УДК 517.544; 517.548

МЕТОД ФОРМАЛЬНОГО УМНОЖЕНИЯ ГИПЕРФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

канд. физ.-мат. наук Т.М. УРБАНОВИЧ, С.В. БЕЛЯЙ
(Полоцкий государственный университет)

Представлен исторический обзор развития теории обобщенных функций и сравнительный анализ различных подходов к обобщению понятия функции. Рассматриваются гиперфункции Сато как обобщение понятия функции. Анализируется проблема умножения обобщённых функций. Рассматривается проблема умножения гиперфункций. Методом формального умножения гиперфункций решается краевая задача о скачке со степенной правой частью.

1. Обобщённые функции

Необходимость обобщения понятия функции возникает во многих технических, физических и математических задачах. Обобщённая функция дает возможность выражать в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенно действующего источника, интенсивность силы, приложенной к точке, и т. д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение и тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, можно измерить лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки. Таким образом, понятие обобщенной функции учитывает эту двойственную природу измерений и потому служит адекватным аппаратом для описания распределений различных физических величин [1].

В конце 20-х годов XX века П. Дирак [2] ввел так называемую δ-функцию, обладающую следующими свойствами: $\delta(x) = 0$ для $x \neq 0$, и если φ – любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) = \varphi(0). \quad (1)$$

δ-функция не есть функция, понимаемая в классическом смысле, она действует как функционал, сопоставляющий по формуле (1) каждой непрерывной функции φ число $\varphi(0)$ – ее значение в нуле. Понадобилось несколько лет, чтобы найти математически корректное определение δ-функции, её производных и самого понятия обобщённой функции [1].

Одним из самых ранних математических методов обобщения понятия функции был функциональный метод, предложенный С.Л. Соболевым [3] и Л. Шварцем [4].

В середине 30-х годов XX века С.Л. Соболев [3] заложил основы теории обобщенных функций как линейных непрерывных функционалов над пространством достаточно «хороших» (так называемых основных) функций и применил их при исследовании задачи Коши для уравнений гиперболического типа.

Опираясь на созданную школой Н. Бурбаки теорию линейных локально-выпуклых топологических пространств, Л. Шварц дал систематическое изложение теории обобщенных функций в его знаменитой двухтомной монографии [4] и указал на ряд важных применений этой теории.

Напомним, что пространство Шварца основных функций $D(\Upsilon)$, $\Upsilon \subseteq R$, состоит из бесконечно дифференцируемых функций на Υ с компактным носителем, т.е. из таких функций φ, что $\varphi(x) = 0$ вне фиксированного компакта, целиком принадлежащего Υ.

При этом сходимость в $D(\Upsilon)$ определяется следующим образом: все функции $\varphi_n(x)$ должны обращаться в нуль вне фиксированного компакта, целиком принадлежащего Υ, и сходиться равномерно на этом множестве. Такое же требование налагается и на каждую последовательность их производных любого порядка.

Распределением Шварца называется всякий линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве основных функций $D(\Upsilon)$. Пространство распределений обозначается $D'(\Upsilon)$.

Имеется другой (секвенциальный) подход к понятию обобщенной функции, развитый позднее польскими математиками Я. Микусинским, П. Антосиком и Р. Сикорским [5]. В этом подходе под обобщенной функцией понимается класс эквивалентности слабо сходящихся последовательностей [6, с. 304], обычных достаточно «хороших» функций.

Каждой обобщённой функции в функциональном подходе соответствует единственная обобщённая функция в секвенциальном подходе и наоборот. Каждая теорема об обобщенных функциях, доказанная функциональным методом, может быть доказана, и секвенциальным методом, и наоборот [5, с. 6]. Эти два подхода к понятию обобщенной функции эквивалентны.

Понятие обобщенной функции И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов [7] расширили, включив в рассмотрение целую шкалу пространств основных функций как бесконечно дифференцируемых, так и аналитических. Это направление под названием теории ультрараспределений разрабатывалось далее С. Румье, А. Берлингом и Х. Коматсу [8]. Следующий этап в развитии этого направления представляет теория гиперфункций, построенная М. Сато [9–12]. В отличие от обобщённых функций и ультрараспределений, гиперфункции не являются линейными непрерывными функционалами ни над каким пространством основных функций (см., например, [1]).

2. Гиперфункции Сато

Одним из вариантов обобщения понятия функции являются гиперфункции Сато, предложенные М. Сато в конце 50-х годов XX столетия. В терминах гиперфункций удобно описывать граничные значения голоморфных функций, строить произведения обобщённых функций или ультрараспределений, формулировать теоремы типа теорем об «острие клина» Боголюбова, описывать сингулярности решений дифференциальных уравнений с особенностями (см. [1]).

Приведём определение гиперфункции Сато (см. [9–15]).

Определение 1. Пусть D – область, содержащая интервал $Y = (a, b)$ оси x. D^+ – часть области D, примыкающая к Y из верхней полуплоскости, D^- – часть области D, примыкающая к Y из нижней полуплоскости. Пусть $F^+(z)$ – функция, аналитическая в D^+, $F^-(z)$ – функция, аналитическая в D^-. Пары функций $\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$ и $\{ F^+(z)+F_0(z),\ F^-(z)+F_0(z) \}$ называются эквивалентными, если функция $F_0(z)$ аналитична в области $D = D^+ \cup D^- \cup Y$.

Определение 2. Гиперфункцией $f(x)$, порождённой парой $\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$ на интервале $Y = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, называется класс эквивалентности пары функций $\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$.

При этом используется следующее обозначение (см., например, [13]):

$$f(x) = H.\,F.\{ F^+(z),\ F^-(z) \}.$$

Определение 3. ([13, с. 12]) Пара $\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$ называется производящей парой для гиперфункции $f(x)$; $F^+(z)$ и $F^-(z)$ называются соответственно верхней и нижней компонентами производящей пары.

Для простоты изложения везде далее верхнюю и нижнюю компоненты производящей пары (см. определение 3) будем называть верхней и нижней компонентами гиперфункции.

Определение 4. ([13, с. 12]) Если в некоторой точке $x = c$, $c \in (a,b)$, существует предел

$$f(c) = \lim_{\varepsilon\to+0} \{ F^+(c+i\varepsilon) - F^-(c-i\varepsilon) \},$$

то значение этого предела называется значением гиперфункции $f(x) = H.\,F.\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$ в точке $x = c$.

В тех точках $x \in (a,b)$, в которых предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \{ F^+(x+i\varepsilon) - F^-(x-i\varepsilon) \}$$

не существует, значение гиперфункции $f(x)$ считается неопределённым.

Определение 5. ([13, с. 12–13]) Обыкновенная функция, соответствующая гиперфункция $f(x) = H.\,F.\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$, определяется следующим образом:

$$O.F.\ f(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \{ F^+(x+i\varepsilon) - F^-(x-i\varepsilon) \},$$

то есть обыкновенная функция, соответствующая данной гиперфункции, определена для тех $x \in (a,b)$, для которых последний предел существует.

Определение гиперфункции $f(x) = H.\,F.\{ F^+(z),\ F^-(z) \}$ не зависит от вспомогательных областей D^+, D^- (см. [1, с. 38]). Действительно, пусть D_1 – область, содержащая интервал $Y = (a, b)$ оси x. D_1^+ – часть области D_1, примыкающая к Y из верхней полуплоскости; D_1^- – часть области D_1, примыкающая к Y из нижней полуплоскости, причем $D_1^+ \supset D^+$, $D_1^- \supset D^-$. Всякая гиперфункция $f_1(x) = H.\,F.\{ F_1^+(z),\ F_1^-(z) \}$, где функции $F_1^+(z)$, $F_1^-(z)$ аналитичны в D_1^+, D_1^- соответственно, являются и гиперфункцией, порождённой функциями $F_1^+(z)$, $F_1^-(z)$ на D^+, D^- соответственно. Обратно, если $f(x) = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$ – гиперфункция, порождённая парой $\{F^+(z),\ F^-(z)\}$, где $F^+(z)$, $F^-(z)$ аналитичны в D^+, D^- соответственно, то по теореме Миттаг – Леффлера существует функция $F_0(z)$, аналитическая в области $D = D^+ \cup D^- \cup Y$, и такая, что функции $F_1^+(z) = F^+(z) + F_0(z)$, $F_1^-(z) = F_1^-(z) + F_0(z)$ допускают аналитическое продолжение в D_1^+, D_1^- соответственно.

Множество всех гиперфункций в интервале Y обозначим через $\beta(Y)$; $\beta = \beta(R)$. Если $f \in \beta(Y)$, то из определения гиперфункции следует, что для любого интервала $Y' \subset Y$ существует однозначное сужение f на Y': $f_{Y'} \in \beta(Y')$. Справедливо и обратное утверждение: всякая гиперфункция $f \in \beta(Y)$ может быть продолжена как элемент $\tilde{f} \in \beta(\tilde{Y})$ для любого интервала $Y' \supset Y$. В частности, при $\tilde{Y} = R$, $Y \subset \tilde{Y}$, $f \in \beta(Y)$ может быть продолжена как элемент $\tilde{f} \in \beta$. Действительно, пусть $f = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$. По теореме о монодромии [16, с. 218] в качестве производящей пары можно выбрать пару $\{F^+(z),\ F^-(z)\}$, такую, что $F^+(z)$ аналитична во всей верхней полуплоскости ($Imz > 0$), а $F^-(z)$ аналитична во всей нижней полуплоскости ($Imz < 0$). Поскольку $Y \subset R$, осталось положить $\tilde{f} = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$.

Гиперфункция $f \in \beta(Y)$ равна 0, если $f = H.\ F.\{F_0(z),\ F_0(z)\}$, где функция $F_0(z)$ аналитична в области $D = D^+ \cup D^- \cup Y$.

Гиперфункция $f \in \beta(Y)$ равна 0 в $Y' \subset Y$, если $f_{Y'} = 0$ как элемент $\beta(Y')$.

Существует (наибольшее) открытое множество $Y_f \subset Y$, в котором заданная гиперфункция $f \in \beta(Y)$ обращается в нуль.

Определение 6. ([1, с. 38]) Множество $Y \setminus Y_f$ называется носителем f и обозначается *suppf*.

Обозначим через $\beta_K(Y)$ совокупность гиперфункций в интервале $Y = (a,\ b)$ с носителем в $K = suppf$.

Определение 7. ([1, с. 39]) Функция $\varphi(x)$ называется вещественно-аналитической на множестве $M \subset R$, если она допускает аналитическое продолжение в комплексную окрестность U множества M.

Совокупность всех вещественно-аналитических функций на некотором компакте $\tilde{K} \subset R$ обозначим через $A_{\tilde{K}}$. Сходимость $\varphi_n \to 0,\ n \to \infty$ в $A_{\tilde{K}}$ означает следующее: существует комплексная окрестность D компакта $\tilde{K}$, такая, что все функции $\varphi_n(z)$ аналитичны в D и φ_n при $n \to \infty$ равномерно сходится к нулю для любого компакта $K' \subset D$.

Всякая гиперфункция $f(x) = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$ из $\beta_K(Y)$ определяет линейный непрерывный функционал на A_K при $K = suppf$ по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{\Gamma_K} F(z)\varphi(z)dz, \tag{2}$$

где Γ_K – любой замкнутый контур в D, охватывающий K один раз, $\varphi(z)$ – комплексно-аналитическая функция, полученная с помощью аналитического продолжения вещественно-аналитической функции $\varphi(x)$ в комплексную окрестность D компакта K.

Формула (2) описывает все линейные непрерывные функционалы на A_K. Это соответствие линейно и взаимно однозначно. Таким образом, множество гиперфункций в интервале $Y = (a,\ b)$ с носителем в $K = suppf$ изоморфно множеству $A'(K)$ линейных непрерывных функционалов на основном пространстве A_K (см. [1, с. 39]).

Более подробные сведения о гиперфункциях Сато можно найти в [9 –15].

3. Проблема умножения обобщённых функций

Проблема определения произведения обобщённых функций возникает в ряде прикладных и теоретических исследований, в том числе и при построении теории краевой задачи Римана с обобщённым коэффициентом (см., например, [17]).

В 1954 году Л. Шварц [18] показал, что в пространстве распределений невозможно задать всюду ассоциативное определение произведения. Задача определения такого произведения и сегодня остаётся актуальной.

Несмотря на отдельные успехи, связанные с определением произведения распределений из специальных классов, в общем случае эта задача не решена. Однако удалось выделить пары распределений, для которых достаточно хорошо определено произведение (см., например, работы Я. Микусинского [19], П. Антосика, Я. Микусинского, Р. Сикорского [20], а также работы Б. Фишера [21–25]).

В 1970–1980-е годы интенсивное развитие получил другой подход. Он основан на введении вместо распределений новых объектов, которые, обладая основными свойствами распределений, допускают корректную операцию умножения, при этом пространство распределений или его часть естественно вкладываются в пространства новых объектов (новых обобщённых функций) (см., например, работы Б. Дамьянова и Х. Христова [28], В.К. Иванова [26–29]).

Большой вклад в развитие данного подхода внесли работы Ж.-Ф. Коломбо [30; 31]. Он построил алгебру новых обобщённых функций и вложение в неё классического пространства распределений Л. Шварца.

Общий метод построения алгебр новых обобщённых функций (мнемофункций) предложили А.Б. Антоневич и Я.В. Радыно (см., например, [32]).

Следует отметить, что проблема определения произведения существует и в пространствах гиперфункций.

4. Проблема умножения гиперфункций

Приведём некоторые определения, следуя [13].

Определение 8. Пусть $f(x) = H.\ F.\{F^{+}(z),\ F^{-}(z)\}$ – гиперфункция, заданная на интервале $Y = (a, b)$, $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в $D = D^{+} \cup D^{-} \cup Y$. Тогда произведение гиперфункции $f(x)$ и функции $\varphi(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = H.\ F.\{\varphi(z)\ F^{+}(z),\ \varphi(z)\ F^{-}(z)\}.$$

Определение 9. Пусть $f(x) = H.\ F.\{F^{+}(z),\ F^{-}(z)\}$ – гиперфункция, заданная на интервале $Y = (a, b)$, $\psi(z)$ – функция аналитическая в $D = D^{+} \cup D^{-} \cup Y \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, где $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$. Тогда произведение гиперфункции $f(x)$ и функции $\psi(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) \cdot \psi(x) = \sum_{p=0}^{n} (f(x) \cdot \psi(x)) H(x;\ c_p;\ c_{p+1}).$$

Здесь $c_0 = a$, $c_{n+1} = b$, $H(x; c_p; c_{p+1}) = \begin{cases} 0, x > c_p, \\ 1, c_p < x < c_{p+1}, \\ 0, x > c_{p+1}. \end{cases}$

Определение 10. Пусть $f_1(x) = H.F.\{F_1^{+}(z),\ F_1^{-}(z)\}$, $f_2(x) = H.\ F.\{F_2^{+}(z),\ F_2^{-}(z)\}$ – гиперфункции, заданные на интервале $Y = (a, b)$, причём $F_1^{+}(z)$ регулярная аналитическая в $D^{+} \cup Y$, $F_1^{-}(z)$ регулярная аналитическая в $D^{-} \cup Y$. Тогда произведение гиперфункций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется следующим образом:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = H.\ F.\{(F_1^{+}(z) - F_1^{-}(z))\, F_2^{+}(z),\ (F_1^{+}(z) - F_1^{-}(z))\ F_2^{-}(z)\}.$$

Напомним, что функция $F_1^{+}(z)$ регулярная аналитическая в области $D^{+} \cup Y$, если существует функция $\tilde{F}_1^{+}(z)$, аналитическая в области G, $G \supset D^{+} \cup Y$, такая, что сужение функции $\tilde{F}_1^{+}(z)$ на область $D^{+} \cup Y$ совпадает с функцией $F_1^{+}(z)$; аналогично функция $F_1^{-}(z)$ регулярная аналитическая в области $D^{-} \cup Y$, если существует функция $\tilde{F}_1^{-}(z)$, аналитическая в области G, $G \supset D^{-} \cup Y$, такая, что сужение функции $\tilde{F}_1^{-}(z)$ на область $D^{-} \cup Y$ совпадает с функцией $F_1^{-}(z)$. Поэтому $(F_1^{+}(z) - F_1^{-}(z))$ есть функция, аналитическая в некоторой области, содержащей Y, и определение 10 сводится к определению 8.

Определение 11. Пусть $f_1(x) = H.F.\{F_1^{+}(z),\ F_1^{-}(z)\}$, $f_2(x) = H.\ F.\{F_2^{+}(z),\ F_2^{-}(z)\}$ – гиперфункции, заданные на интервале $Y = (a, b)$, и пусть функция $F_1(z)$ регулярна в области $D = D^{+} \cup D^{-} \cup (Y \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m1}\})$, где $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{m1} < b$, функция $F_2(z)$ регулярна в области $D = D^+ \cup D^- \cup (Y \setminus \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m2}\})$, где $a < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{m2} < b$, причём $\alpha_j \neq \beta_k$, $j = 1, 2, \ldots, m1$, $k = 1, 2, \ldots, m2$. Тогда произведение гиперфункций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется следующим образом:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \sum_{p=0}^{n} (f_1(x) \cdot f_2(x)) H(x;\ c_p;\ c_{p+1}).$$

Здесь $c_0 = a$, $c_{n+1} = b$, точки $c_p \in (a,b)$ выбраны так, что на каждом интервале (c_p, c_{p+1}) содержатся либо только точки α_j, либо только точки β_k.

***Определение* 12.** Пусть $f(x) = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$ – гиперфункция, заданная на интервале $Y = (a, b)$, $\psi(z)$ – функция аналитическая в $D = D^+ \cup D^- \cup Y \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, где $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$. Тогда формальное произведение гиперфункции $f(x)$ и функции $\psi(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) \circ \psi(x) = H.\ F.\{\psi(z)\ F^+(z),\ \psi(z)\ F^-(z)\}. \tag{3}$$

Действительно, гиперфункцию $f(x) = H.\ F.\{F^+(z),\ F^-(z)\}$ – гиперфункция, заданная на интервале $Y = (a, b)$, можно записать в эквивалентном виде

$$f(x) = H.\ F.\{F^+(z) + \phi(z),\ F^-(z) + \phi(z)\},$$

где $\phi(z)$ – функция, аналитическая во всей области D.

Тогда произведение гиперфункции $f(x)$ и функции $\psi(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) \cdot \psi(x) = H.\ F.\{\psi(z)\ F^+(z),\ \psi(z)\ F^-(z)\} + H.\ F.\{\psi(z)\phi(z), \psi(z)\phi(z)\},$$

т.е. получается неоднозначность в определении произведения. Чтобы обойти эту сложность, пользуются формальным произведением (3), выбирая для гиперфункции в качестве производящей пары наиболее подходящую (удобную) в каждой конкретной задаче (см., например, [13]).

5. Применение метода формального умножения гиперфункций

Рассмотрим в классе гиперфункций Сато $H.\ F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ (см., например, определение 1) решение краевой задачи Римана о скачке [33, с. 106]:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{\alpha_j},\ -\infty < x < +\infty, \tag{4}$$

где a_j – точки, принадлежащие действительной прямой, $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $a_j \in R$, $j = \overline{1,m}$.

Под решением задачи (4) в классе гиперфункций Сато будем понимать гиперфункцию $H.\ F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, для которой равенство (4) выполняется во всех тех точках $x \in R$, в которых её значение существуют (см. определение 2).

Начнём рассматривать в классе гиперфункций простейшую неоднородную краевую задачу Римана (4) с частного случая $m = 1$, т. е. решим в классе гиперфункций задачу

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = (x - a)^{\alpha},\ -\infty < x < +\infty. \tag{5}$$

Для того чтобы решить задачу (5), надо реинтерпретировать (представить) обыкновенную функцию $f_{a,\alpha}(x) = (x - a)^{\alpha}$ в виде гиперфункции.

Лемма 1. Гиперфункция $H.F.\{F^+_{1,a,\alpha}(z), F^-_{1,a,\alpha}(z)\}$, соответствующая обыкновенной функции $f_{a,\alpha}(x) = (x - a)^{\alpha}$, $-\infty < x < a$, $\alpha \in R$, имеет вид

$$H.\ F.\{F^+_{1,a,\alpha}(z), F^-_{1,a,\alpha}(z)\} = H.\ F.\left\{\left[-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_+, \left[-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_-\right\}, \tag{6}$$

где $(z - a)^{\alpha}$ – фиксированная однозначная ветвь многозначной функции в плоскости с разрезом по лучу $-\infty < x < a$, положительная на верхнем берегу этого разреза; $[\ldots]_+$, $[\ldots]_-$ означают в (6) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции $f_{a,\alpha}(x) = (x - a)^{\alpha}$, $-\infty < x < a$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что разность предельных значений функции $F_{1,a,\alpha}(z)=-\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}$ при $x<a$ равна $(x-a)^{\alpha}$.

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x<a}} F^{+}_{1,a,\alpha}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x<a}} F^{-}_{1,a,\alpha}(z)=\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x<a}}\left[-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{+}-$$

$$-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x<a}}\left[-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{-}=-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}|x-a|^{\alpha}e^{i\pi\alpha}--\left(-\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}|x-a|^{\alpha}e^{-i\pi\alpha}\right)=$$

$$=\left(\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\right)(-1)^{\alpha}|x-a|^{\alpha}=(x-a)^{\alpha}\ \text{при}\ -\infty<x<a\,.$$

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x>a}} F^{+}_{1,a,\alpha}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x>a}} F^{-}_{1,a,\alpha}(z)=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Гиперфункция $H.F.\{\,F^{+}_{2,a,\alpha}(z),F^{-}_{2,a,\alpha}(z)\,\}$, соответствующая обыкновенной функции $f_{a,\alpha}(x)=(x-a)^{\alpha}$, $a<x<+\infty$, $\alpha\in R$, имеет вид

$$H.F.\{\,F^{+}_{2,a,\alpha}(z),F^{-}_{2,a,\alpha}(z)\,\}=H.F.\left\{\left[\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(a-z)^{\alpha}\right]_{+},\left[\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(a-z)^{\alpha}\right]_{-}\right\},\tag{7}$$

где $(a-z)^{\alpha}$ – фиксированная однозначная ветвь многозначной функции в плоскости с разрезом по лучу $a<x<+\infty$, положительная на верхнем берегу этого разреза; $[...]_{+}$, $[...]_{-}$ означают в (7) соответственно верхнюю и нижнюю компоненту гиперфункции, соответствующей обыкновенной функции $f_{a,\alpha}(x)=(x-a)^{\alpha}$, $a<x<+\infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что разность предельных значений функции $F_{2,a,\alpha}(z)=-\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(-1)^{\alpha}(a-z)^{\alpha}$ при $x>a$ равна $(x-a)^{\alpha}$.

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x>a}} F^{+}_{2,a,\alpha}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x>a}} F^{-}_{2,a,\alpha}(z)=\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x>a}}\left[\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-z)^{\alpha}\right]_{+}-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x>a}}\left[\frac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-z)^{\alpha}\right]_{-}=$$

$$=\frac{i}{2\sin\pi\alpha}|x-a|^{\alpha}e^{-i\pi\alpha}-\left(\frac{i}{2\sin\pi\alpha}|x-a|^{\alpha}e^{i\pi\alpha}\right)=\left(\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\right)|x-a|^{\alpha}=(x-a)^{\alpha}$$

при $a<x<+\infty$.

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z>0,\\ x<a}} F^{+}_{2,a,\alpha}(z)-\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im}z<0,\\ x<a}} F^{-}_{2,a,\alpha}(z)=0.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи (5) в классе гиперфункций Сато имеет вид

$$H.F.\left\{\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z)\right\}=H.F.\left\{F^{+}_{1,a,\alpha}(z)+F^{+}_{2,a,\alpha}(z),F^{-}_{1,a,\alpha}(z)+F^{-}_{2,a,\alpha}(z)\right\}=$$

$$=\frac{i}{2\sin\pi\alpha}H.F.\left\{\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{+},\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{-}\right\}.$$

Доказательство теоремы 1 базируется на утверждении лемм 1 и 2.

Перейдём непосредственно к решению задачи (4). Для этого применим метод формального произведения гиперфункций

$$f_{a_j\alpha_j}(x)=H.F.\left\{F^{+}_{1,a,\alpha}(z)+F^{+}_{2,a,\alpha}(z),F^{-}_{1,a,\alpha}(z)+F^{-}_{2,a,\alpha}(z)\right\},\ j=\overline{1,m}\,.$$

Формальное произведение построим следующим образом:

$$\prod_{j=1}^{m} f_{a_j\alpha_j}(x) = \text{H.F.}\left\{U^{+}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z), U^{-}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z)\right\},$$

где

$$U^{+}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z) = \prod_{j=1}^{m} F^{+}_{1,a_j,\alpha_j}(z) + F^{+}_{2,a_m,\alpha_m}(z)\prod_{j=1}^{m-1} F^{+}_{1,a_j,\alpha_j}(z) +$$

$$+F^{+}_{2,a_{m-1},\alpha_{m-1}}(z)F^{+}_{2,a_m,\alpha_m}(z)\prod_{j=1}^{m-2} F^{+}_{1,a_j,\alpha_j}(z) + \ldots + F^{+}_{1,a_1,\alpha_1}(z)\prod_{j=2}^{m} F^{+}_{2,a_j,\alpha_j}(z) + \prod_{j=1}^{m} F^{+}_{2,a_j,\alpha_j}(z),$$

$$U^{-}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z) = \prod_{j=1}^{m} F^{-}_{1,a_j,\alpha_j}(z) + F^{-}_{2,a_m,\alpha_m}(z)\prod_{j=1}^{m-1} F^{-}_{1,a_j,\alpha_j}(z) +$$

$$+F^{-}_{2,a_{m-1},\alpha_{m-1}}(z)F^{-}_{2,a_m,\alpha_m}(z)\prod_{j=1}^{m-2} F^{-}_{1,a_j,\alpha_j}(z) + \ldots + F^{-}_{1,a_1,\alpha_1}(z)\prod_{j=2}^{m} F^{-}_{2,a_j,\alpha_j}(z) + \prod_{j=1}^{m} F^{-}_{2,a_j,\alpha_j}(z).$$

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (4) в классе гиперфункций Сато имеет вид

$$\text{H.F.}\left\{\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)\right\} = \text{H.F.}\left\{U^{+}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z), U^{-}_{a_1,a_2,\ldots,a_m;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(z)\right\}$$

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственно.

При $m = 1$ теорема совпадает с теоремой 1.

При $m = 2$ равенство (4) проверяется непосредственно, для чего находится разность предельных значений

$$\lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im} z>0\\ x\in R\setminus\{a_1,a_2\}}} U^{+}_{a_1,a_2;\alpha_1,\alpha_2}(z) - \lim_{\substack{z\to x,\\ \operatorname{Im} z<0\\ x\in R\setminus\{a_1,a_2\}}} U^{-}_{a_1,a_2;\alpha_1,\alpha_2}(z) =$$

$$\left(F^{+}_{1,a_1,\alpha_1}(x)F^{+}_{1,a_2,\alpha_2}(x) + F^{+}_{1,a_1,\alpha_1}(x)F^{+}_{2,a_2,\alpha_2}(x) + F^{+}_{2,a_1,\alpha_1}(x)F^{+}_{1,a_2,\alpha_2}(x) + F^{+}_{2,a_1,\alpha_1}(x)F^{+}_{2,a_2,\alpha_2}(x)\right) -$$

$$-\left(F^{-}_{1,a_1,\alpha_1}(x)F^{-}_{1,a_2,\alpha_2}(x) + F^{-}_{1,a_1,\alpha_1}(x)F^{-}_{2,a_2,\alpha_2}(x) + F^{-}_{2,a_1,\alpha_1}(x)F^{-}_{1,a_2,\alpha_2}(x) + F^{-}_{2,a_1,\alpha_2}(x)F^{-}_{2,a_2,\alpha_2}(x)\right)$$

в тех точках, в которых таковая существует (см. определение 2).

Таким образом, по известным решениям задач

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = (x-a_1)^{\alpha_1},\ -\infty < x < +\infty,$$

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = (x-a_2)^{\alpha_2},\ -\infty < x < +\infty$$

можно построить решение задачи (4) при $m = 2$. Этим же способом доказывается справедливость утверждения теоремы для $m \geq 3$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров, В.С. Обобщенные функции и их применение / В.С. Владимиров. – М.: Знание, 1990. – 48 с.
2. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 440 с.
3. Soboleff, S. M´ethode nouvelle `a r´esoudre le probl`eme de Cauchy pour les´equations lin´eaires hyperboliques normales / S. Soboleff // Матем. сб. – 1936. – V. 1(43), № 1. – С. 39–72.
4. Schwartz, L. Theorie des distributions / L. Schwartz. – Paris: Hermann, 1950. – V. 1; 1951. – V. 2.
5. Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 312 с.
6. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 2-е изд. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.
7. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз., 1959. – 470 с.
8. Komatsu, H. Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization / H. Komatsu // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. IA, Math. – 1973. – V. 20. – P. 25–105.

9. Sato, M. On a Generalization of the Concept of Functions / M. Sato // Proceedings of the Japan Academy. – 1958. – V. 34, № 3. – P. 126–130.
10. Sato, M. Theory of hyperfunctions / M. Sato // Sˆugaki 10. – 1958. – P. 1–27. (Japenese)
11. Sato, M. Theory of hyperfunctions, I / M. Sato // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1. Mathematics. Astronomy. Physics. Chemistry. – 1959. – V. 8, № 1. – P. 139–193.
12. Sato, M. Theory of hyperfunctions, II / M. Sato // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1. Mathematics. Astronomy. Physics. Chemistry. – 1960. – V. 8, № 2. – P. 387–437.
13. Imai, I. Applied Hyperfunction Theory / I. Imai. – Dordrecht: Kluwer AP, 1992. – 438 p
14. Kaneko, A. Introduction to hyperfunctions / A. Kaneko. – Dordrecht: Kluwer AP, 1988. – 458 p.
15. Morimoto, M. An Introduction to Sato’s Hyperfunctions / M. Morimoto // Translations of Mathematical monographs. V. 129. – American Mathematical Society. – Providens, Rhode Island. – 1991. – 276 p.
16. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ: учеб. пособие: в 6-ти ч. Кн. 4. Ч. 6: Теория аналитических функций комплексного переменного / Э.И. Зверович. – Минск: Выш. шк., 2008. – 319 с.
17. Кочура, А.И. Умножение обобщённых функций и краевая задача Римана / А.И. Кочура, А.В. Диденко, Р.А. Яхин // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11(294). – С. 74–77.
18. Schwartz, L. Sur l’impossibilit´e de la multiplication des distributions / L. Schwartz // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1954. – V. 239. – P. 847–848.
19. Mikusinski, J. On the square of the Dirac δ -distribution / J. Mikusinski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Mathematics. Astronomy. Physics. – 1966. – V. 14, № 9. – P. 511–513.
20. Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 312 с.
21. Fisher, B. A note on the product of distributions / B. Fisher // Stud. Sci. Math. Hung. – 1977. – V. 12. – P. 295–300.
22. Fisher, B. A theorem on the product of distributions / B. Fisher // Publ. Math. – 1980. – V. 27. – P. 243–249.
23. Fisher, B. Neutrices and the product of distributions / B. Fisher // Stud. Math. – 1976. – V. 57. – P. 263–274.
24. Fisher, B. Some results on the product of distributions / B. Fisher // Proc. Camb. Philos. Soc. – 1973. – V. 73. – P. 317–325.
25. Fisher, B. The product of distributions / B. Fisher // Quart. J. Math., Oxford Ser. – 1971. – V. 22, № 2. – P. 291–298.
26. Иванов, В.К. Алгебра одного класса обобщённых функций / В.К. Иванов // ДАН СССР. – 1977. – Т. 237, № 4. – С. 779–781.
27. Иванов, В.К. Асимптотическое приближение к произведению обобщённых функций / В.К. Иванов // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 1. – С. 19–26.
28. Иванов, В.К. Гиперраспределения и умножение распределений Шварца / В.К. Иванов // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1045–1049.
29. Иванов, В.К. Об алгебре элементарных обобщённых функций / В.К. Иванов // ДАН СССР. – 1979. – Т. 246, № 4. – С. 805–806.
30. Colombeau, J.-F. Elementary introduction to new generalized functions / J.-F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland. Math. Stadies 113, 1985.
31. Colombeau, J.-F. New generalized functions and multiplication of distributions / J.-F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland. Math. Stadies 84, 1984.
32. Антоневич, А.Б. Об общем методе построения алгебр обобщённых функций / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, № 2. – С. 267–270.
33. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Поступила 02.09.2014

THE FORMAL MULTIPLICATION OF HYPERFUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

T. URBANOVICH, S. BELYAI

The article contains a historical survey of the development of the generalized functions theory and the comparative analysis of different approaches to the generalization of the concept of function. Sato’s hyperfunctions are viewed as generalization of the concept of function. The problem of generalized functions multiplication is considered. The problem of hyperfunctions multiplication is considered. The jump boundary value problem with the power right-hand side is solved by the method of the formal multiplication of hyperfunctions.