

УДК 517.968.43

**КОМБИНИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ ПОИСКА РЕШЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ****Т.М. ГЛУХОВА***(Полоцкий государственный университет)*

Представлен наиболее эффективный подход к решению систем нелинейных сингулярных уравнений, встречающихся в математических моделях, описывающих системы со скачкообразными изменениями параметров. На основании многолетнего опыта построения алгоритмов поиска решений для такого рода систем уравнений можно утверждать, что наиболее эффективным методом является метод комбинированных стратегий, учитывающих характер поверхности решения. Для построения такого алгоритма необходимо всестороннее изучение особенностей поверхности решения и внутренних зависимостей между параметрами модели.

Системы нелинейных сингулярных уравнений являются основой целого ряда математических моделей. В частности, такие системы возникают при попытке описать напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов, находящихся под нагрузкой при внецентренном сжатии и изгибе, а также при работе таких элементов в предопорной зоне на срез с изгибом.

Сингулярные свойства подобных моделей связаны с тем, что те либо иные параметры, зависимости, описывающие свойства модели, имеют точки разрыва первого и второго рода, которые фактически разделяют всю область определения входных параметров на подобласти непрерывного поведения. Для затронутого примера такие точки разрыва позволяют описать скачкообразное изменение напряжения в бетоне в момент трещинообразования.

Опыт нескольких лет изучения подобного рода математических моделей с целью разработки эффективных алгоритмов решения сингулярных систем нелинейных уравнений показал, что наиболее верным подходом является детальное изучение всех особенностей многомерной поверхности решения и применение различных стратегий поиска решения на поверхности решений в зависимости от области непрерывного поведения системы, в которой находятся значения входных параметров [1 – 5].

Необходимо отметить, что в рассматриваемых нами моделях присутствует сильная зависимость между отдельными параметрами. Это приводит к тому, что характер влияния скачкообразных изменений одних параметров на другие и систему в целом достаточно сложен.

На сегодняшний день в распоряжении исследователей имеется широкий выбор итерационных методов поиска решения. Методы поиска решения для систем нелинейных уравнений подбираются исходя из априорных сведений о характере поверхности решения. Это и метод простой итерации, и метод Зейделя, ньютоноподобные методы, симплекс-методы, метод градиентного поиска (для многомерных случаев – метод сопряженных градиентов), для областей с локальными экстремумами – метод Монте-Карло, и другие. Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки и выбирается исследователем с учетом характера поверхности решения.

Зачастую, помимо выбора метода поиска решения, с целью обеспечения сходимости итерационного процесса, повышения скорости сходимости метода, устранения влияния отдельных особенностей поверхности решения исследователем выбирается та либо иная модификация (координатная или групповая релаксация, суперрелаксация, правило ложного положения, ограничитель шага, инерционность).

Важным моментом при проектировании алгоритма поиска решения является корректная формулировка критерия остановки итерационного процесса. Критерий остановки позволяет избежать и бесконечно долгого поиска в областях с «плохой» сходимостью. От выбранного критерия остановки зависит как время поиска решения, так и точность найденного решения. Кроме этого, для любого численного метода критерий остановки итерационного процесса всегда вносит ненулевую вероятность пропуска верного решения за определенный ограниченный интервал времени.

В совокупности выбранный метод с принятой модификацией и формулировкой критерия остановки мы будем называть стратегией поиска решения.

При рассмотрении очерченной нами проблемы в большинстве случаев будем говорить о решении так называемой обратной задачи, то есть о поиске такого вектора входных параметров модели, которые обеспечивают выполнение условий равновесия (удовлетворяют систему уравнений) в пределах заданной допустимой невязки.

Выбранная стратегия поиска решения не всегда является оптимальной как по скорости, так и по другим параметрам (точность, невязка, вероятность ошибки). Поэтому даже когда речь идет о системах, не имеющих сингулярности, но характеризующихся, например, наличием локальных экстремумов, хо-

рошей практикой являются выполнение поиска решения различными стратегиями и принятие решения на основании результатов данного поиска.

Необходимо отметить, что предпринимались попытки построения формального определения граничных условий с целью возможного применения унифицированной процедуры поиска решения. В частности, для решения краевых задач математической физики. Наиболее широкое применение для таких целей нашел метод R-функций, впервые предложенный Владимиром Рвачевым в 1967 году [6]. Но идея применения базисных функций, описывающих граничные условия, появилась еще раньше. Такой метод был разработан Иваном Бубновым в 1913 году и далее развит в работах Бориса Галеркина, выпускника Полоцкого кадетского корпуса [7].

Описание поведенческих границ в виде базисных функций хорошо работает на задачах малой размерности с простыми формами границ. При усложнении границ областей метод R-функций перестает работать, существенно усложняются аналитические выражения, возрастает погрешность. Поэтому попытка построения унифицированного алгоритма поиска решения при неявном задании границ областей не дает удовлетворительных результатов для рассматриваемых нами задач.

Система уравнений исследуемой нами модели представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} M_y = -\iint_C \sigma(\varepsilon(x, y))(y - y_o) dx dy + N(y_{oe} - y_o), \\ M_x = -\iint_C \sigma(\varepsilon(x, y))(x - x_o) dx dy + N(x_{oe} - x_o), \\ N = \iint_C \sigma(\varepsilon(x, y)) dx dy, \\ V = \iint_C \tau_i dx dy, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma(\varepsilon(x, y))$ – нормальные напряжения в элементарной площадке бетона или арматуры; $\varepsilon(x, y)$ – продольные деформации элементарной площадки бетона или арматуры (проекция на ось x суперпозиции главных сжимающих и главных растягивающих деформаций, полученная с учетом поворота элементарных площадок под действием перерезывающей силы); x_o и y_o – расстояние от центра изгиба сечения, нейтральной точки, до осей x и y соответственно; x_{oe} и y_{oe} – расстояние от места приложения продольного усилия до осей x и y ; N – продольная сила от действия внешней нагрузки; M_x, M_y – изгибающие моменты, действующие в плоскостях xz, yz ; $\frac{1}{r_x}$ и $\frac{1}{r_y}$ – кривизна продольной оси элемента относительно осей x и y

соответственно.

Уравнения равновесия и совместности деформаций для элементарной площадки выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{c2} \cos^2 \alpha + \sigma_{c1} \sin^2 \alpha + \rho_x \sigma_{sx}, \\ \sigma_y &= \sigma_{c2} \sin^2 \alpha + \sigma_{c1} \cos^2 \alpha + \rho_y \sigma_{sy}, \\ \tau_{xy} &= (-\sigma_{c2} + \sigma_{c1}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{c2} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{c1} \sin^2 \alpha, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{c2} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{c1} \cos^2 \alpha, \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} &= (-\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c1}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_{cx}, \sigma_{cy}, \sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \tau_{xy}$ – напряжения в бетоне; σ_{sx}, σ_{sy} – напряжения в арматуре, относительные деформации элементарного участка $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, а также угол θ (определяющий положение наклонных трещин и главных напряжений).

В течение последнего года мы приступили к решению задачи совместного действия изгибающего момента, поперечной силы и перерезывающей силы. Но многолетний опыт предыдущих лет стал основой решения задач центрального и внецентренного обжатия с изгибом. По сути, приступая к решению задачи учета перерезывающей силы и дополнения модели распределением тангенциальных деформаций, мы уже располагали эффективным алгоритмом решения задачи определения напряженно-деформированного состояния моделируемого железобетонного элемента, позволяющим получить распределение продольных деформаций при заданных моментах в обеих плоскостях и продольном усилии.

Общий алгоритм определения напряженно-деформированного состояния элемента под воздействием среза с изгибом строится по следующей схеме:

- 1) задается начальное распределение касательных деформаций;
- 2) по методу двух сечений [10] определяется распределение тангенциальных деформаций, такое, что обеспечивается равновесие по перерезывающей силе;
- 3) для заданного изгибающего момента и усилия продольного сжатия/растяжения по алгоритму, предложенному нами в работах [1 – 5], находится распределение продольных деформаций;
- 4) по полученным распределениям продольных деформаций предлагаемым методом комбинированных стратегий, суть которого будет раскрыта ниже, находится такое распределение главных сжимающих деформаций, при котором главные сжимающие напряжения в каждой элементарной площадке, определенные диаграммным методом, равны значениям, определенным по кругам Мора;
- 5) имея распределения всех составляющих тензора деформаций, определяются внутренние усилия, возникающие в сечении, нормальном к продольной оси элемента;
- 6) если определенные внутренние усилия не удовлетворяют уравнениям равновесия, то соответствующим образом корректируется искомое распределение продольных деформаций (кривизна и центр тяжести сечения) и выполняется переход к пункту 2. Иначе – успешное завершение итерационного процесса.

Критерием остановки является малость невязки системы уравнений равновесия (менее 1 %). При этом в ходе итерационного процесса поиска решения контролируется ситуация неразрешимости системы уравнений по достижению предельных значений деформаций на сжатие по бетону или растяжение по арматуре, а также неразрешимости задачи пункта 4.

Пункт 4 алгоритма является ключевым для решения системы в целом.

Для понимания задачи, разрешаемой в пункте 4, приведем **математические зависимости, связывающие главные сжимающие напряжения, определенные по диаграммам и кругу Мора, с заданным распределением продольных, главных и касательных деформаций.**

Угол наклона осей главных напряжений по отношению к продольной оси определяется по формуле:

$$\tan \theta_i = \frac{-b_i s \tau_i + \sqrt{4A_{Sw} E_S (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{x,i}) \cdot (A_{Sw} \varepsilon_{1,i} E_S + \frac{b_i \cdot s \cdot f_{ct,i}}{1 + \sqrt{200 \cdot \varepsilon_{1,i}}}) + b_i^2 s^2 \tau_i^2}}{2 \cdot A_{Sw} E_S (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{x,i})}, \text{ если } \varepsilon_{1,i} < \varepsilon_{crit};$$

$$\tan \theta_i = \frac{-b_i s \tau_i + \sqrt{4A_{Sw} E_S (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{x,i}) \cdot (A_{Sw} \varepsilon_{1,i} E_S + b_i \cdot \varepsilon_{1,i} \cdot s \cdot E_{c,i}) + b_i^2 s^2 \tau_i^2}}{2 \cdot A_{Sw} E_S (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{x,i})}, \text{ если } \varepsilon_{1,i} < \varepsilon_{crit}.$$

Относительные деформации по направлению главных сжимающих напряжений:

$$\varepsilon_{2,i} = \varepsilon_{x,i} (1 + \tan^2 \theta_i) - \varepsilon_{1,i} \cdot \tan^2 \theta_i.$$

Относительные деформации по направлению оси Y:

$$\varepsilon_{y,i} = \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} \cdot \tan^2 \theta_i}{1 + \tan^2 \theta_i}.$$

Напряжения в поперечной арматуре:

$$\sigma_{Sy,i} = \varepsilon_{y,i} \cdot E_S.$$

Главные растягивающие напряжения в бетоне:

$$\sigma_{c1,i} = \varepsilon_{1,i} \cdot E_c, \text{ если } \varepsilon_{1,i} < \varepsilon_{crit};$$

$$\sigma_{c1,i} = \frac{f_{ct}}{1 + \sqrt{200 \cdot \varepsilon_1}}, \text{ если } \varepsilon_{1,i} < \varepsilon_{crit}.$$

Касательные напряжения, способные передаться через наклонную трещину:

$$\tau_{ci} = \frac{0,18 \cdot \sqrt{f'_c}}{0,3 + \frac{24 \cdot w}{a_{\max} + 16}}$$

Ограничиваем значение главных растягивающих напряжений в бетоне:

$$\sigma_{c1,i} = \sigma_{c1,i}, \text{ если } \sigma_{c1,i} \leq \tau_{ci} \cdot \tan \theta; \quad \sigma_{c1,i} = \tau_{ci} \cdot \tan \theta, \text{ если } \sigma_{c1,i} > \tau_{ci} \cdot \tan \theta.$$

Главные сжимающие напряжения в бетоне по измененной диаграмме деформирования бетона с учетом двухосного напряженного состояния

$$(\sigma_{c2,i})' = \sigma_{\varepsilon_{2\max,i}} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{2,i}}{-0.002} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{2,i}}{-0.002} \right)^2 \right].$$

Главные сжимающие напряжения в бетоне из кругов Мора для напряжений:

$$(\sigma_{c2,i})'' = \tau_i \cdot \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) - \sigma_{c1,i}.$$

Из описания зависимостей следует наличие в модели нескольких точек разрыва поверхности решения для главных сжимающих напряжений. Во-первых, наличие области в окрестности 0, для которой значение является невычислимым (точка разрыва второго рода). Во-вторых, характеристическим значением продольной деформации на растяжение является точка ε_{crt} , определяющая скачкообразный момент трещинообразования (точка разрыва первого рода) и выражающаяся в замене математического определения угла наклона элементарной деформируемой площадки.

Если проиллюстрировать данную ситуацию на семействе графиков (рис. 1), видно, что для определения границ области, в которой локализовано решение, необходимо применять различные стратегии поиска границ области и решения как такового.

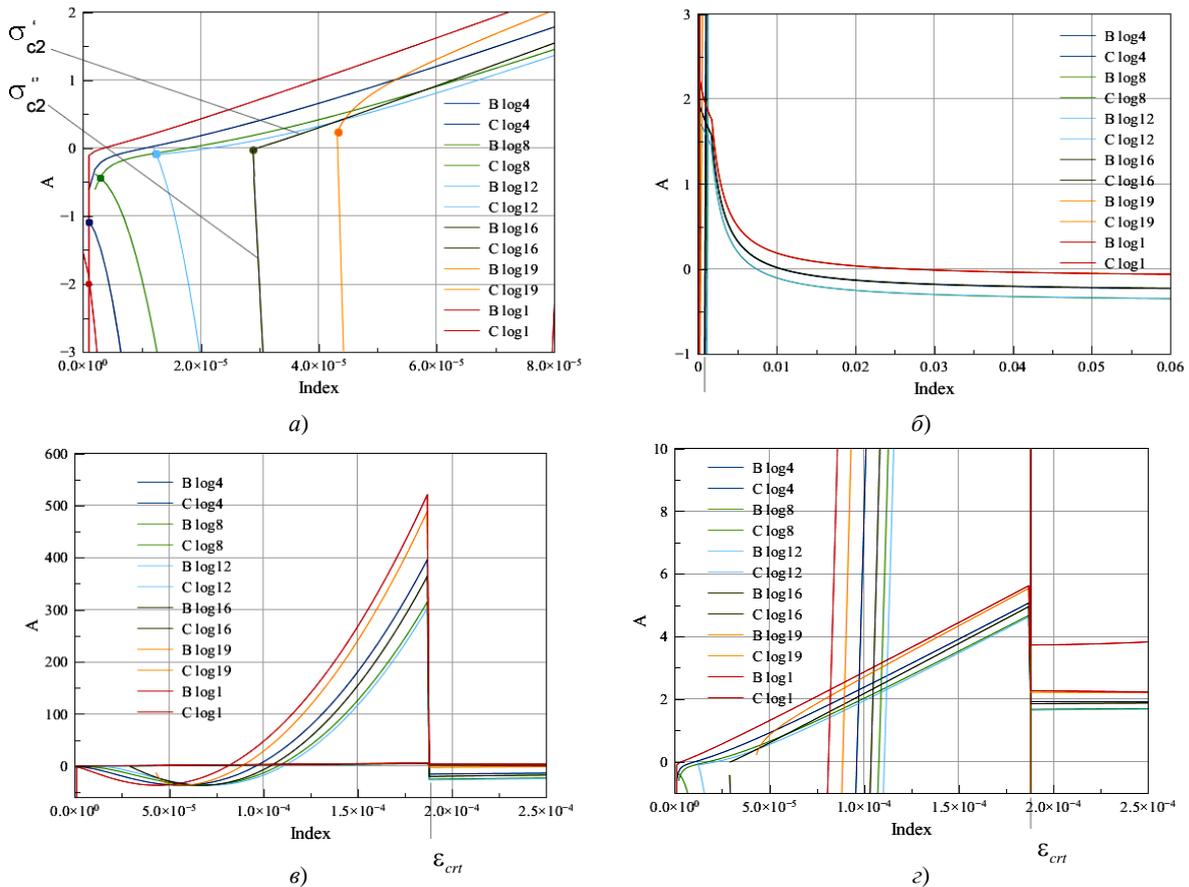


Рис. 1. Зависимость главных сжимающих напряжений от главных сжимающих деформаций при заданных распределениях продольных и касательных деформаций для значений изгибающего момента до момента образования трещины:

a – точки совпадения значений главных сжимающих напряжений, определенных диаграммным методом и геометрическим способом по кругу Мора; b – характер зависимости при больших значениях главных сжимающих деформаций; v – скачкообразное изменение напряжения при достижении деформацией значения ε_{crit} ; z – аналогичный скачок для напряжений, определенных по кругу Мора

Для «больших» изгибающих моментов характер зависимости меняется. Точки решения «уходят» в область, значительно превышающую точку разрыва, что видно из рисунка 2 ($a - z$).

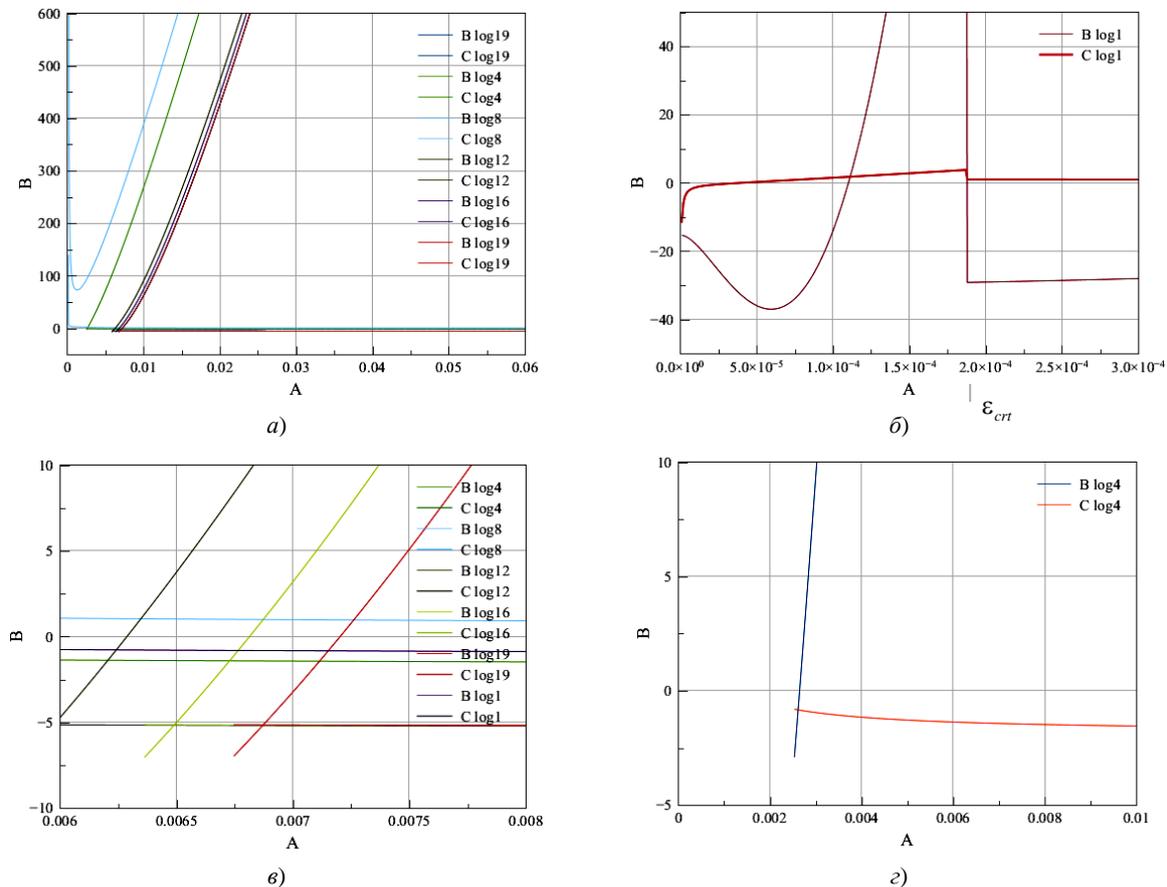


Рис. 2. Зависимость главных сжимающих напряжений от главных сжимающих деформаций при заданных распределениях продольных и касательных деформаций для «больших» значений изгибающего момента

Учитывая выявленные особенности математической модели, нами разработан алгоритм поиска решения для задачи определения распределения главных сжимающих деформаций, комбинирующий различные стратегии поиска границ области решения и решения как такового:

- 1) методом последовательных приближений ищем нижнюю границу области определения функции главных сжимающих напряжений, определяемых из круга Мора;
- 2) если найденная нижняя граница меньше ε_{crit} , априорная верхняя граница принимается равной ε_{crit} , иначе принимается как максимально возможная сжимающая деформация (0,06);
- 3) методом дихотомии корректируем верхнюю границу области решения (область отрицательных значений) главных сжимающих напряжений, определяемых диаграммным методом;
- 4) методом секущих в пределах определенной области решения ищем точку совпадения искомых напряжений.

Данный алгоритм реализован нами на языке программирования C++. Сравнительные тесты с зарубежным аналогом [8 – 11], программным комплексом Response-2000 Университета Торонто (Канада), показал, что данный алгоритм обладает более высокой скоростью сходимости и точностью расчета, дает более стабильные результаты расчета (отсутствие «выколотых» точек на графиках распределений) на всей области определения.

Выводы. Результаты проведенного исследования свидетельствуют, что для данного класса математических моделей, имеющих сингулярности, связанные с точками разрыва в функциональных зависи-

мостях между параметрами модели, наилучшим подходом к построению алгоритма поиска решения является комбинирование стратегий поиска решения. Комбинирование стратегий позволяет определить границы непрерывных областей, в которых локализовано решение, и построить итерационный алгоритм поиска решения с учетом специфики выявленных областей. Такой подход требует детального изучения особенностей поверхности решения, но позволяет построить эффективный алгоритм, обладающий стабильностью и обеспечивающий заданную точность на всей области определения исходных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глухов, Д.О. Численный анализ расчетной модели нормального сечения проекта: СНБ 2.03.01-98 / Д.О. Глухов, Д.Н. Лазовский // Совершенствование железобетонных конструкций, оценка их состояния и усиление: сб. материалов респ. науч.-техн. конф.; под ред. Т.М. Пецольда. – Минск: УП «Технопринт», 2001. – С. 97.
2. Глухов, Д.О. Программы БЕТА и RADUGA для расчета строительных конструкций / Д.О. Глухов, Д.Н. Лазовский, О.Н. Лешкевич // Архитектура и строительство. – № 6 (148). – Минск: Полипринт, 2001. – С. 28 – 30.
3. Глухов, Д.О. Генераторы случайных чисел для расчета надежности строительных конструкций / Д.О. Глухов, Т.М. Глухова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 60 – 68.
4. Глухов, Д.О. Оценка вероятностных характеристик распределения эффектов от внешнего воздействия и функции предельного состояния в расчетах железобетонных элементов / Д.О. Глухов, Т.М. Глухова, Д.Н. Лазовский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 6. – С. 35 – 40.
5. Применение мягких вычислений для сглаживающей аппроксимации сложных сингулярных зависимостей / Д.О. Глухов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2012. – № 12. – С. 2 – 5.
6. Рвачёв, В.Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности / В.Л. Рвачёв, Н.С. Синкоп. – Киев: Наукова думка, 1990.
7. Галёркин, Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок / Б.Г. Галёркин // Вестн. инженеров. – 1915. – Т. 1. – С. 897 – 908.
8. Collins, M.P. Pre-stressed Concrete Structures / M.P. Collins, D. Mitchell // Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall Inc., 1991. – 766 p.
9. General Shear Design Method / M.P. Collins [et al.] // ACI Struct. Journ. – 1996. – V. 93. – № 1, January – February. – P. 36 – 45.
10. Vecchio, F.J. Analysis based on the Modified Compression Field Theory / F.J. Vecchio // IABSE Colloq. On Structural Concrete, Stuttgart, 1991, IABSE Report. V. 62. – P. 321 – 326.
11. Vecchio, F.J. The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear / F.J. Vecchio, M.P. Collins // ACI Journal. – 1986. – V. 83. – № 2, Mar. – Apr. – P. 219 – 231.

Поступила 01.02.2013

INTEGRATION OF STRATEGIES OF SEARCH OF SOLUTIONS IN TASKS OF CALCULATION OF SYSTEMS OF NON-LINEAR SINGULAR EQUATIONS

T. GLUKHOVA

The most effective approach to solving systems of nonlinear singular equations encountered in mathematical models describing systems with abrupt changes of parameters is presented. As a result of years of experience of algorithm constructing to find solutions for such systems of equations we can state that the most effective method is the combination of strategies that take into account the nature of the solution surface. Construction of such algorithms requires a comprehensive study of the features of the solution surface and internal dependencies between the parameters of the model.