Тема: РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§1 Решение нелинейных уравнений

п.1.4 Метод простой итерации

Пусть задана нелинейная непрерывная функция действительного переменного $f(x)$ на отрезке $[a,b]\in R$. Требуется решить уравнение

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

Метод простой итерации состоит в том, что уравнение (1) заменяем на основе равносильных преобразований уравнением вида

$$x=\varphi(x) \qquad (2)$$

а затем строим последовательность приближений $x_0, x_1, ..., x_k, ..$ к корню уравнения x^* по правилу

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad k = 0,1,2,... \qquad (3)$$

Здесь k-номер итерации. Приближенное значение корня с нулевым индексом, т.е. x_0 называют начальным приближением. Это значение выбирается из каких-либо условий конкретной задачи или берется произвольно. Подставляем это значение в правую часть соотношения (3) и получаем $x_1 = \varphi(x_0)$, затем вычисленное таким образом каждое очередное приближение подставляем в правую часть и получаем $x_2 = \varphi(x_1)$ $x_3 = \varphi(x_2)$...

В итоге получаем числовую последовательность $x_0, x_1, ..., x_k, ..$,которая называется *последовательностью приближений* или *итерационной последовательностью*. В этой последовательности каждое новое приближение корня x_{k+1} уравнения (1) находится на основании только одного известного предыдущего значения x_k $k = 0,1,2,...$, т.е за один шаг (итерацию). Поэтому метод простой итерации относят к классу *одношаговых методов*.

Корень уравнения (1) или (2) $x=x^*$ вычисляют приближенно с относительной погрешностью $\varepsilon\geq 0$ так, чтобы для всех $k\geq k_0(\varepsilon)$ стало верным неравенство

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon |x_0 - x^*| \qquad (4)$$

Число $k_0(\varepsilon)$ - это минимальное количество итераций, при котором выполняется условие сходимости. Последовательность $x_0, x_1, ..., x_k, ..$ будет *сходящейся*, если при неограниченном росте числа итераций существует ее предел и этим пределом является корень уравнения x^*, т.е. если при $k\to\infty$ $\exists \lim\{x_k\}=x^*$. Следовательно, всегда можно прекратить процесс поиска корня методом простой итерации, если число итерации будет равно $k_0(\varepsilon)$.

Т.о., основным вопросом применения метода простой итерации является вопрос о его сходимости и скорости этой сходимости.

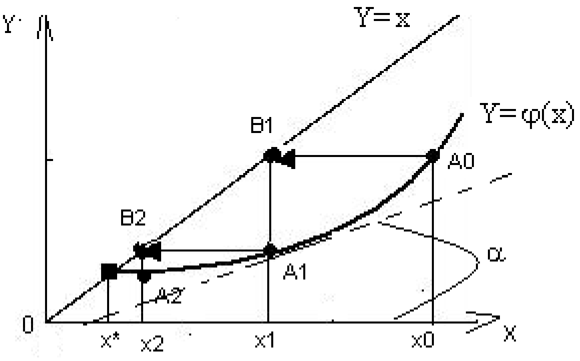
Скорость сходимости характеризует изменение значений приближений к корню на двух соседних итерациях по отношению к истинному значению корня. Если для погрешности какого-либо итерационного метода выполняется неравенство

$$|x_k - x^*| \le Mq^k |x_0 - x^*| \qquad (5)$$

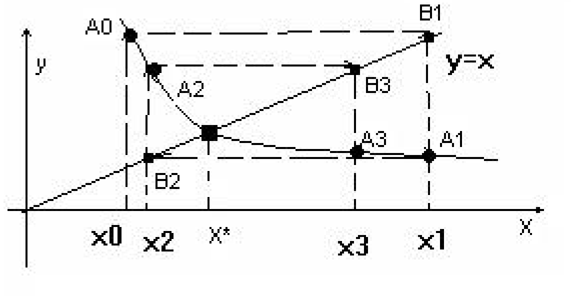
где число M не зависит от номера итерации k, а 0<q<1, то говорят, что метод сходится линейно со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

Проблемы сходимости и единственности численного решения для метода простой итерации решаются и исследуются с помощью понятия о сжимающем отображении и теоремы о достаточном условии сходимости метода. Если $x=x^*$ является корнем функции $f(x)$, то и итерируемая функция $\varphi(x)$ должна обладать следующим свойством $x^*=\varphi(x^*)$, а значение x^* называется неподвижной точкой функции $\varphi(x)$.

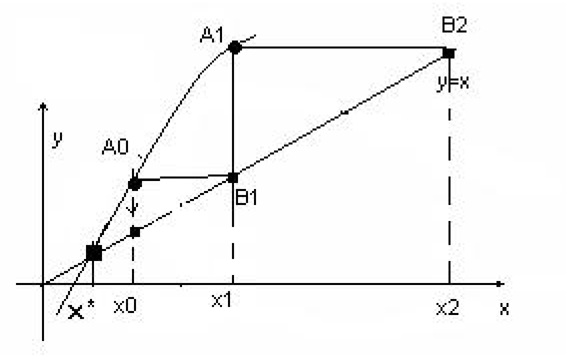
Дадим *геометрическую интерпретацию метода простой итерации*. Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ являются непрерывными. На плоскости X0Y построим графики функции $Y=x$ и $Y=\varphi(x)$. Каждый вещественный корень x^* уравнения (2) является абсциссой точки пересечения кривой $Y=\varphi(x)$ с прямой $Y=x$. Начиная с некоторой точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$, *строим ломаные линии* $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$(лестница), звенья которой попеременно параллельны оси 0X и оси 0Y, причем вершины $A_0, A_1, A_2\ldots$ лежат на кривой $Y=\varphi(x)$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2 … представляют собой последовательные приближения $x_1, x_2, ..., x_k, ..$ корня x^*, которые сходятся к нему *монотонно и односторонне*.



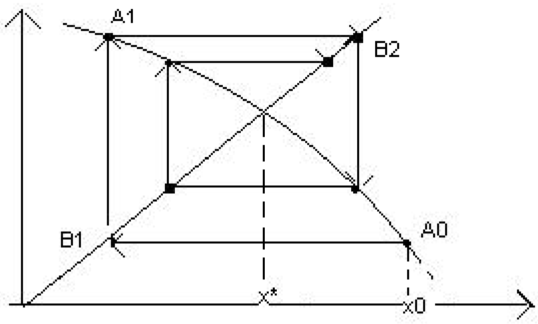
На рисунке представлен случай, когда $0<\varphi'(x)<1$, т.е. угол касательной к графику функции $Y=\varphi(x)$ меньше 45^0, т.е.$\alpha< 45^0$. Функция $Y=\varphi(x)$ является *возрастающей и вогнутой*.



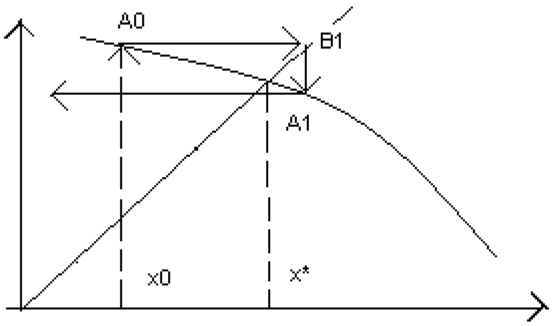
Если $-1<\varphi'(x)<0$, то ломаная $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$ будет иметь *вид спирали*. В этом случае сходимость является *двусторонней*, т.е. искомый корень всегда принадлежит отрезку $[x_k, x_{k+1}]$. Функция $Y=\varphi(x)$ является *убывающей и вогнутой*.



Если $|\varphi'(x)|>1$, т.е. угол наклона касательной к кривой $\varphi(x)$ превышает 45^0, то в этом случае <u>итерации сходиться не будут.</u>



Если же $|\varphi'(x)|<1$ в некоторой окрестности корня, а вдали от него это неравенство не выполняется, то итерационный процесс будет сходящимся только в том случае, если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к корню.



При произвольном выборе начального приближения сходимости может не быть.

Прежде, чем исследовать условия сходимости метода простой итерации, напомним понятие <u>*Липшиц-функции*</u>.

Говорят, что непрерывная на отрезке [a,b] функция f(x) удовлетворяет на этом отрезке условию *Липшица*, если $\exists q = const \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ существует такая константа q, что для любых двух значениях аргумента из этого отрезка имеет место неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le q|x_1 - x_2| \qquad (6)$$

Величину q в этом случае называют <u>*постоянной Липшица*</u>.

Доказывается, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет ограниченную производную $|f'(x)| \le m$, то она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $q=m$,

<u>***Теорема о сходимости итерационной последовательности метода простой итерации***</u> имеет несколько эквивалентных формулировок. Одна из них такова.

Пусть функция $\varphi(x)$ из уравнения (2) на некотором отрезке $[x^*-\rho; x^*+\rho]$ где x^*- корень этого уравнения, удовлетворяет условию Липшица с постоянной $0<q<1$. Т.е. выполняется условие $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le q\, |x_1-x_2|$. Тогда при любом выборе начального приближения из окрестности корня, т.е. $\forall x_0 \in [x^*-\rho; x^*+\rho]$ существует бесконечная итерационная последовательность$\{x_k\}$, линейно сходящаяся к корню x^*, который является единственным решением уравнения (2) на отрезке $[x^*-\rho; x^*+\rho]$. Для погрешности будет справедлива оценка

$$|x_k - x^*| \le q^k |x_0 - x^*| \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (7)$$

(Доказательство теоремы - см.Самарский ЧМ с.196)

Сформулированная теорема имеет простой смысл. Будем говорить, что функция φ осуществляет отображение точки x на точку $y=\varphi(x)$. Тогда условие Липшица с постоянной $q<1$ означает, что отображение φ является сжимающим: расстояние между точками $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ больше, чем расстояние между их изображениями $y_1 = \varphi(x_1)$ *и* $y_2 = \varphi(x_2)$. Корень x* является неподвижной точкой отображения φ, он преобразуется сам в себя $x^*=\varphi(x^*)$. Поэтому каждый шаг в итерационном процессе (3), сжимая расстояния, должен приближать члены последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ к неподвижной точке x^*.

Для практического применения теорема неудобна, поэтому обычно используют ***<u>следствие из этой теоремы</u>***, которое звучит следующим образом. Если функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[x^*-\rho; x^*+\rho]$, то условие Липшица можно записать как

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \qquad (8).$$

Если начальное приближение выбирается из этого же отрезка, то метод простой итерации *<u>сходится линейно</u>*, т.к. погрешность сходимости имеет вид

$$|x_{k+1} - x^*| \le q|x_k - x^*|.$$

<u>Число итераций</u>, при котором выполняется условие сходимости $|x_k - x^*| \le \varepsilon |x_0 - x^*|$ (4) получаем из условия $|x_k - x^*| \le q^k |x_0 - x^*|$ (7). На основании этих соотношений можно записать $q^k \le \varepsilon$ и $k\,(\varepsilon) = \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{q}}$.

<u>Минимальное число итераций</u>, при котором выполняется условие сходимости равно

$$k_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{q}}\right] + 1 \qquad (9).$$

Здесь [a] означают ближайшее к а сверху целое число.

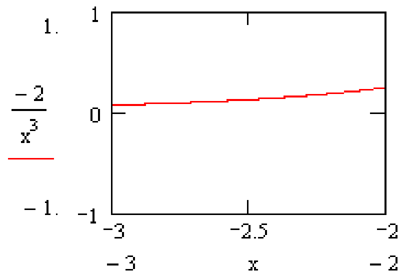
<u>Рассмотрим пример</u>

Решить уравнение $f(x) = 0$, *если* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ с точностью ε=0.01.

Отделим корни, найдем, что существует 3 корня на отрезках [-3;-2], [-1,0] и [0;1]. Будем последовательно искать приближение на каждом отрезке.

1. На отрезке [-3;-2] выполняется условие $x^2 \ne 0$, следовательно, можем разделить обе части уравнения f(x)=0 на $x^2 \ne 0$.

Получаем $x+3-\frac{1}{x^2}=0$ Преобразуем это уравнение $x=\frac{1}{x^2}-3$, которое имеет вид $x=\varphi(x)$ (2). Можем записать, что $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}-3$. Проверим условие сходимости $\forall x\in[-3,-2]$ должно выполняться неравенство $|\varphi'(x)|\le q<1$ на этом отрезке. Производная функции имеет вид $\varphi'(x)=\frac{-2}{x^3}$. И ее максимальное значение на отрезке [-3;-2] : max $\varphi'(x)$=1/4, следовательно $q\le\frac{1}{4}$.



Для проверки условия сходимости можно построить график функции $\varphi'(x)$ на отрезке [-3;-2]. Далее следует убедиться, что на указанном отрезке максимальные по модулю значения на графике не превышают 1.

В качестве первого приближения возьмем $x_0=-2.5$, тогда

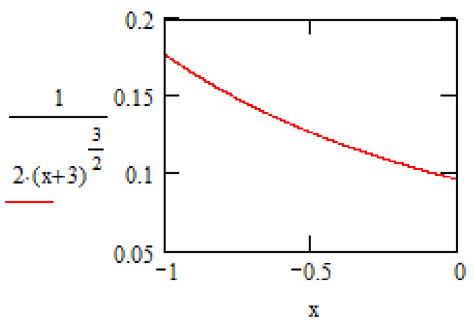
$$x_1=\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0{}^2}-3=\frac{1}{6.25}-3=0.16-3=-2.84$$

$$x_2=\varphi(x_1)=\frac{1}{x_1{}^2}-3=\frac{1}{2.84^2}-3=-2.876$$

$$x_3=\varphi(x_2)=\frac{1}{2.876^2}-3=-2.879 \qquad |x_3-x_2|\le\varepsilon$$

$$x_4=\varphi(x_3)=\frac{1}{2.879^2}-3=-2.879$$

2. Рассмотрим отрезок [-1;0] . На нем не выполняется условие $x^2\ne 0$, поэтому, мы не можем разделить обе части уравнения f(x)=0 на $x^2\ne 0$.



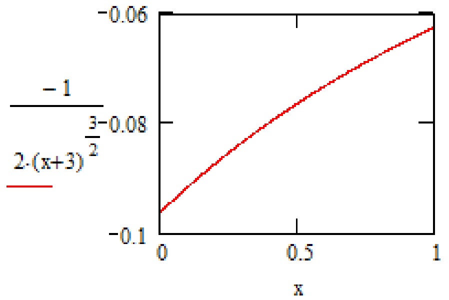
Приведем уравнение к виду $x=-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$, т.е.

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\ , \qquad \varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

и условие сходимости выполняется.

В качестве начального приближения возьмем $x_0=-0.5$ и начнем процесс итерирования для поиска приближения с заданной точностью.

3. На отрезке [0;1] поступаем аналогично предыдущему случаю, только возьмем функцию с положительным знаком.



Имеем $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$, для которой выполнение условия сходимости определим из графика.

Возьмем $x_0=0.5$ и начнем процесс итерирования для поиска приближения с заданной точностью.

Так как для реализации решения уравнения $f(x)=0$ (1) методом простых итераций необходимо преобразовать его к виду $x=\varphi(x)$ (2) и выбор функции $\varphi(x)$ имеет большое значение для сходимости, то укажем достаточно общий прием такого преобразования.

Умножим уравнение вида (1) $f(x)=0$ на функцию $s(x)\neq 0$, т.е. эта функция не имеет корней на отрезке $[a,b]$, и значит функция $s(x)$ не меняет знак на этом отрезке (в частности $s(x)$ может быть *const*). Сложим полученное уравнение с тождеством $x\equiv x$, получим $x=x+s(x)\cdot f(x)$. Обозначим правую часть $\varphi(x)=x+s(x)\cdot f(x)$. Имеем $x=\varphi(x)$. Подбором функции $s(x)\neq 0$ добиваемся, чтобы в окрестности корня для функции $\varphi(x)=x+s(x)\cdot f(x)$ выполнялось условие сжатия, т.е. $|\varphi'(x)|\leq q<1$. При этом необходимо получить как можно меньшие значения параметра q.

Иногда после преобразования получаем, что $|\varphi'(x)|>1$ в окрестности корня. Чтобы использовать метод простой итерации в этом случае следует представить уравнение в виде $x=S(x)$, где $S(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ - функция, обратная для $\varphi(x)$. Тогда будет выполняться условие сходимости для функции $S(x)$.

Практическая схема решения нелинейного уравнения методом простой итерации состоит в следующем.

– Отделить корни уравнения (1) $f(x)=0$, т.е. выделить интервалы, на которых $f(x)$ имеет один корень.

– Выбрать один из найденных интервалов и преобразовать уравнение (1) к виду (2) $x=\varphi(x)$.

– Для выбранной формы записи уравнения проверить выполнение теоремы о сходимости метода простой итерации. Если условие не выполняется, выбрать другой вид уравнения (2).

– Задать начальное приближение и начать итерационный процесс.

– Итерации можно закончить, если число итераций достигнет величины $k_0(\varepsilon)=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{q}}\right]+1$, т.е минимального числа итераций для процесса сходимости.

На практике часто условием окончания итерационного процесса служит выполнение неравенства $|x_{k+1}-x_k|\leq\varepsilon$. Однако выполнение этого условия не гарантирует близости к точному решению. На рисунке достигается область, где условие окончания итерационного процесса выполняется, но корень уравнения x^* расположен достаточно далеко от этой области.