения второй шар поднимается на высоту h_2, а первый – на высоту h_1. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Условия к задачам 3.113 – 3.140

Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	H, см	h_1, см	h_2, см
3.113	0,2	0,1	4,5	?	?
3.114	0,05	0,03	?	?	7,81
3.115	0,16	0,12	?	0,2	?
3.116	0,8	?	?	1,17	33,33
3.117	0,45	0,4	12	?	?
3.118	0,25	0,15	?	?	12,5
3.119	0,12	0,08	?	0,68	?
3.120	0,04	?	?	2,89	46,22
3.121	0,09	0,05	20	?	?
3.122	0,75	0,5	?	?	40,32
3.123	0,12	0,04	?	1,75	?
3.124	0,1	?	?	1,44	23,11
3.125	1	0,75	14	?	?
3.126	0,06	0,05	?	?	21,42
3.127	0,4	0,25	?	0,48	?
3.128	0,15	?	?	1,2	43,2
3.129	0,5	0,4	25	?	?
3.130	0,9	0,45	?	?	10,67
3.131	0,03	0,02	?	0,84	?
3.132	0,14	?	?	0,744	16,2
3.133	0,7	0,3	15	?	?
3.134	0,02	0,01	?	?	42,67
3.135	0,55	0,2	?	0,87	?
3.136	0,3	?	?	1,08	38,88
3.137	0,6	0,4	23	?	?
3.138	0,35	0,3	?	?	18,556
3.139	0,04	0,01	?	3,96	?
3.140	0,08	?	?	0,306	19,59

3.141 – 3.168. Тело соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости длиной S_1, составляющей угол α с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние S_2, останавливается. Коэффициент трения на всем пути равен μ. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Условия к задачам 3.141 – 3.168

Номер задачи	S_1, см	α, град	S_2, см	μ
3.141	90	30	40	?
3.142	45	60	?	0,47
3.143	15	?	15	0,414
3.144	?	45	34	0,51
3.145	100	60	150	?
3.146	60	45	?	0,22
3.147	25	?	25	0,577
3.148	?	30	5,62	0,35
3.149	12	30	18,2	?
3.150	20	45	?	0,12
3.151	55	?	55	0,268
3.152	?	60	59,23	0,35
3.153	14	45	100	?
3.154	65	30	?	0,15
3.155	30	?	60	0,26
3.156	?	60	88,25	0,32
3.157	50	30	37,3	?
3.158	85	45	?	0,19
3.159	70	?	140	0,175
3.160	?	60	40,9	0,34
3.161	45	45	145	?
3.162	10	60	?	0,42
3.163	80	?	80	0,414
3.164	?	30	134,6	0,08
3.165	40	60	124	?
3.166	75	30	?	0,07
3.167	35	?	70	0,3464
3.168	?	45	223	0,16

3.169. Два неупругих шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг движутся со скоростями $\upsilon_1 = 8$ м/с и $\upsilon_2 = 4$ м/с соответственно. Найти увеличение внутренней энергии шаров, когда: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу; 3) шары движутся под прямым углом друг к другу. Под каким углом α к направлению движения меньшего шара будут двигаться соединившиеся шары после удара?

3.170. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью υ_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

3.171. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

3.172. Шар, движущийся со скоростью υ_1, налетает на покоящийся шар, масса которого в $n = 1{,}5$ раза больше первого. Определить отношение скорости υ_1' первого шара и скорости υ_2' второго шара после удара. Удар считать упругим, центральным и прямым.

3.173. Шарик массой $m_1 = 16$ г, движущийся горизонтально, столкнулся с шаром массой $m_2 = 0{,}8$ кг, висящим на прямом недеформируемом и невесомом стержне длиной $l = 1{,}7$ м. Считая удар упругим, определить скорость шарика υ_1, если угол отклонения стержня после удара $\alpha = 20°$.

3.174. Шар, положенный на верхний конец спиральной пружины, сжимает пружину на $x_0 = 2$ мм. Определить, насколько сожмет пружину этот же шар, брошенный вертикально вниз с высоты $h = 15$ см со скоростью $\upsilon_0 = 1{,}5$ м/с. Удар шара о пружину считать абсолютно упругим.

3.175. Подъемный кран поднимает груз массой $m = 3$ т с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$ крана за время от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 8$ с, если коэффициент полезного действия крана $\eta = 40$ %.

3.176. Энергозатраты на откачку воды из подвала глубиной $h = 2$ м, длиной $a = 10$ м и шириной $b = 6$ м составили $E = 400$ кДж. Определить коэффициент полезного действия η насоса, если уровень воды составлял $H = 0{,}8$ м от дна подвала. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

3.177. С башни высотой $H = 15$ м под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с брошено тело массой $m = 1$ кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t = 1{,}5$ с кинетическую T и потенциальную Π энергии тела.

3.178. Конькобежец, разогнавшись до скорости $\upsilon = 21$ км/ч, въезжает на горку с уклоном $\alpha = 20°$ на высоту $h = 1{,}6$ м. Определить коэффициент трения μ коньков о лед.

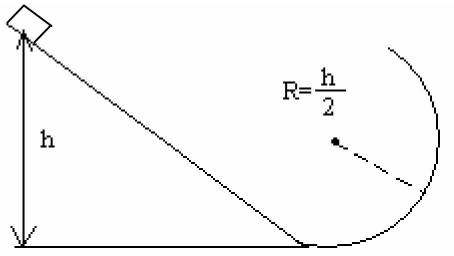
3.179. Мощность P двигателей самолета массой $m = 5{,}2$ т при отрыве от земли равна 820 кВт. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости $\upsilon = 32$ м/с. Принимая, что коэффициент сопротивления $f = 0{,}04$ не зависит от скорости, определить длину пробега S самолета перед взлетом.

3.180. Груз массой $m = 80$ кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = 1$ м/с^2. Длина наклонной плоскости $l = 3$ м, угол α ее наклона к горизонту равен $30°$, а коэффициент трения μ = 0,15. Определить: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

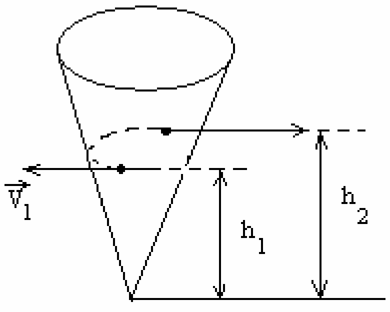
3.181. Цепочка массой $m = 1$ кг и длиной $l = 1{,}4$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

3.182. Пушка массой M начинает свободно скользить вниз по гладкой поверхности, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\vec{P}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найти продолжительность выстрела.

3.183. Небольшое тело начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиусом $R = \dfrac{h}{2}$ (см. рис.). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории после отрыва от желоба.



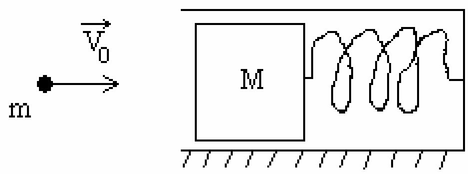
3.184. Гладкий однородный стержень AB массой M и длиной l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массой m. Найти скорость υ_1 муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

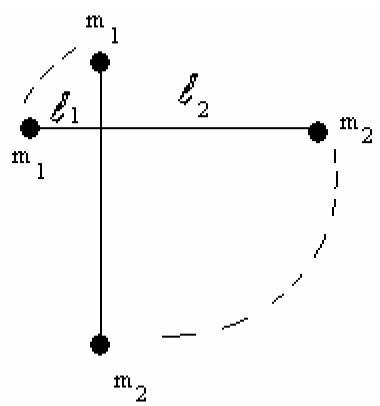


3.185. Небольшую шайбу поместили на внутреннюю гладкую поверхность неподвижного круглого конуса (см. рис.) на высоте h_1 от его вершины и сообщили ей в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса скорость υ_1. На какую высоту h_2 от вершины конуса поднимется шайба?

3.186. Из пушки массой M, находящейся на наклонной плоскости, в момент, когда пушка покоится, производится выстрел и вылетает снаряд массой m с начальной скоростью υ_0 относительно Земли. Определить, на какую высоту поднимется пушка в результате отдачи, если угол наклона плоскости равен φ, а коэффициент трения между пушкой и плоскостью равен μ. Продолжительность выстрела считать пренебрежимо малой.

3.187. Деревянный поршень при движении в цилиндре сжимает невесомую пружину жесткостью k. Между поршнем и цилиндром при движении возникает постоянная по величине сила трения F. В поршень попадает и застревает в нем пуля, которая имела скорость υ_0, направленную вдоль оси цилиндра (см. рис.). Масса пули m, масса поршня M. На какую величину x сместится поршень? Цилиндр закреплен.



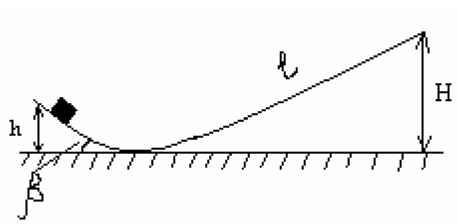


3.188. Вокруг горизонтальной оси может свободно без трения вращаться легкий рычаг, плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы m_1 и m_2. Предоставленный самому себе рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное (см. рис.). Какую скорость υ_2 будет иметь в нижней точке второй груз?

3.189. На горизонтальной поверхности находится неподвижная, абсолютно гладкая полусфера радиусом $R = 10$ м. С ее верхней точки без начальной скорости соскальзывает малое тело. В некоторой точке оно отрывается и летит свободно. Определить время τ падения с момента отрыва тела до попадания его на горизонтальную поверхность. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3.190. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты H по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом R. На какой высоте h тело выпадет из петли? Трение отсутствует.

3.191. Сани соскальзывают с ледяной горы высотой $H = 1{,}5$ м и длиной $l = 2{,}5$ м, плавно переходящей в другую ледяную гору с углом к горизонту $\beta = 30°$ (см. рис.). Сколько времени t сани будут двигаться по второй горе, если на протяжении всего движения коэффициент трения равен $\mu = 0{,}04$?



3.192. Тело массой m_1 со скоростью υ_1 движется навстречу другому телу, масса которого m_2 и скорость υ_2. Происходит неупругое столкновение тел. Сколько времени t тела будут двигаться после столкновения, если коэффициент трения при их совместном движении равен μ?

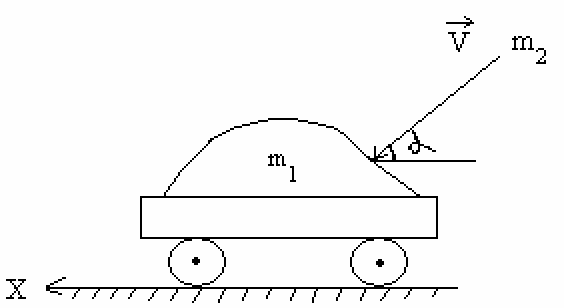
3.193. Вертикальная гладкая стена движется со скоростью u. Навстречу стене летит шарик, скорость которого υ_0 направлена под углом α к нормали. Под каким углом β шарик отскочит от стены? Удар считать абсолютно упругим. Масса стены намного больше массы шарика.

3.194. Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить высоту h, на которой тело оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

3.195. Шар массой $m = 2{,}6$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 55$ см на расположенную вертикально пружину, которая при ударе сжимается. Если у пружины коэффициент упругости $k = 72$ Н/м, то на какую максимальную длину $y_{\max}$ сожмется пружина? Все расстояния измерять от точки соприкосновения шара с недеформированной пружиной.

3.196. Летящая со скоростью υ_0 α-частица испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом $90°$ к первоначальному направлению движения. Определить скорости α-частицы $\vec{\upsilon}$ и ядра $\vec{u}$ после столкновения. Определить также угол β между направлением скорости ядра и первоначальным направлением α-частицы. Масса ядра M, масса α-частицы m $(M > m)$.

3.197. На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком (общая масса $m_1 = 5 \cdot 10^3$ кг). В песок попадает снаряд массой $m_2 = 5$ кг, летевший вдоль рельсов. В момент попадания скорость снаряда равна $\upsilon = 400$ м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 37°$ к горизонту (см. рис.). Найти скорость платформы, если снаряд застревает в песке.



3.198. Акробат падает на упругую сетку с высоты $h = 10$ м. Во сколько раз наибольшая сила давления акробата на сетку больше его силы тяжести, если статический прогиб сетки $x_0 = 20$ см? Массой сетки пренебречь (статическим называется прогиб под действием силы, равной силе тяжести акробата).

3.199. Автомобиль массой $m_1 = 1{,}1$т (с прицепом) движется с некоторой скоростью по горизонтальной поверхности. Отцепив прицеп, автомобиль с той же скоростью поднимается в гору с уклоном $\alpha = 11°$. Считая мощность двигателя постоянной, определить массу m_2 прицепа, если коэффициент трения колес о дорогу $\mu = 0{,}07$.

4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Рассмотрим плоское движение твердого тела – вращение вокруг неподвижной оси и сложное плоское движение, которое можно представить как сумму поступательного движения и вращение вокруг воображаемой оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскостям, в которых располагаются траектории всех точек тела.

Положение вращающегося вокруг закрепленной оси твердого тела удобно задавать углом поворота φ . Тогда величины

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ (угловая скорость)} \qquad (4.1)$$

$$\text{и} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ (угловое ускорение)} \qquad (4.2)$$

имеют смысл, аналогичный смыслу соответствующих характеристик поступательного движения:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

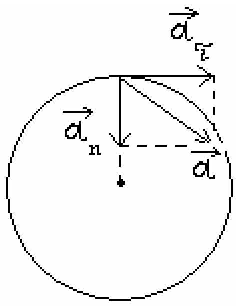


Рис. 4.1

Как и при любом криволинейном движении, вектор линейного ускорения точки во вращательном движении $\vec{a}$ можно представить в виде двух составляющих (рис. 4.1): *тангенциального ускорения*, направленного по касательной к траектории и равного

$$a_\tau = \varepsilon R \quad (R \text{ – радиус вращения}), \qquad (4.3)$$

и *нормального ускорения*, направленного к оси вращения и равного

$$a_n = \omega\upsilon = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4.4)$$

При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси OZ проекцию его момента импульса на эту ось можно представить в виде

$$L_Z = J_Z \omega_Z, \qquad (4.5)$$

где J_Z называется *моментом инерции* твердого тела относительно рассматриваемой оси OZ. Физический смысл момента инерции можно уяснить, сопоставив формулы и динамические величины вращательного и поступательного движений твердого тела, приведенные в табл. 4.1.

Во всех случаях наблюдается соответствие между моментом инерции и массой. Поэтому можно сделать заключение, что момент инерции характеризует инертные свойства тела во вращательном движении. Например, закон сохранения проекции момента импульса для системы тел при условии отсутствия проекции момента действующих сил $\left(\sum_i M_{iZ} = 0\right)$ имеет вид

$$\sum_i J_{iz}\omega_{iz} = \text{const}. \tag{4.6}$$

Этот закон в сочетании с законом сохранения полной механической энергии используется при решении задач на вращательное движение твердого тела.

Таблица 4.1

Характеристики вращательного и поступательного движений твердого тела

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса (инерция) m	Момент инерции J
Сила F	Момент силы $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$
Проекция импульса $P_X = m\upsilon_X$	Проекция момента импульса $L_Z = J_Z\omega_Z$
Уравнение динамики (проекция)	
$F_X = \dfrac{dP_X}{dt} = ma_X$	$M_Z = \dfrac{dL_Z}{dt} = J_Z\varepsilon$
Кинетическая энергия	
$T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	$T = \dfrac{J\omega^2}{2}$
Мощность	
$N = F_\upsilon \upsilon$	$N = M_\omega \omega$
Работа	
$A = \int F_\upsilon dl$	$A = \int M_\omega d\varphi$

Момент инерции твердого тела зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения.

Вычисление момента инерции сводится к суммированию в случае дискретного распределения массы или к интегрированию при непрерывном распределении массы в объеме V по формулам:

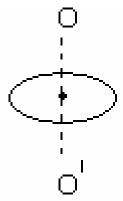
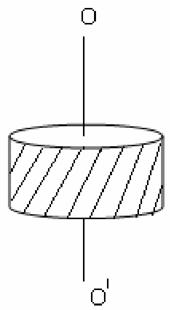
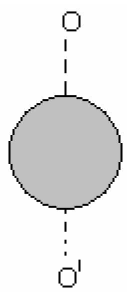
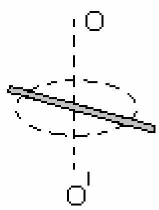
$$J_Z = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{и} \quad J_Z = \int_V \rho r^2 dV, \tag{4.7}$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ – радиус вращения массы m_i вокруг оси OZ; ρ – плотность материала; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус вращения элемента объемом dV, имеющего массу ρdV.

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси OO', проходящей через центр масс, J_{OZ} приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы

Описание тела	Момент инерции Y_{OZ}
Обруч, кольцо радиусом R 	mR^2
Однородный диск или цилиндр радиусом R 	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R 	$\frac{2}{5}mR^2$
Однородный стержень длиной l 	$\frac{1}{12}ml^2$

При вычислении моментов инерции тел J_Z относительно произвольной оси OZ используют теорему Штейнера

$$J_Z = J_{OZ} + md^2, \tag{4.8}$$

где J_{OZ} – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси OZ, d – расстояние между этими осями.

В случае плоского движения, например цилиндра, скатывающегося по наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где υ_c – скорость центра масс тела, J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, ω – угловая скорость тела, m – масса катящегося тела.

В большинстве случаев алгоритм решения задач при вращательном движении твердого тела напоминает алгоритм решения аналогичных задач при поступательном движении.

Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения.

Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – изменение длины тела при растяжении (сжатии); l – длина тела до деформации.

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где Δd – изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d – диаметр стержня.

Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

Потенциальная энергия упруго растянутого (упруго сжатого) стержня

$$П = \frac{E\varepsilon^2}{2}V = \frac{\varepsilon\sigma}{2}V,$$

где E – модуль Юнга; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ – относительное продольное растяжение (сжатие); V – объем тела.

4.2. Примеры решения задач

1. Через неподвижный блок, укрепленный на краю стола, перекинута нить, к которой привязаны три груза массами $m_1 = 800$ г, $m_2 = 700$ г, $m_3 = 200$ г. Масса блока $M = 500$ г, радиус $R = 0{,}38$ м. Считая нить невесомой и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a, а также расстояние S, которое груз m_3 пройдет от начала движения до того момента, когда кинетическая энергия вращения блока будет $T_{вр} = 1{,}1$ Дж.

Дано: $m_1 = 800$ г, $m_2 = 700$ г, $m_3 = 200$ г; $M = 500$ г, $R = 0{,}38$ м, $T_{вр} = 1{,}1$ Дж.

Найти: a; S.

Решение. Выбрав направления осей X и Y (рис. 4.1), запишем уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов в проекциях на эти оси:

$$m_1 a = T_1; \quad (1)$$

$$m_2 a = T_2 - T_1'; \quad (2)$$

$$m_3 a = m_3 g - T_3. \quad (3)$$

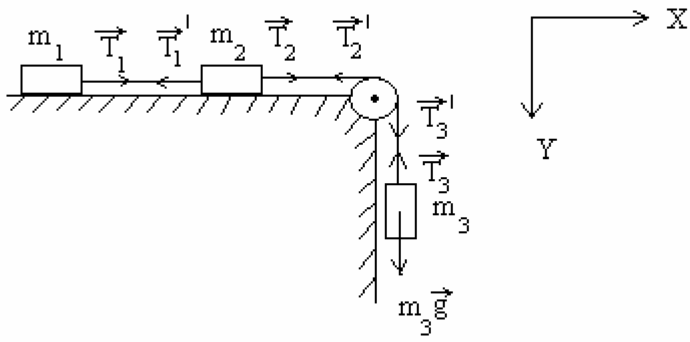


Рис. 4.1

Согласно основному закону динамики вращательного движения вращающий момент, приложенный к блоку,

$$M_Z = J\varepsilon, \quad (4)$$

где J – момент инерции блока относительно оси Z, перпендикулярной плоскости чертежа; ε – угловое ускорение.

С другой стороны,

$$M_Z = \left(T_3' - T_2'\right)R, \quad (5)$$

где T_3' и T_2' – силы, приложенные к ободу блока; R – плечо силы, равное радиусу блока.

Приравняв выражения (4) и (5), получаем

$$J\varepsilon = \left(T_3' - T_2'\right)R. \quad (6)$$

Учитывая, что $J = \frac{1}{2}MR^2$, $\varepsilon = \frac{a}{R}$, уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{Ma}{2} = T_3' - T_2'. \quad (7)$$

По третьему закону Ньютона и поскольку нити невесомы, $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, $T_3' = T_3$. Учитывая эти равенства, из уравнений (1 – 3) и (7) искомое уравнение

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3 + \frac{1}{2}M}.$$

Кинетическая энергия вращающегося блока

$$T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где ω – угловая скорость.

Учитывая, что $\omega = \varepsilon t$, $J = \frac{1}{2}MR^2$, $\varepsilon = \frac{a}{R}$, получаем

$$T_{вр} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{Ma^2 t^2}{4}.$$

Откуда время движения

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{T_{вр}}{M}}.$$

Пройденное за это время искомое расстояние

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{2T_{вр}}{M}.$$

Вычисляя, получаем

$$a = 1{,}01 \text{ м/с}^2; \quad S = 4{,}36 \text{ м}.$$

2. На пружинных весах лежит гиря массой $m = 1{,}2$ кг, которая сжимает пружину на $x_1 = 3$ см. Определить, на какую величину Δx уменьшится длина пружины, если совершить дополнительную работу по ее сжатию $A = 1{,}4$ Дж.

Дано: $m = 1{,}2$ кг; $x_1 = 3$ см; $A = 1{,}4$ Дж.

Найти: Δx.

Решение. Гиря с пружиной покоятся, поэтому второй закон Ньютона в проекции на ось X, направленную вертикально вниз, запишется в виде

$$F_X + mg = 0, \tag{1}$$

где сила упругости $F_X = -K\Delta l$ (K – жесткость пружины); mg – сила тяжести. Подставив эти соотношения в (1), получим, что жесткость пружины

$$K = \frac{mg}{\Delta l}. \tag{2}$$

Работа по дополнительному сжатию пружины определяется как разность потенциальных энергий пружины в конечном и начальном положениях:

$$A = \Pi_2 - \Pi_1 = \frac{Kx_2^{\,2}}{2} - \frac{Kx_1^{\,2}}{2}, \tag{3}$$

где x_1 – первоначальное сжатие пружины; x_2 – конечное сжатие пружины.

Из выражения (3)

$$x_2^{\,2} = \frac{2A + Kx_1^{\,2}}{K}. \tag{4}$$

Учитывая формулу (2) и то, что $x_2 = x_1 + \Delta x$, получаем

$$\left(x_1 + \Delta x\right)^2 = \frac{\left(2A + mgx_1\right)x_1}{mg}.$$

Откуда искомое

$$\Delta x = -x_1 \pm \sqrt{x_1^{\,2} + \frac{2A}{mg}x_1} = 5{,}96 \text{ см}$$

(физический смысл имеют только положительные корни).

3. Максимальный груз, который выдерживает алюминиевая проволока диаметром $d = 2$ мм, равен 8 кг. Определить: 1) предел упругости $\sigma_{пр}$ этой проволоки; 2) относительное удлинение ε; 3) относительное поперечное сжатие ε'. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}34$, модуль Юнга $E = 69 \cdot 10^9$ Па.

Дано: $d = 2$ мм; $m = 8$ кг; $\mu = 0{,}34$; $E = 69 \cdot 10^9$ Па.

Найти: $\sigma_{пр}$; ε; ε'.

Решение. Предельное напряжение при упругой деформации

$$\sigma_{пр} = \frac{F_{пр}}{S}, \tag{1}$$

где $F_{пр} = mg$ – предельная сила, при которой еще действует закон Гука; $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения проволоки. Подставив эти значения в формулу (1), найдем искомый предел упругости

$$\sigma_{пр} = \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Согласно закону Гука относительное удлинение и напряжение пропорциональны друг другу, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{пр}}{E},$$

где E – модуль Юнга.

Относительное поперечное сжатие

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Вычисляя, получаем

$$\sigma_{пр} = 25 \text{ МПа}; \ \varepsilon = 3{,}62\cdot10^{-4}; \ \varepsilon' = 1{,}23\cdot10^{-4}.$$

4. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис. 4.2). В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

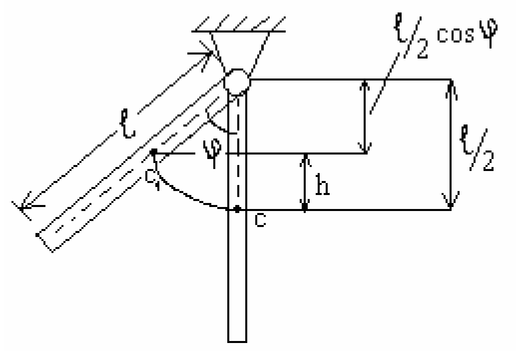


Рис. 4.2

Дано: $l = 1{,}5$ м; $M = 10$ кг; $m = 10$ г; $\upsilon_0 = 500$ м/с.

Найти: φ.

Решение. Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Сначала пуля, ударившись о стержень, приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию

$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс его поднимается на высоту

$$h = l/2\,(1-\cos\varphi).$$

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$\varPi = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии.

Приравнивая правые части полученных равенств, получим

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}.$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня

$$J = \frac{1}{3}Ml^2,$$

получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \qquad (1)$$

Чтобы из выражения (1) найти φ, необходимо предварительно определить значение ω.

В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса

$$L_{01} = J\omega_0 = 0.$$

Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня вокруг оси.

Начальный момент импульса пули

$$L_{02} = m\upsilon_0 r,$$

где r – расстояние точки попадания от оси вращения. В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость υ, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $\upsilon = \omega \cdot r$, то конечный момент импульса пули

$$L_2 = m\upsilon r = mr^2\omega.$$

Применив закон сохранения импульса, можем записать

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2 \quad \text{или} \quad m\upsilon_0 r = J\omega + mr^2\omega.$$

Откуда

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 r}{J + mr^2}, \qquad (2)$$

где $J = \frac{1}{3}Ml^2$ – момент инерции системы стержень – пуля.

Если учесть, что во (2) $mr^2 << J = \frac{1}{3}M \cdot l^2$, а также, что $r = \frac{l}{2}$, то после преобразований получим

$$\omega = \frac{3m\upsilon_0}{2Ml} = \frac{3\cdot10^{-2}\cdot500}{2\cdot10\cdot1{,}5}\frac{\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{c}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = 0{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

По (1) получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1{,}5\cdot(0{,}5)^2}{3\cdot9{,}81} = 0{,}987.$$

$$\varphi = 9°20'.$$

5. Однородный шар массой $M_1 = 20$ кг вращается без трения на вертикальной оси, проходящей через его диаметр (рис. 4.3). На «экватор» шара намотана невесомая нерастяжимая нить, другой конец которой перекинут через цилиндрический блок массой $m = 1$ кг и привязан к грузу массой $M = 10$ кг. Какую скорость будет иметь груз, опустившись на расстояние $h = 1$ м? Проскальзывание нити в блоке отсутствует, трением в осях пренебречь.

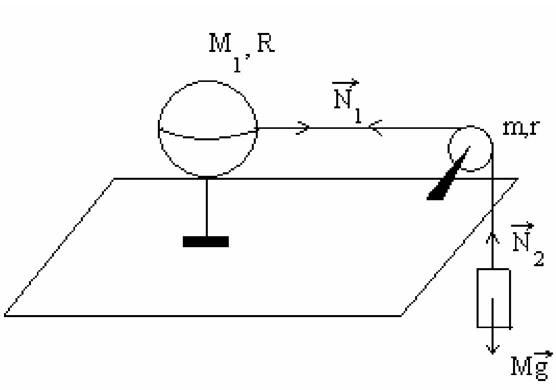


Рис. 4.3

Дано: $M_1 = 20$ кг; $m = 1$ кг; $M = 10$ кг; $h = 1$ м.

Найти: υ.

Решение. В этой задаче не требуется решать уравнений движения. Здесь надо применить лишь закон сохранения энергии. Предварительно учтем связи в этой системе. Нерастяжимость нити и отсутствие проскальзывания означают связь скорости груза с угловыми скоростями вращения шара ω_1 и блока ω_2:

$$\upsilon = \omega_1 R = \omega_2 r.$$

Откуда

$$\omega_1 = \frac{\upsilon}{R}; \quad \omega_2 = \frac{\upsilon}{r}.$$

При опускании груза на расстояние h его потенциальная энергия уменьшается на величину Mgh. Эта энергия тратится на: 1) кинетическую энергию вращения шара; 2) кинетическую энергию вращения блока и 3) кинетическую энергию поступательного движения груза.

Для суммы этих кинетических энергий имеем:

$$T = \frac{J_{шар}\omega_1^2}{2} + \frac{J_{блок}\omega_2^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2} = \frac{2M_1R^2}{5}\cdot\frac{\upsilon^2}{2R^2} + \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{2r^2} + \frac{M\upsilon^2}{2} =$$

$$= \upsilon^2\left(\frac{M_1}{5} + \frac{m}{4} + \frac{M}{2}\right) = \upsilon^2\left(\frac{4M_1 + 5m + 10M}{20}\right).$$

Приравнивая T к Mgh, находим искомую скорость

$$\upsilon = \sqrt{\frac{20Mgh}{4M_1 + 5m + 10M}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10 \cdot 9{,}8 \cdot 1}{4 \cdot 20 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 10}} = 3{,}25 \text{ м/с}.$$

При свободном падении груза $(M_1 = m = 0)$ мы бы получили

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}.$$

6. Горизонтально расположенный тонкий однородный стержень массой m подвешен за концы на двух вертикальных нитях. Найти силу натяжения одной из нитей сразу после пережигания другой нити.

Дано: m.

Найти: T.

Решение. Силы, действующие на стержень сразу после пережигания одной из нитей, показаны на рис. 4.4. Движение центра масс стержня описывается уравнением

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - T,$$

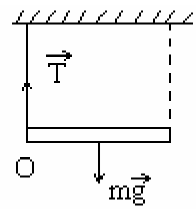


Рис. 4.4

а уравнение динамики вращательного движения стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса O, имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl}{2},$$

где $J = \frac{1}{3}ml^2$ – момент инерции стержня.

С учетом связи $\upsilon = \frac{\omega l}{2}$ между скоростью центра масс стержня и угловой скоростью его вращения получаем два уравнения с двумя неизвестными: угловым ускорением стержня $\frac{d\omega}{dt}$ и силой натяжения нити T. Совместное решение дает искомую силу натяжения нити

$$T = \frac{mg}{4}.$$

Когда стержень висел на двух нитях, на каждую нить действовала сила $\frac{mg}{2}$. При пережигании одной из нитей сила, действующая на оставшуюся нить, скачкообразно изменяется вдвое. Такое скачкообразное изменение связано с идеализацией: стержень считается абсолютно твердым. Реальный стержень деформируется, и при учете этого обстоятельства сила натяжения нити будет меняться непрерывно.

7. Колесо турбины раскручивают из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}1\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Найти: 1. Чему равно полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0{,}5$ м от оси вращения, через 5 с после начала движения турбины? 2. Сколько оборотов N успеет сделать турбина к этому времени?

Дано: $\varepsilon = 0{,}1\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $R = 0{,}5$ м; $t = 5$ с.

Найти: a; N.

Решение

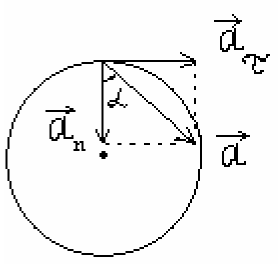


Рис. 4.5

1. Полное ускорение $\vec{a}$ точки при вращательном движении представим как векторную сумму тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений (рис. 4.5), где

$$a_\tau = \varepsilon R \quad \text{и} \quad a_n = \omega^2 R.$$

Угловую скорость ω определим, интегрируя угловое ускорение:

$$\omega = \int \varepsilon dt + C_1 = \varepsilon t + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 находим с помощью начального условия $\omega = 0$ при t = 0. Тогда $C_1 = 0$, $\omega = \varepsilon t$.

Модуль полного ускорения рассчитаем по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \varepsilon^4 t^4 R^2} = \varepsilon R\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4} = 0{,}13 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора полного ускорения выразим с помощью тангенса угла α между векторами полного и нормального ускорения:

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 t^2} = \frac{1}{\varepsilon \cdot t^2} = 0{,}4$$

(с течением времени $tg\alpha \to 0$, и полное ускорение в основном будет определяться нормальным ускорением).

2. Количество оборотов турбины N связано с углом поворота $\varphi = 2\pi N$, который выразим, интегрируя угловую скорость:

$$\varphi = \int \omega dt + C_2 = \int \varepsilon t dt + C_2 = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем тоже из начального условия: $\varphi = 0$ при t = 0. Следовательно, $C_2 = 0$. Тогда

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} \approx 0{,}2.$$

8. Определить момент инерции однородного сплошного цилиндра массой m и радиусом R относительно его геометрической оси.

Дано: m; R.

Найти: J.

Решение. Разобьем цилиндр высотой h на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ (рис. 4.6).

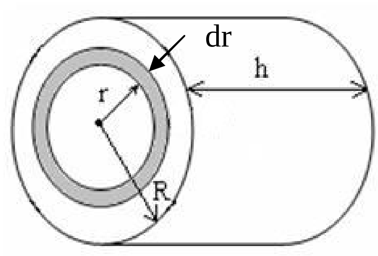


Рис. 4.6

Момент инерции каждого полого цилиндра

$$dJ = r^2 dm \qquad (1)$$

($dr \ll r$, поэтому считаем, что расстояние всех точек цилиндра от геометрической оси равно r).

Масса элементарного цилиндра

$$dm = 2\pi r h \rho dr \qquad (2)$$

($2\pi r h dr$ – объем элементарного цилиндра; ρ – плотность материала цилиндра).

После подстановки (2) в (1) найдем

$$dJ = 2\pi h \rho r^3 dr.$$

Тогда искомый момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi h R^4 \rho = \frac{1}{2} m R^2$$

(учли, что $\pi R^2 h$ – объем цилиндра, а его масса $m = \pi R^2 h \rho$).

9. Определить момент инерции J сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, отстоящей от центра шара на расстоянии $a = \dfrac{R}{3}$ и параллельной оси, проходящей через центр шара.

Дано: R; m; $a = \dfrac{R}{3}$.

Найти: J.

Решение. Момент инерции относительно рассматриваемой оси

$$J = J_C + ma^2, \qquad (1)$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр шара); m – масса шара; a – расстояние между параллельными осями.

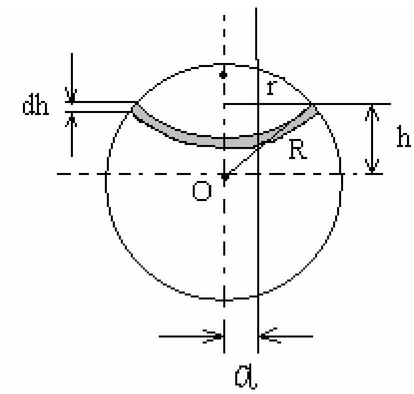


Рис. 4.7

Выделим сплошной диск толщиной dh (рис. 4.7), параллельный плоскости сечения.

Момент инерции этого диска относительно оси, проходящей через центр масс,

$$dJ = \frac{r^2 dm}{2},$$

где r – радиус диска.

$$dm = \rho\pi r^2 dh$$

(ρ – плотность материала диска).

Тогда

$$dJ = \frac{\rho\pi r^4}{2}dh = \frac{\rho\pi\left(R^2 - h^2\right)^2}{2}dh$$

(учли, что $r^2 = R^2 - h^2$ (см. рис. 4.7).

Момент инерции сплошного шара относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J_C = 2\int dJ = 2\int_0^R \frac{\rho\pi\left(R^2 - h^2\right)}{2}dh = \frac{8}{15}\rho\pi R^5. \qquad (2)$$

Учитывая, что плотность шара $\rho = \dfrac{m}{V}$, а объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, формулу (2) запишем в виде

$$J_C = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (3)$$

Подставив формулу (3) в выражение (1) и учитывая, что $a = \dfrac{R}{3}$, найдем момент инерции шара относительно рассматриваемой оси:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{mR^2}{9} = \frac{23}{45}mR^2.$$

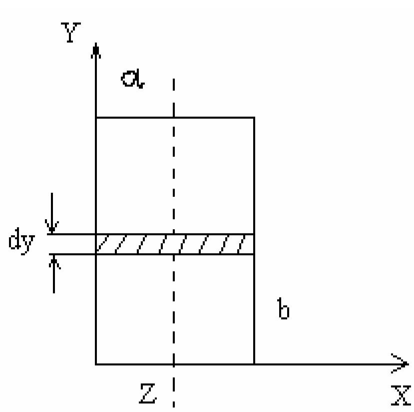


Рис. 4.8

10. Определить момент инерции J однородной прямоугольной пластинки массой 500 г со сторонами $a = 20$ см и $b = 30$ см относительно оси, проходящей через геометрический центр пластинки параллельно большей ее стороне.

Дано: $a = 20$ см; $b = 30$ см; $m = 500$ г.

Найти: J.

Решение. Согласно условию задачи ось Y проходит параллельно стороне b (рис. 4.8). Мысленно выделим тонкую полоску шириной dy. Эту полоску можно считать тонким стержнем длиной a.

Тогда ее момент инерции

$$dJ = \frac{a^2}{12} dm = \frac{\rho h a^3}{12} dy$$

(учли, что масса полоски $dm = \rho a h dy$, где ρ – плотность пластинки; h – толщина пластинки).

Искомый момент инерции пластинки

$$J = \int dJ = \int_0^b \frac{\rho h a^3}{12} dy = \frac{\rho h a^3 b}{12} = \frac{m a^3}{12} = 1{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

(учли, что масса всей пластинки $m = \rho a b h$).

11. Колесо массой $m = 2{,}8$ кг раскручивается постоянной касательной силой $F = 15$ Н. Пренебрегая трением, определить момент времени t, когда кинетическая энергия вращающегося колеса $T_{вр} = 3$ кДж.

Дано: $m = 2{,}8$ кг; $F = 15$ Н; $T_{вр} = 3$ кДж.

Найти: t.

Решение. Кинетическая энергия вращающегося колеса

$$T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где J – момент инерции колеса относительно оси; ω – угловая скорость.

Момент инерции колеса найдем из выражения для основного закона динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = FR,$$

где ε – угловое ускорение; R – радиус колеса (в нашем случае – плечо силы), откуда

$$J = \frac{FR}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Учитывая формулу (2), соотношения $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$ и $J = mR^2$, выражение (1) запишем в виде

$$T_{вр} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{F^2 t^2}{2m}.$$

Откуда искомое значение времени

$$t = \frac{\sqrt{2mT_{вр}}}{F}.$$

12. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом $r = 20$ см был раскручен до частоты вращения $\nu_1 = 480$ мин$^{-1}$ и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Считая момент M сил трения постоянным, найти его для двух случаев: 1) маховик остановился через $\Delta t = 50$ с; 2) маховик до полной остановки сделал $N = 200$ оборотов.

Дано: $m = 50$ кг; $r = 20$ см; $\nu_1 = 480$ мин$^{-1}$; $\Delta t = 50$ с; $N = 200$.

Найти: М.

Решение. По основному закону динамики вращательного движения изменение момента импульса вращающегося тела равно произведению среднего момента силы, действующего на тело, на время действия этого момента.

1. Поскольку момент силы постоянен $\langle M \rangle = M$ и

$$M\Delta t = J\Delta\omega = J(\omega_2 - \omega_1),$$

где J – момент инерции маховика; ω_1 и ω_2 – начальная и конечная угловые скорости, так как $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 2\pi\nu_1$, то

$$M = -\frac{2\pi J\nu_1}{\Delta t}.$$

Так как $J = \dfrac{mr^2}{2}$, то

$$M = -\frac{\pi m r^2 \nu_1}{\Delta t} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. В условии дано число оборотов, сделанных маховиком до остановки, т.е. его угловое перемещение $\Delta\varphi = 2\pi N$. Используем формулу, выражающую связь работы с изменением кинетической энергии:

$$A = \Delta T = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = -\frac{J(2\pi\nu_1)^2}{2} = -m(\pi r\nu_1)^2.$$

С другой стороны,

$$A = M\Delta\varphi = 2\pi MN.$$

Приравнивая эти два выражения, получим

$$M = -\frac{\pi m (r\nu_1)^2}{2N} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

13. Стержень длиной $l = 0{,}7$ м и массой $m = 1{,}8$ кг вращается вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов, при этом угловая скорость ω стержня изменяется по закону $\omega = At^2 + Bt$ ($A = 2\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^3}$, $B = 3\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$). Определить работу вращения A, произведенную над стержнем в течении времени $t = 5$ с, а также момент сил M, действующий в конце пятой секунды.

Дано: $l = 0,7$ м; $m = 1,8$ кг; $\omega = At^2 + Bt$; $A = 2\ \frac{\text{рад}}{c^3}$; $B = 3\frac{\text{рад}}{c^2}$; $t = 5$ с.

Найти: A; M.

Решение. Работа сил, действующих на стержень, расходуется на сообщение стержню кинетической энергии

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где $J = \frac{1}{3}ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов. Учитывая условие $\omega = At^2 + Bt$, формулу (1) запишем в виде

$$A = \frac{ml^2t^2\left(At + B\right)^2}{6}.$$

Согласно основному закону вращательного движения твердого тела

$$M = J\varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение.

Поскольку $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2At + B$, искомый момент сил

$$M = \frac{ml^2\left(2A + B\right)}{3}.$$

Вычисляя, имеем:

$$A = 621\ \text{Дж}; \quad M = 6,76\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

14. При раскручивании диска массой $m = 20$ кг и радиусом $R = 0,6$ м электродвигателем, обладающим кпд $\eta = 0,4$, была затрачена энергия E = 10 кДж. Определить момент импульса L диска.

Дано: $m = 20$ кг; $R = 0,6$ м; $\eta = 0,4$; $E = 10$ кДж.

Найти: L.

Решение. Согласно определению момент импульса диска

$$L = J\omega, \qquad (1)$$

где J – момент инерции диска относительно оси Z; ω – его угловая скорость.

Из условия задачи следует, что ось Z совпадает с осью симметрии диска, проходящей через его центр.

Полезная работа по раскручиванию диска

$$A = \eta E$$

расходуется на сообщение диску кинетической энергии

$$T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Тогда можно записать

$$\eta E = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2\eta E}{J}}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим искомый момент импульса диска

$$L = R\sqrt{\eta m E}$$

(учли, что $J = \frac{1}{2}mR^2$).

Вычисляя, получим

$$L = 170 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

15. Человек стоит в центре скамьи Жуковского, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 30 \text{ мин}^{-1}$. В вытянутых в стороны руках он держит по гире массой $m = 5$ кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения $l_1 = 60$ см. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J_0 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить частоту n_2 вращения скамьи с человеком и работу А, которую совершит человек, если он прижмет гири к себе так, что расстояние от каждой гири до оси станет равным $l_2 = 20$ см.

Дано: $n_1 = 30 \text{ мин}^{-1}$; $m = 5$ кг; $l_1 = 60$ см; $J_0 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $l_2 = 20$ см.

Найти: n_2; A.

Решение. По условию задачи момент внешних сил относительно вертикальной оси равен нулю, поэтому момент импульса этой системы сохраняется, т.е.

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (1)$$

где $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ и $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ – соответственно моменты инерции всей системы до и после сближения гирь; m – масса каждой гири.

Угловая скорость

$$\omega = 2\pi n.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим искомую частоту вращения:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} n_1.$$

Работа, совершенная человеком, равна изменению кинетической энергии системы

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2 \omega_2^{\,2}}{2} - \frac{J_1 \omega_1^{\,2}}{2}.$$

Выразив из уравнения (1)

$$\omega_2 = \frac{J_1 \omega_1}{J_2},$$

получим

$$A = \frac{J_1 \omega_1^{\,2}}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1 \omega_1^{\,2}}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) = \frac{2J_1 \pi^2 n_1^{\,2}}{J_2}\left(J_1 - J_2\right).$$

Вычисляя, имеем

$$n_2 = 70\ \text{мин}^{-1} \quad \text{и} \quad A = 36{,}8\ \text{Дж}.$$

16. В системе (рис. 4.9) известны масса m груза А, масса M ступенчатого блока В, момент инерции J последнего относительно его оси и радиусы ступеней блока R и $2R$. Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорение груза А.

Дано: m; M; J; R; $2R$.

Найти: a_1.

Решение. Совокупность ускорений, описывающих поступательное движение ступенчатого блока вверх с ускорением a_2 и вращательное движение блока с угловым ускорением ε, имеет вид

$$T_2 - Mg - T_1 = Ma_2;$$

$$T_1 2R - T_2 R = J\varepsilon.$$

Поступательное движение груза вниз с ускорением a_1 описывается уравнением

$$mg - T_1 = ma_1.$$

Добавив к этим уравнениям кинетическую связь между линейными и угловыми ускорениями

$$a_1 = \varepsilon 2R - \varepsilon R = \varepsilon R;$$

$$a_2 = \varepsilon R$$

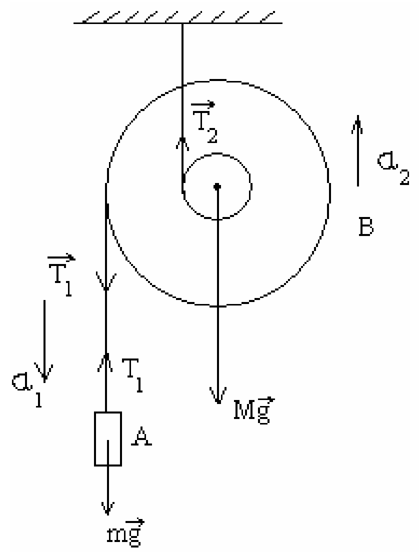


Рис. 4.9

и решив полученную совокупность уравнений совместно, получаем искомый ответ для ускорения груза

$$a_1 = \frac{(m - M)g}{m + M + J/R^2}.$$

Видно, что при $m > M$ груз движется вниз, а при $m < M$ – вверх.

17. На гладкой горизонтальной поверхности лежит квадратная рамка, в вершинах которой закреплено по одному шару массой m (рис. 4.10). В один из них ударяется еще один шар такой же массы и прилипает к нему. Его скорость перед ударом направлена вдоль одной из сторон квадрата и равна 12 м/с. Считая рамку достаточно жесткой и невесомой, определить угловую скорость образовавшейся системы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс. Сторона квадрата $a = 0,2$ м, размерами шаров можно пренебречь.

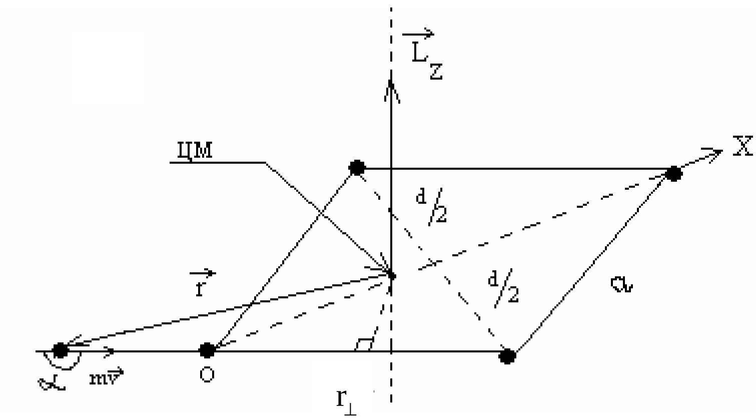


Рис. 4.10

Дано: m; $\upsilon = 12$ м/с; $a = 0,2$ м.

Найти: ω.

Решение. Из соображений симметрии примем, что центр масс (ЦМ) образовавшейся в результате взаимодействия системы из пяти шаров находится на диагонали квадрата, на которой находятся слипшиеся шары (рис. 4.11). Выберем ее в качестве оси координат OX с началом O в точке удара.

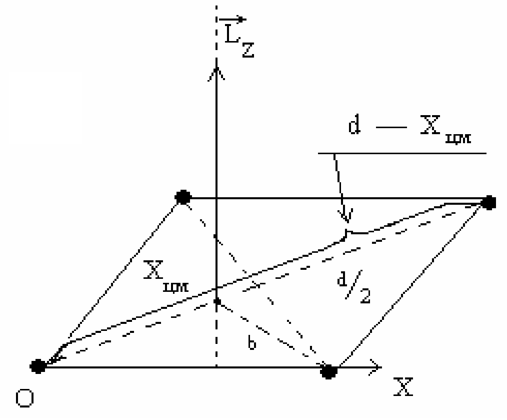


Рис. 4.11

Тогда положение центра масс определим по формуле

$$X_{ЦМ} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{2m \cdot 0 + md + m\frac{d}{2} + m\frac{d}{2}}{5m} = \frac{2}{5}d,$$

где $d = a\sqrt{2}$ – диагональ квадрата.

На систему не действуют внешние горизонтальные силы. Поэтому для определения угловой скорости образовавшейся после удара системы воспользуемся законом сохранения вертикальной проекции момента импульса. Запишем его относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс образовавшейся после удара системы:

$$L_{Z(ДО)} = L_{Z(ПОСЛЕ)}.$$

Момент импульса системы до соударения равен моменту импульса налетающего шара. Его проекцию на вертикальную ось запишем в виде

$$L_{Z(ДО)} = rm\upsilon\sin\alpha = rm\upsilon\sin(\pi - \alpha) = r_\perp m\upsilon,$$

где «плечо» $r_\perp = X_{ЦМ} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} X_{ЦМ} = \frac{\sqrt{2}}{5} d$.

Тогда

$$L_{Z(ДО)} = \frac{\sqrt{2}}{5} dm\upsilon.$$

Момент импульса образовавшейся после удара системы определим по формуле (4.5)

$$L_{Z(ПОСЛЕ)} = J_{ЦМ}\omega,$$

где ω – искомая угловая скорость.

Момент инерции $J_{ЦМ}$ образовавшейся системы из пяти шаров относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, рассчитаем по формуле (4.7)

$$J_{ЦМ} = \sum_i m_i R_i^2 = 2m\left(X_{ЦМ}\right)^2 + m\left(d - X_{ЦМ}\right)^2 + mb^2 + mb^2,$$

где $b^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - X_{ЦМ}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{10}\right)^2 = 0,26d^2$.

Тогда

$$J_{ЦМ} = 2m\left(\frac{2}{5}d\right)^2 + m\left(\frac{3}{5}d\right)^2 + 0,52md^2 = 1,2md^2,$$

$$L_{Z(ПОСЛЕ)} = 1,2md^2\omega.$$

Подставим полученные значения моментов импульса в закон сохранения:

$$\frac{\sqrt{2}}{5} dm\upsilon = 1,2md^2\omega.$$

Из этого равенства определим угловую скорость:

$$\omega = \frac{\frac{\sqrt{2}}{5} mVd}{1,2md^2} = \frac{\sqrt{2}\upsilon}{6d} = \frac{\sqrt{2}\upsilon}{6a\sqrt{2}} = \frac{\upsilon}{6a} = \frac{12}{1,2}\frac{рад}{с} = 10\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

18. Стальной эксцентрик изготовлен в виде диска толщиной $h = 1$ см с двумя симметричными отверстиями (рис. 4.12). Радиусы отверстий $r = 1$ см, расстояние между их осями $d = 4r$, радиус диска $R = 4r$. Определить момент инерции эксцентрика J'_B относительно оси вала BB', совпадающей с осью одного из отверстий. Плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3.

Дано: $h = 1$ см; $r = 1$ см; $d = 4r$; $R = 4r$; $\rho = 7800$ кг/м^3.

Найти: J_B.

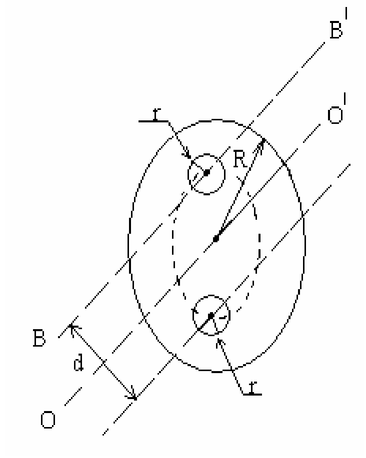


Рис. 4.12

Решение. Решение задачи разделим на две части: сначала находим момент инерции J_0' эксцентрика относительно оси симметрии OO', а затем по теореме Штейнера рассчитаем искомый момент инерции относительно оси BB'. Момент инерции J_0' эксцентрика относительно оси симметрии определим как момент инерции целого диска J_0 (без вырезов) за вычетом двух моментов инерции вырезанных частей $2J_1$, т.е.

$$J_0' = J_0 - 2J_1.$$

Запишем формулу для момента инерции целого диска

$$J_0 = \frac{m_0 R^2}{2},$$

где $m_0 = \rho\pi R^2 h$ – масса целого диска.

Момент инерции одной из вырезанных частей диска находим с помощью теоремы Штейнера

$$J_1 = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2,$$

где $a = \frac{d}{2} = 2r, \quad m_1 = \rho\pi r^2 h$ – масса вырезанной части диска.

Получим формулу для момента инерции эксцентрика относительно его оси симметрии:

$$J_0' = \frac{m_0 R^2}{2} - 2\left(\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2\right).$$

Запишем формулу для момента инерции эксцентрика относительно оси BB':

$$J_B = J_0' + (m_0 - 2m_1)a^2. \tag{1}$$

Подставим в выражение (1) полученные ранее уравнения для J_0'; m_0; m_1:

$$J_B = \frac{m_0 R^2}{2} - 2\left(\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2\right) + (m_0 - 2m_1)a^2 =$$

$$= \frac{\rho\pi R^2 h R^2}{2} - 2\rho\pi r^2 h\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right) + \left(\rho\pi R^2 h - 2\rho\pi r^2 h\right)a^2.$$

Учитывая заданные значения $R = 4r$ и $a = 2r$, выполняем преобразования:

$$J_B = \frac{\rho\pi h \cdot 4^4 r^4}{2} - 2\rho\pi r^2 h\left(\frac{r^2}{2} + 2^2 r^2\right) + \left(\rho\pi \cdot 4^2 r^2 h - 2\rho\pi r^2 h\right)\cdot 2^2 r^2 =$$

$$= \rho\pi r^4 h(128 - 9 + 56) = 175\rho\pi r^4 h.$$

19. Детская игрушка «волчок» имеет массу $m = 0,2$ кг и представляет собой фигуру вращения в виде двух состыкованных основаниями конусов (рис. 4.13). Радиус основания конуса $R = 5$ см, высота волчка $H = 2R$. Определить момент инерции волчка относительно оси OO'. Считать, что волчок изготовлен из однородного материала.

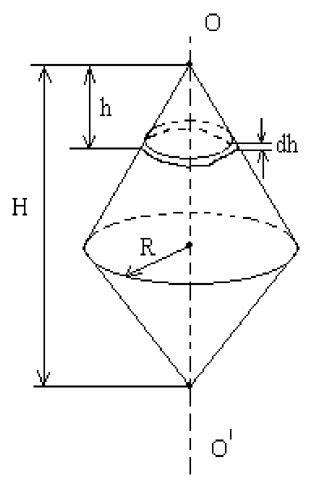


Рис. 4.13

Дано: $m = 0,2$ кг; $R = 5$ см; $H = 2R$.

Найти: J.

Решение. Для упрощения интегрирования по формуле (4.7) используем симметрию заданной фигуры и выделим в ней элемент объема в виде диска толщиной dh (см. рис. 4.13). Радиус r этого диска зависит от расстояния h от вершины конуса.

Так как высота конуса равна радиусу основания, то из геометрических соображений следует, что $r = h$. Тогда объем выделенного элемента запишем в виде

$$dV = \pi r^2 dh = \pi h^2 dh.$$

Его масса

$$dm = \rho dV,$$

где ρ – плотность материала, из которого изготовлен волчок.

Момент инерции выбранного элемента объема определим по формуле для момента инерции диска:

$$dJ = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2}\pi\rho h^4 dh.$$

Интегрируя это выражение, находим момент инерции для одного из конусов волчка:

$$J_1 = \int dJ = \int_0^R \frac{1}{2}\pi\rho h^4 dh = \frac{1}{10}\pi\rho R^5.$$

Удвоив его, получим искомый момент инерции всего волчка

$$J = 2J_1 = 0,2\pi\rho R^5.$$

Определим плотность материала волчка

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2V_1},$$

где V_1 – объем одного из конусов.

Находим его по формуле, известной из школьного курса геометрии

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1 = \frac{1}{3}\pi R^3,$$

где H_1 – высота конуса.

Тогда

$$\rho = \frac{3m}{2\pi R^3},$$

а момент инерции

$$J = 0,2\pi \frac{3m}{2\pi R^3} R^5 = 0,3mR^2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1 – 4.28. Маховое колесо, вращаясь равноускоренно, к моменту времени t после начала движения приобретает скорость, соответствующую частоте вращения ν, и успевает совершить N оборотов. Угловое ускорение колеса равно ε. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 4.1.

Таблица 4.1

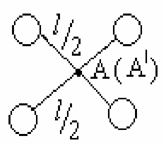
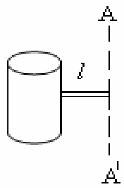
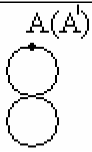
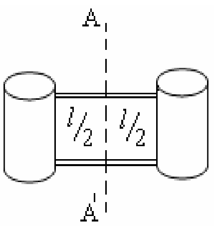
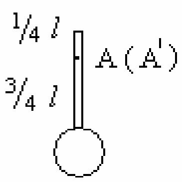
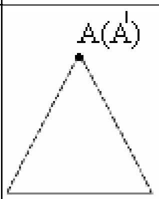
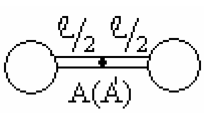
Условия к задачам 4.1 – 4.28

Номер задачи	t, с	ν, с$^{-1}$	ε, рад/с^2	N
4.1	10	4	?	?
4.2	65	?	1,353	?
4.3	30	?	?	150
4.4	?	8	2,01	?
4.5	?	?	3,14	4
4.6	?	15	?	375
4.7	40	6	?	?
4.8	25	?	1,257	?
4.9	15	?	?	22,5
4.10	?	17	1,78	?
4.11	?	?	4,4	8,75
4.12	?	20	?	800
4.13	50	12,5	?	?
4.14	20	?	1,885	?
4.15	75	?	?	487,5
4.16	?	2,5	1,047	?
4.17	?	?	1,396	225
4.18	?	5,5	?	55
4.19	60	12	?	?
4.20	35	?	2,154	?
4.21	55	?	?	200,75
4.22	?	6,5	0,628	?
4.23	?	?	2,513	20
4.24	?	9	?	135
4.25	6	2,5	?	?
4.26	70	?	0,314	?
4.27	45	?	?	180
4.28	?	8,5	1,335	?

4.29 – 4.56. Одно или несколько тел (цилиндры, шары, диски, обручи) радиусом r и массой m_1 подвешены в точке A или закреплены на стержнях массой m_2, длина которых l значительно превышает их толщину. Найти моменты инерции J систем тел относительно заданной оси AA' согласно номеру задачи в табл. 4.2.

Таблица 4.2

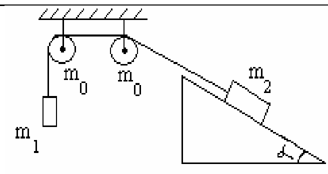
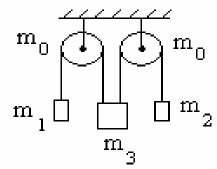
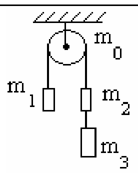
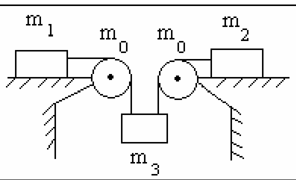
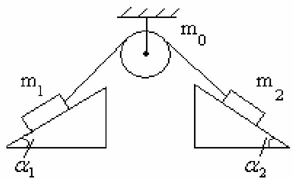
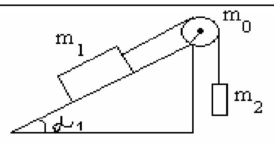
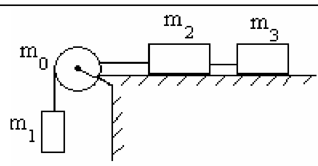
Условия к задачам 4.29 – 4.56

Номер задачи	Система тел	m_1, г	r, см	m_2, г	l, см
4.29 4.30 4.31 4.32	 Четыре шара на концах скрещенных стержней	100 200 300 400	4	150	20
4.33 4.34 4.35 4.36	 Сплошной цилиндр на стрежне	600	5	72	5 10 15 20
4.37 4.38 4.39 4.40	 Два спаянных одинаковых обруча	100	10 20 30 40		
4.41 4.42 4.43 4.44	 Два отрезка тонкостенной цилиндрической трубы, соединенные двумя стержнями	100 200 300 400	2	60	30
4.45 4.46 4.47 4.48	 Диск на стержне	500	10	200	20 40 60 80
4.49 4.50 4.51 4.52	 Три одинаковых спаянных стержня			100	20 30 40 50
4.53 4.54 4.55 4.56	 Два одинаковых диска на стержне	150	4 6 8 10	120	10

4.57 – 4.84. Несколько тел массами m_1, m_2, m_3 соединены невесомыми нерастяжимыми нитями, перекинутыми через блоки массой m_0. Углы, которые составляют наклонные плоскости с горизонтальной, равны α_1 и α_2, коэффициент трения тел о поверхности μ. Найти ускорения, с которыми движутся тела, и силы натяжения нитей согласно номеру задачи в табл. 4.3. Блоки считать однородными дисками. Трением на осях блоков пренебречь.

Таблица 4.3

Условия к задачам 4.57 – 4.84)

Номер задачи	Система тел	m_0, кг	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	μ	α_1, град	α_2, град
4.57 4.58 4.59 4.60		0,2	0,3	0,3	1	0,1	10 20 30 40	
4.61 4.62 4.63 4.64		0,5	0,2 0,4 0,6 0,8	0,2 0,4 0,6 0,8	2			
4.65 4.66 4.67 4.68		0,2	0,3	0,25	0,1 0,2 0,3 0,4			
4.69 4.70 4.71 4.72		0,3	0,6	0,6	1 1,5 2 2,5	0,2		
4.73 4.74 4.75 4.76		0,4	1,4	0,5		0,15	25	10 20 30 40
4.77 4.78 4.79 4.80		0,2 0,4 0,6 0,8	0,8	1		0,25	45	
4.81 4.82 4.83 4.84		0,4	0,5	0,6	0,4	0,1 0,2 0,3 0,4		

4.85 – 4.112. Горизонтальная платформа массой M вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. На платформе на расстоянии r_1 от ее центра стоит человек массой m. Если человек перейдет на расстояние r_2 от центра платформы, частота ее вращения изменится в n раз. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 4.4. Считать платформу однородным диском радиусом R, а человека – точечной массой.

Таблица 4.4

Условия к задачам 4.85 – 4.112

Номер задачи	M, кг	R, м	m, кг	r_1, м	r_2, м	n
4.85	?	15	60	14	6,17	1,6
4.86	95	?	76	12	4,63	2,1
4.87	155	10	?	9	5,08	1,45
4.88	130	7,5	88	?	5,3	1,3
4.89	125	9	84	8,5	?	2
4.90	160	14	75	13	0,98	?
4.91	?	10,5	66	10	2	2
4.92	100	?	62	8	4,57	1,5
4.93	145	11	?	10,5	1,42	1,85
4.94	80	13,5	68	?	8,88	1,35
4.95	75	7	82	6,5	?	1,75
4.96	105	9,5	71	8,5	4,5	?
4.97	?	13	78	12	5,44	1,9
4.98	140	?	70	10	8	1,2
4.99	110	8,5	?	7,5	1,83	1,7
4.100	70	15,5	83	?	2,2	2,8
4.101	85	12,5	65	11	?	2,05
4.102	135	6	86	5,5	3,68	?
4.103	?	16,5	90	16	2,32	2,6
4.104	65	?	72	8	1,44	3
4.105	120	6,5	?	6	2,58	1,6
4.106	135	12	92	?	7,25	1,3
4.107	90	16	64	15	?	1,75
4.108	74	8	80	7,5	3,65	?
4.109	?	14,5	66	12,5	1,23	2,2
4.110	60	?	74	9,5	3,43	2,5
4.111	115	11,5	?	11	4,7	1,8
4.112	150	5,5	85	?	3,74	1,4

4.113 – 4.137. Шар массой m_1, двигавшийся со скоростью $\vec{\upsilon}_1 = \{\upsilon_{1X}, 0, 0\}$, испытал лобовое абсолютно неупругое соударение с одним из шаров жесткой гантели, как показано на рисунке. Массы шаров, проекции их скоростей перед ударом и расстояние L между шарами гантели приведены в табл. 4.5. Пренебрегая размерами шаров и массой стержня гантели, найти: а) скорости шаров после удара; б) скорость центра масс системы после удара; в) момент инерции и угловую скорость системы после удара относительно оси, проходящей через центр масс системы и перпендикулярной к плоскости, в которой движутся шары, согласно номеру задачи в табл. 4.5.

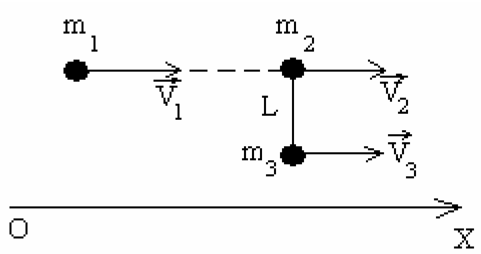


Таблица 4.5

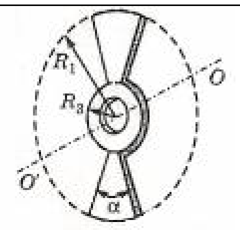
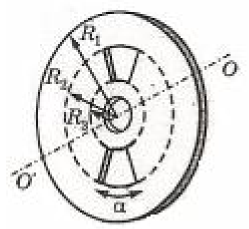
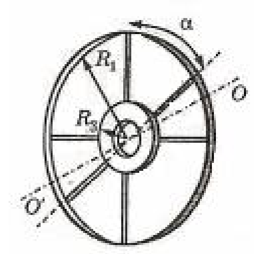
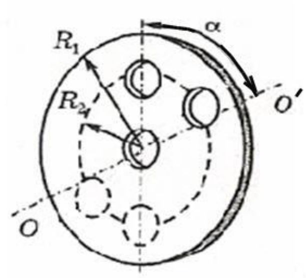
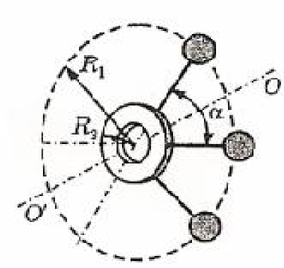
Условия к задачам 4.113 – 4.137

Номер задачи	υ_{1X}, м/с	υ_{2X}, м/с	υ_{3X}, м/с	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	L, м
4.113	1	0	0	3	1	2	0,6
4.114	0	–1	0	2	1	1	0,8
4.115	2	1	0	3	2	1	0,6
4.116	2	–1	–1	2	2	1	0,5
4.117	2	0	–1	1	3	1	1
4.118	2	1	1	1	2	2	0,5
4.119	2	1	–1	2	1	3	1,2
4.120	1	–1	0	2	1	2	1
4.121	1	–1	–1	1	1	1	0,6
4.122	2	0	0	1	2	2	1
4.123	2	–1	0	3	1	1	0,5
4.124	0	–1	–1	3	1	2	0,6
4.125	2	–1	1	1	2	3	0,6
4.126	1	0	1	1	1	3	1
4.127	1	0	–1	3	1	3	1,4
4.128	0	–1	1	1	2	1	0,8
4.129	1	–2	0	3	1	1	1
4.130	1	–2	1	1	3	2	0,6
4.131	1	–2	–1	3	2	2	0,7
4.132	1	0	2	1	1	2	0,4
4.133	1	0	–2	3	1	3	1,4
4.134	1	–1	–2	1	1	2	0,8
4.135	1	–1	2	1	2	3	1,2
4.136	2	–2	2	1	3	3	0,7
4.137	1	–2	–2	2	1	3	0,6

4.138 – 4.162. Определить момент инерции стального маховика относительно оси вала. Плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3, радиус центрального отверстия для вала $r = 0{,}1$ м, $R_1 = 6r$, $R_2 = 4r$, $R_3 = 2r$. Описание маховика – согласно номеру задачи в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Условия к задачам 4.138 – 4.162

Номер задачи	Угол α, град	Описание маховика	Примерный эскиз маховика
4.138 4.139 4.140 4.141 4.142	15 30 45 60 75	Плоская заготовка вентилятора толщиной $h = 0{,}02$ м	
4.143 4.144 4.145 4.146 4.147	15 30 45 60 75	Плоский маховик толщиной $h = 0{,}02$ м с двумя симметричными вырезами	
4.148 4.149 4.150 4.151 4.152	15 30 45 60 90	Обруч со спицами на втулке. Количество спиц равно $360/\alpha$, масса каждой спицы $m_1 = 20$ г, масса обруча $m_2 = 300$ г, длина втулки равна 0,02 м. Спицы и обруч считать тонкими	
4.153 4.154 4.155 4.156 4.157	180 120 90 60 45	Плоский маховик толщиной $h = 0{,}02$ м с цилиндрическими вырезами. Количество вырезов n найдите по формуле $n = 360/\alpha$, их радиусы равны r.	
4.158 4.159 4.160 4.161 4.162	45 60 90 120 180	Маховик с шарами на спицах. Количество шаров n найдите по формуле $n = 360/\alpha$, их радиусы r, длина втулки равна 0,02 м. Массами спиц пренебречь.	

4.163. Маховик, имеющий момент инерции $J = 1\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$, раскручивают так, что его угловая скорость изменяется по закону $\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)$, где $\tau = 4\ \text{с}$, $\omega_0 = 31{,}4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Требуется найти: 1) момент внешних сил, действующих на маховик через 1 с после начала движения; 2) запасенную к этому моменту времени кинетическую энергию.

4.164. Найти момент инерции J тонкого однородного кольца радиусом $r = 20\ \text{см}$ и массой $m = 100\ \text{г}$ относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

4.165. Какой момент количества движения $L_{сут.}$ соответствует суточному вращению Земли?

4.166. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20\ \text{см}$ намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массой $m = 2\ \text{кг}$. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 1\ \text{м/с}^2$. Определить: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

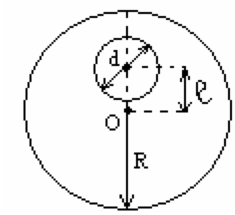
4.167. Кинетическая энергия вращающегося с частотой $n_1 = 3\ \text{с}^{-1}$ маховика равна 8,4 кДж. Во сколько раз увеличится частота вращения маховика за время t = 5 с, если на маховик начинает действовать ускоряющий момент силы $M = 100\ \text{Н} \cdot \text{м}$?

4.168. Маховик в виде однородного сплошного диска радиусом $R = 35\ \text{см}$ и массой $m = 2{,}1\ \text{кг}$ вращается с частотой $n = 360\ \text{мин}^{-1}$. После приложения к диску постоянной касательной силы торможения он останавливается за время $t = 2\ \text{мин}$. Определить работу A силы торможения и силу торможения F.

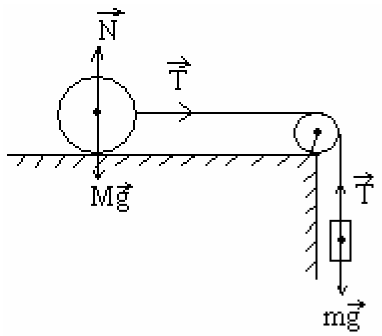
4.169. Вентилятор вращается с частотой $n = 420\ \text{мин}^{-1}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и остановился, сделав N = 100 оборотов. Определить работу сил торможения A и момент сил торможения M. Момент инерции вентилятора $J = 0{,}4\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

4.170. Медная проволока длиной $l = 80$ см и сечением $S = 8$ мм^2 закреплена одним концом в подвесном устройстве, а к ее другому концу прикреплен груз массой $m = 400$ г. Вытянутую проволоку с грузом, отклонив до высоты подвеса, отпускают. Считая проволоку невесомой, определить ее удлинение в нижней точке траектории движения груза. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа.

4.171. В однородном диске массой *M* и радиусом *R* вырезано круглое отверстие диаметром *d*, центр которого находится на расстоянии l от оси диска (см. рис.). Найти момент инерции *J* полученного тела относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска.



4.172. Система, состоящая из цилиндрического катка радиусом *R* и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя (см. рис.). Определить ускорение $\vec{a}$ центра инерции катка и силу натяжения нити $\vec{T}$. Какую скорость $\vec{\upsilon}$ приобретет гиря, если она спустится с высоты *h*? Масса цилиндра *M*, масса гири *m*, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

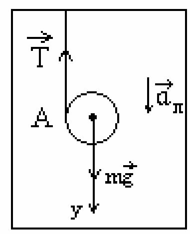


4.173. Однородный шар массой *M* и радиусом *R* скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости. Чему будет равна скорость $\vec{\upsilon}$ шара у основания наклонной плоскости? Определить величину силы трения покоя $\vec{F}_{тр.п.}$. Высота наклонной плоскости *H*, угол с горизонтом α.

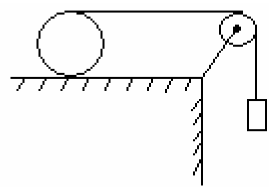
4.174. Через какое время *t* остановится раскрученный до угловой скорости ω диск радиусом *R*, если коэффициент трения между диском и плоскостью равен μ? Диск не участвует в поступательном движении.

4.175. Маховик, массу которого 5 кг можно считать распределенной по ободу радиуса $r = 20$ см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $n = 720$ мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через промежуток времени $\Delta t = 20$ с. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки.

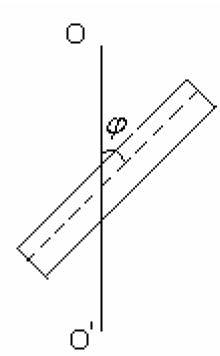
4.176. На полый тонкостенный цилиндр массой m намотана нить (тонкая и невесомая). Свободный конец ее прикреплен к потолку лифта, движущегося вниз с ускорением $\vec{a}_л$. Цилиндр предоставлен сам себе (см. рис.). Найти ускорение цилиндра относительно лифта и силу натяжения нити. Во время движения нить считать вертикальной.



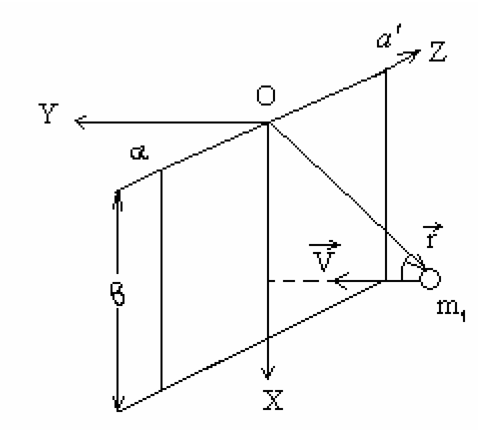
4.177. По горизонтальному столу может катиться без скольжения цилиндр массой m, на которой намотана нить. К свободному концу нити, переброшенному через легкий блок, подвешен груз той же массой m (см. рис.). Система предоставлена сама себе. Найти ускорение груза и силу трения между цилиндром и столом. Задачу решить для полого и сплошного цилиндров.



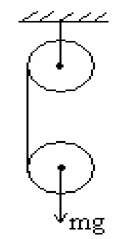
4.178. Однородный тонкий стержень длиной $l = 0{,}5$ м и массой $m = 1$ кг вращается под углом $\varphi = 30°$ относительно вертикальной оси OO' (см. рис.). Определить момент инерции стержня J относительно этой оси. При каком значении φ этот момент инерции максимален?



4.179. Тонкая прямоугольная пластина может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси aa', совпадающей с одной из ее коротких сторон (см. рис.).
Длинная сторона $в = 0{,}6$ м. В точку, находящуюся ниже оси вращения на расстоянии $x = 0{,}5$ м, ударяет пуля массой $m_1 = 10$ г, летевшая горизонтально перпендикулярно пластине со скоростью $\upsilon = 200$ м/с. Масса пластины $m_2 = 8$ кг, момент инерции относительно заданной оси $J = \frac{1}{3} m_2 в^2$. Какую угловую скорость приобретает пластина, если удар абсолютно упругий?

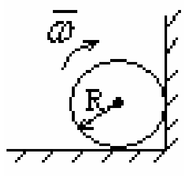


4.180. Система, показанная на рисунке, состоит из двух одинаковых однородных цилиндров, на которые симметрично намотаны две легкие нити. Найти ускорение оси нижнего цилиндра в процессе движения. Трения в оси верхнего цилиндра нет.



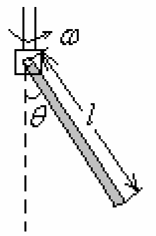
4.181. Однородный диск радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен μ?

4.182. Однородный цилиндр радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ. Найти: а) сколько времени будет вращаться цилиндр; б) сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.



4.183. Вертикально расположенный однородный стержень массой M и длиной l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая $m << M$, найти: а) скорость летевшей пули; б) приращение импульса системы пуля – стержень за время удара; в) на какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы пуля – стержень не изменился в процессе удара.

4.184. Однородный стержень длиной l может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов (см. рис.). Систему равномерно вращают с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Пренебрегая трением, найти угол θ между стержнем и вертикалью.



4.185. Однородный шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти ускорение центра шара и значение коэффициента трения μ, при котором скольжения не будет.

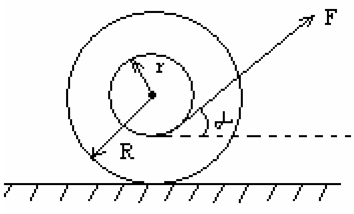
4.186. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой m_1 и на ней – однородный шар массой m_2. Коэффициент трения скольжения между шаром и поверхностью доски равен μ. К доске приложили постоянную горизонтальную силу *F*. С какими ускорениями будут двигаться доска и центр шара в отсутствие скольжения между ними? При каких значениях силы *F* скольжение отсутствует?

4.187. Однородный шар массой $m = 5$ кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через $t = 1{,}6$ с после начала движения.

4.188. Однородный стержень, падавший в горизонтальном положении с высоты *h*, упруго ударился одним концом о край массивной плиты. Найти скорость центра стержня сразу после удара.

4.189. Однородный шар радиусом *r* скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом *R*. Найти угловую скорость шара после отрыва от сферы. Начальная скорость шара пренебрежимо мала.

4.190. Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа *A* = 6,9 Дж. Длина стержня $l = 1$ м, площадь поперечного сечения $S = 1$ мм^2, модуль Юнга для алюминия *E* = 69 ГПа.



4.191. На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток, момент инерции которой относительно оси, проходящей через центр инерции, равен J_0, масса *m*. С каким ускорением *a* будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой *F* (см. рис.)? Катушка движется по поверхности стола без проскальзывания. Найти силу трения $F_{тр}$ между катушкой и столом.

5. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

События, происходящие с материальной точкой, характеризуются набором ее пространственных координат и моментом времени, т.е. совокупностью четырех величин (x, y, z, t). В соответствии с основными постулатами теории относительности при переходе из одной инерциальной системы отсчета K в другую K', движущуюся относительно первой, изменяются пространственные и временные соотношения между событиями. Например, если соответствующие оси систем координат параллельны, система K неподвижна, а система K' движется со скоростью υ_0, направленной вдоль оси OX (рис. 5.1), то эти изменения определяются *преобразованиями Лоренца:*

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{x'\upsilon_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{5.1}$$

Следствия из преобразований Лоренца:

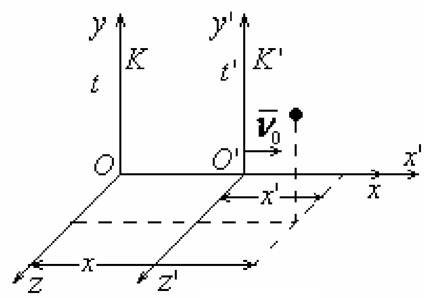


Рис. 5.1

1. Различие промежутков времени в системах K и K' между двумя событиями. Например, если Δt_0 – промежуток времени между двумя событиями, произошедшими с одной и той же материальной точкой в собственной системе отсчета (в которой материальная точка неподвижна), то промежуток времени Δt между теми же событиями в системе отсчета наблюдателя (лабораторной) определяется по формуле

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{5.2}$$

2. Различие размеров объекта в системах K и K'. Например, если в системе K' объект неподвижен (т.е. система является собственной) и его размеры задаются величинами Δx_0, Δy_0, Δz_0, то соответствующие размеры Δx, Δy, Δz в лабораторной системе K определяют по формулам

$$\Delta x = \Delta x_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}, \quad \Delta y = \Delta y_0, \quad \Delta z = \Delta z_0. \tag{5.3}$$

3. Релятивистский закон сложения скоростей

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x^{'} + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_x^{'}\upsilon_0}{c^2}}, \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon_y^{'}}{1 + \frac{\upsilon_x^{'}\upsilon_0}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}, \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z^{'}}{1 + \frac{\upsilon_x^{'}\upsilon_0}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}, \qquad (5.4)$$

где $\upsilon_x^{'}$, $\upsilon_y^{'}$, $\upsilon_z^{'}$ – проекции скорости объекта в системе отсчета *K′*; υ_x, υ_y, υ_z – проекции скорости объекта в системе отсчета *K* (см. рис. 5.1).

Наряду с меняющимися физическими величинами при смене системы отсчета существуют и *инвариантные* (неизменные) величины. Одной из них является скорость света $c = c'$. Инвариантен и пространственно-временной интервал между двумя событиями: $\Delta S = \Delta S'$. Квадрат интервала определяется формулой

$$(\Delta S)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Инвариантность интервала означает, что

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2.$$

Если система *K′* является собственной и движется со скоростью υ_0, направленной вдоль оси *OX* (см. рис. 5.1), то эта формула принимает вид

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t_0)^2. \qquad (5.5)$$

Одним из основных моментов при решении задач на следствия из преобразований Лоренца является определение собственной и движущейся систем отсчета объектов условия задачи.

В отличие от известных понятий нерелятивистского импульса ($\vec{P} = m\vec{\upsilon}$) и нерелятивистской кинетической энергии $\left(\vec{T} = \frac{m\upsilon^2}{2}\right)$ в релятивистской динамике импульс $\vec{P}$ и релятивистская энергия E определяются следующими формулами:

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (5.6)$$

где m_0 – масса покоящейся частицы, m – масса движущейся частицы, υ – ее скорость, c – скорость света.

Из этих формул следует:

- масса частицы зависит от скорости;
- масса и энергия частицы являются эквивалентными величинами.

Из формул (5.6) также следует, что для неподвижной частицы релятивистская энергия равна энергии покоя $E_0 = m_0 c^2$.

Поэтому кинетическая энергия частицы T равна разности релятивистской энергии частицы и ее энергии покоя:

$$T = E - E_0 = E - m_0 c^2. \tag{5.7}$$

При использовании закона сохранения релятивистской энергии в системе частиц необходимо иметь в виду, что сумма энергий покоя всех частиц системы и сумма их кинетических энергий по отдельности не сохраняются. При соответствующих условиях за счет энергии покоя частиц может возникнуть дополнительная кинетическая энергия, и, наоборот, за счет кинетической энергии может появиться дополнительная масса покоя, т.е. *рождаются* новые частицы.

Во многих случаях решение задач можно упростить, если использовать следствия из формул (5.6) и (5.7):

$$P = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{T(2m_0 c^2 + T)}; \tag{5.8}$$

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4}; \tag{5.9}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{P} c^2}{E}. \tag{5.10}$$

Для частиц, не имеющих массы покоя (энергии покоя), эти формулы преобразуются к виду

$$P = \frac{T}{c}; \quad E = Pc = T; \quad \upsilon = c. \tag{5.11}$$

Для удобства расчета энергетического баланса в реакциях с элементарными частицами используют специальную единицу энергии – *электронвольт* (эВ) и *мегаэлектронвольт* (МэВ).

$$1\,эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Дж; \quad 1\ МэВ = 10^6\ эВ$$

Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

где m – масса частицы, υ – ее скорость.

Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2, \quad Pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}$$

где m_0 – масса покоящейся частицы; E – полная энергия; T – кинетическая энергия; P – релятивистский импульс.

5.2. Примеры решения задач

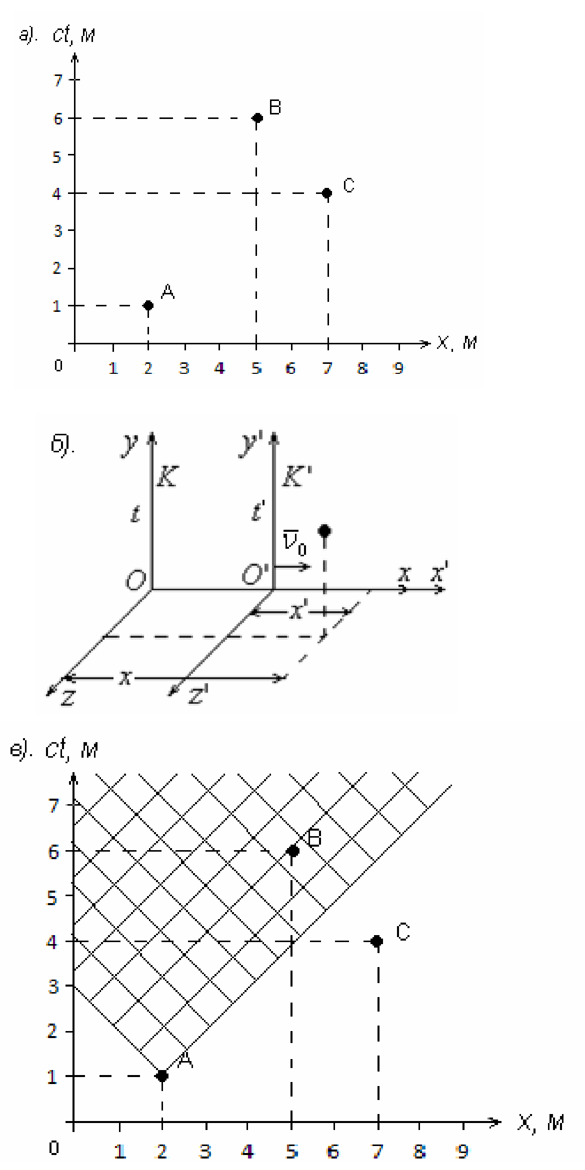


Рис. 5.2

1. На диаграмме пространства – времени (рис. 5.2, *а*) показаны три события *A*, *B*, *C*, которые произошли на оси *OX* некоторой инерциальной системы отсчета. Считая, что выполняются условия, приведенные на рис. 5.2, *б*, найти: 1) промежуток времени между событиями *A* и *B* в системе отсчета, где оба события произошли в одной точке; 2) расстояние между точками *A* и *C* в системе отсчета, где эти события одновременны.

Решение. Прежде всего необходимо разобраться с диаграммой. Ось ординат соответствует оси времени, но масштаб необычен. Для удобства время умножено на скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. При этом размерность стала соответствовать размерности пространственной координаты. С помощью такой диаграммы удобно анализировать закон движения $x = x(t)$ и устанавливать причинно-временную связь между двумя событиями. Как известно, самая «быстрая связь» (передача информации и т.п.) между двумя событиями может быть осуществлена с помощью светового импульса. Законы движения двух световых импульсов, вышедших их точки *A* в положительном направлении оси *OX*, на диаграмме представляют собой две прямые под углами $\pm 45^0$ к оси *OX* (см. рис. 5.2, *в*). Линии законов движения «объектов», вышедших из точки *A* с меньшими скоростями ($\upsilon < c$), будут расположены внутри заштрихованной области (светового конуса).

Точка *B* находится внутри светового конуса точки *A*. Поэтому между событиями *A* и *B* может быть причинная связь. На событие *C*, находящееся вне светового конуса, событие *A* повлиять не может, так как для этого потребовалась бы скорость $\upsilon > c$.

1. Используем инвариантность пространственно-временного интервала (5.5). При этом учтем, что $(\Delta y_{AB})^2 = (\Delta y'_{AB})^2 = 0$ и $(\Delta z_{AB})^2 = (\Delta z'_{AB})^2 = 0$. Условие одноместности событий *A* и *B* в системе К′ запишется в виде $(\Delta x'_{AB})^2 = 0$ и $c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2 = c^2(\Delta t'_{AB})^2$.

Тогда

$$\Delta t'_{AB} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2}\,.$$

Из диаграммы следует, что $ct_A = 1$ м, $x_A = 2$ м, $ct_B = 6$ м, $x_B = 5$ м.

После подстановки этих значений и вычислений получим

$$(\Delta t'_{AB}) = 1{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

(Если события *A* и *B* относятся к одному объекту, то найденное время является собственным временем данного объекта, например, временем жизни элементарной частицы).

2. Условию одновременности событий *A* и *C* в некоторой системе отсчета *K″* (отличной от *K′* и *K*) соответствует $\Delta t'' = 0$. Используя инвариантность пространственно-временного интервала, запишем

$$c^2(\Delta t_{AC})^2 - (\Delta x_{AC})^2 = -(\Delta x''_{AC})^2.$$

Тогда

$$\Delta x''_{AC} = \sqrt{(\Delta x_{AC})^2 - c^2(\Delta t_{AC})^2} = 4 \text{ м}.$$

(Если события *A* и *C* относятся к крайним коэффициентам одного и того же протяженного объекта, то полученное значение соответствует размеру объекта в системе отсчета К" (условием измерения длины движущегося объекта является одновременность фиксации координат его крайних точек).

2. Электрический ток в линейном проводнике можно смоделировать движением цепочки электронов с некоторой скоростью υ_0 на фоне цепочки неподвижных положительных ионов. В целом проводник электронейтрален. Это означает, что расстояние между соседними электронами L равно расстоянию между соседними ионами $L = L_+ = L_0$. Найти соответствующие расстояния в системе отсчета, движущейся вместе с электронами со скоростью υ.

Решение. Эта задача удачно иллюстрирует «коварство» формулы (5.3). Если ее одинаково применять для электронов и ионов, то получится один и тот же результат. Необходимо учесть, что для ионов собственной является лабораторная система отсчета *K*, а для электронов – система отсчета *K′*, движущаяся вместе с ними. Поэтому в системе K' расстояние между движущимися в ней ионами будет определяться формулой (5.3)

$$L_{+}^{'} = L_0\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}.$$

Для электронов необходимо использовать обратное преобразование

$$L_{-}^{'} = \frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$$

(различие расстояний между соседними положительными ионами и соседними отрицательными электронами в движущейся системе отсчета свидетельствует о разной концентрации зарядов в этой системе отсчета. Если при этом величина отдельного заряда не изменяется (инвариантна), то электронейтральность проводника в движущейся системе отсчета нарушается, и в ней появится электрическое поле).

3. Протон, имеющий скорость относительно центра галактики, равную $\upsilon = 0,999\ c$ ($c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света), пересек ее по диаметру, который равен 10^5 световых лет. За какое время протон совершит это путешествие «со своей точки зрения» (т.е. в собственной системе отсчета)?

Решение. Прежде всего выразим заданный размер галактики (в ее собственной системе отсчета) в метрах: $d = c\tau$, где $\tau = 10^5$ лет = $10^5\cdot 365\cdot 24\cdot 3600$ с. На этот путь протон затратит время $\Delta t = \frac{d}{\upsilon} = \frac{c\tau}{\upsilon}$. Это время между двумя событиями, произошедшими с протоном, «началом» и «концом» пути.

В собственной системе время между этими событиями находим по формуле (5.2)

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Этот же результат можно получить, используя инвариантность пространственно-временного интервала. Запишем его для двух событий – «начало» и «конец» путешествия в собственной системе отсчета галактики и в собственной системе отсчета протона:

$$c^2\Delta t^2 - d^2 = c^2\Delta t_0^2.$$

После подстановки заданных значений t и d в обоих случаях получим

$$t_0 = \tau\sqrt{\frac{c^2}{\upsilon^2}-1} = \tau\sqrt{\frac{c^2}{0,999^2 c^2}-1} \approx 4,5\cdot 10^3 \text{ лет}.$$

4. Микрочастица, имеющая скорость $\upsilon = 0{,}1\,c$, одновременно испустила два фотона – один в направлении своего движения, другой в противоположном направлении. Найти скорость фотонов в лабораторной системе отсчета.

Решение. Если фотоны в системе отсчета микрочастицы имеют скорости $+C$ и $-C$, то в лабораторной системе отсчета их скорости будут соответственно равны (см. формулу (5.4)

$$\upsilon_+ = \frac{c+\upsilon}{1+\dfrac{c\upsilon}{c^2}} = c, \quad \upsilon_- = \frac{-c+\upsilon}{1-\dfrac{c\upsilon}{c^2}} = c$$

(Если воспользоваться преобразованиями Галилея, то получится $\upsilon_x = \upsilon \pm c$. Такой результат противоречит постулату теории относительности об инвариантной скорости света).

5. Космический корабль движется со скоростью $\upsilon = 0{,}9\ c$ по направлению от центра Земли. Какое расстояние l пройдет этот корабль в системе отсчета, связанной с Землей (система *K*), за промежуток времени $\Delta t' = 1\ c$, отсчитанный по часам, находящимся в космическом корабле (системе *K'*)? На какую величину l' возросло расстояние корабля от Земли с точки зрения космонавтов? Суточным вращением Земли и ее движением вокруг Солнца пренебречь.

Дано: $\upsilon = 0{,}9\ c$, $\Delta t' = 1\ \text{с}$.

Найти: l, l'.

Решение. Итак, в космическом корабле прошло время $\Delta t'$, по часам же на Земле прошло время

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

За это время корабль удалился от Земли на расстояние

$$l = \upsilon\Delta t = \frac{\upsilon\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad l = \frac{0{,}9\cdot 3\cdot 10^8\cdot 1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 6{,}19\cdot 10^8\ \text{м} = 619\ \text{Мм}.$$

С точки зрения космонавтов Земля удаляется с той же скоростью υ, так что за время $\Delta t'$ расстояние до нее возрастет на

$$l' = \upsilon\Delta t' = 0{,}9\cdot 3\cdot 10^8\cdot 1 = 2{,}7\cdot 10^8 = 270\ \text{Мм}.$$

Различие этих расстояний – иная форма релятивистского сокращения длины.

6. С какой скоростью тело должно лететь навстречу наблюдателю, чтобы его линейный размер уменьшился на 7 %?

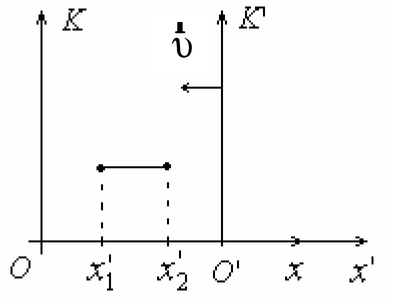


Рис. 5.3

Дано: $l = 0{,}93 l_0$.

Найти: υ.

Решение. Систему отсчета К′ свяжем с телом, тогда $x_2' - x_1' = l_0$ – собственные размеры тела вдоль направления движения (рис. 5.3). Если систему *К* связать с наблюдателем, то размер тела в этой системе $l = x_2 - x_1$, причем координаты x_2 и x_1 должны быть измерены в один и тот же момент времени по часам системы *К*, т.е. $t_1 = t_2$.

С учетом взаимного направления движения систем *К* и *К*′ преобразования Лоренца для координат запишутся в виде

$$x_2' = \frac{x_2 + \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x_1' = \frac{x_1 + \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

откуда $l_0 = x_2' - x_1' = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \dfrac{l}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, и искомая скорость

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = 0{,}368\ c.$$

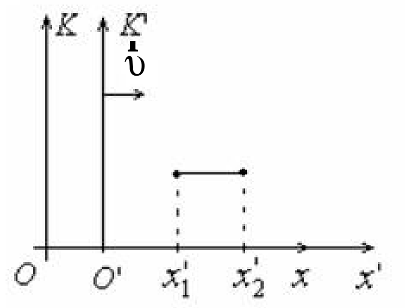


Рис. 5.4

7. Определить собственную длину стержня l_0, если для наблюдателя, пролетающего со скоростью $\upsilon = 0{,}85\ c$, его длина равна 1 м.

Дано: $l = 1$ м, $\upsilon = 0{,}85\ c$.

Найти: l_0.

Решение. Систему отсчета *К*′ свяжем со стержнем, систему *К* – с наблюдателем. Пусть система К′ движется в положительном направлении оси *X* системы *К* (рис. 5.4). Согласно преобразованиям Лоренца координаты концов стержня

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t_2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где $t_1 = t_2$ (измерения координат концов стержня проводятся в один и тот же момент по часам данной системы).

Собственная длина стержня

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 1{,}9 \text{ м}.$$

8. Электрон имеет скорость $\upsilon = 0{,}5\,c$. Во сколько раз нужно ее увеличить для того, чтобы импульс электрона удвоился?

Дано: $\upsilon = 0{,}5\,c$, $P' = 2P$.

Найти: n.

Решение. Искомую величину запишем в виде $n = \frac{u}{\upsilon}$, где u – новая скорость электрона. Используя формулу (5.6), условие задачи перепишем в виде

$$\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 2\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Произведя замену $u = n\upsilon$ и соответствующие сокращения, получим

$$\frac{n}{\sqrt{1-\frac{n^2\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \text{ или } 2\sqrt{1-\frac{n^2\upsilon^2}{c^2}} = n\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

После преобразований находим

$$n = \frac{2}{\sqrt{1+3\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \approx 1{,}5.$$

9. Над электроном, летящим со скоростью $\upsilon = 0{,}1\,c$, была совершена работа $A = 8{,}2\cdot 10^{-14}$ Дж. Найти изменение скорости, импульса и кинетической энергии электрона.

Дано: $\upsilon = 0{,}1\,c$, $A = 8{,}2\cdot 10^{-14}$ Дж.

Найти: $\Delta\upsilon$, ΔP, ΔT.

Решение. Начальные значения импульса P_1 и энергии E_1 находим с помощью формул (5.6)

$$P_1 = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

При заданном значении скорости знаменатели этих выражений ≈ 1, тогда

$$P_1 = m_0\upsilon = 0{,}1 m_0 c; \quad E_1 = m_0 c^2 = 0{,}511 \text{ МэВ} = 8{,}2\cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

Обратим внимание, что числовые значения A и E_1 совпадают и равны m_0c^2.

Совершаемая над электроном работа идет на изменение его кинетической энергии (так как энергия покоя электрона не может измениться), т.е. $A = \Delta T$. Соответственно увеличится и полная релятивистская энергия $E_2 = E_1 + A$. Учитывая, что числовые значения A и E_1 совпадают и равны энергии покоя m_0c^2, можно записать $E_2 = 2m_0c^2$.

В соответствии с формулой (5.7) новая кинетическая энергия

$$T_2 = E_2 - m_0c^2 = m_0c^2.$$

Новые значения импульса и скорости определим по формулам (5.8) и (5.10):

$$P_2 = \frac{1}{c}\sqrt{T_2(2m_0c^2 + T_2)} = m_0c\sqrt{3}; \quad \upsilon_2 = \frac{P_2c^2}{E_2} = c\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$\Delta\upsilon = c\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}1\right) = 0{,}77\ c.$$

$$\Delta P = m_0c(\sqrt{3} - 0{,}1) = 4{,}5\cdot 10^{-22}\ \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

10. Покоящаяся нейтральная частица распалась на протон P^+ с кинетической энергией $T_P = 5{,}3$ МэВ и π^--мезон. Найти массу распавшейся частицы.

Решение. Запишем реакцию $X \to P^+ + \pi^-$, где X – неизвестная частица. Воспользуемся законами сохранения энергии и импульса, в которых фигурируют только характеристики частиц для начального и конечного состояний. В исходной ситуации распадающаяся частица покоилась, ее импульс равен нулю. Тогда закон сохранения импульса запишем в виде

$$O = \vec{P}_P + \vec{P}_X. \quad (1)$$

Очевидно, что импульсы протона и π^--мезона равны по модулю и противоположно направлены, т.е. $P_P = P_\pi$. Тогда, используя формулу (5.8), получим

$$T_\pi(2m_\pi c^2 + T_\pi) = T_P(2m_P c^2 + T_P).$$

Отсюда находим кинетическую энергию π^--мезона. Для этого нужно решить уравнение (1) относительно T_π – неизвестной кинетической энергии π^--мезона.

$$T_\pi^2 + 2m_\pi c^2 T_\pi - T_P(2m_P c^2 + T_P) = 0.$$

Решая его, получим $T_\pi = 32$ МэВ. Тогда массу (энергию покоя) распавшейся частицы находим из закона сохранения релятивистской энергии, которая вначале была равна энергии покоя распавшейся частицы $M_X c^2$, а после распада стала равна сумме энергий покоя продуктов реакции и их кинетических энергий:

$$M_X c^2 = T_P + m_\pi c^2 + T_\pi .$$

Используя справочные данные, находим энергию покоя соответственно протона $m_P c^2 = 938{,}26$ МэВ и π^--мезона $m_\pi c^2 = 139{,}6$ МэВ и вычисляем энергию покоя распавшейся частицы

$$M_X c^2 = m_P c^2 + T_P + m_\pi c^2 + T_\pi = 1115 \text{ МэВ}.$$

Получив ответ, идентифицируем эту частицу как Λ-гиперон.

11. Летящий со скоростью $\upsilon = 0{,}87\,c$ π^+-мезон распадается с образованием μ^+-мезона и нейтрино ν по реакции $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$. Найти энергию нейтрино и угол между направлениями разлета продуктов реакции, если кинетическая энергия μ^+-мезона равна $73{,}5$ МэВ.

Решение. Схема реакции приведена на рис. 5.5. Угол θ между направлениями разлета будем искать как угол между векторами импульсов продуктов реакции.

Законы сохранения энергии и импульса для этой реакции имеют вид

$$\begin{cases} E_\pi = E_\mu + E_\nu \\ \vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu + \vec{P}_\nu \end{cases}$$

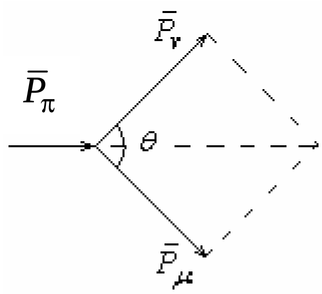


Рис. 5.5

Энергию π^+-мезона находим по формуле (5.6)

$$E_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} .$$

Подставив в нее числовое значение скорости $\upsilon = 0{,}87\,c$, получим $E_\pi = 2 m_\pi c^2$. Таким образом, энергия π^+-мезона равна двум энергиям покоя π^+-мезона. Тогда на долю кинетической энергии приходится энергия, равная его энергии покоя. Из закона сохранения энергии находим энергию нейтрино:

$$E_\nu = E_\pi - E_\mu = 2 m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - T_\mu = 100 \text{ МэВ}.$$

Заметим, что у нейтрино энергия покоя равна нулю и полученное значение соответствует кинетической энергии нейтрино.

Для определения угла θ между направлениями разлета продуктов реакции воспользуемся теоремой косинусов (см. рис. 5.5).

$$P_{\pi}^2 = P_{\mu}^2 + P_{\nu}^2 + 2P_{\mu}P_{\nu}\cos\theta,$$

где θ – искомый угол.

Тогда

$$\cos\theta = \frac{P_{\pi}^2 - P_{\mu}^2 - P_{\nu}^2}{2P_{\mu}P_{\nu}}.$$

Импульсы каждой частицы определим по формуле (5.8)

$$P_{\pi} = \frac{1}{c}\sqrt{T_{\pi}(2m_{\pi}c^2 + T_{\pi})} = \frac{1}{c}m_{\pi}c^2\sqrt{3} = \frac{241{,}8\ \text{МэВ}}{c};$$

$$P_{\mu} = \frac{1}{c}\sqrt{T_{\mu}(2m_{\mu}c^2 + T_{\mu})} = \frac{144{,}7\ \text{МэВ}}{c}; \quad P_{\nu} = \frac{T_{\nu}}{c} = \frac{100\ \text{МэВ}}{c}.$$

Произведем вычисление угла:

$$\cos\theta = \frac{241{,}7^2 - 144{,}7^2 - 100^2}{2 \cdot 144{,}7 \cdot 100} = 0{,}951; \quad \theta = 18^{\mathbf{0}}.$$

12. Кинетическая энергия частицы в $n = 2$ раза меньше ее энергии покоя. Определить скорость движения частицы.

Дано: $\dfrac{E_0}{T} = n = 2$.

Найти: υ.

Решение. Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2, \tag{1}$$

где m – масса частицы.

Кинетическая энергия частицы

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1\right). \tag{2}$$

Учитывая формулу (1) и условие задачи, можем записать

$$T = \frac{mc^2}{n}. \tag{3}$$

Приравнивая выражения (2) и (3), получим

$$\frac{mc^2}{n} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right),$$

откуда искомая скорость частицы $\upsilon = c\sqrt{1-\frac{n^2}{(n+1)^2}} = 0{,}745\ c$.

13. Определить кинетическую энергию протона, если его релятивистский импульс $P = 2\cdot 10^{-18}$ Н · с. Масса протона $m_P = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг.

Дано: $P = 2\cdot 10^{-18}$ Н · с, $m_P = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: T.

Решение. Релятивистский импульс протона

$$P = \frac{m_P\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad (1)$$

где m_P – масса протона; υ – его скорость.

Кинетическая энергия релятивистского протона

$$T = m_P c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right). \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) найдем связь между кинетической энергией и релятивистским импульсом протона

$$Pc = \sqrt{T(T + 2m_P c^2)},$$

откуда искомая кинетическая энергия протона

$$T = m_P c^2 + \sqrt{m_P^2 c^4 + P^2 c^2} = 4{,}82 \text{ ГэВ}.$$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

5.1 – 5.28. Относительное приращение длины стержня, если ему сообщить скорость $\upsilon = Kc$ (где c – скорость света) в направлении, образующем с осью покоившегося стержня угол α, равно $\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)100\ \%$. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 5.1. Выполнить дополнительное задание.

Таблица 5.1

Условия к задачам 5.1 – 5.28

<table>
<tr><th>Номер задачи</th><th>K</th><th>α, град</th><th>$\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)100\ \%$</th><th>Построить график зависимости</th></tr>
<tr><td>5.1
5.2
5.3
5.4</td><td>0,2
0,4
0,6
0,8</td><td>30</td><td>?
?
?
?</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$</td></tr>
<tr><td>5.5
5.6
5.7
5.8</td><td>0,5</td><td>?
?
?
?</td><td>–11,725
–7,626
–0,378
–3,175</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(a)$</td></tr>
<tr><td>5.9
5.10
5.11
5.12</td><td>?
?
?
?</td><td>25</td><td>–3,767
–8,695
–0,928
–16,08</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(K)$</td></tr>
<tr><td>5.13
5.14
5.15
5.16</td><td>0,25</td><td>0
25
50
75</td><td>?
?
?
?</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(a)$</td></tr>
<tr><td>5.17
5.18
5.19
5.20</td><td>0,35</td><td>?
?
?
?</td><td>–1,543
–6,128
–0,0465
–4,198</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(a)$</td></tr>
<tr><td>5.21
5.22
5.23
5.24</td><td>?
?
?
?</td><td>10</td><td>–1,959
–8,086
–0,486
–4,464</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(K)$</td></tr>
<tr><td>5.25
5.26
5.27
5.28</td><td>0,15
0,3
0,45
0,6</td><td>45</td><td>?
?
?
?</td><td>$\frac{\Delta l}{l_0} = f(\upsilon)$</td></tr>
</table>

5.29 – 5.56. Промежуток собственного времени между двумя событиями в системе отсчета, движущейся со скоростью $\upsilon = Kc$, равен $\Delta\tau$. В системе отсчета наблюдателя, принятой за неподвижную, между этими же событиями прошел промежуток времени, равный Δt. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Условия к задачам 5.29 – 5.56

Номер задачи	$K = \dfrac{\upsilon}{c}$	$\Delta\tau$	Δt
5.29	0,1	?	40 с
5.30	0,2	?	
5.31	0,3	?	
5.32	0,4	?	
5.33	?	43,3 с	50 с
5.34	?	46,84 с	
5.35	?	48,99 с	
5.36	?	49,75 с	
5.37	0,5	?	20 сут
5.38		?	40 сут
5.39		?	60 сут
5.40		?	80 сут
5.41	0,6	10 недель	?
5.42		20 недель	?
5.43		30 недель	?
5.44		40 недель	?
5.45	?	20 лет	20 лет 7 мес. 26 дней
5.46	?		30 лет 2 мес. 26 дней
5.47	?		25 лет
5.48	?		21 год 9 мес. 26 дней
5.49	0,2	?	3 мес.
5.50	0,4	?	6 мес.
5.51	0,6	?	9 мес.
5.52	0,8	?	12 мес.
5.53	0,25	5 лет	?
5.54	0,5		?
5.55	0,75		?
5.56	0,9		?

5.57 – 5.84. Найти релятивистскую массу частицы, движущейся со скоростью $\upsilon = Kc$, и ее полную энергию согласно номеру задачи в табл. 5.3, если известна масса покоя частицы m_0 (m_e – масса покоя электрона). Какую часть полной энергии частицы $E_{пол}$ составляет ее кинетическая энергия $E_{кин}$?

Таблица 5.3

Условия к задачам 5.57 – 5.84

Номер задачи	Частица	m_0, кг	K	Построить график
5.57 5.58 5.59 5.60	Электрон	$0,911 \cdot 10^{-30} = m_e$	0,7 0,8 0,9 0,99	$m = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.61 5.62 5.63 5.64	Протон	$1,67265 \cdot 10^{-27}$	0,7 0,8 0,9 0,99	$E_{полн} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.65 5.66 5.67 5.68	*K*-мезон	$970\ m_e$	0,7 0,8 0,9 0,99	$\frac{E_{кин}}{E_{полн}} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.69 5.70 5.71 5.72	π^0-мезон	$264\ m_e$	0,7 0,8 0,9 0,99	$E_{кин} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.73 5.74 5.75 5.76	Нейтрон	$1,67495 \cdot 10^{-27}$	0,7 0,8 0,9 0,99	$\frac{m}{m_0} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.77 5.78 5.79 5.80	π^+-мезон	$273\ m_e$	0,7 0,8 0,9 0,99	$E_{полн} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$
5.81 5.82 5.83 5.84	Мюон (μ-мезон)	$207\ m_e$	0,7 0,8 0,9 0,99	$\frac{E_{кин}}{E_{полн}} = f\left(\frac{\upsilon}{c}\right)$

5.85. Кинетическая энергия электрона $T = 1$ МэВ. Определить скорость электрона (1 эВ $= 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж).

5.86. Импульс релятивистской частицы $P = mc$. С какой скоростью движется частица? Чему равна полная и кинетическая энергия частицы?

5.87. Космический корабль летит со скоростью $\upsilon = 0{,}8\,c$ относительно Земли. Определить промежуток времени τ', отсчитанный по часам на Земле, если по корабельным часам между двумя происшедшими на корабле событиями проходит промежуток времени $\tau = 1$ год.

5.88. Определить скорость нестабильной частицы, если ее время жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в $n = 1{,}8$ раз.

5.89. Долетит ли до поверхности Земли возникшая на высоте $h = 4$ км нестабильная частица, обладающая собственным временем жизни $\tau = 4{,}5$ мкс и летящая со скоростью $\upsilon = 0{,}95\,c$ по направлению к Земле?

5.90. Космическая платформа движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8\,c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии $l_0 = 150$ м друг от друга. Определить промежуток времени τ' между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.
5.91. С космического корабля, приближающегося с Земле со скоростью $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$, по ходу движения корабля стартовала ракета со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}5\,c$. С какой скоростью u ракета приближается к Земле?

5.92. Два фотона движутся навстречу друг другу со скоростями, равными c относительно неподвижных звезд. Определить скорость сближения фотонов.

5.93 – 5.117. В табл. 5.4 приведены результаты измерений пространственно-временных координат трех событий *A*, *B* и *C*, которые произошли на оси *OX* некоторой инерциальной системы отсчета с двумя релятивистскими частицами. Ответить на вопросы: 1. Какие два события имеют отношение к одной из частиц? 2. Каково собственное время жизни этой частицы, если определенные в п. 1. события соответствуют рождению и распаду частицы? 3. Какова скорость этой частицы? 4. Существует ли система отсчета, в которой два из трех событий произошли одновременно? Каково расстояние между одновременными событиями в этой системе отсчета?

Таблица 5.4

Условия к задачам 5.93 – 5.117

Номер задачи	Пространственно-временные координаты, см					
	x_A	ct_A	x_B	ct_B	x_C	ct_c
5.93	0	1	4	6	–5	5
5.94	–6	5	–1	1	3	6
5.95	–1	1	–4	2	2	5
5.96	0	0	3	1	5	4
5.97	1	4	3	1	7	0
5.98	–1	3	3	6	5	2
5.99	–1	2	–6	6	3	7
5.100	–1	0	–4	1	3	4
5.101	0	2	–2	5	4	1
5.102	3	2	–1	3	–3	6
5.103	3	3	7	6	9	2
5.104	–1	6	–5	3	–6	5
5.105	–5	4	0	0	5	5
5.106	0	2	3	1	5	5
5.107	–2	1	1	2	3	6
5.108	1	2	–1	6	–5	3
5.109	–2	3	–3	5	2	6
5.110	2	2	6	7	–3	6
5.111	2	1	4	5	–1	2
5.112	0	2	–3	1	2	5
5.113	2	5	3	3	7	5
5.114	3	1	0	2	5	5
5.115	1	1	3	5	–2	2
5.116	1	0	3	4	–2	1
5.117	–3	0	0	1	2	3

5.118. Определить релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия $E = 1{,}5$ ГэВ, а скорость $\upsilon = 0{,}5\,c$.

5.119. Определить скорость частицы, если ее полная энергия в $n = 2{,}5$ раза больше ее энергии покоя.

5.120. Стержень пролетает мимо метки, неподвижной в *K*-системе отсчета. Время полета $\Delta t = 20$ нс в системе *K*. В системе же отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

5.121. В *К*-системе отсчета мюон, движущийся со скоростью $\upsilon = 0{,}99\,c$, пролетел от места своего рождения до точки распада $l = 3$ км. Определить: а) собственное время жизни этого мюона; б) расстояние, которое пролетел мюон в системе отсчета *К* «с его точки зрения».

5.122. Две релятивистских частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета, причем одна со скоростью υ_1, а другая со скоростью υ_2. Найти их относительную скорость.

5.123. Протон движется с импульсом $P = 10\ \frac{\text{ГэВ}}{c}$, где c – скорость света. На сколько процентов отличается скорость этого протона от скорости света?

5.124. Имеется прямоугольный треугольник, у которого катет $a = 5$ м и угол между этим катетом и гипотенузой $\alpha = 30^{\mathbf{0}}$. Найти в системе отсчета *K′*, движущейся относительно этого треугольника со скоростью $\upsilon = 0{,}866\ c$ вдоль катета a: а) соответствующее значение угла α'; б) длину l' гипотенузы и ее отношение к собственной длине.

6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

6.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Движение сплошной среды описывают двумя способами:

1-й – задают положение и скорость каждой частицы как функцию времени;

2-й – задают скорости частиц, которые проходят через каждый физический малый элемент объема, как функцию времени.

Во втором случае в определенный момент времени получается картина мгновенного распределения скоростей – *поле скоростей*.

Если поле скоростей не изменяется с течением времени, то движение сплошной среды называют *стационарным*.

Линия, касательные к которой указывают направление скоростей частиц в точках касания, называется *линией тока*.

Часть среды, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока* (рис. 6.1).

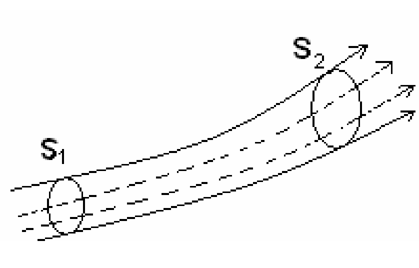


Рис. 6.1

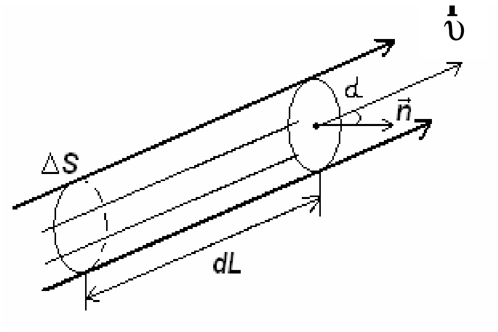


Рис. 6.2

Частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Выберем в сплошной среде небольшой элемент плоской поверхности с площадью ΔS, в пределах которой вектор скорости $\vec{\upsilon}$ можно считать постоянным (рис. 6.2).

Границы этого элемента являются направляющей линией трубки тока. За время *dt* через выбранный элемент поверхности пройдут все частицы, находящиеся внутри трубки тока длиной $dL = \upsilon dt$. Поэтому объем среды, пересекающей выбранный элемент поверхности ΔS за время *dt*, равен $(\Delta S\cos\alpha)dL = (\Delta S\cos\alpha)\upsilon dt$.

Соответственно определим его массу:

$$dm = \rho(\Delta S\cos\alpha)dL = \rho\upsilon(\Delta S\cos\alpha)dt, \qquad (6.1)$$

где ρ – плотность среды, α – угол между вектором скорости $\vec{\upsilon}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к выбранному элементу поверхности.

Величину

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{\upsilon} \qquad (6.2)$$

называют *плотностью потока* массы, а величину

$$\Delta\Phi = j\Delta S\cos\alpha \qquad (6.3)$$

называют *потоком массы* через элемент поверхности ΔS.

Любую замкнутую поверхность можно представить как сумму элементов поверхности ΔS_i. Тогда изменение массы внутри замкнутой поверхности в единицу времени будет определяться выражением

$$-\frac{dm}{dt} = \sum_i j_i \Delta S_i \cos\alpha_i,$$

или в интегральной форме

$$-\frac{dm}{dt} = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}, \qquad (6.4)$$

где отрицательный знак в левой части обусловлен тем, что при вытекании среды наружу масса уменьшается, а $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$.

Данное уравнение называется *уравнением непрерывности*. Аналогичные уравнения можно записать для любой физической величины, для которой выполняется закон сохранения (энергии, электрического заряда и т.д.).

В стационарном случае изменение массы внутри объема равно нулю и уравнение непрерывности принимает вид

$$\oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = 0. \qquad (6.5)$$

Применив это уравнение для трубки тока (см. рис. 6.1) в стационарном случае, получим *уравнение неразрывности струи*

$$\rho_1 \upsilon_1 S_1 = \rho_2 \upsilon_2 S_2. \qquad (6.6)$$

Сплошная среда, в которой полностью отсутствует внутреннее трение (вязкость), называется *идеальной*. В такой среде вдоль любой линии тока стационарно текущей *несжимаемой* среды выполняется *уравнение Бернулли*

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}, \qquad (6.7)$$

где P – давление, h – вертикальная координата элемента объема среды.

Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения механической энергии. Поэтому алгоритм его использования при решении задач аналогичен алгоритму решения задач на закон сохранения механической энергии.

Из уравнения Бернулли (при $h_1 = h_2$ – горизонтальная трубка тока) и уравнения неразрывности получают, что скорость воды в потоке равна

$$\upsilon_1 = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}},$$

где $\Delta P = P_1 - P_2$; P_1 – давление в широкой части трубы, P_2 – в узкой, а расход воды через единичное сечение

$$r = \frac{P_1}{S_1} = \frac{\rho \upsilon_1 S_1}{S_1} = \rho \upsilon_1 = S_2 \sqrt{\frac{2\rho \Delta P}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Зная сечения трубки S_1 и S_2, разность давлений ΔP и плотность жидкости ρ, можно найти скорость потока жидкости и расход жидкости через единичное сечение.

В реальных жидкостях и газах в большей или меньшей степени проявляется внутреннее трение между слоями среды, или вязкость. Например, если между двумя параллельными достаточно длинными пластинами (их длина $L >> d$, где d – расстояние между пластинами) находится жидкость (или газ),

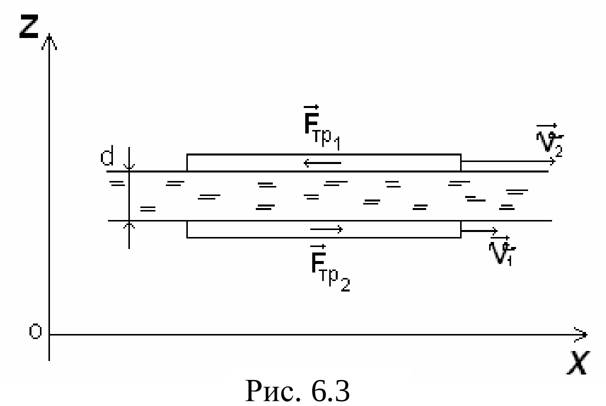


Рис. 6.3

то при движении пластин на каждую из них действует сила вязкого трения (рис. 6.3), модуль которой определим по *формуле Ньютона*

$$F_{тр} = \eta \frac{|\upsilon_2 - \upsilon_1|}{d} S, \qquad (6.8)$$

где S – площадь пластины; η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости, или просто вязкостью жидкости (газа) (динамическая вязкость); υ_1 и υ_2 – скорости пластин.

Формула (6.8) определяет не только силы, действующие на пластины, но и силу трения между соприкасающимися слоями жидкости.

При этом формула (6.8) используется в общем виде

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dZ} \right| S, \qquad (6.9)$$

где величина $\frac{d\upsilon}{dZ}$ показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси *OZ*, перпендикулярной к рассматриваемым слоям.

Постоянная (число) Рейнольдса, определяющая характер движения жидкости,

$$R_e = \rho \langle \upsilon \rangle \frac{d}{\eta}, \qquad (6.10)$$

где ρ – плотность жидкости; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы; η – динамическая вязкость.

Сила сопротивления, действующая на медленно движущийся в вязкой среде шарик, определяется формулой Стокса

$$F = 6\pi\eta r\upsilon, \qquad (6.11)$$

где r – радиус шарика; υ – его скорость; η – динамическая вязкость.

Объем жидкости, протекающей за время t через капиллярную трубку длиной l, определяют формулой Пуазейля

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta P t}{8Vl}, \qquad (6.12)$$

где R – радиус трубки; ΔP – разность давления на концах трубки; V – объем вытекающей жидкости.

6.2. Примеры решения задач

1. В цилиндрической части баллона находится сжиженный газ с плотностью $\rho_Ж = 800$ кг/м^3 (рис. 6.4). После открытия вентиля *К* газ начинает вырываться наружу через патрубок с площадью выходного отверстия $S = 5$ см^2 со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Плотность вырывающегося газа $\rho_Г = 2$ кг/м^3. На какое время хватит запаса газа, если начальная высота жидкого газа была $h = 1$ м, а внутренний диаметр цилиндрической части баллона $d = 0{,}3$ м?

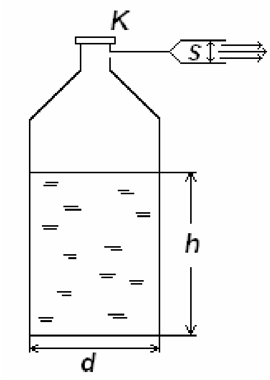


Рис. 6.4

Дано: $\rho_Ж = 800$ кг/м^3; $S = 5$ см^2; $\upsilon = 10$ м/с; $\rho_Г = 2$ кг/м^3; $h = 1$ м; $d = 0{,}3$ м.

Найти: *t*.

Решение. Запишем уравнение непрерывности (6.4) для массы газа в виде

$$\frac{dm}{dt} = -jS,$$

где $dm < 0$ – изменение массы внутри баллона за время *dt*; $j = \rho\upsilon$ – плотность потока газа через выходное отверстие площадью S; $\frac{dm}{dt} = G$ – расход газа в единицу времени.

В стационарном случае

$$G = -\frac{m}{t},$$

где m – масса сжиженного газа в начальный момент; t – искомое время.

Выразив массу через плотность сжиженного газа и объем, перепишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\rho_Ж h \frac{\pi d^2}{4}}{t} = \rho_Г \upsilon S.$$

Тогда

$$t = \frac{\rho_Ж h \pi d^2}{4\rho_Г \upsilon S}.$$

Проверим размерность и произведем вычисления:

$$[t] = \frac{кг \cdot м^3 \cdot м \cdot м^2}{кг \cdot м^3 \cdot м \cdot с^{-1} \cdot м^2} = с;$$

$$t = \frac{800 \cdot 1 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3^2}{4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 5652 \text{ с} = 1{,}6 \text{ ч.}$$

2. На рис. 6.5 приведена упрощенная схема установки для получения газообразного водорода методом электролиза воды. Какая масса воды должна поступать в установку ежесекундно, чтобы скорость газообразного водорода в выходном патрубке была $\upsilon_H = 10$ м/с? Плотность водорода в сечении выходного патрубка $\rho = 0{,}08$ кг/м^3, площадь сечения $S = 12{,}5$ см^2.

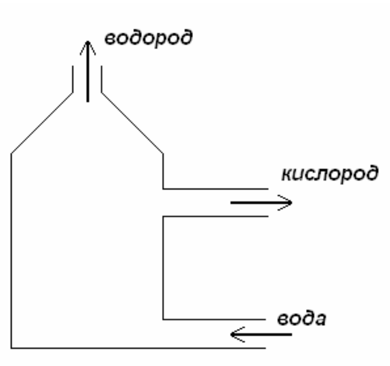


Рис. 6.5

Дано: $\upsilon_H = 10$ м/с; $\rho = 0{,}08$ кг/м^3; $S = 12{,}5$ см^2.

Найти: $\Delta\Phi_B$.

Решение. В стационарном случае уравнение непрерывности для массы, пересекающей поверхность установки, запишем в виде

$$\Delta\Phi_B - \Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_H = 0,$$

где $\Delta\Phi_B$ – искомый расход воды; $\Delta\Phi_0$ – поток массы кислорода через выходной патрубок; $\Delta\Phi_H = \rho\upsilon_H S$ – поток массы водорода через соответствующий выходной патрубок.

В каждом акте расщепления одной молекулы воды образуется 2 атома водорода с молярной массой $1\frac{г}{моль}$ и 1 атом кислорода с молярной массой $16\frac{г}{моль}$. Легко догадаться, что $\Delta\Phi_0 = 8\Delta\Phi_H$.

Тогда

$$\Delta\Phi_B = \Delta\Phi_H + 8\Delta\Phi_H = 9\Delta\Phi_H = 9\rho\upsilon_H S.$$

Произведем вычисления.

$$\Delta\Phi_B = 9 \cdot 0{,}08 \cdot 10 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с.}$$

3. Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака и вырывается из отверстия, диаметр которого $d = 2$ см (рис. 6.6). Уровень воды в баке равен $h = 2$ м, избыточное давление над атмосферным в баке $\Delta P = 50$ кПа.

Требуется определить:

1) высоту H струи фонтана;

2) расход воды Q за 1с.

Дано: $d = 2$ см; $h = 2$ м; $\Delta P = 50$ кПа; $t = 1$ с.

Найти: H; Q.

Решение

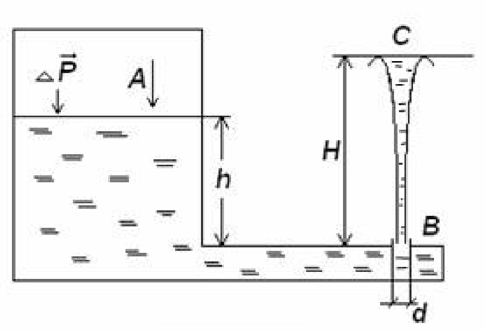


Рис. 6.6

1. Применим уравнение Бернулли для точки поверхности воды в баке и устья струи фонтана (соответственно точки A и B на рисунке).

$$\rho g h + P = \frac{\rho \upsilon^2}{2} + P_0, \qquad (1)$$

где плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, P – давление в точке A, P_0 – атмосферное давление, υ – скорость вырывающейся из отверстия воды.

По условию $P - P_0 = \Delta P$. Скоростью воды в точке A в данном случае можно пренебречь, так как диаметр бака существенно больше диаметра выходного отверстия фонтана.

Из уравнения (1) выразим скорость

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(P - P_0) + 2\rho g h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(\Delta P + \rho g h)}{\rho}}.$$

Высоту фонтана определим с помощью закона сохранения механической энергии для каждого элемента массы струи Δm:

$$\frac{\Delta m \upsilon^2}{2} = \Delta m g H.$$

Тогда

$$H = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2(\Delta P + \rho g h)}{2\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g} + h = 7{,}1 \text{ м}.$$

Если уравнение Бернулли сразу применить для точек A и C (см. рис. 6.6), т.е. $\rho g h + P = \rho g H + P_0$, то мы получим тот же ответ.

2. Расход воды определим из следующих соображений: за время Δt из отверстия вырывается струя воды длиной $L = x\Delta t$, ее объем равен $V = LS = xS\Delta t$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь выходного отверстия. Тогда

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \upsilon S = S\sqrt{\frac{2(\Delta P + \rho g h)}{\rho}} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2(\Delta P + \rho g h)}{\rho}}.$$

Произведя вычисления, находим

$$Q = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 3{,}7 \text{ л/с}.$$

4. По горизонтальной трубе течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубках A и B равна $\Delta h = 0{,}1\,\text{м}$ (рис. 6.7). Диаметры трубок A и B одинаковы. Найти скорость $\vec{\upsilon}$ течения жидкости в трубе.

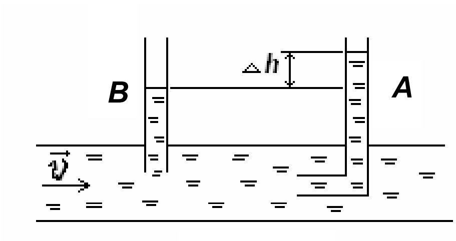


Рис. 6.7

Дано: $\Delta h = 0{,}1\,\text{м}$.

Найти: υ.

Решение. Применим уравнение Бернулли для точек жидкости, находящихся в плоскости нижних отверстий трубок A и B (см. рис. 6.7). Вблизи нижнего отверстия трубки A жидкость имеет скорость $\vec{\upsilon}$ и находится под давлением P_1, а в плоскости нижнего отверстия трубки B жидкость имеет практически нулевую скорость и находится под давлением P_2. В этом случае уравнение Бернулли запишем в виде

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + P_1 = P_2, \quad \text{откуда} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}.$$

Разность давлений $P_2 - P_1$ связана с разностью уровней воды в трубках:

$$P_2 - P_1 = \rho g \Delta h.$$

Окончательно получим

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{\rho}} = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}4\ \text{м/с}.$$

На этом принципе работает устройство, называемое трубкой Пито – Приндтля. С ее помощью можно измерить скорость потоков газа или жидкости. В частности, таким образом можно определять скорость самолета.

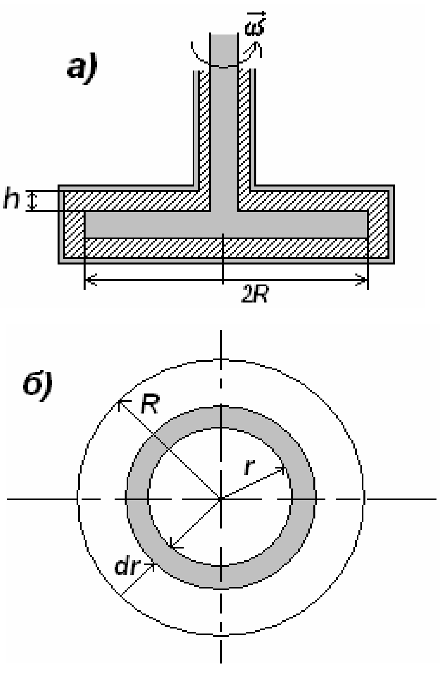


Рис. 6.8

5. Тонкий горизонтальный диск размером $R = 10\,\text{см}$ расположен в цилиндрической полости с маслом, вязкость которого $\eta = 8\,\text{мПа}\cdot\text{с}$ (рис. 6.8, *а*). Зазоры h между диском и горизонтальными торцами полости одинаковы и равны 1 мм. Найти мощность, которую развивают силы вязкости, действующие на диск, при его вращении с угловой скоростью $\omega = 60\ \text{рад/с}$. Краевыми эффектами пренебречь.

Дано: R=10 см; η=8 мПа·с; h=1 мм; ω=60 рад/с.

Найти: N.

Решение. Мощность определим по формуле $N = M\omega$, где момент силы вязкого трения M находим, интегрируя моменты сил вязкого трения, действующих на отдельные элементы диска.

Для этого выделим на диске ассиметричный кольцевой элемент шириной dr на расстоянии r от оси (см. рис. 6.8, *б*, вид сверху). Его площадь $dS = 2\pi r dr$, скорость $\upsilon = \omega r$, а силу вязкого трения, действующую на диск со стороны жидкости, получим по формуле Ньютона (6.9):

$$dF = \eta \frac{\Delta\upsilon}{h} 2dS = \eta \frac{\omega r}{h} 4\pi r dr.$$

Здесь учтено, что силы трения действуют на обе плоские поверхности диска. Момент силы трения, действующий на кольцевой элемент, определим по формуле

$$dM = rdF,$$

а мощность

$$N = M\omega = \omega\int dM = \omega\int_0^R r\eta\frac{\omega r}{h}4\pi r dr = \frac{\pi\omega^2\eta R^4}{h}.$$

Проверим размерность и произведем вычисления:

$$[N] = \text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{м}^4/\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт};$$

$$N = \frac{3{,}14\cdot 0{,}008\cdot 3600\cdot 10^{-4}}{0{,}001} = 9\ \text{Вт}.$$

6. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10\ \text{см}^2$, коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 0{,}001\ \text{Па}\cdot\text{с}$, а возникающая сила трения между слоями $F = 0{,}1\ \text{мН}$. Определить градиент скорости жидкости.

Дано: $S = 10\ \text{см}^2$; $\eta = 0{,}001\ \text{Па}\cdot\text{с}$; $F = 0{,}1\ \text{мН}$.

Найти: $\left|\frac{d\upsilon}{dZ}\right|$.

Решение. Силу вязкого трения между слоями определим по формуле (6.9):

$$F_{тр} = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dZ}\right|S.$$

Тогда градиент скорости

$$\left|\frac{d\upsilon}{dZ}\right| = \frac{F_{тр}}{\eta S}.$$

Произведем вычисления:

$$\left|\frac{d\upsilon}{dZ}\right| = \frac{0{,}1\cdot 10^{-3}}{0{,}001\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 100\ \text{с}^{-1}.$$

7. При параллельном течении двух движущихся с разной скоростью слоев воды в области соприкосновения скорость изменяется по закону $\vec{\upsilon} = 5x\vec{j}$.

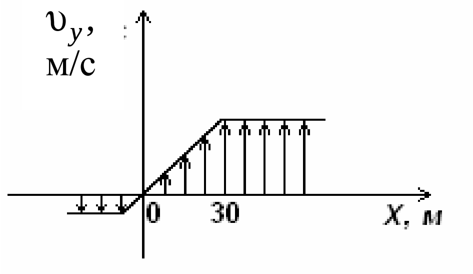


Рис. 6.9

Определить силу внутреннего трения F между слоями, если расстояние l, на котором происходит измерение скорости, равно 30 м (рис. 6.9). Глубина слоев $h = 2$ м. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па⋅с.

Дано: $\vec{\upsilon} = 5x\vec{j}$; $l = 30$ м; $h = 2$ м; $\eta = 10^{-3}$ Па⋅с.

Найти: F.

Решение. Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dx}\right| S = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dx}\right| lh, \qquad (1)$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\left|\frac{d\upsilon}{dx}\right|$ – модуль градиента скорости; $S = lh$ – площадь соприкасающихся слоев.

Ось y, как следует из условия $\vec{\upsilon} = 5x\vec{j}$, направлена вдоль скорости, ось x, вдоль которой изменяется модуль скорости, перпендикулярна к оси y (см. рис. 6.9).

Согласно условию задачи $\vec{\upsilon} = 5x\vec{j}$, поэтому

$$\left|\frac{d\upsilon}{dx}\right| = 5\ \text{с}^{-1}.$$

Подставляя значения физических величин в формулу (1), найдем

$$F = 0{,}3\ \text{Н}.$$

8. Полый шар плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей (рис. 6.10) так, что соотношение частей шара во второй и первой жидкости равно $\frac{V_2}{V_1} = n = 2$. Плотности жидкостей и тела соответственно равны $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3; $\rho_2 = 1$ г/см^3 и $\rho = 2{,}7$ г/см^3. Определить объем шара V, если размер его внутренней полости $V_0 = 20$ см^3.

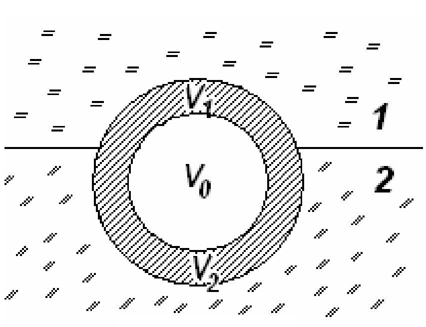


Рис. 6.10

Дано: $\frac{V_2}{V_1} = n = 2$; $V_0 = 20$ см^3 ($2\cdot10^{-5}$ м^3); $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3 ($8\cdot10^{2}$ кг/м^3); $\rho_2 = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3); $\rho = 2{,}7$ г/см^3 ($2{,}7\cdot10^{3}$ кг/м^3).

Найти: V.

Решение. Поскольку шар находится в равновесии, сила тяжести P, действующая на тело, уравновешивается силой Архимеда F_A:

$$P = F_A.$$

Учитывая, что

$$P = \rho\left(V - V_0\right)g \quad \text{и} \quad F_A = m_1 g + m_2 g$$

(ρ – плотность материала шара; V – его объем; V_0 – объем внутренней полости шара; g – ускорение свободного падения; m_1 и m_2 – соответственно масса жидкостей в объемах V_1 и V_2), можно записать

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho\left(V_1 + V_2 - V_0\right)g. \qquad (1)$$

Из выражения (1), учитывая, что $V_2 = n \cdot V_1$ (условие задачи), найдем

$$V_1 = \frac{\rho \cdot V_0}{(n+1)\rho - \rho_2 n + \rho_1}.$$

Искомый объем шара

$$V = V_1 + nV_2 = \frac{(n+1)\rho V_0}{(n+1)\rho - \rho_2 n + \rho_1} = 30{,}1\,\text{см}^3.$$

9. В сообщающиеся трубки с водой площадью сечения $S = 0{,}5\,\text{см}^2$ долили в левую масло объемом $V_1 = 40\,\text{мл}$, в правую керосин объемом $V_2 = 30\,\text{мл}$. Определить разность Δh установившихся уровней воды в трубках, если плотность воды $\rho = 1\,\text{г}/\text{см}^3$, плотность масла $\rho_1 = 0{,}9\,\text{г}/\text{см}^3$, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8\,\text{г}/\text{см}^3$.

Дано: $S = 0{,}5\,\text{см}^2$; $V_1 = 40\,\text{мл}$; $V_2 = 30\,\text{мл}$; $\rho = 1\,\text{г}/\text{см}^3$; $\rho_1 = 0{,}9\,\text{г}/\text{см}^3$; $\rho_2 = 0{,}8\,\text{г}/\text{см}^3$.

Найти: Δh.

Решение. Предположим, что уровень воды в левом сосуде понизится (рис. 6.11).

Для уровня поверхности воды в левом сосуде давление равно давлению столба масла

$$P = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g \frac{V_1}{S}, \qquad (1)$$

где h_1 – высота столба масла; V_1 – объем масла; S – площадь сечения трубки.

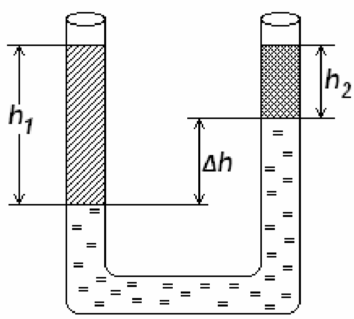


Рис. 6.11

Для правого сосуда давление на той же горизонтали будет равно сумме давлений столба керосина и избыточного столба воды высотой Δh

$$P = \rho_2 g h_2 + \rho g \Delta h = \rho_2 g \frac{V_2}{S} + \rho g \Delta h, \qquad (2)$$

где h_2 – высота столба керосина.

Поскольку давление на одной горизонтали одинаково, приравняв выражения (1) и (2), найдем

$$\rho_1 g\frac{V_1}{S} = \rho_2 g\frac{V_2}{S} + \rho g\Delta h,$$

откуда искомая разность уровней

$$\Delta h = \frac{\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{\rho S} = 24 \text{ см.}$$

10. В некоторых устройствах используется прибор, основанный на следующем принципе. Когда жидкость доходит до уровня контрольной отметки на некоторой высоте, клапан открывается и жидкость начинает выливаться (рис. 6.12).

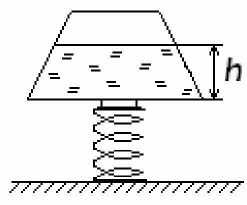


Рис. 6.12

Площадь клапана $S = 9\ \text{см}^2$, его масса $m = 300\ \text{г}$, пружина сжата от положения равновесия на $\Delta X = 1\ \text{см}$. Определить коэффициент жесткости пружины *k*, если высота контрольной отметки $h = 23{,}2\ \text{см}$, а в качестве жидкости используется вода ($\rho = 1\ \text{г}/\text{см}^3$).

Дано: $S = 9\ \text{см}^2$; $m = 300\ \text{г}$; $\Delta X = 1\ \text{см}$; $h = 23{,}2\ \text{см}$; $\rho = 1\ \text{г}/\text{см}^3$.

Найти: *k*.

Решение. На клапан действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления $\vec{F}$ со стороны жидкости и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр.}$. Сила давления

$$F = \rho g h S.$$

Сила упругости пружины

$$F_{упр.} = k\Delta X.$$

Клапан открывается, если сила давления жидкости достигнет критического уровня, определяемого контрольной высотой. Тогда можем записать

$$\rho g h S + mg = k\Delta X.$$

Откуда искомый коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{\rho g h S + mg}{\Delta X} = 500 \text{ Н/м.}$$

11. Определить силу *F*, с которой надо давить на поршень горизонтального цилиндра с площадью основания $S = 8\ \text{см}^2$, чтобы за время $t = 2{,}5\ \text{с}$ выдавить из него через круглое отверстие площадью $S_0 = 4\ \text{мм}^2$ слой жидкости длиной $l = 5\ \text{см}$. Плотность жидкости $\rho = 1\ \text{г}/\text{см}^3$. Вязкость жидкости не учитывать.

Дано: $S = 8\ \text{см}^2$; $t = 2{,}5\ \text{с}$; $S_0 = 4\ \text{мм}^2$; $l = 5\ \text{см}$; $\rho = 1\ \text{г}/\text{см}^3$.

Найти: *F*.

Решение. Работа A, совершаемая постоянной силой F на пути l, равна Fl и расходуется на сообщение жидкости кинетической энергии

$$T=\frac{m\upsilon^2}{2},$$

где υ – скорость вытекания жидкости.

Поскольку $m=\rho V$ (ρ и V – соответственно плотность и объем жидкости), имеем

$$T=\frac{\rho V}{2}\upsilon^2.$$

Согласно приведенным рассуждениям можно записать

$$Fl=\frac{\rho V}{2}\upsilon^2, \quad \text{откуда} \quad F=\frac{\rho V}{2l}\upsilon^2. \qquad (1)$$

За время t вытечет объем жидкости $V=\upsilon S_0 t$, откуда с учетом $V=Sl$ скорость вытекания жидкости

$$\upsilon=\frac{Sl}{S_0 t}. \qquad (2)$$

Поставляя (2) в (1), найдем искомую силу

$$F=\frac{\rho S^3 l^2}{2S_0 t^2}=64 \text{ мкН}.$$

12. Открытый цилиндрический сосуд, стоящий на ножках высотой $h_1=1{,}33$ м, заполнен водой до отметки $h=5$ м (рис. 6.13). Пренебрегая вязкостью воды, определить площадь сечения S цилиндра, если через отверстие диаметром $d_1=2{,}5$ см у его основания струя, вытекающая из отверстия, падает на пол на расстоянии $l=4{,}5$ м от цилиндра.

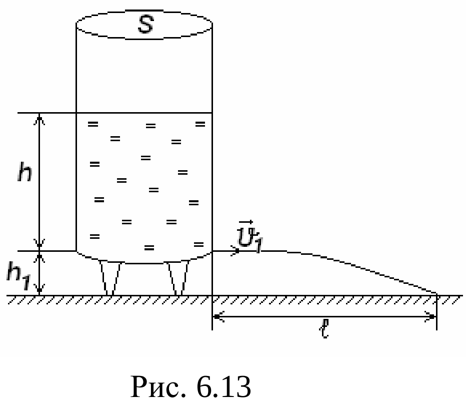


Рис. 6.13

Дано: $h_1=1{,}33$ м; $d_1=2{,}5$ см; $l=4{,}5$ м; $h=5$ м.

Найти: S.

Решение. Согласно уравнению неразрывности

$$S\upsilon=S_1\upsilon_1,$$

где υ – скорость понижения воды в баке, υ_1 – скорость вытекания струи; S_1 – площадь отверстия. Тогда

$$S=\frac{S_1\upsilon_1}{\upsilon}. \qquad (1)$$

Согласно уравнению Бернулли для сечений S и S_1

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2}+\rho gh+P=\frac{\rho\upsilon_1^{\ 2}}{2}+P_1, \tag{2}$$

где P и P_1 – статические давления жидкости соответственно для поверхности воды и отверстия; ρ – плотность воды.

Учитывая, что $P_1=P_2$ (бак открыт), из выражения (2)

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_1^{\ 2}-2gh}\,.$$

Подставив эту формулу в (1), найдем

$$S=\frac{\upsilon_1 S_1}{\sqrt{\upsilon_1^{\ 2}-2gh}}\,. \tag{3}$$

Согласно кинематическим уравнениям

$$h_1=\frac{gt^2}{2} \quad \text{и} \quad l=\upsilon_1 t$$

(t – время падения струи воды на землю).

Найдем

$$\upsilon_1=l\sqrt{\frac{g}{2h_1}}\,. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3) и учитывая, что $S_1=\dfrac{\pi d_1^{\ 2}}{4}$, получаем искомую площадь сечения

$$S=\frac{\pi l d_1^{\ 2}}{2\sqrt{l^2-h_1h}}=62{,}8\ \text{см}^2.$$

13. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (рис. 6.14). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h=8$ см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны $S_1=6$ см^2 и $S_2=12$ см^2. Плотность воды $\rho=1$ г/см^3.

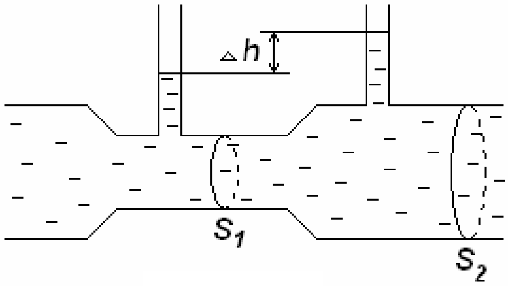


Рис. 6.14

Дано: $\Delta h=8$ см; $S_1=6$ см^2; $S_2=12$ см^2; $\rho=1$ г/см^3.

Найти: Q.

Решение. Массовый расход воды – это масса воды, протекающая через сечение за единицу времени.

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 S_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность воды; υ_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2.

При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 \qquad (2)$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$P_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}, \qquad (3)$$

где P_1 и P_2 – статические давления в сечениях манометрических трубок; υ_1 и υ_2 – скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2. Учитывая, что

$$P_2 - P_1 = \rho g \Delta h$$

и решая систему уравнений (2), (3), получаем

$$\upsilon_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}} = 0{,}868 \text{ кг/с}.$$

14. Для определения объема перекачки газа используется прибор, основанный на принципе действия трубки Пито (рис. 6.15). При перекачке азота по трубе за время $t = 1$ мин проходит объем газа $V = 59{,}3\ \text{м}^3$. Определить диаметр d трубы, если разность уровней воды в коленах трубки Пито $\Delta h = 1$ см. Плотность азота $\rho = 1{,}25$ кг/м^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

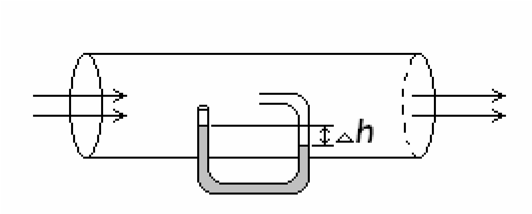


Рис. 6.15

Дано: $t = 1$ мин (60 с); $V = 59{,}3\ \text{м}^3$; $\Delta h = 1$ см (10^{-2} м); $\rho = 1{,}25$ кг/м^3; $\rho_1 = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: d.

Решение. Согласно уравнению Бернулли разность давлений газа, оказываемых на колена трубки (см. рис. 6.15),

$$\Delta P = \frac{\rho \upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность газа; υ – скорость течения газа.

С другой стороны, разность давлений в коленах определяется разностью уровней жидкости в коленах трубки

$$\Delta P = \rho_1 g \Delta h. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2)

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} = \rho_1 g \Delta h,$$

найдем скорость движения газа

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}}. \qquad (3)$$

Объем V газа, перекачиваемого за время t,

$$V = S\upsilon t,$$

где S – площадь сечения трубы.

Подставляя в эту формулу выражение (3) и $S = \frac{\pi d^2}{4}$, найдем

$$V = \frac{\pi d^2}{4} t \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}},$$

откуда искомый диаметр трубы

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi t \sqrt{2 g \Delta h \frac{\rho_1}{\rho}}}} = 30 \text{ см}.$$

15. Пренебрегая вязкостью воды, определить объем V воды в цилиндрическом баке диаметром $d = 1\,\text{м}$, если через отверстие диаметром $d_1 = 2\,\text{см}$ на дне бака вся вода вытекла за время $t = 30\,\text{мин}$.

Дано: $d = 1\,\text{м}$; $t = 30\,\text{мин}$ $(1{,}8 \cdot 10^3\,\text{с})$; $d_1 = 2\,\text{см}$ $(2 \cdot 10^{-2}\,\text{м})$.

Найти: *V*.

Решение: Если за время dt уровень воды в баке понижается на dh, то уменьшение объема воды за это же время

$$dV = -S dh, \qquad (1)$$

где S – площадь основания бака, а знак «–» указывает на то, что высота слоя воды уменьшается.

С другой стороны, уменьшение объема воды за время dt

$$dV = S_1 \upsilon dt, \qquad (2)$$

где S_1 – площадь отверстия; υ – скорость истечения воды из отверстия, определяемая по формуле Торричелли (применима при $S_1 << S$),

$$\upsilon = \sqrt{2gh}, \qquad (3)$$

где h – высота уровня воды в данный момент времени.

Приравняв выражения (1) и (2) и учитывая формулу (3), можем записать

$$-S dh = S_1 \sqrt{2gh}\, dt,$$

откуда

$$dt = -\frac{S dh}{S_1 \sqrt{2gh}}.$$

Время вытекания всей воды из бака

$$t = \int_o^t dt = -\int_{h_1}^o \frac{S}{S_1} \cdot \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{2S}{S_1}\sqrt{\frac{h_1}{2g}}, \qquad (4)$$

где h_1 – первоначальный уровень воды.

Из выражения (4)

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{S_1}{S}\right)^2. \qquad (5)$$

Первоначальный объем воды

$$V = h_1 S. \qquad (6)$$

Подставив в формулу (6) выражение (5) и учитывая, что $S = \frac{\pi d^2}{4}$, $S_1 = \frac{\pi d_1^{\,2}}{2}$, найдем искомый объем воды

$$V = \frac{\pi g d_1^4 t^2}{8d^2} = 2 \text{ м}^3.$$

16. Стальной шарик (плотность $\rho_1 = 9 \text{ г/см}^3$) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином ($\rho_2 = 1{,}26 \text{ г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48 \text{ Па} \cdot \text{с}$). Считая, что при числе Рейнольдса $R_e \le 0{,}5$ выполняется закон Стокса, определить предельный диаметр шарика.

Дано: $\upsilon = \text{const}$; $\rho_1 = 9 \text{ г/см}^3$ $(9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3)$; $\rho_2 = 1{,}26 \text{ г/см}^3$ $(1{,}26 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3)$; $\eta = 1{,}48 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $R_e \le 0{,}5$.

Найти: $d_{\max}$.

Решение. При установившемся движении шарика в жидкости ($\upsilon = \text{const}$) сила тяжести (P) шарика уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$P = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 gV = \rho_2 gV + 6\pi\eta r\upsilon, \qquad (1)$$

где V – объем шарика.

Подставив в уравнение (1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и решив его относительно υ, получим

$$\upsilon = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)gr^2}{9\eta} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta}.$$

Для шара небольшого радиуса, движущегося в вязкой жидкости, число Рейнольдса $R_e = \frac{\rho_2 \upsilon d}{\eta}$, откуда искомый предельный диаметр шарика

$$d_{\max} = \frac{\eta R_{e\,кр}}{\rho_2 \upsilon} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 R_{e\,кр}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}} = 5{,}91\,\text{мм}.$$

17. Цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 20\,\text{см}^2$ заполнен машинным маслом. В его боковую поверхность на расстоянии $h = 1{,}2\,\text{м}$ от верхнего края вставлен капилляр радиусом $r = 1{,}2\,\text{мм}$. Определить длину l капилляра, если за время $t = 5\,\text{с}$ уровень масла понизился на $\Delta h = 10\,\text{мм}$. Плотность масла $\rho = 0{,}9\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 100\ \text{мПа}\cdot\text{с}$.

Дано: $S = 20\,\text{см}^2\,(2\cdot 10^{-3}\,\text{м}^2)$; $h = 1{,}2\,\text{м}$; $r = 1{,}2\,\text{мм}\,(1{,}2\cdot 10^{-3}\,\text{м})$; $t = 5\,\text{с}$; $\Delta h = 10\,\text{мм}\,(10^{-2}\,\text{м})$; $\rho = 0{,}9\ \text{г/см}^3\,(9\cdot 10^2\ \text{кг/м}^3)$; $\eta = 100\ \text{мПа}\cdot\text{с}\,(0{,}1\,\text{Па}\cdot\text{с})$.

Найти: *l*.

Решение. Согласно формуле Пуазейля

$$\eta = \frac{\pi r^4 t\Delta P}{8Vl}, \qquad (1)$$

где r – радиус капилляра; ΔP – разность давлений на концах капилляра; t – время истечения жидкости; V – объем вытекающей за время t жидкости.

Длина капилляра, согласно (1),

$$l = \frac{\pi r^4 t\Delta P}{8V\eta}. \qquad (2)$$

Перепад давлений ΔP на концах капиллярной трубки равен давлению столба h жидкости: $\Delta P = \rho g h$.

Объем вытекающего за время t масла $V = S\Delta h$.

Подставив эти формулы в выражение (2), найдем искомую длину капилляра

$$l = \frac{\pi r^4 \rho g h t}{8\eta S \Delta h} = 2{,}16 \text{ см}.$$

18. За время $t = 1$ ч через трубу диаметром $d = 40$ см прокачивается газ массой $m = 15$ кг. Динамическая вязкость газа $\eta = 10^{-5}$ Па·с. Если за характерный размер принять диаметр трубы, то критическое значение числа Рейнольдса $R_{e\,кр}$ для ламинарного течения газа равно 2000. Определить характер течения газа.

Дано: $t = 1$ ч (3600 с); $d = 40$ см (0,4 м); $m = 15$ кг; $\eta = 10^{-5}$ Па·с; $R_{e\,кр} = 2000$.

Найти: R_e.

Решение. Масса m газа, протекающего за время t через поперечное сечение трубы S,

$$m = \rho V = \rho S \upsilon t,$$

где ρ – плотность газа; V – объем протекающего газа; υ – скорость потока.

Тогда

$$\upsilon = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t} \tag{1}$$

(учли, что $S = \frac{\pi d^2}{4}$).

По определению, число Рейнольдса

$$R_e = \frac{\rho \upsilon d}{\eta}. \tag{2}$$

Подставив в (2) выражение (1), найдем число Рейнольдса

$$R_e = \frac{4m}{\pi \eta t d} = 1330.$$

Поскольку $R_e < R_{e\,кр}$, течение газа является ламинарным.

19. Шарик радиусом $r = 2$ мм падает в глицерине с постоянной скоростью $\upsilon = 8{,}5$ мм/с. Определить число Рейнольдса R_e и плотность ρ_1 материала шарика, если критическое число Рейнольдса $R_{e\,кр} = 0{,}5$. Плотность глицерина $\rho = 1{,}26\ г/см^3$, динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па·с.

Дано: $r = 2$ мм $(2 \cdot 10^{-3}$ м$)$; $\upsilon = 8{,}5$ мм/с $\left(8{,}5 \cdot 10^{-3}\ м/с\right)$; $R_{екр} = 0{,}5$; $\eta = 1{,}48$ Па·с; $\rho = 1{,}26\ г/см^3\ (1{,}26 \cdot 10^3\ кг/м^3)$.

Найти: R_e; ρ_1.

Решение. Характер течения жидкости зависит от числа Рейнольдса, определяемого по формуле

$$R_e = \frac{\rho \upsilon d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости; υ – скорость жидкости; d – диаметр шарика; η – динамическая вязкость жидкости.

Учитывая данные задачи, получаем $R_e = 0{,}029$.

Поскольку $R_e < R_{e\,кр}$, то движение жидкости является ламинарным.

Стокс установил, что при небольших скоростях и размерах тел (при малых R_e) сопротивление среды обусловлено практически только силой трения, определяемой по формуле

$$F = 6\pi\eta r \upsilon,$$

где r – радиус шарика.

При установившемся движении шарика в глицерине ($\upsilon = \mathrm{const}$) сила тяжести шарика ($P$) уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$P = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 g V = \rho g V + 6\pi\eta r \upsilon, \qquad (1)$$

где g – ускорение свободного падения; V – объем шарика.

Подставив в уравнение (1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и решив его, найдем искомую плотность материала шарика

$$\rho_1 = \rho + \frac{9\eta\upsilon}{2gr^2} = 2{,}7\ г/см^3.$$

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1. Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака и бьет из отверстия фонтана со скоростью $12\ \text{м/с}$. Найти: а) скорость понижения уровня воды в баке, если диаметр бака равен 2 м, а диаметр отверстия фонтана 2 см; б) давление, под которым вода подается в фонтан; в) высоту уровня воды в баке и струи, выходящей из фонтана.

6.2. Свинцовый шарик диаметром 2 мм падает с постоянной скоростью $3{,}6\ \text{см/с}$ в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

6.3. За 15 минут по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

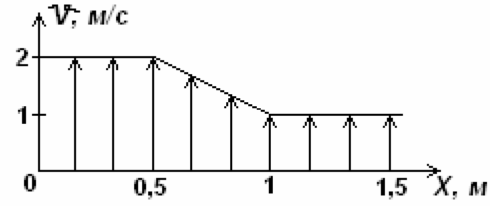
6.4. В стакан с водой, уравновешенный на рычажных весах, опустили подвешенный на нити латунный шарик массой $M = 400$ г так, чтобы он не касался дна. Определить массу m гирьки, с помощью которой можно уравновесить весы. Плотность материала шарика $\rho = 8{,}55\ \text{г/см}^3$, плотность воды $\rho_1 = 1\ \text{г/см}^3$.

6.5. Два мальчика массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 25$ кг катаются на льдинах. Определить минимальную площадь $S_{\min}$ льдины, способной удержать их обоих, если толщина льда $h = 0{,}4$ м. Плотность льда $\rho = 0{,}9\ \text{г/см}^3$, плотность воды $\rho_1 = 1\ \text{г/см}^3$.

6.6. Цилиндрический сосуд высотой $H = 1$ м до краев заполнен жидкостью. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить, на какой высоте h должно быть проделано малое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя, вытекающая из отверстия, падала на пол на расстоянии $l = 50$ см от цилиндра.

6.7. Алюминиевый шар с внутренней полостью плавает, полностью погрузившись в воду. Определить объем ΔV полости, если масса шара $m = 0{,}2$ кг. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7\ \text{г/см}^3$, плотность воды $\rho_1 = 1\ \text{г/см}^3$.

6.8. В области соприкосновения двух параллельно текущих слоев воды их скорость изменяется, как показано на рисунке. Определить силу внутреннего трения *F*, если площадь *S* соприкосновения слоев равна $3\ \text{м}^2$. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}\ \text{Па} \cdot \text{с}$.



6.9. Пробковый шарик радиусом $r = 0,5$ см всплывает в широком сосуде в глицерине. Определить предельную скорость υ_0 шарика, если течение жидкости, вызванное его всплытием, является ламинарным. Плотность материала шарика $\rho = 0,2$ г/см^3, плотность глицерина $\rho_1 = 1,26$ г/см^3. Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1,48$ Па$\cdot$с.

6.10. Металлический шарик радиусом $r = 20$ см был сначала взвешен в воде, а затем в некоторый жидкости. При этом разность показаний весов составила $P = 65,7$ Н. Определить плотность ρ_1 жидкости, если плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

6.11. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня $S_1 = 20$ см^2, правого – $S_2 = 100$ см^2. На какую высоту h опустится левый поршень, если на него поставить гирьку массой $m = 1,5$ кг? Плотность масла $\rho = 0,9$ г/см^3.

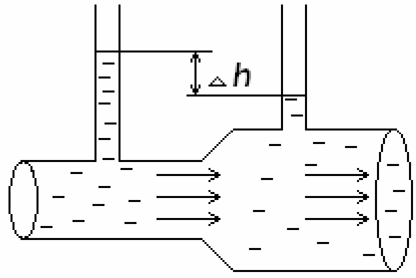
6.12. Диаметр одного из колен U-образной трубки в $n = 3$ раза меньше, чем другого. В трубку сначала наливают воду, а затем в меньшее колено доливают масло, чтобы высота h его столба стала равной 30 см. Определить изменение Δh уровня воды в большем колене. Плотность масла $\rho = 0,9$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

6.13. Льдину толщиной $h = 1,5$ м вынесло из реки в океан. На какую высоту Δh поднялась льдина над поверхностью воды по сравнению с первоначальным уровнем? Плотность льда $\rho = 0,9$ г/см^3, плотность пресной воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность океанской воды $\rho_2 = 1,03$ г/см^3.

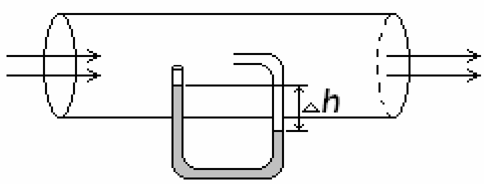
6.14. Определить разность давлений ΔP в широком и узком коленах горизонтальной трубы диаметрами $d_1 = 70$ см и $d_2 = 50$ см, если поток кислорода в узком колене имеет скорость $\upsilon = 24$ м/с. Плотность кислорода $\rho = 1,43$ г/см^3.

6.15. Определить объем воды *V*, проникающей внутрь корабля за время $t = 20$ мин через пробоину диаметром $d = 5$ см, которая находится в днище, на глубине $h = 4$ м от поверхности воды. Давление в трюме принять равным атмосферному.

6.16. Определить время, необходимое для перекачки объема $V = 10\,\text{м}^3$ воды через трубу переменного диаметра ($d_1 = 15\,\text{см}$ и $d_2 = 20\,\text{см}$) (см. рис.), если разность уровней воды в манометрических трубках $\Delta h = 12$ см.



6.17. Пренебрегая вязкостью газа, определить разность уровней Δh воды в коленах трубки Пито (см. рис.), если она установлена в трубе диаметром $d = 40\,\text{см}$, по которой протекает азот. Известно, что за время $t = 1$ мин перекачивается объем газа $V = 507\ \text{м}^3$. Плотность азота $\rho_1 = 1{,}25\ \text{кг/м}^3$, плотность воды $\rho = 1\ \text{г/см}^3$.

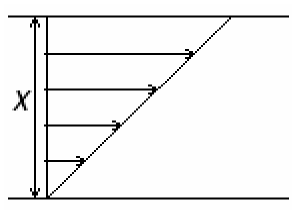


6.18. Алюминевый шарик радиусом $r = 2\,\text{мм}$ падает в глицерине с постоянной скоростью. Определить время *t*, затрачиваемое шариком на прохождение расстояния $h = 10\,\text{см}$, если плотность алюминия $\rho = 2{,}7\ \text{г/см}^3$, плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}26\ \text{г/см}^3$. Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48\ \text{Па} \cdot \text{с}$.

6.19. Горизонтальный капилляр с внутренним радиусом $r = 1{,}5\,\text{мм}$ длиной $l = 2\,\text{см}$ вставлен в боковую поверхность сосуда с касторовым маслом. На какой высоте h требуется поддерживать уровень масла по отношению к капилляру, чтобы за время $t = 1$ мин вытекало $m = 40$ *г* масла? Плотность касторового масла $\rho = 0{,}96\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 0{,}987\ \text{Па} \cdot \text{с}$.

6.20. Определить динамическую вязкость η воздуха, если капли дождя диаметром $d = 1$ мм падают со скоростью $\upsilon = 4{,}2\ \text{м/с}$. Плотность воды $\rho = 1\ \text{г/см}^3$.

6.21. Машинное масло течет между двумя пластинами с одинаковой площадью $S = 0{,}2\,\text{м}^2$, при этом его скорость меняется линейно от 0 до 0,3 м/с (см. рис.). Определить коэффициент динамической вязкости η масла, если сила внутреннего трения $F = 15\,\text{мН}$, а расстояние между пластинами $x = 40\,\text{см}$.



6.22. На столе стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой до уровня $H = 20$ см от дна. Если в воду ($\rho = 1$ г/см^3) опустить плавать тонкостенный никелевый стакан ($\rho' = 8{,}8$ г/см^3), то уровень воды поднимается на $h = 2{,}2$ см. Определите уровень H_1 воды в сосуде, если стакан утопить.

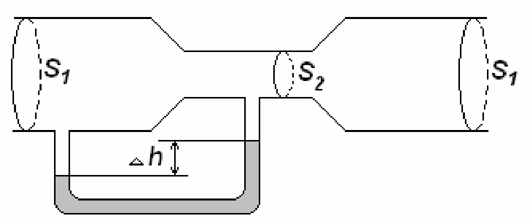
6.23. Бак цилиндрической формы с площадью основания 10 м^2 объемом 100 м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне его образовалось круглое отверстие площадью 8 см^2.

6.24. Парашют ($m_1 = 32$ кг) пилота ($m_2 = 65$ кг) в раскрытом состоянии имеет форму полусферы диаметром $d = 12$ м, обладая коэффициентом сопротивления $C_X = 1{,}3$. Определить максимальную скорость, развиваемую пилотом при плотности воздуха $1{,}29$ кг/м^3.

6.25. Определить наибольшую скорость, которую может приобрести свободно падающий в воздухе ($\rho = 1{,}29$ кг/м^3) свинцовый шарик ($\rho_1 = 11{,}3$ г/см^3) массой $m = 12$ г. Коэффициент сопротивления C_X принять равным $0{,}5$.

6.26. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить скорость ее истечения из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет $1{,}5$ м.

6.27. Через трубу сечением $S_1 = 100$ см^2 продувается воздух со скоростью 2 м^3/мин (см. рис.). В трубе имеется короткий участок с меньшим поперечным сечением $S_2 = 20$ см^2. Определить: 1) скорость υ_1 воздуха в широкой части трубы; 2) разность уровней Δh воды, используемой в подсоединенном к данной системе манометре. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3.



6.28. Сосуд в виде полусферы радиусом $R = 10$ см до краев наполнен водой. На дне сосуда имеется отверстие с площадью поперечного сечения $S = 4$ мм^2. Определить время, за которое через это отверстие выльется столько воды, чтобы ее уровень в сосуде понизился на 5 см.

6.29. Площадь поршня, вставленного в горизонтально расположенный налитый водой цилиндр, $S_1 = 1{,}5$ см^2, а площадь отверстия $S_2 = 0{,}8$ мм^2. Пренебрегая трением и вязкостью, определить время t, за которое вытечет вода из цилиндра, если на поршень действовать постоянной силой $F = 5$ Н, а ход поршня $l = 5$ см. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

6.30. В дне сосуда имеется отверстие диаметром d_1. В сосуде вода поддерживается на постоянном уровне, равном h. Считая, что струя не разбрызгивается и пренебрегая силами трения в жидкости, определить диаметр струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $h_1 = 2h$ от его дна.

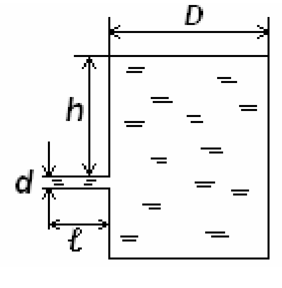
6.31. Определить, на какую высоту h поднимется вода в вертикальной трубке, впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром $d_2 = 3$ см, если в широкой части трубы диаметром $d_1 = 9$ см скорость газа $\upsilon_1 = 25$ см/с.

6.32. Определить разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9$ см, $d_2 = 6$ см) коленах горизонтальной трубы, если в широком колене воздух ($\rho = 1{,}29$ кг/м^3) продувается со скоростью $\upsilon_1 = 6$ м/с.

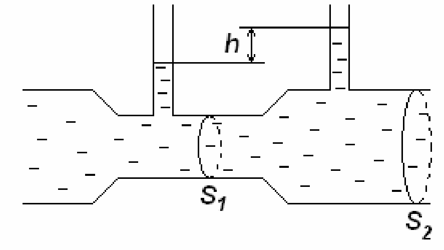
6.33. В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте $h_1 = 10$ см от его дна капилляр с внутренним диаметром $d = 2$ мм длиной $l = 1$ см. В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность $\rho = 0{,}9$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}1$ Па$\cdot$с) на высоте $h_2 = 70$ см выше капилляра. Определить расстояние по горизонтали от конца капилляра до места, куда попадает струя масла.

6.34. В боковую поверхность цилиндрического сосуда диаметром D вставлен капилляр с внутренним диаметром d длиной l (см. рис.). В сосуд налита жидкость с динамической вязкостью η.

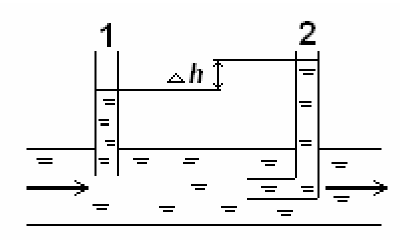
Определить зависимость скорости понижения уровня жидкости в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром.



6.35. Определить работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом $V = 1{,}5$ м^3 в горизонтальной трубе (см. рис.) от сечения с давлением $P_1 = 40$ кПа до сечения с давлением $P_2 = 20$ кПа.

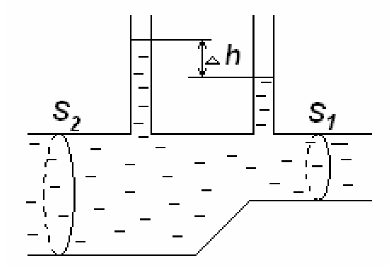


6.36. Для точного измерения малых разностей давления служат U-образные манометры, которые заполнены двумя различными жидкостями. В одном из них при использовании нитробензола ($\rho = 1{,}203$ г/см^3) и воды ($\rho_1 = 1$ г/см^3) получили разность уровней $\Delta h = 26$ мм. Определить разность давлений.

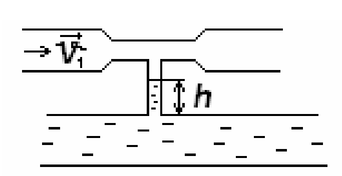


6.37. По горизонтальной трубе в направлении, указанном стрелкой (см. рис.), течет жидкость. Разность уровней Δh жидкости в манометрических трубках 1 и 2 одинакового диаметра составляет 8 см. Определить скорость течения жидкости по трубе.

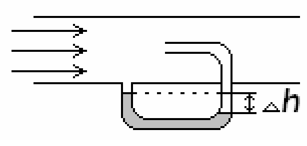
6.38. По горизонтальной трубе переменного сечения (см. рис.) течет вода. Площади поперечных сечений трубы на разных ее участках соответственно равны $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. Разность уровней Δh воды в вертикальных трубках одинакового сечения составляет 20 см. Определить объем воды, проходящей за 1 с через сечение трубы.



6.39. Определить, на какую высоту h поднимется вода в вертикальной трубке (см. рис.), впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром $d_2 = 3$ см, если в широкой части трубы диаметром $d_1 = 9$ см скорость газа $\upsilon_1 = 25$ см/с.



6.40. Вдоль горизонтальной трубки диаметром 3 см, по которой течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3), установлена трубка Пито (см. рис.). Пренебрегая вязкостью, определить объем газа, проходящего за 1 с через сечение трубы, если разность уровней в жидкостном манометре составляет $\Delta h = 0{,}5$ см. Плотность жидкости принять равной $\rho_1 = 1000$ кг/м^3.



6.41. Сосуд имеет форму расширяющегося вверх усеченного конуса (радиус дна r, радиус верхней части $R = 2r$). Сосуд доверху заполнен жидкостью массой m. Пренебрегая атмосферным давлением, найти силу давления на дно и результирующую силу, действующую на стенки сосуда.

6.42. Давление у головы водолаза на $\eta = 33\ \%$ превышает давление на поверхности водоема, равное $P_0 = 10^5$ Па. На сколько процентов давление у ног водолаза превышает давление P_0? Рост водолаза $h = 1$м 74см. Водолаз стоит в воде вертикально. Плотность воды $\rho = 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$.

6.43. В двух сообщающихся сосудах находится ртуть. Поверх нее в один сосуд налили столб воды высотой $h_1 = 0{,}8$ м, а в другой – столб керосина высотой $h_2 = 0{,}2$ м. Какая разность уровней ртути установится в сосудах? Плотность воды $\rho_1 = 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$, керосина – $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$, ртути – $\rho_3 = 13{,}6 \cdot 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$.

6.44. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах находится ртуть. Площадь поперечного сечения одного сосуда в $n = 2$ раза меньше площади поперечного сечения другого. В узкий сосуд доливают столб воды высотой $h = 48$ см, а в широкий – такое же по массе количество некоторой жидкости. На сколько изменится уровень ртути в широком сосуде? Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$, воды – $\rho_2 = 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$.

6.45. Определить силу давления на вертикальную боковую стенку аквариума площадью $S = 10^3\ \text{см}^2$, доверху заполненного водой. Высота аквариума $h = 30$ см. Плотность воды $\rho = 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$. Атмосферное давление не учитывать.

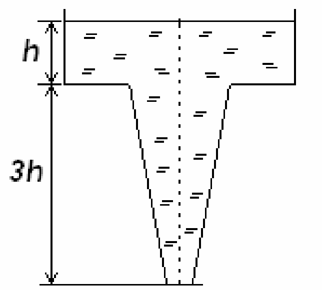
6.46. Поршень массой $M = 1$ кг представляет собой диск радиусом $R = 4$ см с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиусом $r = 1$ см. Поршень может перемещаться без трения в вертикальном цилиндрическом сосуде радиусом R и сначала лежит на дне сосуда. На какую высоту поднимется поршень, если в трубку налить $m = 700$ г воды? Плотность воды $\rho = 10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$.

6.47. В сосуде с водой плавает кусок льда. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает?

6.48. Кусок металла представляет собой сплав золота и серебра и весит в воздухе P_0. Вес сплава в воде P. Какую долю от веса сплава составляет золото? Плотность золота $\rho_з$, серебра $\rho_с$, воды – $\rho_в$.

6.49. Стеклянный шарик опускается в воде с ускорением $a = 5{,}8$ м/с^2. Найти плотность стекла. Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3. Силами вязкого трения пренебречь.

6.50. Определить разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9$ см, $d_2 = 6$ см) коленах горизонтальной трубы, если вода в широком колене течет со скоростью $\upsilon_1 = 6$ м/с. Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.



6.51. В дне сосуда проделано отверстие сечением S_1. В сосуд налита вода до высоты h, и уровень ее поддерживается постоянным. Определить площадь поперечного сечения струи, вытекающей из дна сосуда, на расстоянии $3h$ от его дна. Считать, что струя не разбрызгивается (см. рис.).

6.52. Из отверстия в дне высокого сосуда вытекает вода. Сечение сосуда S_1, сечение отверстия S_2. Уровень воды в сосуде перемещается с постоянным ускорением. Найти это ускорение.

6.53. На дне плавательного бассейна имеется отверстие для слива воды. Предположим, что скорость, с которой вода вытекает из отверстия, пропорциональна давлению воды на дно. Коэффициент пропорциональности равен K. Бассейн имеет вертикальные стенки и горизонтальное дно, площадь которого S намного больше площади сливного отверстия S_1. Определить, как связана скорость υ падения уровня воды в бассейне с высотой уровня h над дном бассейна. Плотность воды ρ. Внешним давлением пренебречь.

6.54. Струя воды бьет из брандспойта, установленного под некоторым углом к горизонту. Площади поперечных сечений струи у выходного отверстия брандспойта и в высшей точке траектории относятся как 1:2. Скорость струи у отверстия брандспойта $\upsilon = 9$ м/с. Под каким углом к горизонту установлен брандспойт? Какой наибольшей высоты над уровнем горизонта достигала струя?

6.55. Из брандспойта вертикально вверх бьет струя воды. Расход воды $Q = 60$ л/мин. Какова площадь поперечного сечения струи на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта, если площадь поперечного сечения выходного отверстия брандспойта равна $S_0 = 1{,}5$ см^2?

6.56. На какой высоте площадь поперечного сечения вертикальной струи из фонтана в три раза больше площади выходного отверстия трубки, скорость струи в котором равна $\upsilon = 6$ м/с?

6.57. Из брандспойта вертикально вверх бьет струя воды. Во сколько раз площадь поперечного сечения струи на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта больше площади ее поперечного сечения у выходного отверстия, скорость струи в котором равна $\upsilon = 7$ м/с?

6.58. В боковой стенке сосуда с водой просверлены одно над другим два отверстия площадью $S = 0{,}2$ см^2 каждое. Расстояние между отверстиями $H = 50$ см. В сосуд ежесекундно вливают $Q = 140$ см^3 воды. Найти точку пересечения струй, вытекающих из отверстий.

6.59. На поршень медицинского шприца диаметром $d = 1$ см давят с постоянной силой $F = 0{,}2$ Н. С какой скоростью будет вытекать струя из отверстия, расположенного на оси шприца, в горизонтальном направлении? Считать, что жидкость в шприце несжимаема, а диаметр отверстия много меньше диаметра шприца. Трением и атмосферным давлением пренебречь. Плотность жидкости $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6.60. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площадью S_1 и выходным отверстием S_2, расположенным у оси цилиндра. Определить скорость истечения струи из насоса, если поршень под действием горизонтальной силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости ρ. Атмосферное давление не учитывать.

7. СОСТОЯНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

7.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться между собой и с другими телами (внешней средой) энергией и веществом. В частности, система может состоять из одного тела в твердом, жидком или газообразном состоянии. Каждое макроскопическое тело состоит из совокупности огромного числа структурных частиц (атомов и молекул). Поэтому описание *микросостояния* такой системы с подробным перечислением физических характеристик каждой составляющей ее частицы нереально и бесполезно.

Вместо этого в термодинамике для описания *макроскопического состояния* вещества используют физические величины, которые характеризуют свойства системы в большом масштабе. Это давление P, объем V, температура T, концентрация частиц n, масса тела m и т.п. Такие величины называются *макропараметрами* или *термодинамическими параметрами*. Макропараметры принято делить на *внешние*, которые задают внешние условия для системы, и *внутренние*, которые описывают поведение системы во внешних условиях. Некоторые внутренние макропараметры связаны с количеством и свойствами молекул системы.

Любая термодинамическая система независимо от начального состояния в заданных внешних условиях самопроизвольно переходит в единственное макросостояние, в котором она может находиться, пока не изменятся внешние условия. Это состояние называется *равновесным*. Функциональная зависимость между внутренними и внешними макропараметрами при равновесии называется *уравнением состояния*.

Задачи по данной теме можно разделить на две группы. К первой группе относятся задачи, в которых используется или устанавливается связь между макропараметром и количеством или свойствами отдельных молекул. Любое количество вещества можно выразить через величины ν, m, V, N:

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} = \frac{V}{V_M}, \tag{7.1}$$

где N_A – число Авогадро, V_M – молярная масса.

Ко второй группе относятся задачи, в которых используются уравнения состояния. Например, для идеальных газов уравнение состояния имеет вид

$$P = nkT, \tag{7.2}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Его можно записать в другой форме:

$$PV = \nu RT\,, \tag{7.3}$$

где R = 8,31 $\dfrac{\text{Дж}}{(\text{моль}\cdot\text{К})}$. Это уравнение Клайперона – Менделеева.

Из-за невозможности подробного описания состояния всех частиц в макросистемах в статистической физике используют аппарат теории вероятностей. Если известна вероятность $dP(A)$ того, что значение физической величины A, характеризующей отдельную молекулу, находится в пределах от A до $A+\,dA$, то количество молекул dN с такими значениями величины A определяется формулой

$$dN = NdP(A) = Nf(A)dA, \tag{7.4}$$

где $f(A)$ имеет смысл плотности вероятности. Ее также называют *функцией распределения вероятностей* по величине A или просто функцией распределения.

Функция распределения молекул газа по скоростям называется *распределением Максвелла*. В частности, распределение молекул газа по значениям проекции скорости υ_X имеет вид

$$f(\upsilon_X) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_X^2}{2kT}}, \tag{7.5}$$

где m – масса отдельной молекулы.

График этой функции приведен на рис. 7.1.

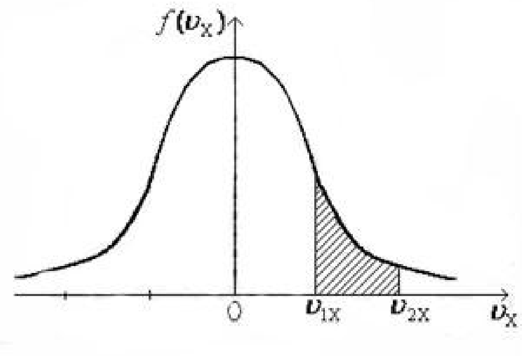


Рис. 7.1

Площадь затемненного участка соответствует вероятности того, что молекула обладает проекцией скорости, значение которой находится в пределах от υ_{1X} до υ_{2X}. В практических задачах вместо функции распределения (7.5) часто удобнее использовать функцию распределения по модулю скорости

$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}. \tag{7.6}$$

График этой функции приведен на рис. 7.2.

Максимум соответствует *наиболее вероятной скорости* молекул $\upsilon_{вер}$, которая равна

$$\upsilon_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\,. \tag{7.7}$$

Зная функцию распределения $f(A)$, можно найти *среднее* значение самой величины $A_{ср}$ или величины, зависящей от A, т.е. $\Phi_{ср}(A)$:

$$A_{ср} = \int Af(A)dA;$$

$$\Phi_{ср} = \int \Phi(A) f(A) dA. \qquad (7.8)$$

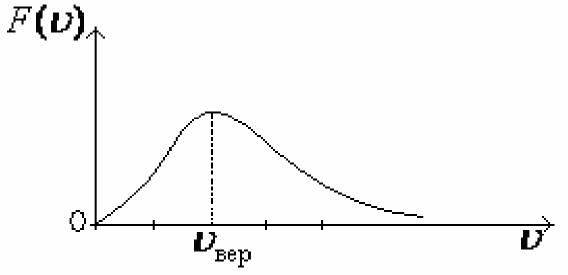


Рис. 7.2

При этом интегрирование ведется по всей области определения величины A. Например, найденные таким образом *средняя скорость* $<\upsilon>$ и *средняя квадратичная скорость* $<\upsilon_{кв}> = \sqrt{<\upsilon>^2}$ соответственно равны

$$<\upsilon> = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \qquad (7.9)$$

$$<\upsilon_{кв}> = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (7.10)$$

Функция распределения частиц по пространственным координатам в потенциальном поле сил называется *распределением Больцмана*. Например, если потенциальная энергия частиц зависит только от координаты X, то распределение Больцмана имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U(x)}{kT}} dx} e^{-\frac{U(x)}{kT}}, \qquad (7.11)$$

где $U(x)$ – потенциальная энергия частицы в точке с координатой X.

Как следствия из распределения Больцмана, можно получить:

1) *барометрическую формулу* (зависимость атмосферного давления от высоты Z в изотермических условиях)

$$P = P_0 e^{-\frac{MgZ}{RT}}, \qquad (7.12)$$

где P_0 – давление воздуха при $Z = 0$;

2) формулу зависимости концентрации частиц от $\vec{r}$ в потенциальном поле сил $U(\vec{r})$

$$n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0) e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \qquad (7.13)$$

где $n(\vec{r}_0)$ – концентрация частиц в точке с нулевой потенциальной энергией $U(\vec{r}_0) = 0$.

Молекулярно-кинетическая теория позволяет установить связь между значениями макропараметров и средними значениями физических характеристик молекул. Например, давление, производимое на стенки сосуда за счет ударов молекул газа, определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул $<E_{пост}>$

$$P = \frac{2}{3} n <E_{пост}>, \tag{7.14}$$

где n – концентрация молекул газа.

Сравнение этой формулы с уравнением состояния идеального газа $P = nkT$ указывает на взаимосвязь $<E_{пост}>$ с температурой газа:

$$< E_{пост} > = \frac{3}{2} kT . \tag{7.15}$$

В статистической физике доказывается, что средняя энергия молекулы связана с ее *числом степеней свободы* i, т.е. с числом независимых величин, с помощью которых можно задать положение молекулы, считая ее механической системой. Например, одноатомную молекулу можно смоделировать материальной точкой, положение которой в пространстве определяется тремя координатами. Тогда ее число степеней свободы равно 3.

Согласно теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы при тепловом равновесии на каждую степень свободы приходится средняя кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. У многоатомных молекул помимо кинетической энергии поступательного движения может быть кинетическая энергия вращательного движения и механическая (кинетическая и потенциальная) энергия колебательного движения.

Средняя потенциальная энергия колебательного движения молекулы равна средней кинетической энергии колебательного движения. Таким образом, средняя энергия молекулы равна

$$< E > = \frac{i}{2} kT . \tag{7.16}$$

Здесь

$$i = n_{пост} + n_{вращ} + 2n_{колеб} , \tag{7.17}$$

где $n_{пост}$, $n_{вращ}$, $n_{колеб}$ – соответственно поступательные, вращательные и колебательные степени свободы молекулы (так как они обладают кинетической и потенциальной энергией).

В квантовой механике доказывается, что при вычислении теплоемкости газа учет степеней свободы зависит от температуры. Поступательные степени свободы необходимо учитывать при всех температурах. Вращательные степени свободы необходимо учитывать при не очень низких температурах (например, для молекул водорода при T > 80 K). Колебательные же степени свободы начинают давать ощутимый вклад в теплоемкость только при высоких температурах (например, для молекул водорода при T > 6000 K). Поэтому при атмосферных условиях считается, что межатомные связи внутри молекул газов «жесткие» и колебательные степени свободы не учитываются. В этом случае двухатомная молекула имеет 5 степеней свободы, из них три поступательных и две вращательных (i = 5). Трехатомная и более сложные молекулы имеют шесть степеней свободы (i = 6).

Внутренняя энергия моля идеального газа $U_м$ равна сумме энергий отдельных молекул. Тогда

$$U_м = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT, \qquad (7.18)$$

где учтено, что $kN_A = R$.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3}nm_0 < \upsilon_{кв} >^2$$

$$\text{или } pV = \frac{2}{3}N\frac{m_0 < \upsilon_{кв} >^2}{2} = \frac{2}{3}E,$$

$$\text{или } pV = \frac{1}{3}Nm_0 < \upsilon_{кв} >^2 = \frac{1}{3}m < \upsilon_{кв} >^2,$$

где $< \upsilon_{кв} >$ – средняя квадратичная скорость молекул; E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; m = Nm_0 – масса газа; N – число молекул в объеме V газа.

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям

$$f(\upsilon) = \frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}},$$

где функция $f(\upsilon)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $\frac{dN(\upsilon)}{N}$, обладающих данной скоростью, из общего числа N молекул.

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{Nd\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $\frac{dN(\varepsilon)}{N}$ из общего числа N, которые имеют данную кинетическую энергию $\varepsilon = \frac{m_0\upsilon^2}{2}$.

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$<Z> = \sqrt{2}\pi d^2 n <\upsilon>,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $<\upsilon>$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$<l> = \frac{<\upsilon>}{<Z>} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $<Z>$ – среднее число столкновений молекул за 1 с; $<\upsilon>$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Нормальные условия для газа: давление P = 1 атм = 760 мм рт. ст. = 101,3 кПа; температура T = 0 °C = 273 К; молярный объем V_m = 22,4 л.

7.2. Примеры решения задач

1. Сколько молекул содержится в 1см^3 воды?

Дано: $V = 1$ см^3.

Найти: N.

Решение. На первый взгляд, для решения задачи мало данных. Но здесь имеется в виду, как и во многих других задачах, что известны основные свойства воды: плотность, молярная масса, температура кипения воды и плавления льда, химическая формула и т.д. Воспользуемся одной из пропорций (7.1)

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

где массу воды определяем по формуле $m = \rho V$, используя известное значение ее плотности $\rho = 1000$ кг/м^3. Выполнив преобразования, получим

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{\rho V}{M} N_A.$$

Учитывая, что молярная масса воды M=0,018 кг/моль, а число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}$, произведем вычисления:

$$N = \frac{1000 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{0,018} \approx 3,3 \cdot 10^{22}.$$

2. Оценить объем одной молекулы воды и ее линейные размеры.

Решение. В предыдущей задаче было получено, что в объеме $V = 1\ \text{см}^3$ содержится N= 3,3·10^{22} молекул воды. Тогда на долю одной молекулы приходится объем

$$V_1 = \frac{V}{N} = 3\cdot 10^{-23}\ \text{см}^3 = 3\cdot 10^{-29}\ \text{м}^3.$$

Несжимаемость воды (точнее, малая сжимаемость) означает, что ее молекулы плотно «упакованы» в занимаемом объеме. Тогда полученное значение V_1 примерно соответствует объему одной молекулы, и для оценки линейного размера молекулы принимаем, что ее объем имеет форму куба со стороной d. Тогда

$$d = \sqrt[3]{V_1} \approx 3\cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

3. Определить плотность воздуха при нормальных условиях (T = 273 К, P = 100 кПа). Молярная масса азота M = 0,029 кг/моль.

Дано: M = 0,029 кг/моль; T = 273 К; P = 100 кПа.

Найти: ρ.

Решение. По определению $\rho = \frac{m}{V}$. Это отношение получим из уравнения состояния идеальных газов (7.3) с учетом пропорции (7.1):

$$PV = \frac{m}{M}RT,$$

тогда

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} = 1{,}28\ \text{кг}/\text{м}^3.$$

4. Какая часть объема воздуха при нормальных условиях (см. предыдущий пример) приходится на сами молекулы? Принять, что молекула воздуха имеет объем $V_1 = 3\cdot 10^{-29}\ \text{м}^3$.

Решение. Выразим искомую часть объема η через отношение

$$\eta = \frac{NV_1}{V},$$

где N – количество молекул воздуха в объеме V. Используя пропорцию (7.1), запишем

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M},$$

где массу воздуха определим из уравнения Клайперона – Менделеева (7.3) с учетом (7.1):

$$m = \frac{MPV}{RT},$$

тогда

$$\eta = \frac{NV_1}{V} = N_A \frac{m}{M}\frac{V_1}{V} = \frac{N_A P V_1}{RT} = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Это значение свидетельствует о том, что в газах при нормальных условиях расстояния между молекулами существенно превышают размеры самих молекул.

5. В сосуде объемом V = 15 л содержится $N = 1{,}8 \cdot 10^{24}$ молекул газа при температуре T = 300 К. Определить давление газа, считая его идеальным.

Дано: V = 15 л, $N = 1{,}8 \cdot 10^{24}$, T = 300 К.

Найти: P.

Решение. Для определения давления воспользуемся уравнением состояния Клайперона – Менделеева (7.3):

$$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{NRT}{N_A V} = 509 \text{ кПа}.$$

6. Некоторое количество водорода находится в сосуде при температуре $T_1 = 200\,\text{К}$ и давлении $P_1 = 400\,\text{Па}$. Газ нагревают до температуры $T_2 = 10000\,\text{К}$, при которой практически все молекулы водорода распадаются на атомы. Определить установившееся давление газа, если его объем и масса остались без изменения.

Дано: V = const; m = const; $T_1 = 200\,\text{К}$; $P_1 = 400\,\text{Па}$; $T_2 = 10000\,\text{К}$.

Найти: P_2.

Решение. При распаде (диссоциации) молекул водорода на атомы изменяется количество молекул газа. Если вначале было N молекул двухатомного водорода, то стало $2N$ молекул одноатомного (атомарного) водорода.

Из уравнения состояния идеального газа следует, что вместо ν молей вещества стало 2ν молей, а концентрация стала равна $2n$. Запишем уравнение (7.2) или (7.3) для двух описанных в условии состояний газа:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= nkT_1 \\ P_2 &= 2nkT_2 \end{aligned}\right\} \quad \textit{или} \quad \left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\nu RT_1}{V} \\ P_2 &= \frac{2\nu RT_2}{V} \end{aligned}\right\}, \quad \textit{откуда} \quad P_2 = 2\frac{T_2}{T_1}P_1 = 40\,\text{кПа}.$$

7. В некотором объеме содержится один моль идеального газа. Определить число молекул ΔN, скорость которых меньше $0{,}001\upsilon_{вер.}$.

Дано: $\nu = 1\,\text{моль}$; $\upsilon < 0{,}001\,\upsilon_{вер.}$.

Найти: ΔN.

Решение. Требуемую величину находим как произведение общего числа молекул (в данной задаче N_A) и вероятности ΔP того, что отдельная молекула имеет скорость в заданном интервале от 0 до $0{,}001\upsilon_{вер.}$. На рис. 7.3 приведен начальный участок графика распределения Максвелла.

Величине ΔP соответствует площадь затемненного участка. Эту вероятность получим интегрированием функции распределения (7.6):

$$\Delta N = N_A \int\limits_0^{0{,}001\,\upsilon_{вер.}} F(\upsilon)d\upsilon .$$

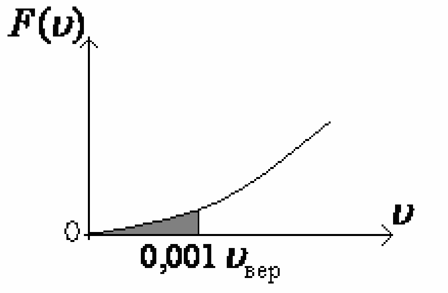


Рис. 7.3

Процесс интегрирования можно существенно упростить, если учесть, что по условию в заданном диапазоне $\upsilon << \upsilon_{вер.}$, с учетом (7.7) это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{m\upsilon^2}{2kT} << 1.$$

Тогда выполняется приближение $e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \approx 1 - \frac{m\upsilon^2}{2kT}$ и подынтегральное выражение можно существенно упростить:

$$\Delta N = N_A \int\limits_0^{0{,}001\,\upsilon_{вер.}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon \approx 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N_A \int\limits_0^{0{,}001\,\upsilon_{вер.}} \left(1 - \frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2 d\upsilon.$$

Как уже отмечалось, $\frac{m\upsilon^2}{2kT} << 1$. Поэтому стоящей в скобках величиной $\frac{m\upsilon^2}{2kT}$ можно пренебречь. Тогда

$$\Delta N \approx 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N_A \int\limits_0^{0{,}001\,\upsilon_{вер.}} \upsilon^2 d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N_A \left.\frac{\upsilon^3}{3}\right|_0^{0{,}001\,\upsilon_{вер.}} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N_A \cdot 10^{-9}\upsilon_{вер.}^3 .$$

Подставив значение $\upsilon_{вер.} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$, находим исходное число молекул

$$\Delta N = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N_A \cdot 10^{-9}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_A \cdot 10^{-9} \approx 4{,}5\cdot 10^{14}.$$

8. Найти отношение η числа молекул водорода, проекции скоростей которых υ_X лежат в интервале $3000 - 3010$ м/с, к числу молекул водорода, имеющих проекции скоростей υ_X в интервале $1500 - 1505$ м/с. Температура водорода 300 К.

Решение. Так как заданные интервалы скоростей относительно небольшие, то затемненные участки для каждого из них на рис. 7.1 превращаются в узкие вертикальные полоски шириной $\Delta\upsilon_{1X}$ и $\Delta\upsilon_{2X}$ соответственно. Поэтому примем, что плотность вероятности $f(\upsilon_X)$ на каждом интервале постоянна. Формулу (7.4) запишем в виде $\Delta N = Nf(\upsilon_X)\Delta\upsilon_X$ и получим требуемое отношение:

$$\eta = \frac{Nf(\upsilon_{1X})\Delta\upsilon_{1X}}{Nf(\upsilon_{2X})\Delta\upsilon_{2X}} = \frac{e^{-\frac{M\upsilon_{1X}^2}{2kT}}\Delta\upsilon_{1X}}{e^{-\frac{M\upsilon_{2X}^2}{2kT}}\Delta\upsilon_{2X}},$$

где $\upsilon_{1X} = 3000$ м/с, $\Delta\upsilon_{1X} = 10$ м/с, $\upsilon_{2X} = 1500$ м/с, $\Delta\upsilon_{2X} = 5$ м/с.

Выполним упрощения и вычислим

$$\eta = e^{-\frac{M}{2kT}\left(\upsilon_{1X}^2 - \upsilon_{2X}^2\right)}\frac{\Delta\upsilon_{1X}}{\Delta\upsilon_{2X}} = 2e^{-2,7} \approx 0,13.$$

9. Средняя энергия молекул гелия $<E> = 3,92\cdot10^{-21}$ Дж. Определить среднюю скорость $<\upsilon>$ молекул гелия при тех же условиях.

Решение. У одноатомной молекулы гелия три поступательные степени свободы. Поэтому ее средняя энергия определяется только поступательным движением и ее значением в виде $<E> = \frac{m<\upsilon_{кв.}^2>}{2}$. Тогда

$$<\upsilon_{кв.}^2> = \sqrt{\frac{2<E>}{m}}.$$

Используя формулы (7.9) и (7.10), можно установить связь между $<\upsilon>$ и $<\upsilon_{кв.}>$.

$$<\upsilon> = <\upsilon_{кв.}>\sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{16<E>}{3\pi m}},$$

где масса молекулы гелия $m = \frac{M}{N_A}$.

$$<\upsilon> \approx 1000 \text{ м/с}.$$

10. Какая дополнительная сила действует на обшивку самолета (в расчете на 1 м^2 плоской поверхности) за счет перепада давления в салоне и снаружи самолета, если давление в салоне равно 10^5 Па, высота полета 10000 м, температура атмосферы $t = -23$ °C и не зависит от высоты? Давление на поверхности земли $P_0 = 10^5$ Па.

Решение. Искомая сила $F = (P_0 - P_h)S$, где P_0 – давление в салоне, S = 1 м^2, P_h – давление за бортом на высоте h = 10000 м, которое находим по барометрической формуле (7.12). Тогда

$$F = P_0 S\left(1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}}\right),$$

где молярная масса воздуха $M = 0{,}029$ кг/моль.

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$F = 1\cdot 10^5 \cdot 1\cdot\left(1 - e^{-\frac{29\cdot 9{,}8\cdot 10^4}{8{,}3\cdot 10^3\cdot 250}}\right) \approx 0{,}75\cdot 10^5 \text{ Н}.$$

(Полученное значение силы велико и ее надо учитывать в расчетах конструкций на прочность).

11. Определить толщину слоя воздуха Δk в вертикальном направлении, в пределах которого концентрация взвешенных в нем пылинок различается не более чем на 1 %. Температуру воздуха считать постоянной и равной 300 K, масса каждой пылинки равна 10^{-18} г.

Решение. Воспользуемся следствием из распределения Больцмана. В равновесии концентрация пылинок n зависит от координаты h по вертикальной оси (см. (7.13)

$$n(h) = n(o)e^{-\frac{U(h)}{kT}} = n_o e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Отношение концентраций на высотах h_1 и h_2 соответственно равно $\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{mg(h_2-h_1)}{kT}}$. Решая это уравнение относительно $\Delta h = h_2 - h_1$, находим требуемую толщину слоя воздуха $\Delta h = -\frac{kT}{mg}\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. При получении ответа учитываем, что $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 - 0{,}01 n_1}{n_1} = 1 - 0{,}01$ и используем приближение $\ln(1-x) \approx -x$ при $x << 1$. Получим

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg}\cdot 0{,}01 = 4{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 4{,}2 \text{ мм}.$$

12. В баллоне находится гелий при температуре T = 350 К. Определить температуру гелия после того, как половина газа была выпущена из баллона, а его давление при этом уменьшилось на $\alpha = 60$ %.

Решение. Уравнение Клайперона – Менделеева до выпуска газа имеет вид

$$PV = \frac{m}{M} RT.$$

После того, как половину газа выпустили, уравнение изменилось следующим образом:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) PV = \frac{m}{2M} RT_X .$$

Подставляя из первого уравнения значение PV, получаем

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \frac{m}{M} RT = \frac{m}{2M} RT_X .$$

Решая последнее уравнение относительно T_X, окончательно имеем

$$T_X = 2\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) T = 0{,}8T = 280\text{К}.$$

13. В закрытом сосуде при температуре T = 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем $V_{см}$ смеси.

Дано:

$m_1 = 10$г (10^{-2}кг); $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 16$г ($1{,}6 \cdot 10^{-2}$кг); $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; T = 300 К; P = 0,1 МПа (10^5 Па).

Найти: $V_{см}$.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление P смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_1 + P_2. \qquad (1)$$

Из уравнения Клайперона – Менделеева имеем

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad \text{и} \quad P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT .$$

Определив отсюда P_1 и P_2 подставив в (1), получим

$$PV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT .$$

Удельный объем смеси

$$V_{см} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT}{(m_1 + m_2) P} = 8{,}63 \, \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}.$$

14. Определить среднюю арифметическую скорость $<\upsilon>$ молекул идеального газа, плотность которого при давлении 35 кПа составляет $0{,}3\ кг/м^3$.

Дано: P = 35 кПа ($3{,}5\cdot10^4$ Па); $\rho = 0{,}3\,кг/м^3$.

Найти: $<\upsilon>$.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$P=\frac{1}{3}nm_0<\upsilon_{кв}>^2, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $<\upsilon_{кв}>$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Учитывая, что $<\upsilon>=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$, а $<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, получаем

$$<\upsilon>=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}<\upsilon_{кв}>. \qquad (2)$$

Так как плотность газа

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{Nm_0}{V}=nm_0,$$

где m – масса газа; V – его объем; N – число молекул газа, уравнение (1) можно записать в виде

$$P=\frac{1}{3}\rho<\upsilon_{кв}>^2 \quad \text{или} \quad <\upsilon_{кв}>=\sqrt{\frac{3P}{\rho}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), находим искомую среднюю арифметическую скорость:

$$<\upsilon>=\sqrt{\frac{8P}{\pi\rho}}=545\,м/с.$$

15. Какова температура T азота, если средняя длина свободного пробега $<l>$ молекул азота при давлении P = 8 кПа составляет 1 мкм? Эффективный диаметр молекул азота $d = 0{,}38\,нм$.

Дано: $<l>=1\,мкм\,(10^{-6}\,м)$; P = 8 кПа ($8\cdot10^3$ Па); $d = 0{,}38$ нм ($0{,}38\cdot10^{-9}$ м).

Найти: T.

Решение. Согласно уравнению состояния идеального газа,

$$P=nkT, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул; k – постоянная Больцмана.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$<l> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

откуда

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 <l>}.$$

Подставив эту формулу в выражение (1), найдем искомую температуру азота:

$$T = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p <l>}{k} = 372 \text{ К}.$$

16. Определить давление P кислорода в сосуде, если при температуре $T = 250$ К средняя продолжительность $<\tau>$ свободного пробега молекул кислорода равна 280 нс. Эффективный диаметр d молекулы кислорода равен $0{,}36$ нм.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 250$ К; $<\tau> = 280$ нс $(2{,}8 \cdot 10^{-7}$ с); $d = 0{,}36$ нм $\left(0{,}36 \cdot 10^{-9}\text{ м}\right)$.

Найти: P.

Решение. Средняя продолжительность свободного пробега молекул

$$<\tau> = \frac{1}{<Z>}, \qquad (1)$$

где

$$<Z> = \sqrt{2}\pi d^2 n <\upsilon> - \qquad (2)$$

среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с.

Средняя арифметическая скорость молекул

$$<\upsilon> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Концентрация молекул

$$n = \frac{P}{kT}. \qquad (4)$$

Подставив формулы (2) – (4) в выражение (1), найдем искомое давление газа

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{TM}{\pi R}} \cdot \frac{k}{<\tau> d^2} = 95{,}1 \text{ Па}.$$

17. Определить теплопроводность λ кислорода, находящегося в сосуде при температуре $T = 300\ K$. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0{,}36$ нм, удельная теплоемкость $c_V = 649$ Дж/(кг · К).

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; T = 300 К; $d = 0{,}36$ нм ($0{,}36 \cdot 10^{-9}$ м); $c_V = 649$ Дж/(кг · К).

Найти: λ.

Решение. Теплопроводность

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \cdot \rho < \upsilon >< l >, \tag{1}$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \tag{2}$$

(учли, что $PV = \dfrac{m}{M} RT$). Средняя скорость молекул

$$< \upsilon > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \tag{3}$$

и средняя длина свободного пробега молекул газа

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \tag{4}$$

(давление P газа и концентрация n молекул связаны формулой $P = nkT$).

Подставляя выражения (2) – (4) в формулу (1), получаем искомую теплопроводность

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{kc_V}{\pi d^2} \sqrt{\frac{MT}{\pi R}} = 26{,}7\ \frac{\text{мВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

18. Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота $\left(M_1 = 28 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}\right)$ и углекислого газа $\left(M_2 = 44 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}\right)$, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Дано: $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = T_2$; $P_1 = P_2$; $d_1 = d_2$.

Найти: $\dfrac{D_1}{D_2}$.

Решение. Коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3} < \upsilon >< l >, \tag{1}$$

где $< \upsilon > = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость его молекул; $< l > = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Поскольку $P = nkT$, из условия задачи ($P_1 = P_2$; $T_1 = T_2$) следует, что $n_1 = n_2$.

Подставив значения $<\upsilon>$, $<l>$ в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = 1,25.$$

19. Определить массу m кислорода, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 100\ \text{см}^2$ за $t = 20\ \text{с}$, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен 1,26 $\text{кг}/\text{м}^4$, температура газа T = 300 К, средняя длина свободного пробега $<l>$ молекул кислорода 0,1 мкм.

Дано: $S = 100\ \text{см}^2\,(10^{-2}\ \text{м}^2)$; $t = 20\ \text{с}$; $\dfrac{d\rho}{dx} = 1,26\ \text{кг/м}^4$; T = 300 К; $<l> = 0,1\,\text{мкм}\,(10^{-7}\,\text{м})$; $M = 32\cdot 10^{-3}\ \text{кг}/\text{моль}$.

Найти: m.

Решение. Масса m вещества, перенесенная в результате диффузии через площадку S за время t,

$$m = \left| D\frac{d\rho}{dx}St \right|, \tag{1}$$

где коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}<\upsilon><l>. \tag{2}$$

Средняя скорость молекул газа

$$<\upsilon> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{3}$$

Подставив выражения (3) в (2), а затем (2) в (1), получим искомую массу кислорода

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}<l>\frac{d\rho}{dx}St = 3,74\cdot 10^{-6}\ \text{кг}.$$

20. Определить наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные, V – объем одного моля газа.

Решение. Комбинируя уравнение процесса $T = T_0 + \alpha V^2$ с уравнением состояния идеального газа для одного моля $PV = RT$, получаем уравнение процесса в координатах P и V

$$P = \frac{RT_0}{V} + \alpha RV .$$

Исследуем это выражение на минимум, для чего вычислим производную $\frac{dP}{dV}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT_0}{V^2} + \alpha R = 0 .$$

Откуда объем V_0, при котором давление минимально, равен $V_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}$, а наименьшее возможное давление P_0 идеального газа в рассматриваемом процессе определяется выражением

$$P_0 = \frac{RT_0}{V_0} + \alpha RV_0 = 2R\sqrt{\alpha T_0}.$$

21. Высокий цилиндрический сосуд с азотом находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Температура азота меняется по высоте так, что его плотность всюду одинакова. Найти градиент температуры $\frac{dT}{dh}$.

Решение. Изменение давления связано с изменением высоты известным соотношением

$$dP = -\rho g dh ,$$

где ρ – плотность газа.

С другой стороны, уравнение состояния идеального газа в виде

$$P = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \frac{\rho RT}{M}$$

дает

$$dP = \frac{\rho R dT}{M} .$$

Поэтому градиент температуры может быть определен из соотношения

$$\frac{\rho R dT}{M} = -\rho g dh \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dh} = -\frac{Mg}{R} .$$

22. Во сколько раз надо расширить адиабатически газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза?

Решение. Пусть начальная температура газа равна T_1, а конечная T_2. Тогда по условию задачи

$$\frac{\upsilon_{1кв}}{\upsilon_{2кв}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \eta.$$

Так как при адиабатическом процессе $T\upsilon^{\gamma-1} = \text{const}$, то

$$T_1\upsilon_1^{\gamma-1} = T_2\upsilon_2^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{\eta^2}\right)\upsilon_2^{\gamma-1},$$

откуда $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \eta^{\frac{2}{\gamma-1}}$ или с учетом того, что $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$,

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \eta^i.$$

Для жестких двухатомных молекул число поступательных степеней свободы $i_{пост} = 3$, число вращательных степеней свободы $i_{вр} = 2$, а число колебательных степеней свободы $i_{кол} = 0$, поэтому $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол} = 5$.

Таким образом,

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 1,5^5 = 7,6.$$

7.3. Задачи для самостоятельного решения

7.1 – 7.28. Газ находится под давлением P при температуре T. Концентрация молекул газа равна n, средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы – E_K. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Условия к заданиям 7.1 – 7.28

Номер задачи	P, Па	T, К	n, м$^{-3}$	E_K, Дж
7.1	$8 \cdot 10^4$	220	?	?
7.2	$2{,}5 \cdot 10^5$	?	?	$7{,}245 \cdot 10^{-21}$
7.3	?	?	$6{,}44 \cdot 10^{25}$	$9{,}315 \cdot 10^{-21}$
7.4	?	250	$1{,}45 \cdot 10^{24}$	?
7.5	$1{,}5 \cdot 10^5$	300	?	?
7.6	10^4	?	?	$5{,}175 \cdot 10^{-21}$
7.7	?	?	$5{,}43 \cdot 10^{25}$	$8{,}28 \cdot 10^{-21}$
7.8	?	270	$2{,}15 \cdot 10^{25}$	?
7.9	10^3	230	?	?
7.10	$3 \cdot 10^5$	?	?	$7{,}87 \cdot 10^{-21}$
7.11	?	?	$2{,}72 \cdot 10^{25}$	$8{,}28 \cdot 10^{-21}$
7.12	?	260	$2{,}79 \cdot 10^{24}$	?
7.13	$5 \cdot 10^4$	280	?	?
7.14	10^5	?	?	$1{,}076 \cdot 10^{-20}$
7.15	?	?	$3{,}29 \cdot 10^{23}$	$4{,}55 \cdot 10^{-21}$
7.16	?	360	$4{,}03 \cdot 10^{25}$	?
7.17	$2 \cdot 10^5$	340	?	?
7.18	$8 \cdot 10^3$	?	?	$5{,}175 \cdot 10^{-21}$
7.19	?	?	$1{,}34 \cdot 10^{25}$	$5{,}59 \cdot 10^{-21}$
7.20	?	500	$5{,}8 \cdot 10^{25}$	?
7.21	$5 \cdot 10^3$	240	?	?
7.22	$2{,}8 \cdot 10^5$	?	?	$7{,}66 \cdot 10^{-21}$
7.23	?	?	$2{,}41 \cdot 10^{25}$	$6{,}21 \cdot 10^{-21}$
7.24	?	300	$7{,}25 \cdot 10^{24}$	?
7.25	$2{,}5 \cdot 10^5$	600	?	?
7.26	10^5	?	?	$6{,}83 \cdot 10^{-21}$
7.27	?	?	$8{,}7 \cdot 10^{23}$	$5{,}175 \cdot 10^{-21}$
7.28	?	400	$9{,}06 \cdot 10^{24}$	?

7.29 – 7.56. В закрытом сосуде находится смесь газов. Масса первого газа – m_1, масса второго газа – m_2. При изменении температуры смеси на ΔT внутренняя энергия ее изменяется на ΔU. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Условия к заданиям 7.29 – 7.56

Номер задачи	Первый газ	Второй газ	m_1, г	m_2, г	ΔT, К	ΔU, Дж
7.29	Кислород	Углекислый газ	?	11	–30	–342,8
7.30			4	?	58	463,7
7.31			3	4	?	243,2
7.32			12	22	44	?
7.33	Азот	Кислород	?	8	52	644,5
7.34			14	?	40	441,5
7.35			7	4	?	–467,4
7.36			3,5	3,2	–28	?
7.37	Неон	Закись азота	?	8,8	34	381,4
7.38			5	?	–50	–269,1
7.39			4	4,4	?	199,4
7.40			10	11	64	?
7.41	Кислород	Пары воды	?	4,5	22	194,2
7.42			6,4	?	60	997,2
7.43			8	4,5	?	–228,5
7.44			16	18	–36	?
7.45	Гелий	Кислород	?	2,4	–46	–238,9
7.46			4	?	24	382,3
7.47			8	6	?	903,7
7.48			2	4	–32	?
7.49	Аргон	Водород	?	4	54	2327,8
7.50			8	?	–20	–1296,4
7.51			4	2	?	1541,5
7.52			10	8	–42	?
7.53	Азот	Углекислый газ	?	11	38	434,2
7.54			14	?	–56	–1279,7
7.55			5,6	4	?	–321,1
7.56			7	8,8	26	?

7.57 – 7.84. Некоторый газ находится в закрытом сосуде объемом V при температуре T_1 и давлении P_1. После изменения температуры до T_2 давление газа в сосуде стало равным P_2. При этом газу было передано количество теплоты, равное Q. Определить неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Условия к заданиям 7.57 – 7.84

Номер задачи	Газ	V, 10^{-3}, м^3	T_1, К	T_2, К	P_1, Па	P_2, Па	Q, Дж
7.57	Кислород	2,5	200	320	?	$8\cdot10^3$	?
7.58		?	366	?	$2\cdot10^5$	$3\cdot10^5$	500
7.59		1,6	?	450	10^5	$1,5\cdot10^5$	?
7.60		?	375	500	$3\cdot10^5$	?	1000
7.61	Гелий	?	352	440	?	$2,5\cdot10^5$	225
7.62		1,5	250	?	$8\cdot10^3$	$1,12\cdot10^4$	?
7.63		?	?	460	$2,5\cdot10^5$	$3,2\cdot10^5$	252
7.64		2	506	600	$3,8\cdot10^5$	?	?
7.65	Углекислый газ	1	240	300	?	10^4	?
7.66		2,6	343	?	$3,5\cdot10^5$	$4,8\cdot10^5$	?
7.67		?	?	350	$9\cdot10^4$	$1,2\cdot10^5$	315
7.68		?	320	400	$8\cdot10^4$	?	168
7.69	Азот	3	300	380	?	$1,14\cdot10^5$	?
7.70		?	448	?	$4\cdot10^5$	$5\cdot10^5$	1000
7.71		?	?	320	$5\cdot10^4$	$6,4\cdot10^4$	52,5
7.72		2,2	364	420	$2,6\cdot10^5$	?	?
7.73	Аргон	?	339	452	?	$4\cdot10^5$	525
7.74		?	256	?	$2\cdot10^4$	$2,5\cdot10^4$	7,5
7.75		2,4	?	504	$4\cdot10^5$	$4,8\cdot10^5$	?
7.76		1,8	430	516	$3,5\cdot10^5$	?	?
7.77	Водород	?	290	319	?	$5,5\cdot10^4$	37,5
7.78		1,2	400	?	$4,5\cdot10^5$	$6,3\cdot10^5$	?
7.79		3,4	?	509	$2,2\cdot10^5$	$3,2\cdot10^5$	?
7.80		?	240	360	$5\cdot10^3$	?	16,25
7.81	Закись азота	?	280	392	?	$1,4\cdot10^4$	42
7.82		1,4	370	?	$4,2\cdot10^5$	$6,3\cdot10^5$	?
7.83		?	?	384	$1,5\cdot10^5$	$1,8\cdot10^5$	180
7.84		2,5	310	434	$1,8\cdot10^5$	?	?

7.85. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при $h=0$ давление $P=P_0$, а температура изменяется с высотой: а) как $T = T_0(1 - \alpha h)$; б) как $T = T_0(1 + \alpha h)$, где α – положительная постоянная.

7.86. Газ из жестких двухатомных молекул, находившийся при нормальных условиях, адиабатически сжали в $\eta = 5$ раз по объему. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы в конечном состоянии.

7.87. Сколько молекул водорода находится в сосуде емкостью $V = 2$ л, если средняя квадратичная скорость движения молекул $< \upsilon_{кв.} >= 500$ м/с, а давление на стенки равно 10^4 Па?

7.88. Чему равна кинетическая энергия поступательного и кинетическая энергия вращательного движения молекул, содержащихся в 2 кг водорода при температуре T = 400 К?

7.89. Во сколько раз изменится число ударов жестких двухатомных молекул газа о поверхность сосуда в единицу времени, если газ адиабатически расширить в 2 раза?

7.90. Баллон содержит водород массой m = 10 г при температуре Т = 280 К. Определить кинетическую энергию всех молекул газа.

7.91. Смесь азота и гелия при температуре 27 ^{o}С находится под давлением $P = 1{,}3 \cdot 10^2$ Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов.

7.92. Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекул гелия и азота при температуре t = 27 ^{o}С. Определить полную энергию всех молекул 100 г каждого из газов.

7.93. Площадь окна S = 2 м^2, расстояние между рамами l = 0,2 м. Наружное стекло имеет температуру t_1= –10 ^{o}С, внутреннее – t_2 = 20 ^{o}С. Давление воздуха между рамами атмосферное, а температура его линейно изменяется вдоль l от t_1 до t_2. Определить полную энергию молекул и полное число молекул воздуха между рамами.

7.94. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота, коэффициент диффузии и вязкости при давлении $P = 10^5$ Па и температуре t = 17 ^{o}С. Как изменятся найденные величины в результате двукратного увеличения объема газа: а) при постоянном давлении; б) при постоянной температуре? Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$ см.

7.95. Температура оксида азота NO T = 300 К. Определить долю молекул, скорость которых лежит в интервале от $\upsilon_1 = 820$ м/с до $\upsilon_2 = 830$ м/с.

7.96. Определить: 1) число N молекул воды, занимающей при температуре t = 4 °С объем V = 1 мм^3; 2) массу m_1 молекулы воды; 3) диаметр d молекулы воды, считая, что молекулы имеют форму шариков, соприкасающихся друг с другом.

7.97. В баллоне объемом V = 10 л находится гелий под давлением P_1 = 1 МПа при температуре T_1 = 300 К. После того как из баллона был израсходован гелий массой m = 10 г, температура в баллоне понизилась до T_2 = 290 К. Определить давление P_2 гелия, оставшегося в баллоне.

7.98. В баллоне вместимостью V = 6,9 л находится азот массой m = 2,3 г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации α = 0,2. Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрацию n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания. (Степенью диссоциации называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа. Степень диссоциации показывает, какая часть молекул распалась на атомы).

7.99. В колбе вместимостью V = 0,5 л находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию $\langle E_{пост.} \rangle$ поступательного движения всех молекул, содержащихся в колбе.

7.100. Найти среднюю кинетическую энергию одной молекулы аммиака NH_3 при температуре t = 27 °С и среднюю энергию вращательного движения этой молекулы при той же температуре.

7.101. Пылинки массой $m = 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1 %. Температура T воздуха во всем объеме одинакова и равна 300 К.

7.102. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна 40 нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle \upsilon \rangle$ молекул и число Z соударений, которые испытывает молекула в 1 с.

7.103. Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной l = 10 см могут свободно вращаться вокруг их общей оси Z. Радиус R большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером d = 2 мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой n_1 = 20 с$^{-1}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретает частоту вращения

n_2 = 1 $с^{-1}$. При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна 100 г.

7.104. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление P = 79 кПа, благодаря чему летчик считает высоту полета h_1 неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с t = 5 °С до t = 1 °С. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление P_0 у поверхности Земли считать нормальным.

7.105. Какая часть молекул кислорода при T = 273 К обладает скоростями, лежащими в интервале от $\upsilon_1 = 100$ м/с до $\upsilon_2 = 110$ м/с? Найти наиболее вероятную скорость движения молекул.

7.106. Средняя квадратичная скорость молекулы углекислого газа при давлении $P = 10^5$ Па равна 628 м/с. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$; диаметр молекулы принять равным $4 \cdot 10^{-10}$ м.

7.107. Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости кислорода η_1 и азота η_2, если температуры газа одинаковы. Эффективные диаметры молекул кислорода и азота соответственно равны d_1 = 0,36 нм и d_2 = 0,38 нм.

7.108. При температуре T = 280 К и некотором давлении средняя длина $\langle l_1 \rangle$ свободного пробега молекулы кислорода равна 0,1 мкм. Определить среднее число $\langle Z_2 \rangle$ столкновений молекул в 1 с, если давление в сосуде уменьшить до 0,02 первоначального давления. Температуру считать постоянной, а эффективный диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм.

7.109. Определить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега атомов гелия, если плотность ρ газа равна $2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Эффективный диаметр d молекулы гелия равен 0,22 нм.

7.110. В баллоне вместимостью V = 5 л находится гелий под давлением P_1 = 3 МПа при температуре t_1 = 27 °С. После того, как из баллона был израсходован гелий массой m = 15 г, температура в баллоне понизилась до t_2 = 17 °С. Определить давление P_2 газа, оставшегося в баллоне.

7.111. Кислород массой m = 10 г находится под давлением 200 кПа при температуре 280 К. В результате изобарного расширения газ занял объем 9 л. Определить:

1) объем газа V_1 до расширения;
2) температуру газа T_2 после расширения;
3) плотность газа ρ_2 после расширения.

8. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ И ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ. ЭНТРОПИЯ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

В термодинамике, как и в других разделах физики, одним из основных параметров системы является энергия. В отличие от механики здесь рассматривается *внутренняя энергия* системы, т.е. все виды энергии системы без учета потенциальной энергии взаимодействия системы с другими системами и кинетической энергии движения всей системы как целого. Таким образом, внутренняя энергия U системы слагается из кинетической энергии движения отдельных молекул, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами и внутримолекулярной энергии. В формулы термодинамики всегда входит изменение внутренней энергии ΔU системы в процессе перехода из одного ее состояния в другое. Для его расчета используется *первое начало термодинамики*, которое выражает закон сохранения энергии в макроскопических процессах и записывается в виде

$$\Delta U = Q - A, \tag{8.1}$$

где Q – полученное системой количество теплоты, A – совершаемая системой работа.

Если система отдает количество теплоты или работа совершается над системой, то знак у соответствующей величины нужно поменять на противоположный.

При нагревании вещества системы от одного состояния 1 до другого 2 полученное количество теплоты можно рассчитать по формуле

$$Q = m \int\limits_{1-2} c dT = \nu \int\limits_{1-2} C_m dT, \tag{8.2}$$

где c – *удельная теплоемкость* вещества, C_m – его *молярная теплоемкость*.

В большинстве задач значения c и C_m можно считать не зависящими от температуры и выносить их за знак интеграла. При этом необходимо учитывать, что количество теплоты и, соответственно, значения теплоемкостей зависят от типа процесса 1 – 2. Если теплообмен идет при постоянном давлении (изобарический процесс) или постоянном объеме (изохорический процесс), то разность соответствующих молярных теплоемкостей C_P и C_V определяется по *уравнению Майера*

$$C_P - C_V = R. \tag{8.3}$$

Работа, совершаемая газом в процессе 1 – 2, вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{1-2} P dV. \tag{8.4}$$

Полученная при интегрировании работа также зависит от типа процесса 1 – 2 (рис. 8.1).

На графике процесса в координатах $P-V$ работа численно равна площади криволинейной трапеции под линией процесса (заштрихованный участок на рис. 8.1).

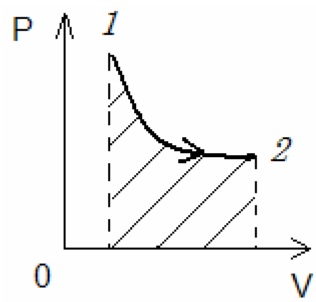


Рис. 8.1

Расчет облегчается, если удается использовать уравнение соответствующего процесса. Например, при постоянстве температуры (*изотермический* процесс) можно воспользоваться уравнением Бойля – Мариотта $PV = P_1V_1$, где P_1 и V_1 – параметры одного из состояний. Если же процесс идет без теплообмена, то удобно применять одно из *уравнений адиабаты*:

$$PV^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}, \tag{8.5}$$

где показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1. \tag{8.6}$$

Например, если состояние 1 является начальным, а состояние 2 конечным, то работа при адиабатическом процессе

$$A = \int\limits_{1-2} PdV = P_1V_1^{\gamma}\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V^{\gamma}}dV = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{1-\gamma}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right).$$

Вычисление работы при изобарическом и изотермическом процессах выполнено в примере (см. ниже).

Из формулы (8.4) следует, что работа при изохорическом процессе (V = const) равна нулю. Тогда первое начало термодинамики (8.1) можно переписать в виде

$$\Delta U = Q = \nu\int\limits_{1-2} C_V dT = \nu C_V \Delta T. \tag{8.7}$$

Используя уравнения (8.3) и (8.6), получим формулы, полезные при решении задач:

$$C_P = \frac{\gamma}{\gamma-1}R; \quad C_V = \frac{1}{g-1}R. \tag{8.8}$$

Для идеального газа

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_P = \frac{i+2}{2}R; \quad \gamma = \frac{i+2}{i}. \tag{8.9}$$

Пример. Объем идеального газа увеличился в 2 раза: в первом случае при постоянной температуре, а во втором – при постоянном давлении.

1. В каком случае газ совершит большую работу, если начальное состояние в обоих случаях одинаковое?
2. Сравнить полученные газом количества теплоты.

Решение

1. Построим графики процессов в $P - V$ координатах (рис. 8.2)

Работа газа в каждом случае соответствует площади под линией, изображающей процесс. Тогда очевидно, что

$$A_{1-2} < A_{1-3}.$$

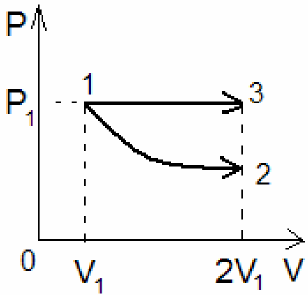


Рис. 8.2

Для подтверждения этого вывода воспользуемся формулой (8.4). При изобарном процессе преобразуем ее к виду

$$A_{1-3} = P_1(V_2 - V_1) = P_1(2V_1 - V_1) = P_1V_1.$$

При изотермическом процессе давление является функцией объема газа. Из уравнения состояния следует, что

$$P = \frac{\nu RT_1}{V}.$$

Тогда

$$A_{1-2} = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = P_1V_1 \ln 2.$$

Так как $\ln 2 < 1$, то $A_{1-2} < A_{1-3}$.

2. Для определения полученного в процессах количества теплоты используем первое начало термодинамики. При изотермическом процессе $\Delta U = 0$. Тогда

$$Q_{1-2} = A_{1-2} = P_1V_1 \ln 2.$$

При изобарном процессе

$$Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A_{1-3},$$

где ΔU_{1-3} определим по формуле (8.7). С учетом уравнения идеального газа и формулы (8.6) преобразуем ее к виду

$$\Delta U_{1-3} = \nu C_V \Delta T = C_V \frac{P_1 \Delta V}{R} = \frac{C_V}{R} P_1V_1 = \frac{1}{\gamma - 1} P_1V_1.$$

Так как $1 < \gamma < 1{,}66$, то $\ln 2 < 1 < \frac{1}{\gamma - 1}$. Следовательно, $Q_{1-3} > Q_{1-2}$.

Мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния системы при заданных внешних условиях является *энтропия* S, которая в статистической физике определяется как

$$S = k \ln \Omega, \tag{8.10}$$

где Ω – *статистический вес* состояния или число микросостояний, посредством которых может быть реализовано данное макросостояние, k – постоянная Больцмана.

Статистический вес и энтропию системы, состоящей из N подсистем, определяют по формулам

$$\Omega=\Omega_1\Omega_2...\Omega_N; \qquad S=S_1+S_2+...+S_N. \tag{8.11}$$

Согласно одной из формулировок второго начала термодинамики энтропия изолированной термодинамической системы может только возрастать или оставаться постоянной после достижения максимума.

В термодинамике энтропия была введена на основе другой формулировки второго начала, которую Р. Клаузиус дал в виде *неравенства*

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \tag{8.12}$$

где знак равенства справедлив для *равновесных* (обратимых) процессов.

Отсюда получены формулы

$$Q=\int_1^2 TdS \quad \text{и} \quad \Delta S=\int_1^2 \frac{CdT}{T}, \tag{8.13}$$

где учтена связь $\delta Q = cdT$, а c – теплоемкость системы. Формулы (8.13) позволяют рассчитать теплообмен и изменение энтропии при различных процессах, в том числе происходящих в тепловых машинах. Определив количество теплоты, получаемое тепловой машиной за цикл от нагревателя Q_1, и количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику Q_2, можно рассчитать коэффициент полезного действия η (кпд) тепловой машины

$$\eta=\frac{A_{полезн}}{Q_{получ}}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}. \tag{8.14}$$

В реальных тепловых машинах кпд ограничен *неравенством Карно*:

$$\eta \leq 1-\frac{T_2}{T_1}, \tag{8.15}$$

где T_2 и T_1 – соответственно минимальная и максимальная температуры рабочего вещества за цикл. Равенство в формуле (8.15) достигается только в *цикле Карно* (обратимом цикле, состоящем из двух изотермических и двух адиабатических процессов).

В соответствии с изложенным задачи по данной теме подразделяются на три группы:

– задачи на расчет изменения энтропии ΔS или статистического веса Ω с использованием формул (8.10) и (8.11);

– задачи на расчет Q или ΔS в процессах с использованием формул (8.13) или (8.1), (8.2), (8.4) и (8.7);

– задачи на расчет кпд тепловых машин (термодинамических циклов) с использованием формул (8.14), (8.15), (8.1), (8.4) и (8.7).

Кроме вышеизложенного при решении задач применяются:

– средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$<\varepsilon_1>=\frac{1}{2}kT$$

(k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура);

– средняя энергия молекулы

$$<\varepsilon>=\frac{i}{2}kT$$

($i=i_{пост}+i_{вращ}+2i_{колеб}$ – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы);

– внутренняя энергия идеального газа

$$U_m=\frac{i}{2}kTN_A=\frac{i}{2}RT \text{ (для 1моля газа);}$$

$$U=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT=\nu\frac{i}{2}RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

(i – число степеней свободы; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; N_A – постоянная Авогадро; R – молярная газовая постоянная; m – масса газа; M – молярная масса; $\nu=\frac{m}{M}$ – количество вещества);

– молярная и удельная теплоемкости

$$C_m=\frac{\delta Q}{\nu dT}; \quad c=\frac{\delta Q}{mdT}$$

(δQ – бесконечно малое количество теплоты);

– связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m=cM$$

(M – молярная масса газа);

– молярная и удельная теплоемкости газа при постоянном объеме

$$C_V=\frac{i}{2}R=\frac{R}{\gamma-1}; \quad c_v=\frac{i}{2}\frac{R}{M}$$

(i – число степеней свободы; γ – показатель адиабаты);

– молярная и удельная теплоемкости газа при постоянном давлении

$$C_P=\frac{i+2}{2}R=\frac{\gamma}{\gamma-1}R; \quad c_p=\frac{i+2}{2}\frac{R}{M};$$

– уравнение Майера

$$C_P-C_V=R;$$

– уравнение теплового баланса

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta U_i$$

(Q – количество теплоты, которое данные тела получили или отдали в процессе теплообмена; ΔU_i – изменение внутренней энергии i-го тела в процессе теплообмена; n – число тел, участвующих в теплообмене);

– изменение внутренней энергии при нагревании или охлаждении

$$\Delta U = cm\Delta T$$

(c – удельная теплоемкость; m – масса тела; ΔT – изменение температуры);

– изменение внутренней энергии при плавлении или затвердевании

$$\Delta U = \lambda m$$

(λ – удельная теплота плавления; m – масса тела);

– изменение внутренней энергии при парообразовании или конденсации

$$\Delta U = rm$$

(r – удельная теплота парообразования; m – масса тела);

– изменение внутренней энергии при сгорании вещества

$$\Delta U = qm$$

(q – удельная теплота сгорания; m – масса тела);

– изменение энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1})$$

(S – энтропия).

8.2. Примеры решения задач

1. Для получения низких температур производят адиабатическое расширение гелия, имеющего первоначальную температуру $T_0 = 300$ К и объем $V_0 = 10$ л. При этом давление падает от $P_0 = 5$ МПа до $P = 0{,}2$ МПа. Найти объем и температуру гелия в конечном состоянии. Для гелия показатель адиабаты $\gamma = 1{,}66$.

Дано: $T_0 = 300$ К; $V_0 = 10$ л; $P_0 = 5$ МПа; $P = 0{,}2$ МПа; $\gamma = 1{,}66$.

Найти: V; T.

Решение. Запишем уравнение (8.5) в виде $PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma}$. После преобразования получим $V = V_0\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 69$ л. Для определения конечной температуры используем уравнение $\frac{PV}{T} = \text{const}$. Тогда $\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0}$ или $T = T_0\frac{PV}{P_0V_0} = 83$ К.

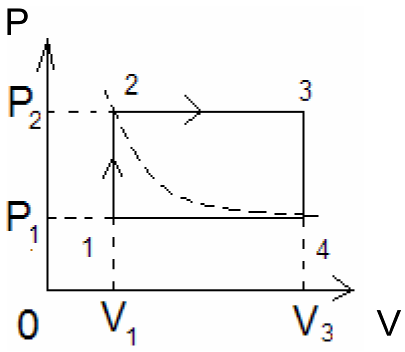


Рис. 8.3

2. Состояние одного моля идеального газа изменяется по замкнутому циклу, состоящему из двух изобарических процессов и двух изохорических (рис. 8.3).

В состоянии 1 температура газа $T_1 = 100$ K, в состоянии 3 температура газа $T_3 = 400$ K. В состояниях 2 и 4 температуры одинаковы.

1. Определить работу, совершенную газом за цикл. 2. Найти изменение внутренней энергии и количество теплоты, полученное газом за цикл. Считать показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Решение

1. Работа газа за цикл равна сумме работ на отдельных участках

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}.$$

На участках 1 – 2 и 3 – 4 объем газа не изменяется (изохорические процессы) и в соответствии с формулой (8.4) работа равна нулю. На участке 2 – 3 давление постоянно (изобарический процесс), и формулу (8.4) преобразуем к виду

$$A_{2-3} = \int\limits_{2-3} PdV = P_2 \int\limits_{V_1}^{V_3} dV = P_2(V_3 - V_1).$$

Эта величина соответствует площади прямоугольника под графиком процесса. Используя уравнение Клайперона – Менделеева $PV = \nu RT$, перепишем его в виде

$$A_{2-3} = \nu(RT_3 - RT_2).$$

Аналогично получим формулу работы на участке 4 – 1:

$$A_{4-1} = \int\limits_{4-1} PdV = P_1 \int\limits_{V_3}^{V_1} dV = P_1(V_1 - V_3) = \nu RT_1 - \nu RT_4.$$

Так как $V_1 < V_3$, то полученное значение меньше нуля. Работа также численно равна площади под линией процесса, но с отрицательным знаком.

Тогда работа за весь цикл равна площади прямоугольника 1 – 2 – 3 – 4 – 1 или

$$A = \nu(RT_3 - RT_2 + RT_1 - RT_4).$$

Учитывая, что по условию задачи $T_2 = T_4 = T$, полученную формулу можно переписать в виде

$$A = \nu(RT_3 - 2RT + RT_1).$$

Температуру T можно выразить через T_1 и T_3, если воспользоваться уравнением состояния идеального газа Клайперона – Менделеева. Запишем его для состояний 1, 2, 3, и 4.

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} P_1V_1 = \nu RT_1 \\ P_2V_1 = \nu RT \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{T_1}{T} \\ \left.\begin{matrix} P_2V_3 = \nu RT_3 \\ P_1V_3 = \nu RT \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{T}{T_3} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{T}{T_3} \text{ или } T = \sqrt{T_1T_3}\,.$$

Тогда

$$A = \nu(RT_3 - 2R\sqrt{T_1T_3} + RT_1) = \nu R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2\,.$$

После вычислений получим $A = 831$ Дж .

2. Внутренняя энергия является функцией состояния. Поэтому за цикл

$$\Delta U = U_1 - U_1 = 0\,.$$

На участке 1 – 2 газ нагревается без совершения работы. Следовательно, его внутренняя энергия увеличивается только за счет полученного количества теплоты $\Delta U = Q$. На участке 2 – 3 газ продолжает нагреваться, его внутренняя энергия увеличивается и, кроме того, газ совершает положительную работу. Тогда $Q = \Delta U + A > 0$, т.е. газ, как и на участке 1 – 2, получает количество теплоты. Участки 3 – 4 и 4 – 1 аналогичны участкам 1 – 2 и 2 – 3, но процессы идут с уменьшением температуры и работа совершается над газом. Поэтому для этих участков $Q < 0$ и в соответствии с формулой (8.2)

$$Q_{получ} = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \nu C_V(T - T_1) + \nu C_P(T_3 - T)\,,$$

где $T = \sqrt{T_1T_3}$, $C_P = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}R$ и $C_V = \dfrac{1}{\gamma - 1}R$.

После вычислений получим $Q_{получ} = 7{,}9$ кДж.

Сравним полученное газом количество теплоты и совершенную им работу, т.е. определим кпд цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_{получ}} \approx 0{,}1\,.$$

Следовательно, 90 % полученного газом количества теплоты в таком циклическом процессе «не работает».

3. Статистический вес идеального газа, находящегося в герметичном баллоне, зависит от внутренней энергии в соответствии с формулой $\Omega = cU^{\frac{3}{2}N}$, где c – некоторая постоянная, зависящая от объема и количества газа, N – число молекул газа, U – внутренняя энергия газа. Вывести формулу для расчета энтропии газа.
Решение. Применив формулу (8.10), получим

$$S = k\ln\Omega = \frac{3}{2}kN\ln U + k\ln C.$$

4. Найти приращение энтропии воды массой $m = 0{,}1$ кг при нагревании ее от температуры $t_1 = 0$ °С до температуры $t_2 = 100$ °С и последующем превращении воды в пар.
Решение. Находим отдельно изменение энтропии воды при нагревании ΔS_1 и при превращении ее в пар ΔS_2. Используем формулу (8.13).

При нагревании $\Delta S_1 = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{c_{уд} m dT}{T}$,

где теплоемкость C заменена произведением удельной теплоемкости $c_{уд}$ и массы воды. После интегрирования

$$\Delta S_1 = c_{уд} m \ln\frac{T_2}{T_1} = 131\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

При испарении воды температура остается постоянной. Поэтому, интегрируя формулу (8.12) при постоянной температуре, получим

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{исп}}{T_2} = \frac{rm}{T_2} = 606\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}},$$

где r – удельная теплота испарения воды.

Тогда

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

5. Определить изменение энтропии, если температура одного моля идеального газа увеличивается в $e \approx 2{,}7$ раза при процессах: а) изобарическом; б) изохорическом; в) адиабатическом.
Решение. Записав первое начало термодинамики в виде $\delta Q = dU + PdV$ и заменив δQ, используя формулу (8.12) в виде равенства, получим $TdS = dU + PdV$. Учтем, что изменение внутренней энергии одного моля идеального газа $dU_M = C_V dT$, где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда

$$TdS = \nu C_V dT + PdV;$$

а) продифференцируем уравнение Клапейрона – Менделеева $PV = \nu RT$ при изобарическом процессе

$$PdV = \nu RdT\,.$$

С учетом этого перепишем первое начало термодинамики

$$TdS = \nu C_V dT + \nu RdT$$

или

$$dS = \nu(C_V + R)\frac{dT}{T} = \nu C_P \frac{dT}{T}\,.$$

После интегрирования последней формулы получим

$$\Delta S = \nu C_P \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_P \ln e = \nu C_P\,;$$

б) при изохорическом процессе $dV = 0$. Тогда

$$TdS = \nu C_V dT \quad \text{или} \quad dS = \nu C_V \frac{dT}{T}\,.$$

После интегрирования этой формулы находим

$$\Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_P \ln e = \nu C_V\,;$$

в) при адиабатическом процессе $\delta Q = 0$ и в соответствии с (8.13) $dS = 0$.

6. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл, в пределах которого абсолютная температура изменяется в 2 раза, а сам цикл в координатах $T - S$ имеет вид показанный на рис. 8.4. Найти коэффициент полезного действия η цикла.

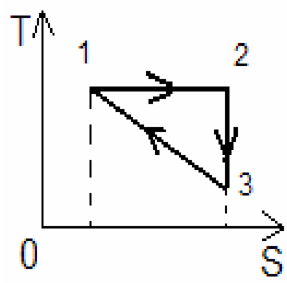


Рис. 8.4

Решение

По определению

$$\eta = \frac{A_{полезн}}{Q_{получ}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}\,,$$

где Q_1 – количество теплоты, получаемое тепловой машиной за цикл; Q_2 – количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику.

Используем формулу (8.13), т.е. $Q = \int TdS$. Учтем, что на диаграмме интеграл численно равен площади криволинейной трапеции под графиком процесса. Интегрирование можно разбить на три участка: 1 – 2, 2 – 3 и 3 – 1. На участке 1 – 2 $dS > 0$. Тогда

$$Q_{1-2} = T_1\int dS = T_1\Delta S_{1-2} > 0$$

(машина получает количество теплоты). На участке 2 – 3 $dS = 0$ (теплообмена нет). На участке 3 – 1 $dS < 0$.

Тогда

$$Q_{3-1} = \int TdS = \frac{T_1 + T_3}{2} \Delta S_{3-1} < 0$$

(машина отдает количество теплоты холодильнику).

Учтем, что $T_1 = 2T_3$ и $\Delta S_{1-3} = -\Delta S_{3-1}$. В результате получаем

$$\eta = \frac{T_1 \Delta S - \frac{3}{4} T_1 \Delta S}{T_1 \Delta S} = 0,25 .$$

7. Идеализированный цикл бензинового двигателя внутреннего сгорания изображен на $P-V$ диаграмме (рис. 8.5). Участок 1 – 2 соответствует адиабатическому сжатию горючей смеси; участок 2 – 3 – изохорическому увеличению давления при сгорании топлива; участок 3 – 4 – адиабатическому расширению газообразных продуктов сгорания топлива – «рабочий ход»; участок 4 – 1 – изохорическому выхлопу отработавших газов. Выразить кпд двигателя через степень сжатия газа $K = \frac{V_1}{V_2}$. Сделать расчет для $K = 7$ при показателе адиабаты $\gamma = 1,4$.

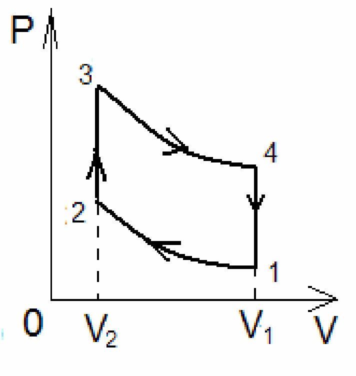


Рис. 8.5

Решение. По определению, $\eta = \frac{A_{полезн}}{Q_{получ}}$. Проанализируем процессы с точки зрения теплообмена и совершения работы.

Процесс 1 – 2 – адиабатический процесс с уменьшением объема, $Q_{1-2} = 0$; $A_{1-2} < 0$ – работа, совершаемая внешними силами при сжатии газа, равна

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV < 0 .$$

Для расчета интеграла используем уравнение адиабаты $PV^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$. Тогда

$$P = P_2 V_2^{\gamma} \frac{1}{V^{\gamma}}$$

и после преобразования подынтегрального выражения получим

$$A_{1-2} = P_2 V_2^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\gamma}} dV = \frac{P_2 V_2^{\gamma}}{1-\gamma} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) =$$

$$= \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{K} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] < 0 .$$

Процесс 2 – 3 – изохорический процесс. В этом случае работа $A_{2-3}=0$. Увеличение давления связано с возрастанием температуры. Следовательно, внутренняя энергия газа увеличивается за счет получаемого при сгорании топлива количества теплоты:

$$Q_{2-3}=\nu C_V\left(T_3-T_2\right)=\nu C_V\left(\frac{P_3V_2}{\nu R}-\frac{P_2V_2}{\nu R}\right)=\frac{C_VV_2}{R}\left(P_3-P_2\right)>0.$$

Процесс 3 – 4 аналогичен процессу 1 – 2, но идет в противоположном направлении. Поэтому $Q_{3-4}=0$ и работа $A_{3-4}>0$. Получаем

$$A_{3-4}=-\frac{P_3V_2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}-1\right]=\frac{P_3V_2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{1}{K}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Процесс 4 – 1 аналогичен процессу 2 – 3. Работа $A_{4-1}=0$, температура и внутренняя энергия газа уменьшаются за счет «сбрасывания» количества теплоты в атмосферу, т.е. $Q_{4-1}<0$.

Используя полученные результаты, найдем коэффициент полезного действия. При этом необходимо учесть, что полезной (результирующей) работой является величина $A_{3-4}+A_{1-2}$, где $A_{1-2}<0$:

$$\eta=\frac{A_{полезн}}{Q_{получ}}=\frac{A_{3-4}+A_{1-2}}{Q_{2-3}}=\frac{\dfrac{V_2(P_3-P_2)}{\gamma-1}\left(1-\dfrac{1}{K^{\gamma-1}}\right)}{\dfrac{C_VV_2}{R}\left(P_3-P_2\right)}$$

Учтем, что $\dfrac{R}{C_V}=\dfrac{C_P-C_V}{C_V}=\gamma-1$.

Тогда

$$\eta=1-\frac{1}{K^{\gamma-1}}=1-\frac{1}{7^{0,4}}\approx0,54 \quad \text{или} \quad \eta=54\ \%$$

(Реальный кпд бензиновых двигателей меньше, т.к. в расчетах не учтены силы трения, теплообмен со стенками цилиндров и другие факторы).

8. Найти кпд тепловой машины, работающей по циклу Карно, если при адиабатическом расширении рабочей смеси давление уменьшается в 2 раза. Постоянная адиабаты $\gamma=1,5$.

Решение. Цикл Карно состоит из двух адиабат и двух изотерм (рис. 8.6). Его кпд равен

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}.$$

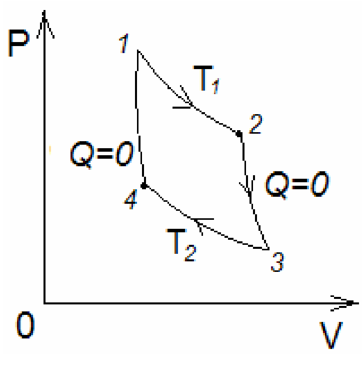


Рис. 8.6

Для определения отношения минимальной T_2 и максимальной T_1 температур в цикле можно использовать уравнение адиабаты $PV^{\gamma} = \text{const}$. Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, преобразуем его к виду

$$P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = const.$$

Тогда для участка 2 – 3

$$P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1 = P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2 \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

По условию задачи $\frac{P_2}{P_3} = 2$.

С учетом этого вычисляем кпд:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}21.$$

9. Сколько теплоты поглощают $m = 200$ г водорода, нагреваясь от $T_1 = 0$ °C до $T_2 = 100$ °C при постоянном давлении? Каков прирост внутренней энергии газа? Какую работу совершает газ?

Дано: $m = 200$ г; $T_1 = 0$ °C; $T_2 = 100$ °C; $P = \text{const}$.

Найти: Q ; ΔU ; A.

Решение. Теплота Q, поглощаемая газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_p \Delta T, \tag{1}$$

где m – масса нагреваемого газа; c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; $\Delta T = T_2 - T_1$ – изменение температуры газа.

Как известно

$$c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}, \tag{2}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа; M – масса моля газа.

Подставив (2) в (1), получим

$$Q = \frac{m}{M} R \frac{i+2}{2} \Delta T = \frac{0{,}2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot \frac{5+2}{2} \cdot 100 = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия газа выражается формулой $U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} RT$, так что ее изменение равно

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{0{,}2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 100 = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа найдем по формуле, выражающей первое начало термодинамики

$$A = Q - \Delta U = 291 - 208 = 83 \text{ кДж}.$$

Работу, совершаемую газом, можно было определить также по формуле

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 83 \text{ кДж}.$$

10. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

Решение. Показатель адиабаты смеси газов определяется формулой

$$\gamma = 1 - \frac{\sum_i \nu_i}{\sum_i \frac{\nu_i}{(\gamma_i - 1)}}.$$

Количества веществ различных компонентов смеси легко определить из соотношения $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$.

В нашем случае $\nu_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 2,5$ и $\nu_2 = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2$.

Для одноатомного гелия $\gamma_1 = \frac{5}{3}$, а для двухатомного водорода $\gamma_2 = \frac{7}{5}$.

Подставляя эти значения в формулу для γ, находим

$$\gamma = 1 + \frac{2,5 + 2}{2,5 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2}} = 1 + \frac{9}{17,5} = 1,51.$$

11. Идеальный трехатомный газ количеством вещества $\nu = 2$ моль занимает объем $V_1 = 10$ л и находится под давлением $P_1 = 250$ кПа. Сначала газ подвергли изохорному нагреванию до температуры $T_2 = 500$ К, затем – изотермическому расширению до начального давления, а после этого в результате изобарного сжатия возвратили в первоначальное состояние. Построить график цикла и определить термический кпд η цикла.

Дано: $i = 6$; $\nu = 2$ моль; $V_1 = 10$ л (10^{-2} м^3); $P_1 = 250$ кПа ($2,5 \cdot 10^5$ Па); $T_2 = 500$ К.

Найти: η.

Решение. Термический кпд любого цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (1)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл; Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл.

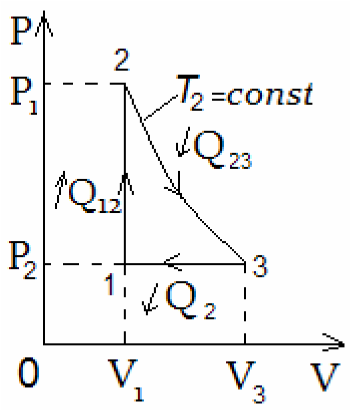


Рис. 8.7

Количество теплоты Q_1 газ получает в двух процессах: изохорном 1 – 2 и изотермическом 2 – 3 (рис. 8.7), т.е.

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

Количество теплоты Q_2 газ отдает в изобарном процессе 3 – 1, т.е.

$$Q_2 = |Q_{31}|.$$

В случае изохорного процесса 1 – 2

$$Q_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1),$$

где $C_V = \frac{i}{2} R$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (i – число степеней свободы молекулы; для трехатомного газа $i = 6$).

Записав уравнение Клапейрона – Менделеева для состояния 1, $P_1 V_1 = \nu R T_1$, найдем температуру $T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = 150\ \text{К}$.

В случае изотермического процесса 2 – 3

$$Q_{23} = A_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_1}$$

(учли, что $V_2 = V_1$). В полученном выражении отношение $\frac{V_3}{V_1}$, согласно закону Гей-Люссака, заменим отношением температур $\frac{T_2}{T_1}$, т.е.

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

В случае изобарного процесса 3 – 1 газ отдает количество теплоты

$$Q_2 = \nu C_P (T_2 - T_1),$$

где $C_P = \frac{i+2}{2} R$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Подставив найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (1), получаем термический кпд цикла

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{\nu C_P(T_2-T_1)}{\nu C_V(T_2-T_1)+\nu RT_2\ln\dfrac{T_2}{T_1}}=$$

$$=1-\frac{(i+2)(T_2-T_1)}{i(T_2-T_1)+2T_2\ln\dfrac{T_2}{T_1}}=0{,}152;$$

$$\eta=15{,}2\ \%.$$

12. Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате чего давление газа возросло от $P_1=10$ кПа до $P_2=30$ кПа, а объем газа уменьшился от $V_1=2{,}5$ л до $V_2=1$ л. Определить: 1) показатель политропы n; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: i=5; P_1=10 кПа (10^4 Па); P_2=30 кПа ($3\cdot10^4$ Па); $V_1=2{,}5$ л ($2{,}5\cdot10^{-3}$ м^3); $V_2=1$ л (10^{-3} м^3).

Найти: 1) n; 2) ΔU.

Решение. Уравнение политропного процесса для двух состояний газа (начального 1 и конечного 2) можно записать в виде

$$P_1V_1^n=P_2V_2^n,$$

где n – показатель политропы.

Возможна другая форма записи $\dfrac{P_2}{P_1}=\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^n$ или, учитывая условие задачи $\dfrac{P_2}{P_1}=3$ и $\dfrac{V_1}{V_2}=2{,}5$, получим $3=(2{,}5)^n$, откуда искомый показатель политропы $n=1{,}2$.

Внутренняя энергия газа – однозначная функция состояния, при всех процессах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U=\nu C_V(T_2-T_1), \tag{1}$$

где ν – количество вещества; $C_V=\dfrac{i}{2}R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Записав уравнение Клапейрона – Менделеева для двух состояний газа, $P_1V_1=\nu RT_1$ и $P_2V_2=\nu RT_2$, найдем температуры T_1 и T_2:

$$T_1=\frac{P_1V_1}{\nu R};\quad T_2=\frac{P_2V_2}{\nu R}. \tag{2}$$

Подставляя выражения (2) в формулу (1), получим искомое изменение внутренней энергии.

$$\Delta U=\frac{C_V}{R}\left(P_2V_2-P_1V_1\right)=\frac{i}{2}\left(3P_1\cdot3V_1-P_1V_1\right)=\frac{8i}{2}P_1V_1=20P_1V_1=200\ \text{Дж}.$$

13. Двухатомный идеальный газ совершает процесс, в ходе которого молярная теплоемкость C газа остается постоянной и равной $\frac{7}{2}R$. Определить показатель политропы n этого процесса.

Дано: $i=5$; $C=\frac{7}{2}R=\text{const}$.

Найти: n.

Решение. Если молярная теплоемкость C в ходе процесса остается постоянной, то мы имеем дело с политропным процессом. Показатель политропы

$$n=\frac{C-C_P}{C-C_V}, \tag{1}$$

где C_P и C_V – соответственно молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме.

$$C_P=\frac{i+2}{2}R \quad \text{и} \quad C_V=\frac{i}{2}R,$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная. Учитывая, что в задаче рассматривается двухатомный газ ($i=5$), имеем $C_P=\frac{7}{2}R$ и $C_V=\frac{5}{2}R$. Подставив эти значения в формулу (1), найдем показатель политропы $n=0$.

8.3. Задачи для самостоятельного решения

8.1 – 8.25. Идеальный газ совершает цикл $a-b-c-d-a$, состоящий из чередующихся процессов, указанных в табл. 8.1 в соответствии с номером задачи. Построить цикл в координатах $P-V$ и определить для одного из процессов величину, указанную в последнем столбце табл. 8.1.

Дано: масса газа $m=1$ г, $P_1=0{,}2$ МПа, $P_2=0{,}1$ МПа, $P_3=0{,}15$ МПа, $V_1=1$ л, $V_2=2$ л.

Для всех участков цикла указать знак изменения внутренней энергии и определить: получает или отдает газ тепло, совершает газ работу или работа совершается над газом.

Примечания: 1) символы $d=a$ обозначают отсутствие процесса $d\to a$, т.е. точки d и a совпадают; 2) символы типа $P_1=\text{const}$, $T=\text{const}$ и т.п. обозначают изопроцессы (в данном примере – изобарный при $P_1=0{,}2$ МПа и изотермический процессы); 3) запись $Q=0$ обозначает адиабатический процесс.

Таблица 8.1

Условия к задачам 8.1 – 8.25

Номер задачи	Газ	Параметры	Вид процесса				Найти
			$a \to b$	$b \to c$	$c \to d$	$d \to a$	
8.1	H_2O	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2$	P=const	T=const	P=const	Q=0	$A_{d\text{-}a}$
8.2	O_2	$V_a=V_1;V_b=V_2;V_c=V_1;P_b=P_2$	T=const	P=const	V=const	d=a	$Q_{c\text{-}d}$
8.3	CO_2	$P_c=P_2;P_a=P_1;V_b=V_2$	P=const	V=const	T=const	d=a	$Q_{a\text{-}b}$
8.4	CH_4	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2$	P=const	T=const	P=const	T=const	$Q_{c\text{-}d}$
8.5	H_2	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2$	P=const	Q=0	P=const	Q=0	$A_{b\text{-}c}$
8.6	NO	$P_a=P_1;P_d=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	T=const	V=const	T=const	V=const	$Q_{b\text{-}c}$
8.7	N_2	$P_a=P_1;P_b=P_2;V_c=V_1$	Q=0	T=const	V=const	d=a	$A_{a\text{-}b}$
8.8	C_2H_6	$P_b=P_1;P_c=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	Q=0	V=const	Q=0	V=const	$Q_{b\text{-}c}$
8.9	Ne	$P_a=P_1;P_b=P_2;V_b=V_2$	T=const	V=const	Q=0	d=a	$A_{c\text{-}d}$
8.10	H_2	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_b=P_2$	T=const	P=const	Q=0	d=a	$Q_{b\text{-}c}$
8.11	N_2O	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1$	P=const	Q=0	T=const	d=a	$A_{b\text{-}c}$
8.12	CO_2	$V_b=V_2;P_b=P_2;V_c=V_1$	Q=0	P=const	V=const	d=a	$A_{a\text{-}b}$
8.13	O_2	$V_a=V_1;P_a=P_1;V_b=V_2$	P=const	V=const	Q=0	d=a	$Q_{b\text{-}c}$
8.14	H_2O	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2$	P=const	Q=0	P=const	T=const	$Q_{c\text{-}d}$
8.15	C_2H_4	$P_b=P_1;P_c=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	Q=0	V=const	T=const	V=const	$Q_{d\text{-}a}$
8.16	N_2	$P_a=P_1;P_d=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	T=const	V=const	Q=0	V=const	$A_{c\text{-}d}$
8.17	NH_3	$V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2;V_d=V_1$	P=const	T=const	P=const	V=const	$Q_{c\text{-}d}$
8.18	H_2	$P_b=P_1;P_c=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	T=const	V=const	P=const	V=const	$Q_{b\text{-}c}$
8.19	Ar	$V_a=V_1;P_a=P_1;P_c=P_2;V_b=V_2$	P=const	V=const	P=const	Q=0	$A_{d\text{-}a}$
8.20	CH_4	$V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_2;V_d=V_1$	P=const	Q=0	P=const	V=const	$Q_{d\text{-}a}$
8.21	H_2O	$P_b=P_1;P_c=P_2;V_b=V_2;V_d=V_1$	Q=0	V=const	P=const	V=const	$A_{a\text{-}b}$
8.22	Q_2	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_a=P_1;P_c=P_3$	P=const	V=const	P=const	T=const	$Q_{b\text{-}c}$
8.23	C_2H_6	$V_a=V_1;V_b=V_2;P_c=P_2;$ $P_a=2P_1$	P=const	V=const	Q=0	V=const	$A_{c\text{-}d}$
8.24	NH_3	$P_c=P_2;P_a=2P_1;V_b=V_2;V_d=V_1$	P=const	V=const	Q=0	V=const	$Q_{b\text{-}c}$
8.25	He	$P_c=P_2;P_a=2P_1;V_b=V_2;V_d=V_1$	P=cons	V=const	T=const	V=const	$Q_{c\text{-}d}$

8.26 – 8.53. Газ совершает за цикл Карно работу, равную A. При этом он получает от нагревателя количество теплоты Q_1 при температуре T_1 и отдает холодильнику количество теплоты Q_2 при температуре T_2. Для такого цикла кпд равен η. Найти неизвестные величины, выполнить построение графика согласно номеру задачи в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Условия к задачам 8.26 – 8.53

Номер задачи	A, Дж	Q_1, Дж	Q_2, Дж	T_1, К	T_2, К	Построить график
8.26	?	1800		?		$\eta = f(T_1)$
8.27	?	1600	1200	?	300	при $T_2 = \text{const}$
8.28	?	1400		?		
8.29	?	2000		?		
8.30	1925		?		?	$\eta = f(T_2)$
8.31	1375	4400	?	400	?	при $T_1 = \text{const}$
8.32	1100		?		?	
8.33	1650		?		?	
8.34	900	?	900	?		$\eta = f(Q_1)$
8.35	540	?		?	250	при $Q_2 = \text{const}$
8.36	1260	?		?		
8.37	180	?		?		
8.38	?		1040		?	$\eta = f(Q_2)$
8.39	?	1400	1200	350	?	при $Q_1 = \text{const}$
8.40	?		1120		?	
8.41	?		960		?	
8.42	491		?	?		$\eta = f(T_1)$
8.43	692,3	1800	?	?	200	при $T_2 = \text{const}$
8.44	600		?	?		
8.45	771,4		?	?		
8.46	196	?			?	$\eta = f(T_2)$
8.47	121,4	?	850	320	?	при $T_1 = \text{const}$
8.48	157,4	?			?	
8.49	238	?			?	
8.50	1150	?		?		$\eta = f(Q_1)$
8.51	400	?	1350	?	270	при $Q_2 = \text{const}$
8.52	900	?		?		
8.53	650	?		?		

8.54 – 8.81. Идеальная холодильная машина работает по обратному циклу Карно, для чего за один цикл затрачивается работа, равная A. За цикл от холодильника с температурой t_x отводится количество теплоты Q_x и нагретому телу с температурой $t_н$ передается количество теплоты $Q_н$. Коэффициент полезного действия цикла равен η, холодильный коэффициент – η_x. Найти неизвестные величины согласно номеру задачи в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Условия к задачам 8.54 – 8.81

Номер задачи	A, кДж	t_x, °C	$t_н$, °C	Q_x, Дж	$Q_н$, Дж	η	η_X
8.54	?	?	80	270	295	?	?
8.55	?	–20	?	18	?	?	12
8.56	12	?	35	?	?	0,065	?
8.57	13,33	0	?	?	?	?	10,5
8.58	?	–13	?	?	180	0,02	?
8.59	?	?	23	75	?	?	25
8.60	4	6	?	?	124	?	?
8.61	10	–3	?	?	?	0,25	?
8.62	20	?	67	320	?	?	?
8.63	?	–23	7	140	?	?	?
8.64	?	?	12	?	96	0,1	?
8.65	6	0	?	80	?	?	?
8.66	?	10	?	112	120	?	?
8.67	22	–5	20	?	?	?	?
8.68	?	2	?	?	72	0,08	?
8.69	15	?	93	?	?	?	16
8.70	?	?	27	?	320	0,12	?
8.71	?	7	?	36	?	?	8
8.72	30	–13	?	?	280	?	?
8.73	?	52	?	42	48	?	?
8.74	?	?	22	180	?	?	9
8.75	8	–10	?	?	?	0,2	?
8.76	24	–2	?	92	?	?	?
8.77	?	5	30	200	?	?	?
8.78	28	17	?	?	?	?	14
8.79	10	?	33	75	?	?	?
8.80	?	12	?	64	68	?	?
8.81	37	–10	17	?	?	?	?

8.82 – 8.109. К идеальному газу массой m подводится определенное количество теплоты, и газ одним из процессов, сопровождающихся изменением температуры от T_1 до T_2 или объема от V_1 до V_2, переводится из состояния 1 в состояние 2. Изменение энтропии при этом равно ΔS. Найти неизвестную величину согласно номеру задачи в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Условия к задачам 8.82 – 8.109

Номер задачи	Газ	Изопроцесс	m, г	T_1, К	T_2, К	V_1, м^3	V_2, м^3	ΔS, Дж/К
8.82	H_2		?	300	500			742,9
8.83	Ar	P=const	3,6	?	400			12,96
8.84	N_2		5,6	250	?			6,39
8.85	CO_2		13,2	400	600			?
8.86	O_2		?			0,15	0,6	2,88
8.87	N_2	T=const	14			?	0,25	6,687
8.88	CO_2		5,5			0,1	?	1,86
8.89	He		10			0,02	0,1	?
8.90	N_2O		?	270	540			8,64
8.91	Ar	V=const	4,2	?	400			0,538
8.92	H_2		6	225	?			20,97
8.93	Q_2		8	320	400			?
8.94	He		?			0,1	0,4	115,2
8.95	O_2	P=const	6,4			?	0,5	5,33
8.96	N_2O		8,8			0,2	?	9,216
8.97	Kr		12			0,15	0,45	?
8.98	N_2O		?			0,25	1	17,28
8.99	H_2	T=const	5			?	1,5	14,4
8.100	Ar		28			0,08	?	9,36
8.101	Q_2		24			0,05	0,2	?
8.102	Kr		?	300	350			0,64
8.103	N_2O	V=const	11	?	350			1,39
8.104	O_2		12	260	?			3,159
8.105	He		2	200	400			?
8.106	Ne		?	250	500			14,4
8.107	Kr	P=const	24	?	450			1,179
8.108	H_2		8	280	?			47,17
8.109	H_2O		5,4	400	500			?

8.110. Определить изменение энтропии ΔS при превращении 15 г льда при $-13\ ^{\circ}\mathrm{C}$ в пар при $100\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

8.111 – 8.138. Найти изменение энтропии при переходе вещества массой m из одного состояния в другое по табл. 8.5 согласно номеру задачи.

Таблица 8.5

Условия к задачам 8.111 – 8.138

Номер задачи	Вид перехода	m, кг	t_1, ºC	t_2, ºC
8.111 8.112 8.113 8.114	Лед при температуре t_1 в воду при температуре t_2	1 0,5 2 1	–10 –20 –30 –40	40 20 60 80
8.115 8.116 8.117 8.118	Ртуть при t_1 в пар при t_2, нагреваемый при постоянном давлении	0,005 0,01 0,001 0,02	200 100 20 300	450 500 400 550
8.119 8.120 8.121 8.122	Расплавленный свинец при температуре плавления в твердое вещество при t_2	0,1 0,3 0,2 0,5		20 100 300 0
8.123 8.124 8.125 8.126	Пар при t_1, охлаждаемый при постоянном объеме, в воду при t_2	0,1 0,2 0,5 1	150 200 120 180	20 40 60 80
8.127 8.128 8.129 8.130	Олово в твердом состоянии при t_1 в расплав при температуре плавления	0,1 0,2 0,5 1	20 0 100 200	
8.131 8.132 8.133 8.134	Спирт при t_1 в пар при температуре кипения	0,05 0,1 0,01 0,2	0 20 40 60	
8.135 8.136 8.137 8.138	Расплавленный цинк при температуре плавления в твердое вещество при t_2	1 0,8 0,5 0,2		300 100 0 20

8.139. Какое количество тепла надо сообщить азоту при изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A = 2$ Дж?

8.140. Найти молярную массу газа, если при нагревании $m = 0,5$ кг этого газа на $\Delta T = 10$ К изобарически требуется на $\Delta Q = 1,48$ кДж тепла больше, чем при изохорическом нагревании.

8.141. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$ К, сообщив ему количество тепла $Q = 1{,}6$ кДж. Найти приращение его внутренней энергии и показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$.

8.142. Найти молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе $PV^n = \text{const}$, если показатель адиабаты газа равен γ. При каких значениях показателя политропы n теплоемкость газа будет отрицательной?

8.143. Один моль аргона расширили по политропе с показателем $n = 1{,}5$. При этом температура газа испытала приращение $\Delta T = -26$ К.

Найти: а) количество полученного газом тепла; б) работу, совершенную газом.

8.144. Идеальный газ, показатель адиабаты которого γ, расширяют так, что сообщаемое газу тепло равно убыли его внутренней энергии.

Найти: а) молярную теплоемкость газа в этом процессе; б) уравнение процесса в параметрах T, V.

8.145. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость при постоянном объеме C_V которого известна. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V, если газ совершает процесс по закону:
а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $P = P_0 e^{\alpha V}$, где T_0, P_0 и α – постоянные.

8.146. Водород совершает цикл Карно. Найти кпд цикла, если при адиабатическом расширении: а) объем газа увеличивается в $n = 2$ раза; б) давление уменьшается в $n = 2$ раза.

8.147. Найти (в расчете на один моль) приращение энтропии углекислого газа при увеличении его термодинамической температуры в $n = 2$ раза, если процесс нагревания: а) изохорический; б) изобарический. Газ считать идеальным.

8.148. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает политропический процесс, в результате которого абсолютная температура газа увеличивается в τ раз. Показатель политропы n. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

8.149. Давление в автомобильной шине объемом $V = 0{,}3\ \text{м}^3$ равно $P_0 = 1{,}5$ атм. Шина накачивается насосом с емкостью хода поршня $\Delta V = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$ до давления $P_N = 2$ атм. Сколько ходов поршня N потребуется, если процесс накачки происходит достаточно медленно, так что система сохраняет температуру окружающей среды? Атмосферное давление принять равным $P_a = 1$ атм.

8.150. Кислород нагревают от $t_1 = 50\ °\text{C}$ до $t_2 = 60\ °\text{C}$. Масса кислорода $m = 160$ г. Найти количество поглощенной теплоты и изменение внутренней энергии при изохорном и изобарном процессах. Начальное давление близко к атмосферному.

8.151. Азот, занимающий при давлении $P = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершенную газом при следующих процессах: а) изобарном; б) изотермическом; в) адиабатном.

8.152. Рассчитать, во сколько раз изменится число ударов, испытываемых $1\ \text{см}^2$ стенки сосуда за 1 c при двукратном увеличении объема двухатомного идеального газа в случаях изобарного, изотермического и адиабатного расширений.

8.153. Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 4$ л, расширяют до объема $V_2 = 6$ л, при этом давление падает до значения $P_2 = 10^5$ Па. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу сил давления газа, изменение его внутренней энергии и количество поглощенной теплоты при этом переходе.

8.154. Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении $P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 6$ л, расширяется до объема, вдвое большего, чем начальный. Процесс расширения происходит так, что $PV^k = \text{const}$, где $k = 1{,}2$. Найти изменение внутренней энергии газа и работу, совершенную газом при расширении. Рассчитать молярную теплоемкость газа при этом процессе.

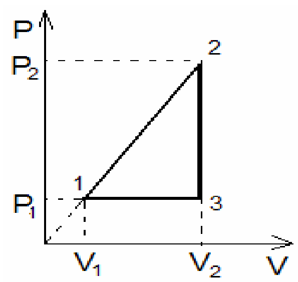
8.155. 0,5 моль идеального одноатомного газа нагревают от температуры $T_1 = 250$ К до $T_2 = 500$ К так, что в процессе нагрева $\frac{P}{V} = \text{const}$. Определить молярную теплоемкость и рассчитать количество теплоты, поглощенной газом при нагревании.

8.156. Один моль углекислого газа, занимавший при температуре $t_1 = 127$ °С объем $V_1 = 0,5$ л, расширяется изотермически до объема $V_2 = 2V_1$. Определить начальное давление газа, работу при расширении, изменение внутренней энергии газа и количество поглощенной теплоты.

8.157. Холодильная машина работает по обратимому циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27$ °С и $t_2 = -3$ °С. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0,2$ кг. Найти количество теплоты, отбираемое от охлаждаемого тела, и работу внешних сил за цикл, если отношение максимального объема газа к минимальному $в = 5$.

8.158. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изотермического, изобарного и адиабатного процессов. При изобарном процессе рабочее тело – идеальный газ – нагревается от температуры $T_1 = 200$ К до $T_2 = 500$ К. Определить коэффициент полезного действия данного теплового двигателя и двигателя, работающего по циклу Карно, происходящему между максимальной и минимальной температурами данного цикла.

8.159. Кислород, масса которого $m = 200$ г, нагревают от температуры $t_1 = 27$ °С до $t_2 = 127$ °С. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давления одинаковы и близки к атмосферному.



8.160. Гелий массой $m = 4$ г совершает цикл, изображенный на рисунке.

Найти работу A, совершаемую газом за один цикл, а также количество теплоты, принятое от нагревателя Q_1 и переданное холодильнику Q_2 за цикл, если $P_1 = 200$ кПа, $P_2 = 600$ кПа, $V_1 = 1$ л, $V_2 = 3$ л.

8.161. В результате адиабатического процесса один моль двухатомного идеального газа перешел из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2. Определить изменение энтропии газа при этом процессе.

8.162. Найти приращение энтропии 10 г водорода: а) при переходе от объема $V_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м^3 под давлением $P_1 = 1,5$ Па к объему $V_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ м^3 под давлением $P_2 = 1$ Па; б) при изохорическом нагревании от $t_1 = 50$ °C до $t_2 = 150$ °C. Газ считать идеальным.

8.163. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

8.164. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой $m = 100$ г от температуры $t_1 = 0$ °C до температуры $t_2 = 100$ °C и последующем превращении воды в пар той же температуры.

8.165. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0,02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К. Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

8.166. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится под давлением $P_1 = 250$ кПа и занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры $T_2 = 400$ К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический кпд η цикла.

8.167. Кислород занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 200$ кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме – до давления $P_2 = 500$ кПа. Построить график процесса и найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

9. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ.

9.1. Основные теоретические сведения, законы и формулы

Процесс перехода неравновесной системы к равновесному состоянию часто осуществляется за счет переноса (потоков) либо молекул, либо теплоты, либо импульса и т.п. *Плотностью потока* физической величины называется ее количество, переносимое в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса.

Выравнивание концентрации примесных молекул в системе называется *диффузией*. В одномерном случае плотность потока молекул J_N вдоль направления Z определяется формулой (первым законом Фика)

$$J_N = -D\frac{dn}{dZ}, \tag{9.1}$$

где D называется *коэффициентом диффузии*, а $\frac{dn}{dZ}$ характеризует изменение (градиент) концентрации по направлению Z.

Аналогично выражение температуры в системе сопровождается потоком тепла, плотность которого J_q определятся *законом теплопроводности Фурье*

$$J_q = -K\frac{dT}{dZ}, \tag{9.2}$$

где K называется коэффициентом теплопроводности, а $\frac{dT}{dZ}$ характеризует изменение температуры по направлению Z.

Процесс, при котором в системе от одного участка к другому передается количество движения (импульс), называется вязкостью. Плотность потока импульса J_p определяется *уравнением вязкости*

$$J_p = -\eta\frac{d\upsilon}{dZ}, \tag{9.3}$$

где η называется *коэффициентом вязкости* (или коэффициентом динамической вязкости), а $\frac{d\upsilon}{dZ}$ показывает, как изменяется скорость в направлении Z, перпендикулярном к направлению движения слоя жидкости или газа. Обмен импульсом приводит к возникновению силы вязкости трения $F_{тр}$ между соседними слоями жидкости. Основной закон для силы вязкого трения был установлен Ньютоном:

$$F_{тр} = -\eta \left| \frac{d\upsilon}{dZ} \right| S, \qquad (9.4)$$

где S – площадь соприкосновения слоев.

Коэффициенты диффузии, теплопроводности и вязкости определяются экспериментально или оцениваются на основании молекулярно-кинетических представлений. Для газов эти оценки приводят к следующим формулам:

$$D = \frac{1}{3} < \upsilon >< l >; \qquad (9.5)$$

$$K = \frac{1}{3} < \upsilon >< l > \frac{i}{2} kn = \frac{1}{3} < \upsilon > \rho c_V; \qquad (9.6)$$

$$\eta = \frac{1}{3} < \upsilon >< l > \rho, \qquad (9.7)$$

где $< \upsilon >$ – средняя скорость теплового движения молекул $\left(< \upsilon >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right)$; i – число степеней свободы молекулы газа; n – концентрация молекул; ρ – плотность газа; c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Среднюю длину свободного пробега молекул газа $< l >$ и частоту соударений ν определяют по формулам

$$< l >= \frac{< \upsilon >}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{< \upsilon >}{< l >}, \qquad (9.8)$$

где σ –эффективное сечение столкновений молекул; d –эффективный диаметр молекулы.

Если в системе имеется локальная неоднородность по температуре или по концентрации молекул, то с течением времени она выравнивается. Для оценки характерного размера области, на границах которой температура или концентрация приблизительно в е ≈ 2,7 раза меньше по сравнению с максимальным значением, можно использовать приближенные формулы

$$L_{диф} \approx \sqrt{D\tau}; \quad L_{тепл} \approx \sqrt{\frac{K\tau}{\rho c_P}}, \qquad (9.9)$$

где $L_{диф}$ – смещение молекул при диффузии; $L_{тепл}$ – характерный размер области изменения температуры; τ – время от начала выравнивания неоднородности; c_P – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Реальный газ – это газ, свойства которого в отличие от идеального газа зависят от взаимодействия молекул. Свойства реального газа описываются уравнением Ван-дер-Ваальса:

– для одного моля газа

$$\left(P+\frac{a}{V_m{}^2}\right)(V_m-b)=RT\,;$$

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right)=RT\,;$$

– для произвольной массы газа

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT\,, \qquad (9.10)$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов; $\nu=\frac{m}{M}$ – количество вещества; $V=\nu V_m$.

Внутреннее давление

$$P'=\frac{a}{V_m^2}\,, \qquad (9.11)$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; V_m – молярный объем.

Связь критических параметров (объем, давление и температура) с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{кр}=3b;\quad P_{кр}=\frac{a}{27b^2};\quad T_{кр}=\frac{8a}{27Rb}\,, \qquad (9.12)$$

где R – молярная газовая постоянная, $T_{кр}$ – критическая температура, при которой исчезают различия в физических свойствах между жидкостью и ее насыщенным паром.

Внутренняя энергия реального газа:

– для одного моля газа

$$U_m=C_V T-\frac{a}{V_m}\,;$$

– для произвольной массы газа

$$U_m=\frac{m}{M}(C_V T-\frac{a}{V_m})\,. \qquad (9.13)$$

Парообразование – переход вещества из жидкой или твердой фазы в газовую. Различают следующие виды парообразования: испарение, кипение и сублимацию – парообразование со свободной поверхности твердого тела.

Свойства жидкостей определяются следующими выражениями:

– поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}\ ; \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \tag{9.14}$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки;

– формула Лапласа, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{9.15}$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны – вне жидкости (вогнутый мениск); σ – поверхностное натяжение;

– избыточное давление в случае сферической поверхности

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}; \tag{9.16}$$

– высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}, \tag{9.17}$$

где θ – краевой угол, r – радиус капилляра, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, σ – поверхностное натяжение;

– закон Дюлонга и Пти

$$C_V = 3R, \tag{9.18}$$

где C_V – молярная теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии; R – молярная газовая постоянная.

9.2. Примеры решения задач

1. Определить среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося в сосуде емкостью $V = 2$ л при температуре $t = 27$ °C и давлении $P = 100$ кПа. Рассчитать число соударений, происходящих между всеми молекулами в этом сосуде за 1 с. Эффективный диаметр молекул кислорода равен $2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано: $V = 2$ л; $t = 27$ °C; $P = 100$ кПа, $t = 1$ с, $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.
Найти: $< l >$, ω.
Решение. Средняя длина свободного пробега молекул вычисляется по формуле (9.8)

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Необходимое для расчета значение концентрации молекул выразим из уравнения

$$P = nKT.$$

Тогда

$$< l > = \frac{KT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Число соударений ω, происходящих между всеми молекулами за одну секунду, находим как произведение числа молекул N и частоты соударений ν каждой молекулы

$$\omega = \frac{1}{2} N\nu.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ связан с тем, что молекулы соударяются попарно и произведение учитывает каждый удар дважды. Учтем, что

$$\nu = \frac{< V >}{< l >} = \frac{1}{< l >}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{и} \quad N = N_A \frac{PV}{RT}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{1}{2} N\nu = \frac{N_A PV}{< l >}\sqrt{\frac{2}{\pi MRT}} \approx 9{,}7 \cdot 10^{31} \text{ с}^{-1}.$$

2. Определить коэффициент диффузии азота, имеющего температуру $T = 300$ К при давлении $P = 100$ кПа. Эффективный диаметр молекул азота принять равным $3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано: $T = 300$ К, $P = 100$ кПа, $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.
Найти: D.
Решение. Коэффициент диффузии определяется по формуле (9.5)

$$D = \frac{1}{3} < \upsilon >< l >.$$

Среднюю длину свободного пробега находим так же, как и в предыдущей задаче. Тогда

$$D = \frac{2KT}{3\pi d^2 P}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

3. Температура воздуха между стеклами оконных рам изменяется от $t_1 = 0$ °C у наружного стекла до $t_2 = +10$ °C у внутреннего. Оценить среднее значение коэффициента теплопроводности для этих условий и рассчитать поток теплоты через окно за счет явления теплопроводности. Площадь окна $S = 2$ м^2, зазор между стеклами $b = 0{,}05$ м. Эффективный диаметр молекул воздуха равен $3 \cdot 10^{-10}$ м.
Дано: $t_1 = 0$ °C, $t_2 = +10$ °C, $S = 2$ м^2, $b = 0{,}05$ м, $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.
Найти: K; Φ_q.
Решение. Коэффициент теплопроводности газа оценивается по формуле (9.6)

$$K = \frac{1}{3} < \upsilon >< l > \cdot \frac{i}{2} kn,$$

где число степеней свободы для молекул воздуха (двухатомные азот и кислород) при указанных температурах $i = 5$;

$$< \upsilon > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \quad < l > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Тогда

$$K = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{ikn}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{ik}{3\pi d^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Поток теплоты через окно вычисляется с помощью закона Фурье (9.2)

$$\Phi_q = J_q S = -K\frac{dT}{dZ}S.$$

Знак «минус» указывает направление потока и в расчетах опускается. С достаточной точностью величину $\frac{dT}{dZ}$ можно заменить на $\frac{T_2 - T_1}{b}$. Тогда

$$\Phi_q = K\frac{T_2 - T_1}{b}S \approx 5{,}2\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

4. В качестве примера диффузии часто приводят распространение запаха в воздухе. Оценить время диффузионного смещения молекулы примеси на расстояние $L = 3$ м. Принять, что молекулы примеси мало отличаются от молекул воздуха и их коэффициент диффузии $D = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Дано: $L = 3$ м, $D = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Найти: τ.

Решение. Диффузионное смещение молекул можно оценить по формуле (9.9)

$$L_{диф} \approx \sqrt{D\tau}.$$

Тогда

$$\tau = \frac{L^2}{D} \approx 55{,}6 \text{ ч}$$

(запах распространяется быстрее, так как не учитывались конвекционные потоки в воздухе, кроме того, формула оценивает размер области, когда на границе ее концентрация молекул 0,37 от максимальной, а обоняние человека чувствительнее).

5. Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $H = 0{,}1$ м могут свободно вращаться вокруг их общей оси (рис. 9.1). Радиус R большего цилиндра равен $0{,}05$ м. Между цилиндрами имеется зазор размером $b = 2$ мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 125{,}6\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какое время Δt с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретает угловую скорость $\omega_2 = 6{,}28\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Коэффициент динамической вязкости воздуха при нормальных условиях равен $1{,}72 \cdot 10^{-5}$ Па·с, масса внешнего цилиндра $m = 0{,}1$ кг. Изменением относительной скорости цилиндров пренебречь.

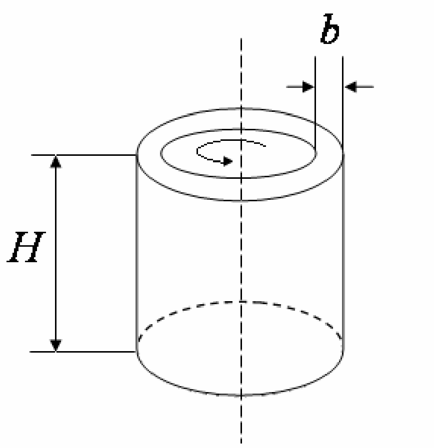


Рис. 9.1

Дано: $H = 0{,}1$ м, $R = 0{,}05$ м, $b = 2$ мм, $\omega_1 = 125{,}6\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\omega_2 = 6{,}28\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $m = 0{,}1$ кг, $\eta = 1{,}72 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Найти: Δt.

Решение. При вращении внутреннего цилиндра в воздушном зазоре возникает градиент скорости, который можно считать приблизительно постоянным и равным

$$\frac{d\upsilon}{dZ} \approx \frac{\Delta\upsilon}{b} \approx \frac{(\omega_1 R - \omega_2 R)}{b} \approx \frac{\omega_1 R}{b}.$$

Поэтому на каждый элемент поверхности ΔS внешнего цилиндра действует сила вязкого трения, направленная по касательной к поверхности (9.4)

$$\Delta F_{тр} = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dr}\right|\Delta S = \eta\frac{\omega_1 R}{b}\Delta S.$$

Это приводит к возникновению момента сил трения относительно оси цилиндров

$$M = \sum \Delta F_{тр} R = \sum \eta\left|\frac{d\upsilon}{dr}\right|\Delta S R = \eta\frac{\omega_1 R}{b} R \sum \Delta S = \eta\frac{\omega_1 R^2}{b} 2\pi R H.$$

Тогда согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела изменение момента импульса ΔL внешнего цилиндра запишем в виде $\Delta L = M\Delta t$. Учтем, что $\Delta L = I\omega_2$, где момент инерции внешнего цилиндра $I = mR^2$.

После преобразований получим

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{M} = \frac{mR^2\omega_2 b}{\eta\omega_1 R\cdot 2\pi R^2 H} = \frac{m\omega_2 b}{\eta\omega_1\cdot 2\pi R H} \approx 18{,}5\ \text{с}.$$

6. Некоторый газ количеством $\nu = 0{,}25$ кмоль занимает объем $V_1 = 1$ м^3. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}2$ м^3 была совершена работа против сил межмолекулярного взаимодействия $A = 1{,}42$ кДж. Определить поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Дано: $\nu = 0{,}25$ кмоль, $V_1 = 1$ м^3, $V_2 = 1{,}2$ м^3, $A = 1{,}42$ кДж.

Найти: a.

Решение. Работа, совершаемая против сил межмолекулярного взаимодействия, равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P' dV,$$

где $P' = \frac{\nu^2 a}{V^2}$ – внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул. Таким образом,

$$A = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{\nu^2 a (V_2 - V_1)}{V_1 V_2}.$$

Откуда

$$a = \frac{AV_1V_2}{\nu^2(V_2 - V_1)} = 0{,}136\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^4}{\text{моль}^2}.$$

7. Определить массу водяного пара m_n, находящегося в комнате объемом $V = 30$ м^3, если относительная влажность воздуха равна $\varphi = 70\ \%$, а плотность пара при данной температуре $\rho_{н.п.} = 0{,}0048\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Дано: $V = 30$ м^3, $\varphi = 70\ \%$, $\rho_{н.п.} = 0{,}0048\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Найти: m_n.

Решение. Из формулы относительной влажности

$$\varphi = \frac{\rho_n}{\rho_{н.п.}}$$

плотность водяного пара

$$\rho_n = \varphi\rho_{н.п.}.$$

Тогда масса пара

$$m_n = \rho_n \cdot V = \varphi\rho_{н.п.}V = 0{,}7 \cdot 0{,}0048 \cdot 40 = 0{,}1344\ \text{кг}.$$

8. В сосуде емкостью 10 л находится 360 г водяного пара при температуре 470 К. Вычислить давление пара на стенки сосуда. Какую часть объема V составляет собственный объем V' молекул пара? Какую часть давления P составляет внутреннее давление P'?

Дано: $V = 10$ л (0,01 м^3); $m = 360$ г (0,36 кг); $T = 470K$.

Найти: P; $\frac{V'}{V}$; $\frac{P'}{P}$.

Решение. По уравнению Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT, \tag{1}$$

где $\frac{m}{M} = \frac{0{,}36}{18\cdot 10^{-3}} = 0{,}02\cdot 10^3$ (моль) – число молей газа; a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса (для водяного пара $a = 55\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^4}{\text{моль}^2}$; $b = 0{,}3\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$);

$R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – молярная газовая постоянная.

Собственный объем V' молекул связан с поправкой b равенством

$$\frac{mb}{M} = 4V'.$$

Тогда

$$\frac{V'}{V} = \frac{mb}{4MV} = \frac{0,02 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0,01} = 0,015$$

или

$$\frac{V'}{V} = 1,5\ \%.$$

Внутреннее давление определяется равенством

$$P' = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2} = \left(0,02 \cdot 10^3\right)^2 \frac{55 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 2,2 \cdot 10^4\ (\text{Па}).$$

Давление P находим из уравнения (1)

$$P = \frac{m}{M} \frac{RT}{\left(V - \frac{m}{M} b\right)} - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2};$$

$$P = 0,02 \cdot 10^3 \frac{8,31 \cdot 470}{\left(0,01 - 0,02 \cdot 10^3 \cdot 0,03 \cdot 10^{-3}\right)} - 2,2 \cdot 10^4 = 8,29 \cdot 10^6\ (\text{Па}).$$

Тогда $\frac{P'}{P} = \frac{2,2 \cdot 10^4}{8,29 \cdot 10^6} \approx 0,003$ или $\frac{P'}{P} \approx 0,3\ \%$.

9. Даны постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса. Определить значения критической температуры и критического давления аргона.

Дано: $a = 1,36 \cdot 10^5\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{кмоль}^2}$; $b = 0,0322\ \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}$; $\nu = 1$.

Найти: $T_к$; $P_к$.

Решение. Уравнение состояния реальных газов Ван-дер-Ваальса для 1 кмоля имеет вид:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT. \tag{1}$$

Из уравнения (1) можно получить выражения для критических величин $T_к$ и $P_к$:

$$T_к = \frac{8a}{27bR};\ P_к = \frac{a}{27b^2}.$$

Определяем $T_к$ и $P_к$.

$$T_к = \frac{8 \cdot 1{,}36 \cdot 10^5}{27 \cdot 0{,}0322 \cdot 8{,}32 \cdot 10^3} \approx 151 \text{ (К)};$$

$$P_к = \frac{(1{,}36) \cdot 10^5}{27(0{,}0322)^2} = 4{,}86 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

10. Углекислый газ массой $m = 10$ кг адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}361\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$, определить понижение температуры ΔT газа при этом расширении.

Дано: $m = 10$ кг, $M = 44 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, $Q = 0$, $i = 6$, $V_1 = 1$ м^3, $V_2 = 2$ м^3, $a = 0{,}361\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$.

Найти: ΔT.

Решение. Согласно первому началу термодинамики количество тепла Q, переданное газу, идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A газа против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи газ адиабатно $(Q = 0)$ расширяется в вакуум $(A = 0)$, поэтому из (1) следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0 \quad \text{и} \quad U_1 = U_2. \qquad (2)$$

Внутреннюю энергию реального газа количеством вещества ν

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V}\right)$$

запишем для двух состояний газа – 1 (до расширения) и 2 (после расширения)

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right), \qquad (3)$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме; a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Приравняв, согласно (2), выражения (3), получим

$$C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2},$$

откуда искомая разность температур

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{a\nu}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\frac{2am}{iMR}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -1,65 \text{ К}$$

(учли, что $C_V = \frac{i}{2}R$ и $\nu = \frac{m}{M}$).

11. Азот количеством вещества $\nu = 2$ моль, занимавший при температуре $T = 350$ К объем $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3, расширяется изотермически до объема $V_2 = 3V_1$. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$ и $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$, определить: 1) работу A расширения газа; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $\nu = 2$ моль; $T = 350$ К $=$ const; $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 3V_1$; $a = 0{,}136\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$;

$b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

Найти: A; ΔU.

Решение. Работа расширения газа от объема V_1 до объема V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV, \tag{1}$$

где P – давление, производимое газом на стенки сосуда, найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества ν

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

откуда

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \tag{2}$$

Выражение (1) после подстановки (2) примет вид

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)dV = \nu RT \ln\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} + \nu^2 a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right);$$

$$A = 6{,}36 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия реального газа для состояний 1 и 2

$$U_1 = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V_2}\right)$$

(учли, что $T = \text{const}$).

Искомое изменение внутренней энергии газа в результате изотермического расширения

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a\nu^2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 181 \text{ Дж}.$$

12. Доказать, что эффект Джоуля – Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

Дано: $b = 0$.

Найти: ΔT.

Решение. Эффект Джоуля-Томсона (изменение температуры реального газа в результате его адиабатного дросселирования – медленного прохождения газа (рис. 9.2) под действием перепада давлений сквозь дроссель (например, пористую перегородку) принято называть положительным, если газ в процессе дросселирования охлаждается $(\Delta T < 0)$. В случае эффекта Джоуля – Томсона сохраняется (остается неизменной) функция состояния – энтальпия:

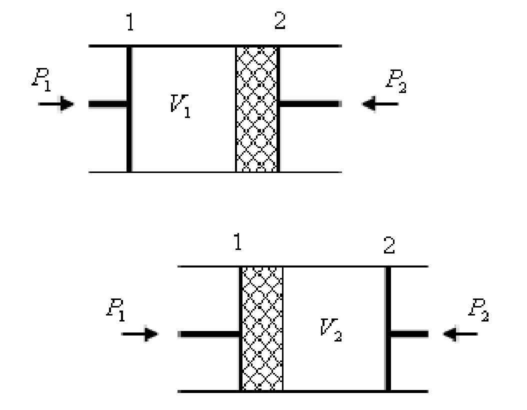


Рис. 9.2

$$P_1V_1 + U_1 = P_2V_2 + U_2, \qquad (1)$$

где P_1; V_1; U_1 – давление, объем и внутренняя энергия газа под поршнем 1; P_2; V_2; U_2 – то же, под поршнем 2.

Внутренняя энергия реального газа

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right), \qquad (2)$$

где ν – количество вещества; C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; T_1 и T_2 – температуры газа под поршнями 1 и 2.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \qquad (3)$$

где b – поправка Ван-дер-Ваальса, учитывающая собственный объем молекул.

Запишем уравнение (3) для двух состояний газа, приняв, согласно условию задачи, $b = 0$

$$P_1V_1 + \frac{a\nu^2}{V_1} = \nu RT_1 \quad \text{и} \quad P_2V_2 + \frac{a\nu^2}{V_2} = \nu RT_2 .$$

Откуда

$$P_1V_1 = \nu RT_1 - \frac{a\nu^2}{V_1} \quad \text{и} \quad P_2V_2 = \nu RT_2 - \frac{a\nu^2}{V_2} . \tag{4}$$

Подставив выражения (2) и (4) в равенство (1), получим

$$\nu RT_1 - \frac{a\nu^2}{V_1} + \nu C_V T_1 - \frac{a\nu^2}{V_1} = \nu RT_2 - \frac{a\nu^2}{V_2} + \nu C_V T_2 - \frac{a\nu^2}{V_2} ,$$

откуда после преобразований получаем искомую разность температур

$$T_2 - T_1 = \frac{2a\nu}{C_V + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) < 0 \quad \text{или} \quad \Delta T < 0 ,$$

Поскольку $V_2 >> V_1$, следовательно, расчет показывает, что газ в процессе дросселирования, если пренебречь собственным объемом молекул, охлаждается, т.е. эффект Джоуля – Томсона положительный.

13. Определить, какую силу F следует приложить к горизонтальному медному кольцу высотой $h = 15$ мм, внутренним диаметром $d_1 = 40$ мм и внешним $d_2 = 42$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Плотность меди $\rho = 8{,}93\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, поверхностное натяжение воды $\sigma = 73\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

Дано: $h = 15$ мм $\left(15\cdot 10^{-3}\text{м}\right)$; $d_1 = 40$мм $\left(4\cdot 10^{-2}\text{м}\right)$; $d_2 = 42$ мм $\left(4{,}2\cdot 10^{-2}\text{м}\right)$;
$\rho = 8{,}93\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}\left(893\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$; $\sigma = 73\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}\left(73\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$.

Найти: F.

Решение. Сила, которую следует приложить для отрыва кольца от поверхности воды,

$$F = F_1 + F_2 , \tag{1}$$

где F_1 – вес кольца; F_2 – сила поверхностного натяжения.

Вес кольца

$$F_1 = \rho g h \frac{\pi}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right), \tag{2}$$

где g – ускорение свободного падения.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внутренней и внешней поверхностям кольца, поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \sigma l = \sigma\pi\left(d_1 + d_2\right). \qquad (3)$$

Подставив формулы (2) и (3) в равенство (1), получим искомую силу

$$F = \frac{\pi\rho g h}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right) + \pi\sigma\left(d_1 + d_2\right) = 35{,}7 \text{ мН}.$$

14. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 1{,}5$ мм. Плотность спирта $\rho = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, его поверхностное натяжение $\sigma = 22\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$. Считая, что в момент отрыва капля имеет сферическую форму, определить ее диаметр D.

Дано: $\rho = 0{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}\left(800\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$, $d = 1{,}5 \text{ мм}\left(1{,}5\cdot10^{-3}\text{м}\right)$, $\sigma = 22\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}\left(22\cdot10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$.

Найти: D.

Решение. Вес капли

$$P = mg = \frac{1}{6}\pi D^3\rho g \qquad (1)$$

(учли, что масса капли $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$) в момент ее отрыва должен разорвать поверхностную пленку на длине $l = \pi d$, где d – диаметр шейки капли (внутренний диаметр трубки), т.е. условие отрыва капли от трубки

$$P = F, \qquad (2)$$

где

$$F = \sigma l = \sigma\pi d \; – \qquad (3)$$

сила поверхностного натяжения, действующая на контуре l.

Подставив формулы (1) и (3) в равенства (2), получим

$$\frac{1}{6}\pi D^3\rho g = \sigma\pi d,$$

откуда искомый диаметр капли

$$D = \sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}} = 2{,}93 \text{ мм}.$$

15. Определить изменение поверхностной энергии ΔE мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 5\text{ см}^3$ до $V_2 = 2V_1$. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

Дано: $V_1 = 5\ \text{см}^3\left(5\cdot 10^{-6}\text{м}^3\right)$; $V_2 = 2V_1$; $\sigma = 40\ \dfrac{\text{мН}}{\text{м}}\left(40\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$.

Найти: ΔE.

Решение. По условию задачи рассматривается изотермический процесс, поэтому поверхностное натяжение постоянно (оно для данной жидкости – функция только температуры).

Поверхностная энергия мыльного пузырька $E = 2\sigma S$ (у пузыря две поверхности – внутренняя и внешняя, площади которых можно принять равными из-за ничтожной толщины мыльной пленки).

Изменение поверхностной энергии мыльного пузыря

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S, \tag{1}$$

где ΔS – изменение поверхности пузыря. Предполагается, что пузырь имеет сферическую форму,

$$\Delta S = 4\pi r_2^2 - 4\pi r_1^2, \tag{2}$$

где r_1 и r_2 – соответственно радиусы, отвечающие начальному V_1 и конечному V_2 объемам мыльного пузыря.

Учитывая, что $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi r_1^3$ и $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi r_2^3$, выражение (2) примет вид

$$\Delta S = 4\pi\left[\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 4\pi\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right) \tag{3}$$

(учли, что из условия задачи $V_2 = 2V_1$).

Подставив выражение (3) в равенство (1), получим искомое изменение поверхностной энергии

$$\Delta E = 8\pi\sigma\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right) = 66{,}4\ \text{мкДж}.$$

16. Ртуть массой $m = 5$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Считая, что ртуть стекло не смачивает, определить силу F, которую следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $h = 0{,}15$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Дано: $m=5$ г $\left(5\cdot10^{-3}\text{кг}\right)$; $h=0{,}15$ мм $\left(0{,}15\cdot10^{-3}\text{м}\right)$; $\rho=13{,}6\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}\left(1{,}36\cdot10^{4}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$; $\sigma=0{,}5\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Найти: F.

Решение. При помещении капли ртути между двумя стеклянными пластинками капля принимает вид тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью. Возникшее из-за кривизны поверхности избыточное давление определяется формулой Лапласа

$$\Delta P=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

где R_1 – радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, параллельной стеклянным пластинам (радиус диска); $R_2=\dfrac{h}{2}$ – радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, перпендикулярной к стеклянным пластинам.

Избыточное давление (1) уравновешивается внешним давлением

$$\Delta P=\frac{F}{S}, \qquad (2)$$

где S – площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой:

$$S=\frac{V}{h}=\frac{m}{\rho h}=\pi R_1^{\,2}, \qquad (3)$$

где V – объем ртути.

Тогда

$$R_1=\sqrt{\frac{m}{\pi\rho h}}. \qquad (4)$$

Согласно (2) искомая сила

$$F=S\Delta P=\frac{m\sigma}{\rho h}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho h}{m}}+\frac{2}{h}\right)=16{,}4\ \text{Н}$$

(учли формулы (3), (1) и (4).

17. Определить давление P воздуха в воздушном пузырьке диаметром $d=0{,}01$ мм, находящемся на глубине $h=15$ см под поверхностью воды. Поверхностное натяжение воды $\sigma=73\ \dfrac{\text{мН}}{\text{м}}$, ее плотность $\rho=1\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Атмосферное давление принять нормальным.

Дано: $d = 0{,}01$ мм $\left(10^{-5}\text{м}\right)$; $h = 15$ см $\left(0{,}15 \text{ м}\right)$; $\sigma = 73 \ \dfrac{\text{мН}}{\text{м}} \ \left(73 \cdot 10^{-3} \ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$;

$\rho = 1 \ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} \left(1000 \ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$; $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па.

Найти: P.

Решение. Полное давление внутри пузырька складывается из атмосферного давления P_0, гидростатического давления P_1 и избыточного давления P_2, вызванного кривизной поверхности:

$$P = P_0 + P_1 + P_2. \tag{1}$$

Гидростатическое давление

$$P_1 = \rho g h, \tag{2}$$

где ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; h – глубина, на которой находится под поверхностью воды пузырек.

Считая, что воздушный пузырек имеет форму сферы, избыточное давление, вызванное кривизной поверхности, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{d} \tag{3}$$

(учли, что радиусы кривизны всех нормальных сечений для сферы равны ее радиусу), т.е.

$$R_1 = R_2 = R = \frac{d}{2}.$$

Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим искомое давление воздуха в воздушном пузырьке

$$P = P_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d} = 132 \text{ кПа}.$$

18. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho = 13{,}6 \ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5 \ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$, определить радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Дано: $h = 37$ мм $(3{,}7 \cdot 10^{-3}\text{м})$; $\rho = 13{,}6 \ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} \ (1{,}36 \cdot 10^4 \ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3})$; $\sigma = 0{,}5 \ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Найти: R.

Решение. Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}, \qquad (1)$$

где σ – поверхностное натяжение; R – радиус кривизны ртутного мениска.

Ртуть – несмачивающая жидкость, поэтому в капилляре опускается на такую глубину, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где ρ – плотность ртути; g – ускорение свободного падения.

Отсюда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 2{,}03 \text{ мм}.$$

19. Вертикальный стеклянный капилляр диаметром $d = 0{,}04$ см погружен в воду. Определить, на какую высоту h поднимется вода в капилляре, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 73 \ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$, ее плотность $\rho = 1 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Считать, что вода полностью смачивает стекло (рис. 9.3).

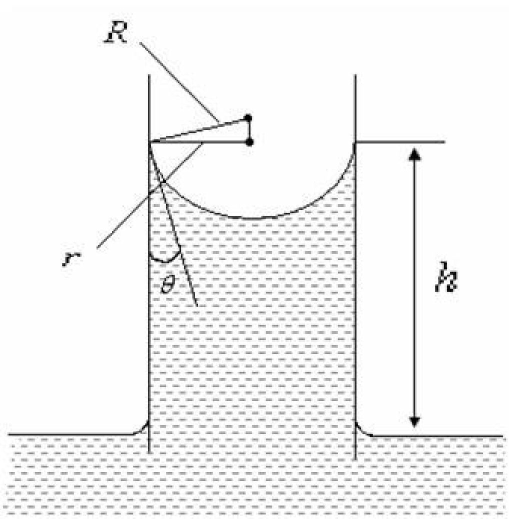


Рис. 9.3

Дано: $d = 0{,}04$ см $(4 \cdot 10^{-4}$м$)$; $\sigma = 73 \ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$ $(73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н}}{\text{м}})$; $\rho = 1 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ $(1000 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$; $\theta = 0$.

Найти: h.

Решение. Жидкость в капилляре поднимается на такую высоту h, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением ΔP, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где g – ускорение свободного падения; R – радиус свободной поверхности жидкости, имеющей форму полусферы (радиус мениска).

Если r – радиус капилляра, θ – краевой угол, то из рис. 9.3 следует, что

$$R = \frac{r}{\cos\theta}.$$

Тогда

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r},$$

откуда высота капиллярного подъема

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g h}. \qquad (1)$$

Если считать, что вода полностью смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда, согласно (1), искомая высота, на которую поднимется вода в капилляре,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g h} = \frac{4\sigma}{\rho g h} = 7,44 \text{ см}.$$

20. Вертикальный стеклянный капилляр внутренним радиусом $r = 0,2$ мм помещен в ртуть, которая опускается в капилляре на глубину $h = 3,75$ см. Определить поверхностное натяжение σ ртути, если ее плотность $\rho = 13,6\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Считать, что ртуть не смачивает стекло.

Дано: $r = 0,2$ мм $(2\cdot10^{-4}$м$)$; $h = 3,75$ см $(3,75\cdot10^{-2}$м$)$; $\rho = 13,6\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ $(1,36\cdot10^4\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$; $\theta = \pi$.

Найти: σ.

Решение. Ртуть в капилляре будет находится в равновесии, если сумма гидростатического давления $(\rho g h)$ и давления под искривленной поверхностью

$$\Delta P = -\frac{2\sigma\cos\theta}{r}$$

будет равна нулю:

$$\rho g h - \frac{2\sigma\cos\theta}{r} = 0,$$

где g – ускорение свободного падения; θ – краевой угол; r – радиус капилляра.

Из этого выражения следует, что

$$\sigma = \frac{\rho g h r}{2\cos\theta}. \qquad (1)$$

Если считать, что ртуть не смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$.

Тогда, согласно (1), искомое поверхностное натяжение ртути

$$\sigma = -\frac{\rho g h r}{2} = 0{,}5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

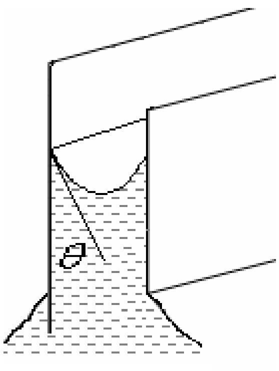


Рис. 9.4

21. Две одинаковые длинные плоскопараллельные пластины, расстояние между которыми $d = 1$ мм, погружены в воду (рис. 9.4). Считая смачивание полным, определить, на какую высоту h поднимется вода в зазоре. Плотность воды $\rho = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, ее поверхностное натяжение $\sigma = 73\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

Дано: $d = 1$ мм $(10^{-3}$м$)$; $\theta = 0$; $\rho = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ $(1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$; $\sigma = 73\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$ $(73 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}})$.

Найти: h.

Решение. Избыточное давление ΔP уравновешивается давлением столба жидкости (гидростатическим давлением) $\rho g h$, т.е.

$$\Delta P = \rho g h. \qquad (1)$$

Избыточное давление под вогнутой поверхностью жидкости, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (2)$$

где $R_1 = \frac{d}{2\cos\theta}$ (θ – краевой угол); $R_2 = \infty$ (поверхность цилиндрическая).

Подставив R_1 и R_2 в формулу (2), найдем

$$\Delta P = \frac{2\sigma\cos\theta}{d}. \qquad (3)$$

Тогда согласно (1) и (3)

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{d} = \rho g h,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d} = 1,49 \text{ см}.$$

22. Узкое колено U-образного ртутного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, широкое – $d_2 = 4$ мм (рис. 9.5). Определить разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,5 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, плотность ртути $\rho = 13,6 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а краевой угол $\theta = 138°$.

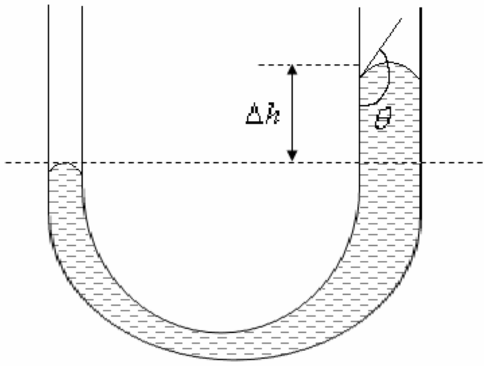


Рис. 9.5

Дано: $d_1 = 2$ мм $(2\cdot10^{-3}$м$)$; $d_2 = 4$ мм $(4\cdot10^{-3}$м$)$; $\sigma = 0,5 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $\rho = 13,6 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ $(1,36\cdot10^4 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$, $\theta = 138°$.

Найти: Δh.

Решение. Ртуть по отношению к стеклу является несмачивающей жидкостью, поэтому мениск имеет выпуклую форму (см. рис. 9.5). На уровне, отмеченном штриховой линией, давление в обоих капиллярах одинаково. Следовательно, разность избыточных давлений должна уравниваться гидростатическим давлением жидкости высотой Δh, т.е.

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = \rho g \Delta h, \tag{1}$$

где

$$\Delta P_1 = \frac{2\sigma\cos\theta}{r_1} = \frac{4\sigma\cos\theta}{d_1} \quad \text{и} \quad \Delta P_2 = \frac{2\sigma\cos\theta}{r_2} = \frac{4\sigma\cos\theta}{d_2} \tag{2}$$

(учли, что радиусы капилляров $r_1 = \frac{d_1}{2}$ и $r_2 = \frac{d_2}{2}$).

Подставив выражение (2) в равенство (1), получим искомую разность уровней ртути в обоих коленах

$$\Delta h = \frac{4\sigma|\cos\theta|}{\rho g} \cdot \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 2,78 \text{ мм}.$$

9.3. Задачи для самостоятельного решения

9.1 – 9.28. В сосуде объемом V находится реальный газ массой m при температуре T. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет объем молекул? Определить согласно номеру задачи в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Условия к задачам 9.1 – 9.28

Номер задачи	Газ	V, м^3	m, г	T, К
9.1	Гелий	0,04	30	300
9.2				400
9.3				500
9.4				600
9.5	Кислород	0,025	40	300
9.6				400
9.7				500
9.8				600
9.9	Пары воды	0,02	15	300
9.10				400
9.11				500
9.12				600
9.13	Аргон	0,05	25	300
9.14				400
9.15				500
9.16				600
9.17	Водород	0,01	2	300
9.18				400
9.19				500
9.20				600
9.21	Углекислый газ	0,03	35	300
9.22				400
9.23				500
9.24				600
9.25	Азот	0,035	50	300
9.26				400
9.27				500
9.28				600

9.29 – 9.56. Газ массой m адиабатически расширяется в пустоту от V_1 до V_2, понижение температуры при этом равно ΔT. Найти неизвестную величину, считая постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса, известной, согласно номеру задачи в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Условия к задачам 9.29 – 9.56

Номер задачи	Газ	m, кг	V_1, м^3	V_2, м^3	ΔT, К
9.29	Кислород	?	0,02	0,06	13,64
9.30		0,5	?	0,2	1,535
9.31		3	0,1	?	3,68
9.32		2,5	0,2	0,7	?
9.33	Аргон	?	0,5	1,5	2,18
9.34		0,4	?	0,2	10,365
9.35		2	0,25	?	1,45
9.36		0,75	0,6	1,5	?
9.37	Углекислый газ	?	0,8	2	0,373
9.38		1,8	?	5	1,8
9.39		3,5	0,3	?	2,32
9.40		1	0,75	1,5	?
9.41	Азот	?	0,5	2,5	0,3
9.42		1,2	?	3	2,7
9.43		1,5	0,2	?	1,05
9.44		2	1	2	?
9.45	Гелий	?	0,4	2	0,69
9.46		0,8	?	0,8	2,05
9.47		0,5	0,5	?	0,062
9.48		1,4	0,25	1,5	?
9.49	Водород	?	0,136	1,5	1,565
9.50		0,8	?	0,5	3,76
9.51		1,5	0,25	?	2,64
9.52		0,4	0,06	0,3	?
9.53	Водяной пар	?	0,01	0,03	8,26
9.54		0,15	?	0,2	1,4
9.55		0,2	0,15	?	1,1
9.56		0,075	0,05	0,15	?

9.57. В баллоне вместимостью $V = 8$ л находится кислород массой $m = 0,3$ кг при температуре $T = 300$ К. Найти, какую часть вместимости сосуда составляет собственный объем молекул газа. Определить отношение внутреннего давления P' к давлению P газа на стенки сосуда.

9.58. Углекислый газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится в критическом состоянии. При изобарном нагревании газа его объем V увеличился в 2 раза. Определить изменение ΔT температуры газа, если его критическая температура $T_{кр} = 304$ К.

9.59. В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20$ г. Определить изменение ΔU внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 = 200$ см^3 до $V_2 = 500$ см^3.

9.60. Найти добавочное давление P внутри мыльного пузыря диаметром $d = 10$ см. Определить также работу A, которую нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь.

9.61. Определить изменение свободной энергии ΔE поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 10$ см^3 до $V_2 = 2V_1$.

9.62. В сообщающихся капиллярных трубках диаметрами $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 1,5$ мм разность уровней ртути $\Delta h = 5$ мм. Определить поверхностное натяжение ртути. Смачивание считать полным.

9.63. Найти постоянные a и b уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля хлора, если известно, что критическая температура хлора $T_{кр} = 417$ К, а критическое давление $P_{кр} = 7,6 \cdot 10^6$ Па. Определить внутреннюю энергию, если при температуре $t = 0$ °C газ занимает объем 2 л.

9.64. Из капиллярной трубки с радиусом канала 0,2 мм по капле вытекает жидкость. Масса 100 капель равна 0,282 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

9.65. Как изменится высота поднятия спирта между двумя пластинками, погруженными в спирт, если расстояние между ними уменьшится с $1\ мм$ до $0,5\ мм$? Смачивание пластинок считать полным.

9.66. В сосуде под давлением $8\ МПа$ содержится кислород, плотность которого $100\ \frac{кг}{м^3}$. Считая газ реальным, определить его температуру и сравнить ее с температурой идеального газа при тех же условиях.

9.67. В сосуде емкостью $25\ л$ при температуре $300\ К$ находится $10\ моль$ кислорода. Определить давление газа, считая его идеальным; реальным.

9.68. Углекислый газ массой $88\ г$ находится в сосуде емкостью $10\ л$. Определить внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

9.69. Вычислить поправки Ван-дер-Ваальса для кислорода, если критическая температура $T_{кр} = 15\ К$ и критическое давление $P_{кр} = 5,08\ МПа$.

9.70. Углекислый газ количеством вещества $\nu = 1\ кмоль$ находится при температуре $T = 380\ К$ в сосуде вместимостью $V = 1\ м^3$. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса a и b равными $0,361\ \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$ и $4,28 \cdot 10^{-5}\ \frac{м^3}{моль}$, определить давление P газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный.

9.71. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 500\ моль$ занимает объем $V_1 = 2\ м^3$. Определить поправку a Ван-дер-Ваальса, если при расширении газа до объема $V_2 = 2,4\ м^3$ была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения $A = 2,84\ кДж$.

9.72. Объем азота массой $m = 200\ г$ увеличился от $V_1 = 1\ м^3$ до $V_2 = 10\ м^3$. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0,135\ \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$, определить работу внутренних сил взаимодействия молекул при этом расширении газа.

9.73. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 2$ моль адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 10^{-3}\text{м}^3$ до $V_2 = 10^{-2}\text{м}^3$. Определить, сколькими степенями свободы обладает этот газ, если при расширении его температура понизилась на $\Delta T = 11{,}8$ К. Поправку Ван-дер-Ваальса a примем равной $0{,}136\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$.

9.74. Кислород количеством вещества $\nu = 2$ моль адиабатно расширяется в вакуум. Определить работу, совершаемую газом против сил межмолекулярного притяжения, если в результате расширения газа его температура понизилась на $\Delta T = -3$ К.

9.75. Определить поверхностное натяжение σ мыльного раствора, если при выдувании мыльного пузыря для увеличения его диаметра от $d_1 = 1$ см до $d_2 = 5$ см совершена работа $A = 603$ мкДж. Процесс образования мыльного пузыря считать изотермическим.

9.76. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 1$ мм. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22\ \dfrac{\text{мН}}{\text{м}}$. Считая, что диаметр шейки капли в момент отрыва равен внутреннему диаметру трубки, определить, сколько капель N содержит спирт массой $m = 10$ г.

9.77. При плавлении золотой проволоки плотностью $\rho = 17{,}2\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$ и диаметром $d = 0{,}2$ мм капля золота в момент ее отрыва имеет диаметр $D = 1{,}63$ мм. Определить поверхностное натяжение σ расплавленного золота.

9.78. Три капли ртути радиусом $r = 0{,}8$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определить уменьшение ΔE поверхностной энергии при этом слиянии. Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$.

9.79. Определить добавочное давление ΔP внутри мыльного пузыря диаметром $d = 2$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

9.80. Определить разность уровней глицерина в двух вертикальных капиллярных трубках, если плотность глицерина $\rho = 1{,}26\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, внутренние диаметры капилляров 4 мм и 1 см, а поверхностное натяжение глицерина $\sigma = 62\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

9.81. В вертикальном стеклянном капилляре, находящемся на поверхности Земли, вода поднялась на 20 мм. Определить, на какую высоту (при тех же условиях опыта) поднялась бы вода в том же капилляре на поверхности Луны. Ускорение свободного падения на поверхности Луны в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли.

9.82. Вертикальный капилляр внутренним диаметром $d = 0{,}7$ мм опущен в глицерин. Определить массу глицерина, поднявшегося в капилляре, если поверхностное натяжение глицерина $\sigma = 62\ \frac{\text{мН}}{\text{м}}$, а его плотность $\rho = 1{,}26\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

9.83. В сосуд с ртутью опущен открытый вертикальный капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $\Delta h = 4$ мм. Определить радиус R кривизны ртутного мениска в капилляре. Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, плотность ртути $\rho = 13{,}6\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л. Г. Общая физика : сб. задач / Л. Г. Антошина, С. В. Павлов, Л. А. Скипетрова. – М. : ИНФРА, 2006. – 336 с.
2. Ветрова, В. Г. Сборник задач по физике / В. Г. Ветрова. – Минск : Выш. шк., 1991. – 386 с.
3. Гладской, В. М. Сборник задач по физике с решениями / В. М. Гладской, П. И. Самойленко. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с.
4. Демков, В. П. Физика / В. П. Демков, О. Н. Третьякова. – М. : Высш. шк., 2001. – 669 с.
5. Дмитриева, В. Ф. Основы физики / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. – М. : Высш. шк., 2001. – 527 с.
6. Иродов, Е. И. Задачи по общей физике / Е. И. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 236 с.
7. Калашников, Н. П. Основы физики. Упражнения и задачи / Н. П. Калашников, М. А. Смондырев. – М. : Дрофа, 2004. – 464 с.
8. Решение задач по физике / В. М. Кириллов [и др.]. – М. : КомКнига, 2006. – 248 с.
9. Курс физики / под ред. В. Н. Лозовского. – СПб : Лань, 2001. Т. 1. – 576 с., Т.2. – 592 с.
10. Макаренко, Г. М. Курс общей физики / Г. М. Макаренко. – Минск : Дизайн ПРО, 2003. – 640 с.
11. Наркевич, И. И. Физика : учеб. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобкос. – Минск : Новое знание, 2004 – 680 с.
12. Новодворская, Е. М. Сборник задач по физике для втузов / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М. : ОНИКС XXI век, 2005. – 368 с.
13. Новиков, С. М. Сборник заданий по общей физике / С. М. Новиков. – М. : ОНИКС XXI век, 2006. – 512 с.
14. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1990. – 478 с.
15. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики для втузов / Т. И. Трофимова. – М. : ОНИКС XXI век, 2003. – 384 с.
16. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения / Т. И. Трофимова , А. В. Фирсов. – М. : Академия, 2004. – 592 с.
17. Физика в средней школе / под ред. К. С. Фарино. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2004. – 720 с.
18. Физика : задания к практическим занятиям / под ред. Ж. П. Лагутиной. – Минск : Выш. шк., 1989. – 236 с.
19. Физика : метод. указания и контрольные задания / под ред. А. Г. Чертова. – М. : Высш. шк., 1987. – 208 с.
20. Физика : учеб.-метод. комплекс / под ред. В. А. Груздева. Ч. I. – Новополоцк : УО «ПГУ», 2005. – 232 с.
21. Чертов, А. Г. Задачи по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Физмат, 2003. – 640 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

1. Некоторые сведения по математике

1.1. Элементы векторной алгебры

Скаляры и векторы. Многие физические величины, например, масса, энергия, количество теплоты, электрический заряд, не имеют направления в пространстве. Они называются скалярными величинами или просто скалярами и обладают только численными значениями.

Величины, характеризуемые не только численным значением, но и направлением, например, сила, скорость, называются векторными величинами или векторами. Их изображают на чертежах направленными отрезками (рис. П.1.1), длины которых пропорциональны численным значениям векторов. Так, если два автомобиля движутся в противоположных направлениях со скоростями 50 и 80 км/ч, их скорости можно изобразить двумя антипараллельными векторами, длины которых равны пяти и восьми масштабным единицам по 10 км/ч каждая.

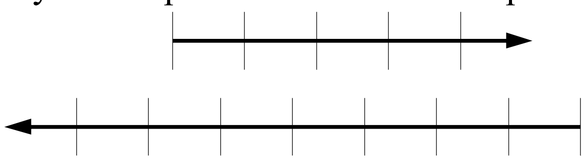


Рис. П.1.1

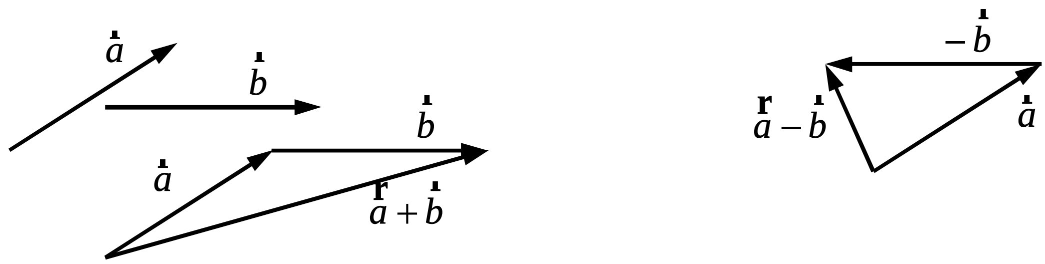
Вектор обычно обозначают принятой для данной физической величины буквой со стрелкой над ней, например, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$, $\vec{R}$. В печати векторы часто набирают полужирным шрифтом без стрелки, например, $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{R}$.

Численное значение вектора называется его модулем и обозначается вертикальными чертами слева и справа: $|\vec{\upsilon}|$, $|\vec{a}|$, $|\vec{R}|$ либо теми же буквами υ, a, R без стрелки.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $(\vec{a},\vec{b})$.

Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. П.1.2, *а*), из конца вектора $\vec{a}$ строят вектор $\vec{b}$. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$ изображается вектором, направленным из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, сложение двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ геометрически изображается треугольником.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-\vec{b})$ (см. рис. П.1.2, *б*), т.е. вектор, равный по длине и противоположный по направлению вектору $\vec{b}$.



а б

Рис. П.1.2

Для нахождения суммы нескольких векторов $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{k}=\vec{l}$ из конца вектора $\vec{a}$ строят вектор $\vec{b}$, из конца вектора $\vec{b}$ – вектор $\vec{c}$ и т.д. Результирующий вектор $\vec{l}$ направлен из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{k}$ и замыкает ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов (рис. П.1.3). Таким образом, векторное равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{k}=\vec{l}$ геометрически изображается многоугольником.

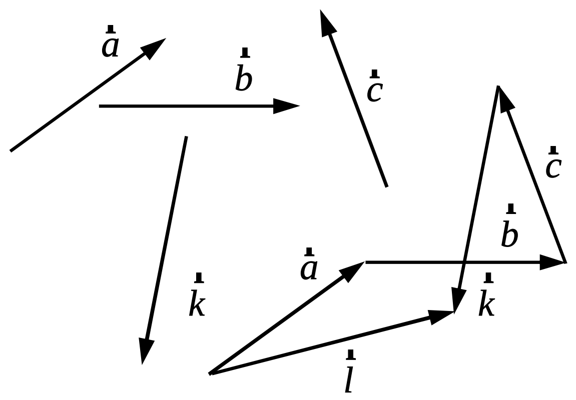


Рис. П.1.3

Если привести векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу и построить на них параллелограмм (рис. П.1.4), то одна из диагоналей будет представлять сумму векторов ($\vec{a}+\vec{b}$), а другая – их разность ($\vec{a}-\vec{b}$).

Приведенные правила позволяют найти направление и величину суммы (или разности) векторов геометрическим путем. Для алгебраического вычисления суммы (или разности) векторов пользуются известными теоремами косинусов и синусов (рис. П.1.5)

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;$$

$$b^2=a^2+c^2-2ab\cos\beta;$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

где $a=|\vec{a}|$; $b=|\vec{b}|$; $c=|\vec{c}|$.

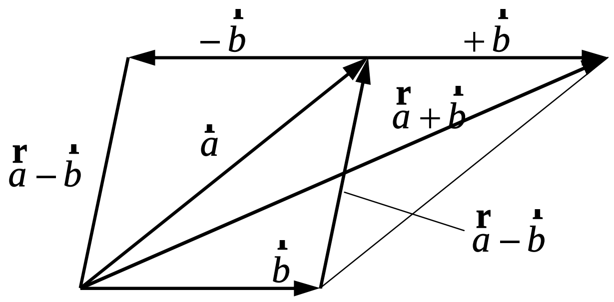


Рис. П.1.4

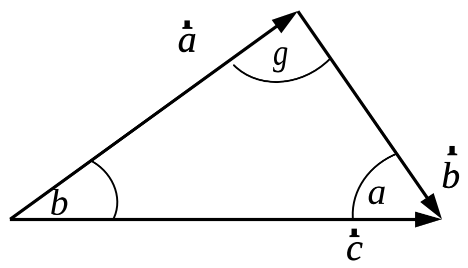


Рис. П.1.5

Умножение вектора на скаляр. Если умножить вектор $\vec{a}$ на скаляр, т.е. на некоторое число n, то получится вектор $n\vec{a}$, который в n раз больше по величине, чем вектор $\vec{a}$ (рис. П.1.6), и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$. Если n – отрицательное число, то результирующий вектор будет равен $(-n\vec{a})$ и направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{a}$.

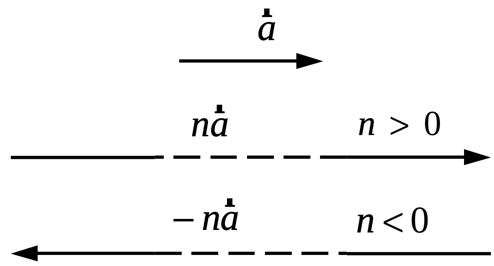


Рис. П.1.6

Умножение вектора на вектор. Различают два произведения векторов – скалярное и векторное.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина $ab\cos(\vec{a},\vec{b})$, где $(\vec{a},\vec{b})$ – угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. П.1.7). Скалярное произведение часто обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или антипараллельны, их скалярное произведение равно произведению их модулей, взятому соответственно со знаком плюс или минус, так как cos 0° = 1 и cos 180° = –1.

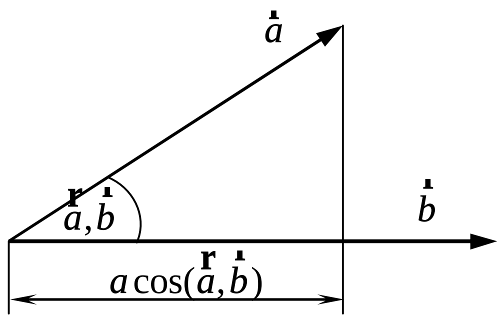


Рис. П.1.7

При $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=ab$;

при $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-ab$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю, так как cos 90° = 0.

При $\vec{a}\perp\vec{b}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны по модулю и совпадают по направлению, их скалярное произведение равно квадрату модуля одного из них:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, численное значение которого равно $\vec{c} = ab\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{n}$. Этот вектор перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. П.1.8, *а*), и его направление определяется ***по правилу буравчика***: если ручку буравчика кратчайшим путем повернуть от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, то направление поступательного движения буравчика укажет направление вектора $\vec{n}$. Векторное произведение обычно обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Если поменять местами векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то по правилу буравчика найдем, что произведение $\vec{b}\cdot\vec{a}$ изобразится вектором, направленным в сторону, противоположную вектору $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (см. рис. П.1.8, *б*). Таким образом, перестановка множителей в векторном произведении приводит к тому, что произведение меняет знак на обратный, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}\cdot\vec{a}$.

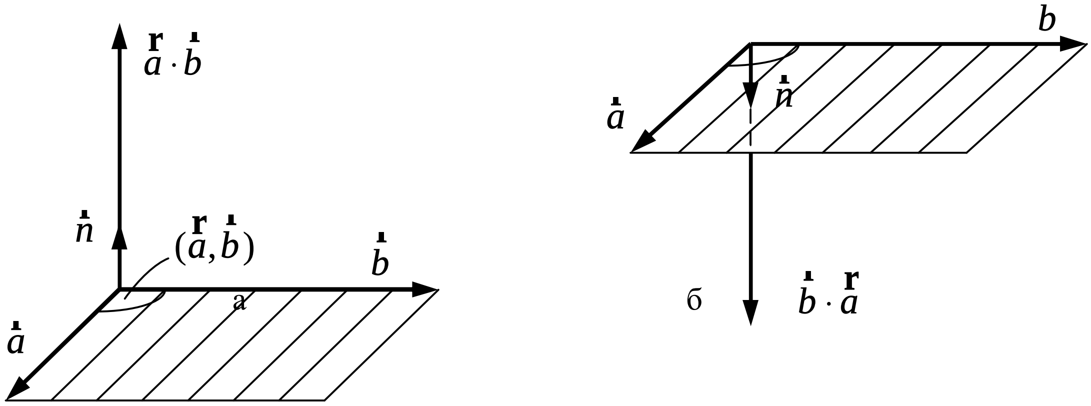


Рис. П.1.8

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или антипараллельны, то их векторное произведение, очевидно, равно нулю, так как sin 0° = sin 180° = 0.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, модуль их векторного произведения равен произведению их модулей, так как sin 90° = 1:

$$\text{при } \vec{a}\perp\vec{b} \quad \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = a\cdot b.$$

Из рис. П.1.8 видно, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

Разложение вектора на составляющие. Разложить данный вектор на составляющие – значит заменить его несколькими векторами, сумма которых равна данному вектору.

Задача разложения вектора на две составляющие сводится к нахождению элементов треугольника по данным задачи (см. рис. П.1.5). При этом пользуются приведенными выше теоремами косинусов и синусов. Этот способ удобен, когда даны (или надо найти) углы между векторами.

Метод проекций. Вектор можно задать не только путем указания его модуля и угла, который он образует с другим вектором, но также путем задания его проекций на какие-либо произвольные направления, например, оси прямоугольной системы координат.

Пусть вектор $\vec{c}$ лежит в координатной плоскости *XY* (рис. П.1.9). Если известна длина вектора *c* и угол γ, который он образует с одной из осей (например, с осью *X*), то его проекции на оси *X* и *Y* равны

$$c_x = c\cos\gamma;\quad c_y = c\sin\gamma.$$

Наоборот, если заданы проекции c_x и c_y, то легко найти длину вектора и угол γ по формулам $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$; $tg\gamma = \dfrac{c_y}{c_x}$.

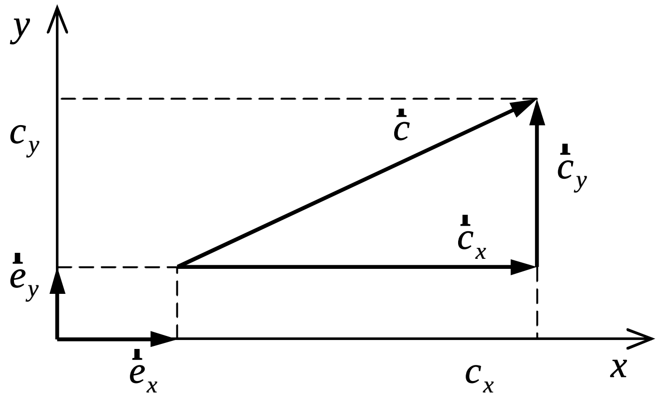


Рис. П.1.9

Введем орты (единичные векторы) координатных осей $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ на рисунке не показан, он направлен «на нас»). Эта тройка ортов полностью определяет систему координат и поэтому называется базисом координатной системы. Отсюда следует, что вектор $\vec{c}$ можно представить в виде

$$\vec{c} = \vec{c}_x + \vec{c}_y = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y.$$

Мы рассмотрели вектор, у которого проекция на ось *Z* равна нулю. В общем случае, когда все три проекции отличны от нуля, справедлива формула

$$\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z.$$

Таким образом, всякий вектор можно выразить через его проекции и орты координатных осей. Проекции на оси координат называют компонентами вектора.

Радиусом-вектором $\vec{r}$ точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку. Его, как и всякий вектор, можно выразить через компоненты

$$\vec{r} = r_x\vec{e}_x + r_y\vec{e}_y + r_z\vec{e}_z.$$

Пользуясь проекциями, можно выполнять алгебраические действия с векторами. Пусть имеем векторное равенство (рис. П.1.10)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

Проектируя каждый из векторов на оси *X* и *Y*, получаем для каждого вектора два скалярных равенства

$$a_x = a\cos\alpha \qquad b_x = b\cos\beta \qquad c_x = c\cos\gamma$$

$$a_y = a\sin\alpha \qquad b_y = b\sin\beta \qquad c_y = c\sin\gamma$$

Проекция суммарного вектора равна сумме проекций составляющих

$$c_x = a_x + b_x = a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma;$$

$$c_y = a_y + b_y = a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma.$$

Таким образом, складывая проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим проекции вектора $\vec{c}$, по вышеприведенным формулам вычисляем его длину и угол γ между ним и осью, т.е. определяем вектор $\vec{c}$.

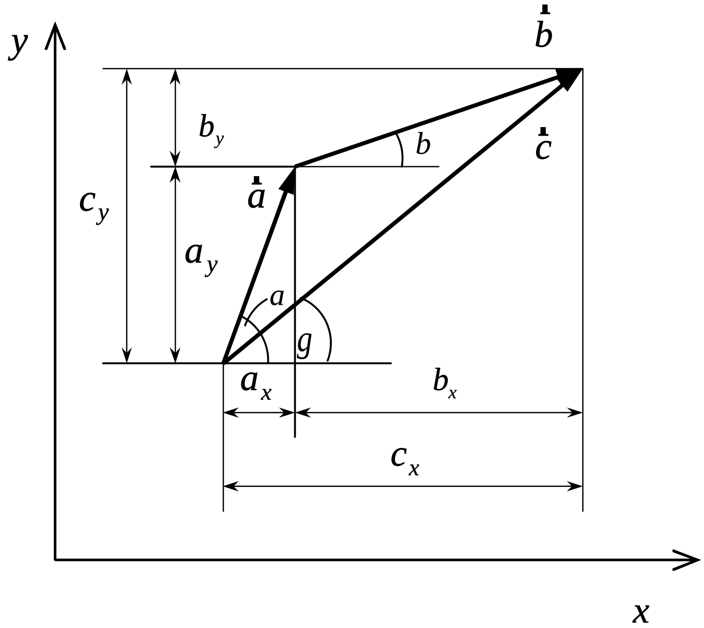


Рис. П.1.10

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы не на плоскости, а в трехмерном пространстве, то каждый вектор будет иметь не две, а три проекции (на оси *X*, *Y*, *Z*) и каждому векторному равенству будут соответствовать не два, а три скалярных равенства, выражающих проекции на три координатные оси.

С помощью проекций можно также вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если проекции этих векторов равны соответственно a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выраженное через их проекции, будет равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Вычисление векторов с помощью проекций удобно в тех случаях, когда все углы задаются по отношению к некоторым осям или когда векторы заданы через их проекции.

Иногда бывает целесообразно проектировать векторы не на координатные оси, а на другие направления, выбор которых диктуется условиями задачи.

Классификация векторов. В зависимости от свойств физических величин, изображаемых векторами, последние разделяют на свободные, скользящие и неподвижные.

Свободный вектор изображает векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке тела (например, скорость поступательного движения тела).

Скользящий вектор изображает величину, которая может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой ее действия (например, силу, приложенную к неподвижному твердому телу).

Неподвижный вектор изображает величину, которая относится лишь к определенной точке пространства (например, напряженность электрического поля).

1.2. Некоторые формулы по математике

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$;

корни квадратного уравнения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

квадрат суммы двух чисел $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

квадрат разности двух чисел $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

разность квадратов двух чисел $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

теорема синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$,

где a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – углы, лежащие против сторон a, b, c соответственно;

теорема косинусов $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$,

где a, b, c – стороны треугольника, α – угол, лежащий против стороны a.

1.3. Некоторые тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

1.4. Простейшие интегралы

$\int 0 \cdot dx = c, c = \text{const}$,

$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$,

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$,

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$,

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \sin x dx = -\cos x + c$

$\int \cos x dx = \sin x + c$

1.5. Некоторые значения тригонометрических функций

Функция	Угол, град (рад)					
	0	30 (π/6)	45 (π/4)	60 (π/3)	90 (π/2)	180 (π)
sin α	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–

1.6 Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c (c = const)	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$, $x > 0$
x	1	$1/x$	$-(1/x^2)$
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\text{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
x^2	$2x$	$\text{ctg}\, x$	$-(1/\sin^2 x)$

2. Некоторые сведения по физике

2.1. Единицы физических величин

Все изменения, происходящие в физических явлениях, оцениваются количественно посредством измерений. Измерить величину – значит сравнить ее с однородной величиной, условно принятой за единицу. Методика построения системы единиц была предложена К. Гауссом в XIX веке.

Единицу любой физической величины можно установить произвольно. Но если единицы всех физических величин установить независимо друг от друга, то в формулах, связывающих различные физические величины, появится много переводных коэффициентов, что усложнит как сами формулы, так и вычисления. К. Гаусс показал, что для построения системы единиц физических величин достаточно выбрать несколько не зависимых друг от друга единиц. Эти единицы физических величин называют **основными.** Единицы физических величин, которые определяются по уравнениям с помощью основных единиц, называют **производными**.

Совокупность основных и производных единиц называют системой единиц.

На XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960 г.) было принято решение об установлении для международных сношений практической системы единиц, получившей международное наименование SI, в русской транскрипции – СИ.

Эта система состоит из семи основных единиц, двух дополнительных и большого числа производных единиц.

***Основные единицы*:**

- масса – килограмм (кг);
- путь, перемещение, длина, амплитуда – метр (м);
- время, период – секунда (с);
- температура – кельвин (К);
- количество вещества – моль (моль);
- сила тока – ампер (А);
- сила света – кандела (кд).

***Дополнительные единицы*:**

- фаза, плоский угол – радиан (рад);
- телесный угол – стерадиан (ср).

Для образования производных единиц из основных используют определяющие уравнения связи между величинами. Числовые коэффициенты в них полагают равными 1, а величины выражают в основных единицах СИ. Некоторые производные единицы, получившие специальные наименования, могут быть использованы для образования других производных единиц СИ. Сокращенные обозначения единиц, получивших наименование в честь ученых, пишутся с прописной буквы.

Специальные наименования, присвоенные ГКМВ, обязательны к применению. Так, например, для работы и энергии следует применять джоуль (Дж), а не ньютон-метр (Н·м), хотя 1 Н·м = 1 Дж.

2.2. Некоторые внесистемные единицы, применяемые наравне с единицами СИ

Физическая величина	Единица		
	наименование	обозначение	соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^3 кг $1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг
Плоский угол	градус минута секунда град (ГОН)	...° ...′ ...″ град	(π/180)рад = $1{,}745329 \cdot 10^{-2}$ рад (π/10800)рад = $2{,}90888 \cdot 10^{-4}$ рад (π/648000)рад = $4{,}848137 \cdot 10^{-6}$ рад (π/200)рад
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	гектар	га	10^4 м^2
Объем, вместимость	литр	л	10^{-3} м^3
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Дж

2.3. Множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	Множитель	Приставка	Обозначение приставки
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^{9}	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

2.4 Перевод некоторых единиц в СИ

1Å (ангстрем) = 10^{-10} м	1 кПа = 1000 Па
1 нм (нанометр) = 10^{-9} м	1 мм рт.ст. = 133 Па
1 мкм (микрометр) = 10^{-6} м	1 атм = 760 мм рт.ст. = 10^{5} Па
1 мм (миллиметр) = 10^{-3} м	1 ат (техническая атмосфера)=
1 см (сантиметр) = 10^{-2} м	1 кгс/см^{2} = 9,8·10^{4} Па
1 дм (дециметр) = 10^{-1} м	1 м/мин = 1/60 м/с
1 км (километр) = 10^{3} м	1 км/ч = 1000/3600 м/с = 5/18 м/с
1 Мм (мегаметр) = 10^{6} м	1 кН = 10^{3} Н
1 Гм (гигаметр) = 10^{9} м	1 нКл = 10^{-9} Кл
1 Тм (тераметр) = 10^{12} м	1 мкКл = 10^{-6} Кл
1 мм^{2} = 10^{-6} м^{2}	1 мКл = 10^{-3} Кл
1 см^{2} = 10^{-4} м^{2}	1 Кл/см^{2} = 10^{4} Кл/м^{2}
1 дм^{2} = 10^{-2} м^{2}	1 об/мин = 1/60 об/с
1 мм^{3} = 10^{-9} м^{3}	1 км/с = 10^{3} м/с
1 см^{3} = 10^{-6} м^{3}	1 В/см = 100 В/м
1 дм^{3} = 1 л = 10^{-3} м^{3}	1кВ/см=10^{5}В/м
1 ч = 3600 с	1 мВ = 10^{-3} В
1 мин = 60 с	1 мкВ = 10^{-6} В
1 нс = 10^{-9} с	1мА = 10^{-3} А
1 мг = 10^{-6} кг	1 мкА = 10^{-6} А
1 г = 10^{-3} кг	1 Ом·мм^{2}/м = 10^{-6} Ом·м
1 т = 10^{3} кг	1 гВт·ч = 3,6·10^{5} Дж
1 кДж = 10^{3} Дж	1 кВт·ч = 3,6·10^{6} Дж
1 Мдж = 10^{6} Дж	1 МВт·ч = 3,6·10^{9} Дж
1 гВт = 10^{2} Вт	1 г/см^{3} = 10^{3} кг/м^{3}
1 кВт = 10^{3} Вт	1 МПа = 10^{6} Па
1 МВт = 10^{6} Вт	1 кПа = 10^{3} Па
1 л.с. = 736 Вт	1 бар = 10^{5} Па
Т К = t °С + 273	1 кал = 4,186 Дж
0 °С = 273 К	1 ккал = 4186 Дж

2.5. Основные физические постоянные (округленные значения)

Нормальное ускорение свободного падения	g = 9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R = 8,31 Дж/(К·моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях (T_0 = 273,15 К, p_0 = 101325 Па)	$V_0 = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Удельный заряд электрона	$e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = 9,\ 65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная Вина в первом законе (смещения)	$C' = 2{,}89 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Вина во втором законе	$C'' = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5)
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/2\pi = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ $R = 2{,}07 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$
Боровский радиус	$a = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\Lambda_c = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,6 эВ
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Энергия, соответствующая 1 а.е.м.	931,50 МэВ
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12{,}57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерный магнетон	$\mu_Я = 5{,}05 \cdot 10^{-27}$ Ф/м

2.6. Плотность вещества ρ

Твердые тела	ρ, $\cdot 10^3$, кг/м^3	Жидкости	ρ, $\cdot 10^3$, кг/м^3	Газы при $P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К	ρ, кг/м^3
Алмаз	3,5	Азотная кислота	1,5	Азот	1,25
Алюминий	2,7	Ацетон	0,8	Аммиак	0,77
Береза	0,6	Бензин	0,7	Аргон	1,78
Бериллий	1,85	Бензол	0,88	Водород	0,09
Бетон	2,2	Вода	1,0	Воздух	1,29
Бор	2,34	Глицерин	1,26	Гелий	0,18
Бронза	8,3	Дизельное топливо	0,86	Кислород	1,43
Висмут	9,78	Масло касторовое	0,9	Криптон	3,733
Вольфрам	19,35	Керосин	0,8	Ксенон	5,897
Германий	5,32	Мазут	0,95	Метан	0,72
Гранит	2,6	Масло растительное	0,94	Углекислый газ	1,98
Графит	1,6	Масло трансформное	0,87	Фтор	1,696
Дерево, дуб	0,8	Молоко	1,03	Хлор	3,214
Дюралюминий	2,8	Нефть	0,84		
Железо, сталь	7,87	Олифа	0,94		
Золото	19,32	Ртуть	13,6		
Инвар	7,9	Серная кислота	1,83		
Иридий	22,42	Сероуглерод	1,26		
Калий	0,86	Скипидар	0,87		
Каменная соль	2,18	Соляная кислота	1,10		
Кирпич	1,8	Спирт	0,79		
Кобальт	8,9	Тяжелая вода	1,1		
Латунь	8,5	Эфир	0,72		
Лед	0,95				
Литий	0,534				
Магний	1,74				
Марганец	7,3				
Медь	8,96				
Мрамор	2,7				
Молибден	10,2				
Натрий	0,97				
Никель	8,91				
Олово	7,3				
Опал	2,2				
Платина	21,45				
Плутоний	19,84				
Пробка	0,24				
Свинец	11,34				
Серебро	10,5				
Сосна	0,5				
Стекло	2,6				
Тантал	16,6				
Титан	4,5				
Топаз	3,6				
Уголь (антрацит)	1,6				
Уран	19,04				
Цинк	7,133				
Фарфор	2,3				

2.7. Упругие свойства твердых тел (округленные значения)

Вещество	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа
Алюминий	69	24
Вольфрам	380	140
Золото	81	28,5
Кобальт	206	78,5
Медь	98	44
Никель	210	75
Свинец	16	6
Серебро	74	27
Сталь (железо)	200	76
Стекло	60	30
Титан	110	41,5

2.8. Некоторые свойства твердых веществ

Вещество	Удельная теплота плавлеиня, кДж/кг	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)
Алюминий	393	660,4	896
Вольфрам	184,6	3387	–
Вода (лед)	335	0	2100
Железо	270	1535	500
Медь	213	1084,5	395
Олово	58,6	232	230
Платина	113	1770	117
Серебро	87,3	962	234
Свинец	22,6	327	126
Сталь	–	1300	460
Цинк	117	420	391

2.9. Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа · с	Теплопроводность λ, мВт/(м · К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	–	17,2	24,1
Гелий	0,22	–	–
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	–	8,32	15,8
Хлор	0,45	–	–

2.10. Динамическая вязкость η и поверхностное натяжение σ жидкостей при 20 °С

Жидкость	Вязкость η, мПа · с	Натяжение σ, мН/м
Вода	1,00	73
Глицерин	1480	62
Масло касторовое	987	–
Масло машинное	100	–
Мыльная вода	–	40
Ртуть	1,58	$5{,}0 \cdot 10^{2}$
Спирт	–	22

2.11. Постоянные Ван-дер-Ваальса для некоторых газов

Вещество	a, $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$	b, $\cdot 10^{-5}$, $\text{м}^3/\text{моль}$
Азот	0,135	3,85
Аргон	0,134	3,23
Водород	$2{,}44 \cdot 10^{-2}$	2,63
Водяной пар	0,545	3,06
Гелий	$3{,}43 \cdot 10^{-3}$	2,34
Кислород	0,136	3,16
Углекислый газ	0,361	4,28
Неон	0,209	1,70
Хлор	0,650	5,62

2.12. Некоторые свойства жидкостей

Жидкость	Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)	Удельная теплота парообразования, Дж/кг	Температура кипения, °С
Вода	4200	$2{,}3 \cdot 10^{6}$	100
Спирт	2500	$9 \cdot 10^{5}$	78
Ртуть	138	$3 \cdot 10^{5}$	357

2.13. Удельная теплота сгорания

Вещество	Удельная теплота сгорания q, $\cdot 10^{7}$, Дж/кг
Бензин	4,61
Дерево	1,26
Каменный уголь	2,39
Керосин	4,61
Нефть	4,61
Спирт	2,93

2.14. Удельная теплоемкость веществ

Вещество	C, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$		Вещество	C, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$
Твердое тело			**Жидкость**	
Алюминий	0,90		Бензин	2,09
Бронза	0,38		Вода	4,18
Вольфрам	0,13		Глицерин	2,42
Дерево(дуб)	2,40		Масло(трансформа	
Железо	0,46		торное)	2,09
Золото	0,13		Нефть	1,67 – 2,09
Латунь	0,38		Ртуть	0,14
Лед	2,09		Скипидар	1,76
Медь	0,39		Спирт	2,42
Нихром	0,46		Эфир этиловый	2,34
Олово	0,20		**Газы**	
Парафин	3,20		Азот	1,04
Платина	0,13		Водяной пар	2,13
Пробка	2,05		Водород	14,27
Свинец	0,13		Воздух	1,01
Серебро	0,23		Гелий	5,20
Сталь	0,50		Двуокись углерода (CO_2)	0,88
Стекло	0,67 – 0,83		Кислород	0,91
Углерод (графит)	0,46 – 0,71		Метан	2,48
Фарфор	0,75		Окись углерода	1,04
Цинк	0,38			
Чугун	0,54			
Эбонит	1,38			

2.15. Критические температура и давление

Газ	t_k, °C	P_k, МПа
Азот	–146	3,39
Аргон	–122	4,86
Водяной пар	374	22,1
Кислород	–119	5,08
Неон	–128,6	2,72
Углекислый газ	31	7,38
Хлор	144	7,71

2.16. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95\cdot10^{8}$ м
Масса Солнца	$1{,}98\cdot10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74\cdot10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}33\cdot10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot10^{8}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 сут = $2{,}36\cdot10^{6}$ с

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАКАРЕНКО Геннадий Макарович

ФИЗИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Сборник заданий

В трех частях

Часть 1

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *И. С. Васильевой*

Подписано в печать 30.07.08 Формат 60x84/16 Бумага офсетная Гарнитура Таймс
Ризография Усл.-печ. л. 17,63 Уч.-изд. л. 17,5 Тираж 300 экз. Заказ 1191

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04
211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29