

Методические указания
к лабораторной работе
«Свободные колебания механических
систем»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

«Свободные колебания механических систем»

Цель работы:

Изучить не изохронные колебания физического и математического маятников;

Определить ускорение свободного падения методом обратного и математического маятников.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательные явления играют важную роль в самых разнообразных явлениях природы и технических устройствах.

Рассмотрим колебательные системы *с одной степенью свободы*. Мгновенное положение колебательной системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью какой-либо *одной* величины q , которая называется обобщенной координатой. В качестве обобщенной координаты q может выступать смещение материальной точки относительно положения равновесия x , угол поворота системы относительно оси вращения и т.д.

Производная по времени от обобщенной координаты называется обобщенной скоростью $\dot{q} = q' = \frac{dq}{dt}$. Тогда потенциальная энергия

колебательной системы имеет вид $W_{i\dot{i}\dot{o}} = \frac{1}{2}kq^2$, кинетическая энергия

выражается формулой $W_{e\dot{e}i} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$. Общая энергия колебательной системы

$W = W_{i\dot{i}\dot{o}} + W_{e\dot{e}i}$ в общем случае уменьшается вследствие постепенного расходования доли полной энергии на преодоление сил трения, и свободные колебания реальных колебательных систем являются *затухающими*.

В случае колебательных систем с малым трением, диссипацией энергии можно пренебречь, и считать, что полная энергия системы сохраняется во времени. Тогда $\frac{dW}{dt} = 0$, что приводит к дифференциальному уравнению

свободных незатухающих колебаний (собственных колебаний):

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (0.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (0.2)$$

Величина q_0 дает максимальное значение обобщенной координаты и называется амплитудой колебаний. Величина ω_0 называется частотой собственных колебаний, величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ - фазой колебания, φ_0 - начальной фазой. Через промежутки времени, кратные $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ колебательная система возвращается в начальное состояние, и движение системы повторяется. Промежуток времени $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ называется периодом собственных колебаний.

Уравнение (1.2) содержит две произвольные постоянные: q_0 и φ_0 . Для каждого конкретного колебания они определяются начальными условиями.

2. ТИПОВЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

Для определения характера движения механической системы нужно, применяя законы динамики или закон сохранения (превращения) энергии, составить уравнение движения системы, и если оно имеет вид (1.1), то данная система является гармоническим осциллятором, колеблющемся по закону (1.2); при этом частота колебаний ω_0 равна квадратному корню из коэффициента при обобщенной координате q .

Пружинный маятник

Пружинный маятник представляет собой систему, состоящую из груза массой m , прикрепленного к невесомой пружине жесткостью k , которая была выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе (рис. 1). Груз может совершать колебания как в вертикальной плоскости, так и в горизонтальной, уравнение свободных колебаний в любом из этих случаев будет иметь одинаковый вид, а следовательно, и одинаковое решение.

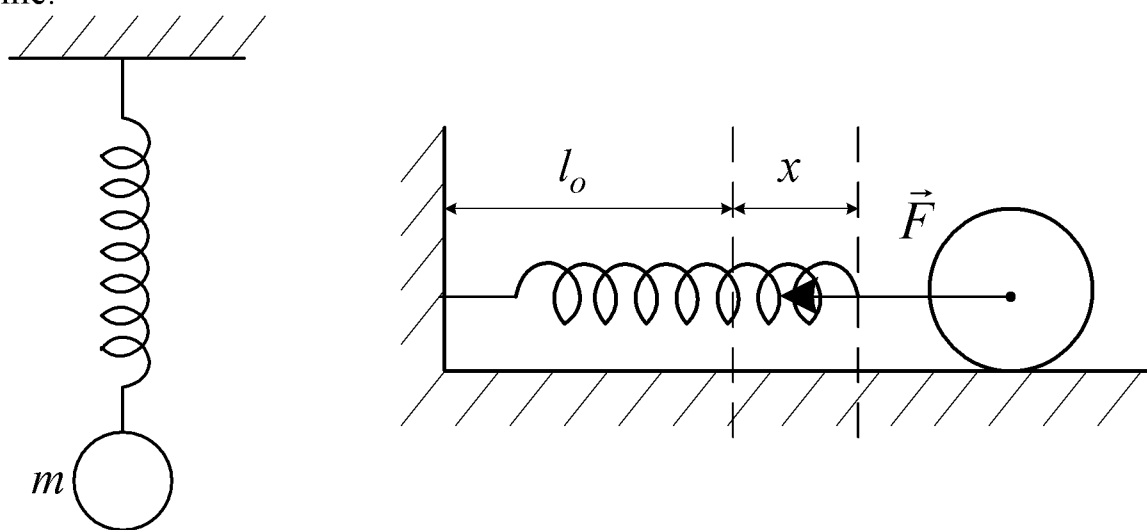


Рис. 1. Пружинный маятник.

Получим уравнение незатухающих колебаний (в отсутствие трения в системе) пружинного маятника двумя способами: из законов динамики и из закона сохранения энергии.

<i>Динамический метод</i>	<i>Энергетический метод</i>
<p>По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. По определению ускорения $a_x = x''$. Сила упругости по закону Гука $F_x = -kx$. Тогда $mx'' + kx = 0$.</p> <p>Уравнение движения имеет вид</p> <p>(1.1) $x'' + \omega_0^2 x = 0$, где смысл обобщенной координаты q имеет деформация пружины $x = l - l_0$. Здесь l - длина деформированной пружины, l_0 - длина недеформированной пружины.</p>	<p>Полная механическая энергия системы: $\frac{kx^2}{2} + \frac{m\vartheta_x^2}{2} = const$.</p> <p>Производная по времени от полной энергии равна нулю $\frac{dW}{dt} = 0$.</p> <p>Отсюда $kxx' + m\vartheta_x\vartheta_x' = 0$. По определению скорости $\vartheta_x = x'$, тогда $kxx' + mx'x'' = 0$ или $x'' + \frac{kx}{m} = 0$.</p>

Получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' + \omega_0^2 x = 0$. Следовательно, система будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ по закону $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Период колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.1)$$

Как видно из формулы (2.1) период колебаний пружинного маятника не зависит от амплитуды колебаний A . Это свойство *называется изохронностью колебаний*. Однако изохронность имеет место до тех пор, пока справедлив закон Гука. При больших растяжениях закон Гука нарушается, и колебания перестают быть изохронными.

Математический маятник.

Математический маятник представляет собой материальную точку массой m , подвешенную на невесомой нерастяжимой нити длиной l , и совершающую свободные колебания в поле потенциальных сил (например, сил тяжести) (рис. 2).

Выведем уравнение собственных колебаний математического маятника.

<i>Динамический метод</i>	<i>Энергетический метод</i>
По основному уравнению динамики вращательного движения	Полная механическая энергия

$M_z = I\varepsilon_z$. По определению углового ускорения $\varepsilon_z = \alpha''$. Момент силы тяжести относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости колебаний, равен $M_z = -mgl \sin \alpha$. Тогда $I\alpha'' + mgl \sin \alpha = 0$. Для малых углов отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$. Момент инерции материальной точки $I = ml^2$, тогда получим $\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0$.

системы: $mgh + \frac{m\vartheta^2}{2} = const$.

Производная по времени от полной энергии равна нулю $\frac{dW}{dt} = 0$.

Так как $\vartheta = \varpi l = \alpha' l$, угловая скорость вращения $\varpi = \alpha'$, $h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$, для малых углов отклонения маятника

$1 - \cos \alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}$, тогда $h = l \frac{\alpha^2}{2}$ и

$$\frac{dW}{dt} = mgl \frac{2\alpha\alpha'}{2} + \frac{m2\alpha'\alpha''l^2}{2} = 0.$$

Отсюда $\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0$.

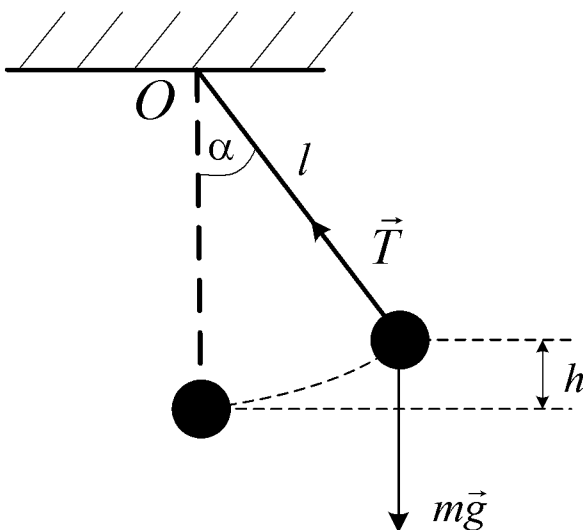


Рис. 2. Математический маятник.

Уравнение движения имеет вид

$$(1.1) \quad \alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0, \quad \text{где смысл}$$

обобщенной координаты q имеет угол отклонения маятника от вертикали α .

Математический маятник будет совершать гармонические колебания

с частотой $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ по закону

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Период колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.2)$$

Колебания математического маятника будут *изохронными* при условии малости отклонений маятника от вертикали $\sin \alpha \approx \alpha$. В противном случае колебания будут не изохронны.

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости колебаний (рис. 3).

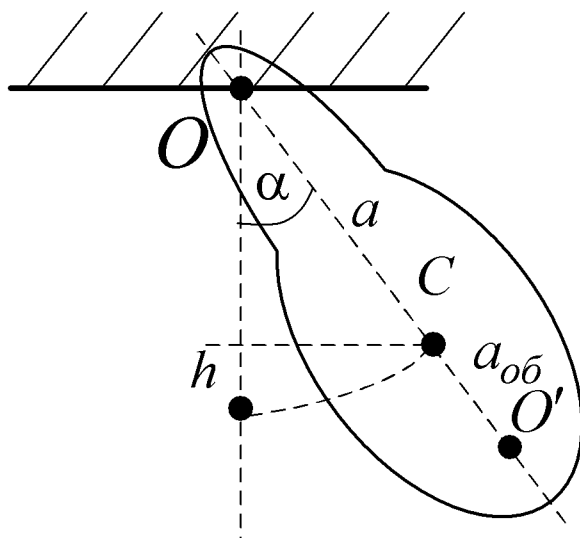


Рис. 3. Физический маятник.

Роль обобщенной координаты q играет угол отклонения маятника от вертикали α .

Получим уравнение свободных незатухающих колебаний физического маятника динамическим и энергетическим методами.

<i>Динамический метод</i>	<i>Энергетический метод</i>
<p>По основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела $M_z = I\varepsilon_z$. По определению углового ускорения $\varepsilon_z = \alpha''$. Момент силы тяжести относительно оси вращения равен $M_z = -mga \sin \alpha$. Тогда $I\alpha'' + mga \sin \alpha = 0$. Здесь I – момент инерции маятника относительно оси колебаний, m – масса маятника, a – расстояние от оси вращения т.О до центра масс маятника т.С.</p>	<p>Полная механическая энергия системы: $mgh + \frac{I\varpi^2}{2} = const$. Производная по времени от полной энергии равна нулю $\frac{dW}{dt} = 0$. Так как угловая скорость вращения $\varpi = \alpha'$, $h = a(1 - \cos \alpha)$, $\frac{dW}{dt} = mga \sin \alpha \alpha' + \frac{I2\alpha'\alpha''}{2} = 0$. Отсюда $I\alpha'' + mga \sin \alpha = 0$.</p>

Таким образом, получили дифференциальное уравнение колебаний физического маятника

$$\alpha'' + \frac{mga}{I} \sin \alpha = 0 \quad (2.3)$$

Из вида полученного уравнения можно заключить, что колебания физического маятника, так же как и математического маятника, не являются *изохронными*. Только при выполнении условия $\sin \alpha \approx \alpha$, что справедливо

для малых углов отклонения маятника от вертикали, колебания физического маятника будут изохронными.

Найдем решение уравнения (2.3). Так как угловая скорость вращения маятника $\varpi = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$, то уравнение (2.3.) можно записать в виде

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{mga}{I} \sin \alpha. \text{ Исключая из двух последних уравнений время, получим}$$

$$\frac{d\varpi}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{mga}{I\varpi} \sin \alpha \text{ или}$$

$$\varpi d\varpi = -\frac{mga}{I} \sin \alpha d\alpha \quad (2.4)$$

Интегрируя (2.4) $\int_{\varpi}^0 \varpi d\varpi = \int_{\alpha}^{\alpha_0} -\frac{mga}{I} \sin \alpha d\alpha$, где α_0 - максимальный угол отклонения маятника (угловая амплитуда колебаний), приходим к закону сохранения энергии:

$$\frac{I\varpi^2}{2} = mga(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \quad (2.5)$$

Так как угловая скорость вращения $\varpi = \alpha'$, то из (2.5) получим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2mga}{I}(\cos \alpha - \cos \alpha_0)} \quad (2.6)$$

Отсюда

$$dt = \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2mga}{I}(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \quad (2.7)$$

Учитывая, что период колебаний маятника T есть учетверенное время прохождения интервала углов от $\alpha = 0$ до $\alpha = \alpha_0$, получим для периода колебаний физического маятника выражение

$$T = 4 \sqrt{\frac{I}{2mga}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \quad (2.8)$$

Таким образом, период колебаний физического маятника зависит от угловой амплитуды колебаний α_0 . Этот факт и является причиной того, что колебания физического (и математического) маятников *не изохронны*, то есть маятниковые часы не являются точными.

Интеграл в формуле (2.8) не может быть вычислен в элементарных функциях. Для его расчета используют табулированные функции эллиптических интегралов или численные методы, встроенные в математические пакеты.

Как указывалось выше, колебания физического маятника приближенно можно считать изохронными, если угловая амплитуда маятника не превышает нескольких градусов, то есть выполняется условие $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда уравнение (2.3) примет вид уравнения гармонических колебаний:

$$\alpha'' + \frac{mga}{I}\alpha = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что частота гармонических колебаний физического маятника равна $\omega_0^2 = \frac{mga}{I}$, а период колебаний выражается формулой:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (2.10)$$

Сравнивая формулы (2.10) и (2.2) можно заключить, что физический маятник колеблется так же, как и математический маятник с длиной

$$l_{d\ddot{a}} = \frac{I}{ma}, \quad (2.11)$$

которая называется *приведенной длиной физического маятника*. Для не изохронных колебаний данное утверждение также справедливо.

Отложим от точки подвеса О вдоль прямой ОС отрезок ОО', длина которого равна приведенной длине физического маятника $l_{d\ddot{a}}$. Точка О' называется *центром качания*. *Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.*

Момент инерции маятника относительно оси вращения проходящей через точку О по теореме Гюйгенса-Штейнера $I = I_C + ma^2$, где I_C - момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С. Тогда приведенная длина физического маятника примет вид:

$$l_{d\ddot{a}} = a + \frac{I_C}{ma} \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что приведенная длина физического маятника $l_{d\ddot{a}} > a$, то есть точка подвеса О и центр качания О' лежат по разные стороны от центра масс С. Во-вторых, всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина, а следовательно, один и тот же период колебаний.

Точка подвеса О и центр качания О' являются *взаимными или сопряженными точками*. Это означает, что *если маятник подвесить за центр качания О', то его период не изменится, а прежняя точка подвеса О станет новым центром качания*. Это утверждение называется *теоремой Гюйгенса*. Для ее доказательства обозначим длину отрезка О'С через $a_{i\acute{a}}$ (рис.3) и допустим, что маятник подвешен за точку О'. Тогда его приведенная длина будет равна:

$$l'_{d\ddot{a}} = a_{i\acute{a}} + \frac{I_C}{ma_{i\acute{a}}} \quad (2.13)$$

Так как приведенная длина равна

$$l_{d\ddot{a}} = a + a_{i\acute{a}} \quad (2.14)$$

то из (2.12) следует, что $a_{\dot{\gamma} \dot{\alpha}} = \frac{I_C}{ma}$. Подставляя последнее выражение в (2.14) получим:

$$l'_{dd} = a + \frac{I_C}{ma} \text{ или } l'_{dd} = l_{dd},$$

то есть приведенная длина, а с ней и период колебаний физического маятника остались без изменений, что доказывает теорему Гюйгенса.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Общий вид экспериментальной установки, включающей в себя физический и математический маятники, показан на рисунке 4.

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют производить выравнивание прибора. В основании закреплена колонка 3, на которой зафиксирован верхний кронштейн 4 и нижний кронштейн 5 с магнитным датчиком 6. С одной стороны кронштейна 4 находится математический маятник 7, длина которого может изменяться с помощью винта 8, с другой - оборотный маятник 9. На основании расположен пульт управления 10.

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором фиксируются две повернутые лезвия друг к другу опорные призмы 11 и две чечевицы (подвижных груза) 12а и 12б.

На стержне через 5 мм нанесены кольцевые углубления, служащие для определения приведенной длины L оборотного опорными призмами).

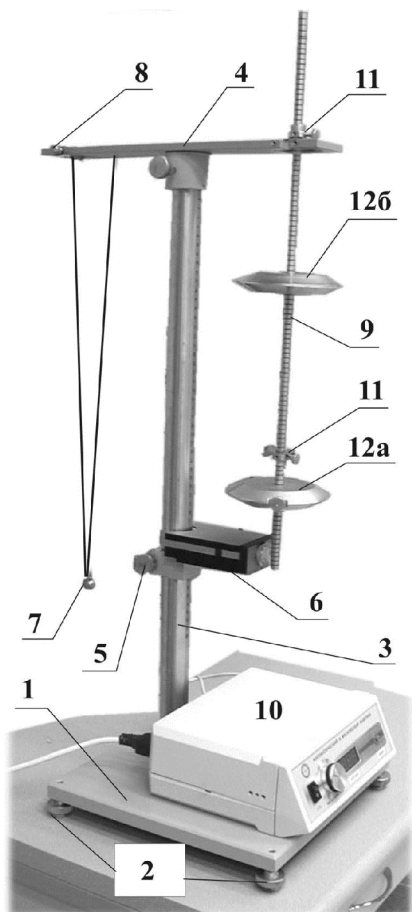


Рис.4.



Рис.5.

Призмы и чечевицы можно перемещать вдоль стержня и фиксировать в любом положении. Эти элементы выполнены таким образом, что расстояние между ними является кратным 5 мм, а фиксирующие воротки размещены так, чтобы при помощи кольцевых углублений их можно было бы фиксировать в нужном положении.

Нижний кронштейн 5 вместе с магнитным датчиком можно перемещать вдоль колонки 3 и фиксировать в произвольно выбранном положении. На передней панели пульта управления (рис. 5) находится выключатель сети, регулятор числа периодов, датчик времени и кнопка «сброс».

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Изучение не изохронных колебаний физического и математического маятников.

Оборудование и принадлежности: установка с физическим и математическим маятниками, линейка, транспортир.

Как следует из теории (п.2.2, 2.3), период колебаний физического маятника зависит от угловой амплитуды колебаний α_0 , что является причиной *не изохронности колебаний* физического и математического маятников. Для изучения зависимости $T(\alpha_0)$ необходимо измерить угловую амплитуду колебаний маятника и его период, и полученные данные представить в виде графика.

Измерения и обработка результатов.

1. Снять с физического маятника чечевицы 12а и 12б, а также одну из опорных призм 11. Измерить длину стержня L , расстояние между точкой подвеса (опорной призмой) и серединой стержня a .

2. Последовательно отклонять маятник на начальный угол α_0 с шагом в 10° . Для каждого начального угла измерить время t нескольких полных колебаний маятника n . Рассчитать период колебаний по формуле

$$T = \frac{t}{n} \quad (3.1)$$

Данные занести в таблицу 1.

3. Построить график зависимости периода колебаний от угловой амплитуды $T(\alpha_0)$.

4. В среде Mathcad рассчитать период колебаний маятника по формуле (программа прилагается)

$$T_{\text{н и д}} = 4 \sqrt{\frac{I}{2mga}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \quad (3.2)$$

где момент инерции маятника по теореме Гюйгенса-Штейнера равен

$$I = \frac{1}{12} mL^2 + ma^2 \quad (3.3)$$

Данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

Результаты измерений периода физического маятника в зависимости от угловой амплитуды.

$L =$		$a =$								
М		М								
°	α									
	n									
с	t									
с	T									
с	$T_{\text{н.д}}$									

5. На одном графике с $T(\alpha_0)$ построить график зависимости $T_{\text{н.д}}(\alpha_0)$.
6. Измерить длину математического маятника l .
7. Последовательно отклонять математический маятник на начальный угол α_0 с шагом в 10° . Для каждого начального угла измерить время t нескольких полных колебаний маятника n . Рассчитать период колебаний по формуле (3.1).
8. Данные занести в таблицу 2.
9. Построить график зависимости периода колебаний от угловой амплитуды $T(\alpha_0)$.
10. В среде Mathcad рассчитать период колебаний маятника по формуле (3.2), учитывая что момент инерции математического маятника относительно точки О равен $I = ml^2$. Программа прилагается.
11. Данные занести в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты измерений периода математического маятника в зависимости от угловой амплитуды.

$l =$										
М		М								
°	α									
	n									
с	t									
с	T									
с	$T_{\text{н.д}}$									

12. На одном графике с $T(\alpha_0)$ построить график зависимости $T_{\text{н.д}}(\alpha_0)$.
13. Сделать выводы.

Задание 2. Определение ускорения свободного падения методом оборотного маятника.

Оборудование и принадлежности: установка с физическим маятником, линейка.

Метод оборотного маятника основан на теореме Гюйгенса. При определении ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника необходимо, изменяя его момент инерции (передвигая чечевицу 12а), добиться того, чтобы расстояние между опорными призмами 11 стало равным приведенной длине оборотного маятника. В этом случае период колебаний одинаковый как для прямого, так и для перевернутого положения маятника. Измеряя приведенную длину маятника как расстояние между опорными призмами при условии равенства периодов колебаний прямого и перевернутого маятников $l_{d\ddot{a}}$ и период T , по формулам (2.10) и (2.11) находим ускорение свободного падения g :

$$g = \frac{4\pi^2 l_{d\ddot{a}}}{T^2} \quad (3.4)$$

Измерения и обработка результатов.

1. Установить опорные призмы 11 на одинаковых расстояниях 12 – 14 см от концов оборотного маятника.

2. Установить чечевицу 12б между опорными призмами 11 маятника, а чечевицу 12а на расстоянии $d = 1$ см от конца маятника.

3. Пользуясь датчиком времени, находящимся на лицевой панели пульта управления 10, определить время t для $n=10$ колебаний маятника, передвигая чечевицу 12а каждый раз на 1 см в диапазоне 1 – 10 см, в прямом и перевернутом положениях маятника для каждого положения передвигаемой чечевицы 12а. Период колебания маятника рассчитать по формуле:

$$T = \frac{t}{n} \quad (3.5)$$

Данные занести в таблицу 3.

4. На одном чертеже построить графики $T(d)$ зависимости периодов колебаний в прямом и перевернутом положениях маятника от расстояния d чечевицы 12а от конца стержня. Точка пересечения графиков будет соответствовать равенству периодов колебаний прямого и перевернутого маятников.

5. Установить чечевицу 12а в положение, соответствующее равенству периодов колебаний, и проверить их совпадение. Если $T_{\text{прям.}} = T_{\text{перев.}}$, то расстояние между опорными призмами равно приведенной длине $l_{d\ddot{a}}$ оборотного маятника.

6. Провести контрольные измерения величин $l_{дд}$, T , входящих в правую часть равенства (3.4).

7. Оценить минимальную относительную погрешность прямых измерений величин $l_{дд}$, T .

8. Оценить минимальную относительную погрешность косвенных измерений величины g .

Таблица 3

Результаты измерений периодов колебаний оборотного маятника.

d см	n	$t_{\text{прям.}}$ с	$T_{\text{прям.}}$ с	$t_{\text{перев.}}$ с	$T_{\text{перев.}}$ с
1	10				
2	10				
3	10				
4	10				
5	10				
6	10				
7	10				
8	10				
9	10				
10	10				

9. Провести повторные измерения T . Оценить случайную относительную погрешность прямых измерений этой величины. Сравнить ее с минимальной относительной погрешностью и сделать выводы о необходимом числе повторных измерений. Оценить полную относительную погрешность прямых измерений T .

10. По формуле (3.4) определить ускорение свободного падения g .

11. Оценить полную относительную погрешность ε косвенных измерений ускорения свободного падения g .

12. Сделать выводы.

Задание 3. Определение ускорения свободного падения методом математического маятника.

Оборудование и принадлежности: математический маятник, линейка.

Для определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника необходимо измерить его длину l , соответствующий ей период колебаний T , и вычислить g по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (3.6)$$

Измерения и обработка результатов.

1. Для некоторого минимального значения длины математического маятника провести контрольные измерения величин l , T , входящих в правую часть равенства (3.6).

2. Оценить минимальную относительную погрешность прямых измерений этих величин.

3. Оценить минимальную относительную погрешность косвенных измерений величины g .

4. Определить период колебаний математического маятника при различной его длине. Для этого, как и в первом задании, измерить время t для $n = 10$ колебаний и найти T по формуле (3.5). Данные занести в таблицу 4.

5. Методом наименьших квадратов (см. Приложение 1), по формуле (3.6), оценить среднее значение ускорения свободного падения $\langle g \rangle$ и случайную относительную погрешность косвенных измерений ускорения свободного падения g .

Таблица 4

Результаты измерений и расчётов ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l , м										
t , с										
T , с										
T^2 , с ²										
g , м/с ²										

6. Оценить полную относительную погрешность ε косвенных измерений ускорения свободного падения g .

7. Сравнить значения ускорения свободного падения, полученные в заданиях 2 и 3.

8. Сделать выводы.

Задание 4. Определение ускорения свободного падения по графику зависимости периода колебаний физического маятника от положения точки подвеса.

Оборудование и принадлежности: установка с физическим маятником, линейка.

В качестве маятника используют однородный стержень длиной L . Обе чечевицы 12а и 12б, а также одна опорная призма 11 снимаются. В эксперименте измеряются периоды колебаний маятника при перемещении точки подвеса от середины стержня (то есть от его центра масс) к концу стержня. По данным эксперимента строят график зависимости периода колебаний маятника T от расстояния между точкой подвеса и центром масс стержня x (изменением положения центра масс маятника при движении

опорной призмы по стержню пренебрегают ввиду малости массы опорной призмы по сравнению с массой стержня). Типичный график зависимости $T(x)$ приведен на рис. 6. Если периоды равны при $x = a$ и $x = a_{об}$, то приведенная длина маятника равна $l_{д\ddot{a}} = a + a_{об}$.

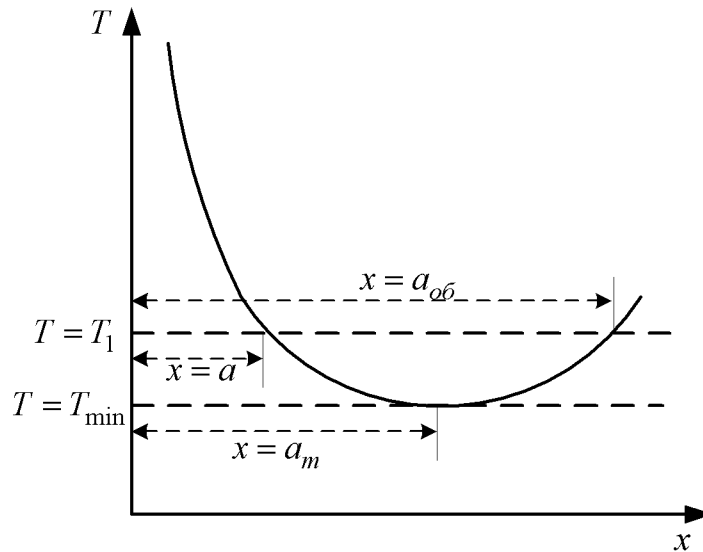


Рис. 6.

Измерения и обработка результатов.

1. Снять с маятника чечевицы 12а и 12б, а также одну из опорных призм 11.
2. Закрепить оставшуюся опорную призму в середине стержня.
3. Передвигая точку подвеса (опорную призму 11) к концу стержня последовательно на 1 см, при каждом положении точки подвеса определить время t для $n=10$ колебаний маятника. Рассчитать период по формуле (3.5). Измерить расстояние x между точкой подвеса и серединой стержня. Данные занести в таблицу 5.

Таблица 5

Результаты измерений периода колебаний физического маятника в зависимости от положения точки подвеса.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x, \text{ м}$										
$t, \text{ с}$										
$T, \text{ с}$										
$l_{д\ddot{a}}, \text{ м}$										
$g, \text{ м/с}^2$										

4. Построить график зависимости периода колебаний маятника T от расстояния между точкой подвеса и центром масс стержня x .
5. Для трех различных значений периода по графику определяют три значения приведенной длины $l_{д\ddot{a}} = a + a_{об}$. Для каждого случая вычисляют ускорение свободного падения по формуле (3.4).
6. Найти среднее значение $\langle g \rangle$ и относительную погрешность ускорения свободного падения.

7. Сравнить значения ускорения свободного падения, полученные в заданиях 2,3 и 4.

8. **На основании проделанных измерений сформулировать цель работы и сделать выводы.**

Задание 5. Определение коэффициента жесткости резинового жгута методом связанных маятников.

Оборудование и принадлежности: установка с физическим маятником, линейка, резиновый жгут, штатив.

Для определения коэффициента жесткости резины или пружины методом связанных маятников, необходимо определить ускорение свободного падения, используя задания 2,3 или 4, а затем измерить период колебаний связанных маятников. Применяя формулу периода колебаний связанных маятников, вычислить коэффициент жесткости резины.

Измерения и обработка результатов.

1. Взять значение ускорения свободного падения из задания 2,3 или 4.
 2. Установить чечевицы 12а и 12б на одинаковом расстоянии от центра стержня. Измерить расстояние от точки подвеса физического маятника до его центра масс (середины стержня) a .

3. Определить время t для $n=10$ колебаний маятника. Рассчитать период по формуле (3.5). Из выражения периода гармонических колебаний физического маятника (2.10)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$$

выразить момент инерции маятника I . Повторить испытания 5 раз. Найти среднее значение момента инерции $\langle I \rangle$. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 6.

4. Привязать резиновый жгут одним концом к штативу, а другим – к стержню маятника. Измерить расстояние от точки подвеса до точки соединения резинового жгута с маятником L .

Таблица 6

Результаты измерений периода колебаний и вычисления момента инерции физического маятника.

$g =$		$a =$			
m/c^2		M			
№					
n					

	0	0	0	0	0	
t ,с						
T ,с						
I , кг·м ²						$\langle I \rangle =$ кг·м ²

5. Определить время t для $n=10$ колебаний маятника. Рассчитать период по формуле (3.5). Повторить испытания 5 раз.

6. Вывести формулу для периода колебаний связанных маятников

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{kL^2 + mga}} + \pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (3.7)$$

7. Выразить из формулы (3.7) коэффициент жесткости резинового жгута k . Сделать расчет k . Данные занести в таблицу 7. рассчитать среднее значение $\langle k \rangle$.

8. Оценить погрешность определения жесткости жгута.

Таблица 7

Результаты измерений периода колебаний связанных маятников и расчета коэффициента жесткости резинового жгута.

$g =$ м/с ²	$a =$ м				$L =$ м	$\langle I \rangle =$ кг·м ²
№ n						
	0	0	0	0	0	
t ,с						
T ,с						
k , Н/м						$\langle k \rangle =$ Н/м

9. *На основании проделанных измерений сформулировать цель работы и сделать выводы.*

Задание 6. Изучение затухающих свободных колебаний физического маятника.

Оборудование и принадлежности: физический маятник, линейка.

Свободные колебания реального маятника являются затухающими, так как энергия, сообщенная системе, постепенно расходуется на преодоление сил трения.

, С														
, М	λ													
, °	С													
	l													

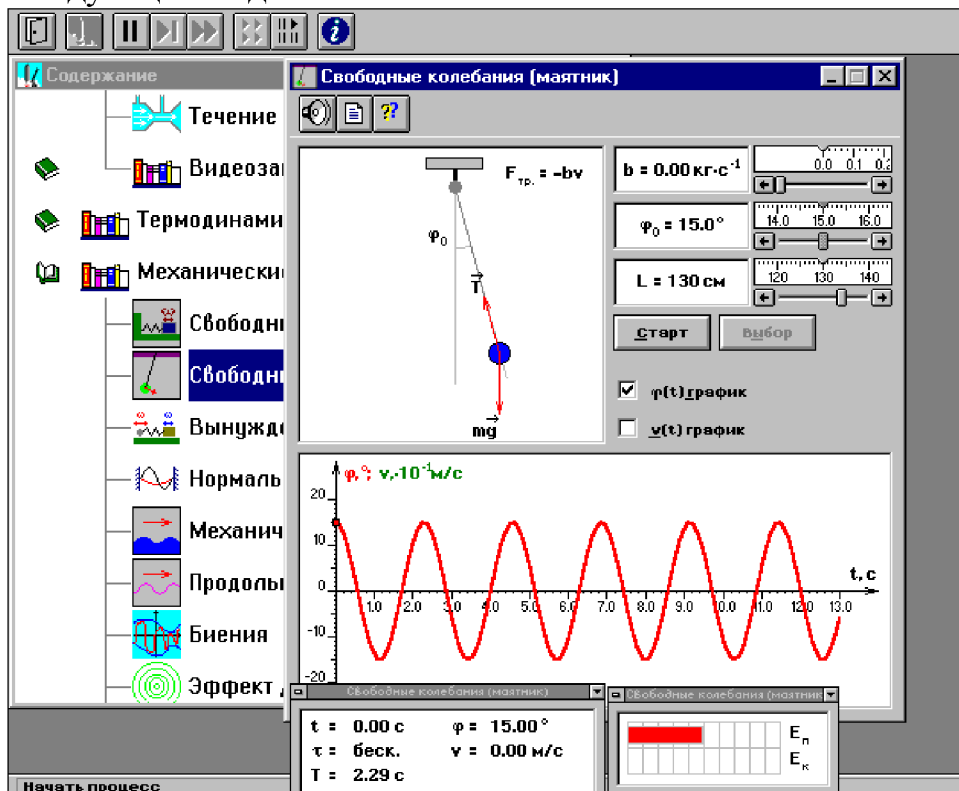
4. Построить графики зависимостей $\alpha_0(t)$, $\ln \alpha_0(t)$. По графику $\ln \alpha_0(t)$ определить коэффициент затухания β . По формуле (3.10) или (3.11) определить добротность физического маятника Q .

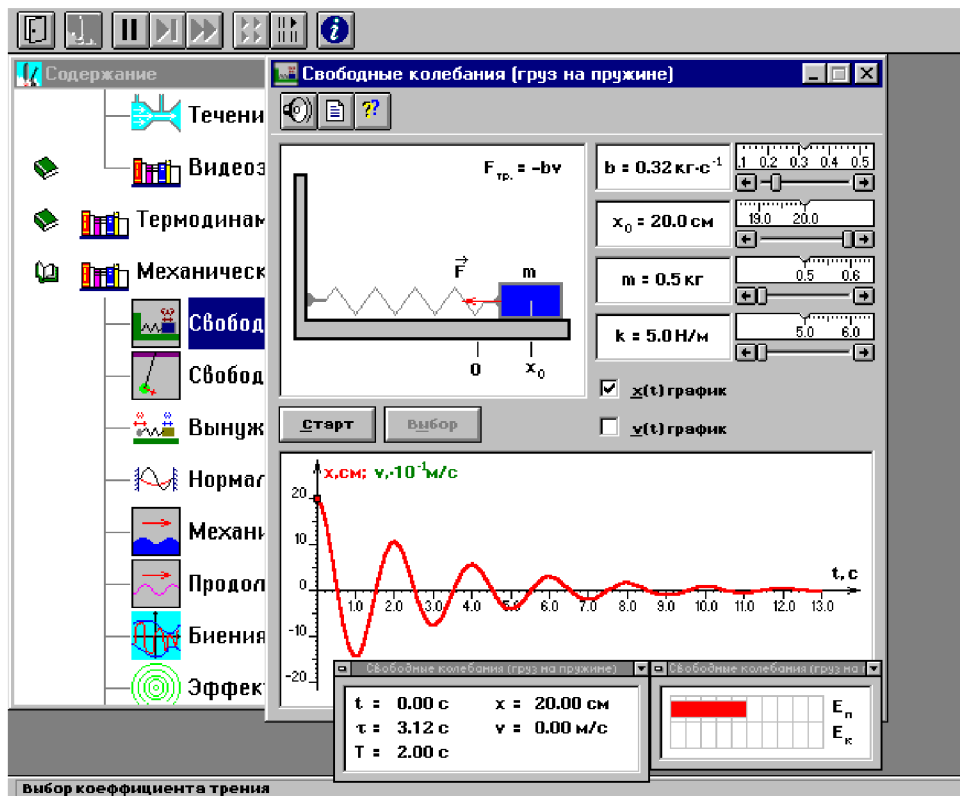
5. *На основании проделанных измерений сформулировать цель работы и сделать выводы.*

Задание 7. Изучение затухающих свободных колебаний математического и пружинного маятников методом компьютерного моделирования.

Оборудование и принадлежности: компьютерные модели математического и пружинного маятников.

Компьютерные модели математического и пружинного маятников имеет следующий вид:





1. Выберите «Маятник». Установите с помощью движков регуляторов максимальную длину нити L и значения коэффициента затухания и начального угла, указанные в табл. 9 для вашей бригады.

Таблица 9

Значения коэффициента затухания (вязкого трения), начального угла отклонения (для первого эксперимента) и начального отклонения (для второго).

Номер бригады	b (кг/с)	φ_0 ($^\circ$)	X_0 (см)	m (кг)	Номер бригады	b (кг/с)	φ_0 ($^\circ$)	X_0 (см)	m (кг)
1	0.8	20	10	0.5	5	0.08	14	7	0.7
2	0.6	18	9	0.6	6	0.07	16	8	0.8
3	0.4	16	8	0.7	7	0.06	18	9	0.9
4	0.2	14	7	0.8	8	0.05	20	10	1.0

2. Нажимая мышью на кнопку «СТАРТ», следите за движением точки на графиках угла и скорости и за поведением маятника. Потренируйтесь, останавливая движение кнопкой «СТОП» (например, в максимуме смещения), и запуская далее кнопкой «СТАРТ». Выберите число полных колебаний $N = 3 - 5$ и измерьте их продолжительность Δt (как разность $t_2 - t_1$ из таблицы на экране).

3. Приступайте к измерениям длительности Δt для N (3-5) полных колебаний, начиная с максимальной длины (150 см) нити маятника и уменьшая ее каждый раз на 10 см (до минимальной длины 80 см). Длину нити L и результаты измерений длительности Δt записывайте в таблицу 10.

Результаты измерений (количество измерений и строк = 8)

Номер измерения	N=			
	L(м)	Δt (с)	T(с)	T^2 (с ²)
1	1.5			
2	1.4			
...				
g (м/с ²)				

4. Выберите «Груз на пружине». Установите массу груза, значение коэффициента затухания и начальное смещение, указанные в табл. 9 для вашей бригады. Проведите измерения, аналогичные эксперименту с математическим маятником, уменьшая коэффициент жесткости k каждый раз на 1 Н/м. данные занесите в таблицу 11.

Результаты измерений (количество измерений и строк = 6)

Номер измерения	N=				
	k (Н/м)	Δt (с)	T(с)	ω (1/с)	ω^2 (1/с ²)
1	5				
2	6				
...					

5. Постройте графики зависимости

- квадрата периода колебаний от длины нити MM ,
- квадрата циклической частоты колебаний от жесткости пружины $ПМ$.

6. По наклону графика $T^2 = f(L)$ определите значение g , используя формулу

$$g = 4\pi^2 \frac{\Delta L}{\Delta(T^2)}$$

Оцените абсолютную ошибку определения g .

7. По наклону графика $\omega^2 = f(k)$ определите значение m , используя формулу

$$m = \frac{\Delta(k)}{\Delta(\omega^2)}$$

Оцените абсолютную ошибку определения m .

8. *На основании сделанных измерений сформулировать цель работы и сделать выводы.*

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение физических величин: момент силы, момент инерции.
2. Что такое колебание?
3. Дайте определение периода колебаний.
4. Дайте определение частоты колебаний.
5. Какие колебания называются гармоническими? Привести примеры.
6. Запишите закон движения системы, совершающей гармонические колебания.
7. Дайте определение амплитуды гармонических колебаний.
8. Дайте определение фазы гармонических колебаний.
9. Дайте определение начальной фазы гармонических колебаний.
10. Напишите уравнение связи частоты и периода гармонических колебаний.
11. Напишите уравнение связи частоты и циклической частоты гармонических колебаний.
12. Напишите формулу зависимости скорости МТ от времени при гармонических колебаниях.
13. Напишите уравнения связи амплитуды скорости и амплитуды смещения при гармонических колебаниях МТ.
14. Напишите формулу зависимости ускорения МТ от времени при гармонических колебаниях.
15. Напишите уравнения связи амплитуды скорости и амплитуды ускорения при гармонических колебаниях МТ.
16. Напишите уравнения связи амплитуды смещения и амплитуды ускорения при гармонических колебаниях МТ.
17. Напишите дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний МТ.
18. Напишите дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний МТ.
19. Что определяет коэффициент затухания? Добротность?
20. Дайте определение математического маятника.
21. Вывести формулы для периода гармонических колебаний физического (математического) маятников.
22. Что такое центр качания, как он расположен по отношению к точке подвеса?
23. Как определить положение центра масс физического маятника, если известно положение сопряженных точек подвеса при наименьшем периоде колебаний маятника?
24. Почему угловая амплитуда колебаний маятника при измерениях его периода должна быть небольшой?
25. Как влияет трение в системе на точность определения ускорения свободного падения?

ЛИТЕРАТУРА

1. Кембровский Г.С. Приближённые вычисления и методы обработки результатов измерений в физике. -Минск: Изд-во "Университетское", 1990. - 189 с.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. -М.: Высшая школа, 1986. -320 с.
3. Петровский И.И. Механика. -Минск: Изд-во БГУ, 1973. -352 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. -М.: Наука, 1982. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. -432 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука, 1989 Т. 1. Механика. - 576 с.
6. Стрелков С.П. Механика. -М.: Наука, 1975. -560 с.
7. Физический практикум. Под ред. Кембровского Г.С. -Минск: Изд-во "Университетское", 1986. -352 с.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В экспериментальных исследованиях линейные функциональные зависимости встречаются довольно часто. Примерами могут служить зависимости: силы упругости от деформации (закон Гука $F_y = -kx$), силы тока в проводнике от напряжения (закон Ома $I = U/R$), кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего излучения (закон Эйнштейна $E = h\nu - A$) и др. Кроме того, с помощью замены переменных практически любую зависимость можно свести к линейной зависимости вида

$$y = ax + b, \quad (1)$$

где a и b - некоторые подлежащие определению параметры. В частном случае параметр b может быть равен нулю (величины y и x прямо пропорциональны друг другу). Тогда соотношение (1) примет вид

$$y = ax \quad (2)$$

В обоих случаях при обработке результатов измерений можно использовать простой и наглядный графический метод (см. [1], гл. 6). Однако он не отличается высокой точностью, что связано с дополнительными погрешностями при нанесении точек, проведении прямой “на глаз” и снятии отсчетов с графика. Точность можно повысить, если результаты измерений обработать аналитически, используя *метод наименьших квадратов*. Рассмотрим его применение для простой зависимости (2). Общий случай рассмотрен в [1], § 38.

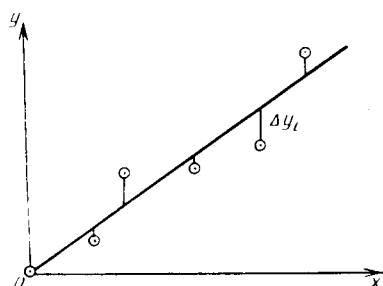


Рис. 1

Пусть некоторая величина y прямо пропорциональна величине x , т.е. $y = ax$. Экспериментально независимыми способами измерен ряд значений $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, одной величины и соответствующие им значения y_i другой величины. При графической обработке результатов измерений полученные данные по соответствующим правилам (см. [1], гл. 6) изображаются в виде точек (рис. 1). Дальнейшая

задача сводится к подбору такого угла наклона α проводимой прямой, при котором она располагалась бы возможно ближе ко всем точкам и по обе ее стороны оказывалось бы приблизительно равное их количество. Понятно, что выполнение подобной операции “на глаз” не может обеспечить высокую точностью. Более точное математическое правило проведения прямой линии заключается в нахождении такого значения параметра a , при котором сумма квадратов отклонений всех экспериментальных точек от линии графика была бы наименьшей.

Обычно случайные погрешности в определении аргумента x незначительны (как правило, в ходе эксперимента значения x_i задаются и устанавливаются на приборах самим экспериментатором). Поэтому отклонения экспериментальных точек от прямой, т.е. случайные погрешности Δy_i , будут равны разностям ординат данных точек и

соответствующих точек на прямой (см. рис. 1). Согласно методу наименьших квадратов наилучшей будет та прямая, для которой будет минимальной величина

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2. \quad (3)$$

По условию минимума производная от величины S по параметру a должна быть равна нулю:

$$S'_a = \sum_{i=1}^n 2(ax_i - y_i)x_i = 0 \quad (4)$$

Отсюда наилучшее значение

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (5)$$

Для оценки абсолютной случайной погрешности измерения вычисляют так называемое *стандартное отклонение*

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2 - a^2 \right)}. \quad (6)$$

При количестве измерений $n \geq 10$ абсолютную случайную погрешность принимают равной $\Delta a_c = 3\sigma_a$, при $n = 5$ величина $\Delta a_c = 5\sigma_a$.

Относительная случайная погрешность $\varepsilon_{a,c} = \Delta a_c / a$, или в процентах $\varepsilon_{a,c} = \Delta a_c / a \cdot 100\%$.

Инструментальные и другие погрешности оценивают так же, как и при косвенных измерениях (см. [1], гл. 5).

Если в формуле (13) ввести обозначения: $y = L$, $x = T^2/4\pi^2$, то получим формулу (2) Приложения 1, в которой $a = g$. С помощью формул (5) и (6) Приложения 1 найдём $\langle g \rangle$ и случайную относительную погрешность косвенных измерений ускорения свободного падения.

Можно также построить график зависимости L от $(T^2/4\pi^2)$, откладывая L по оси ординат, а $(T^2/4\pi^2)$ по оси абсцисс. Этот график должен иметь вид прямой линии, проходящей через начало координат, так как

$$L = g \frac{T^2}{4\pi^2}.$$

Коэффициент перед $(T^2/4\pi^2)$ в правой части этого уравнения равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс, $tg\alpha = g$. Определив по графику $tg\alpha$, можно найти среднее значение ускорения свободного падения, $\langle g \rangle$. Но МНК даёт более точное значение $\langle g \rangle$, чем графический метод.