

УДК 621:677.024.5

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОЩНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИВОДА С УЧЕТОМ ДИАПАЗОНА РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ВЕДОМОГО ЗВЕНА

канд. техн. наук, доц. **О.Я. СЕДЕЛЬ**  
(Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина)

Рассматривается вопрос оптимизации параметров мощности дифференциального привода с учетом диапазона регулирования скорости ведомого звена. В работе представлен анализ дифференциальных приводов для регулирования технологического процесса с учетом диапазона регулируемых скоростей и оптимальных параметров электродвигателя, используемого в дифференциальном механизме. В качестве примера использования данного привода может быть рассмотрено регулирование технологического процесса на ткацких автоматических станках.

**Введение.** Основной задачей синтеза дифференциальных приводов является выбор рационального передаточного отношения, которое определяет габариты передачи, обеспечивает диапазон регулируемых скоростей между ведущими звеньями дифференциала.

При выборе рабочей зоны работы электродвигателя с нереверсивным движением необходимо иметь в виду, что широкий диапазон изменения частоты вращения электродвигателя приводит к значительному снижению мощности двигателя при его работе на низких частотах вращения. Поэтому, с одной стороны, диапазон регулируемых электродвигателем скоростей целесообразно иметь значительный, что позволит повысить чувствительность и точность регулирования технологического процесса, а с другой стороны, обеспечить его силовые характеристики. Окончательный выбор структуры дифференциала производится с учетом распределения моментов между основными звеньями дифференциала.

**Основная часть.** Рассмотрим зависимость между мощностями ведущих звеньев дифференциального привода и диапазоном регулирования частоты вращения ведомого звена дифференциала.

На рисунке 1 представлена схема относительного движения звеньев и направление действия моментов в дифференциальном механизме с управляемым водилом дифференциала.

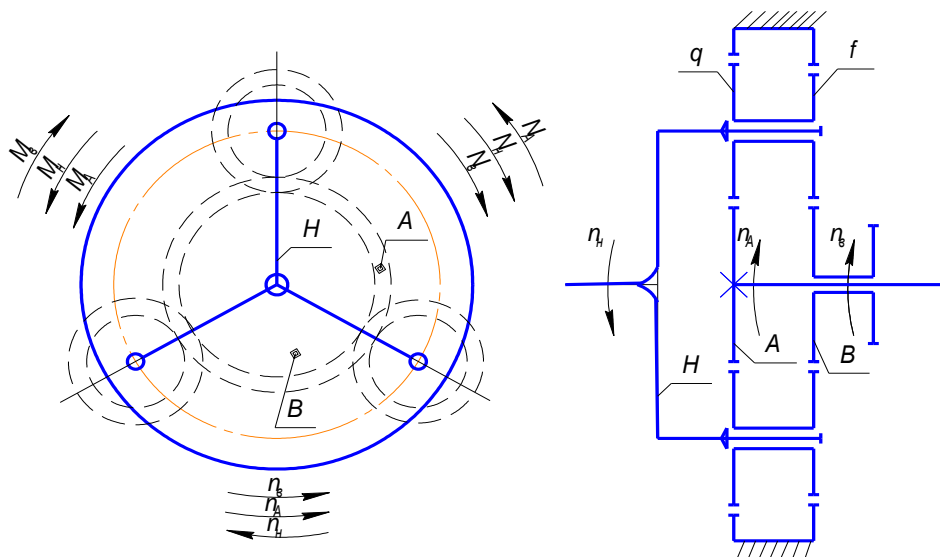


Рис. 1. Схема движения звеньев дифференциального механизма

Распределение моментов и мощностей в дифференциальном приводе при установившемся движении определяется по следующему уравнению [1]:

$$M_A + M_H + M_B = 0, \quad (1)$$

где  $M_A$ ,  $M_H$ ,  $M_B$  – моменты на центральных колесах  $A$ ,  $B$  и водиле  $H$ .

Если известны величина и направление момента, действующего на одно из центральных колес, то без учета потерь на трение моменты, действующие на другие звенья механизма, определяются следующим образом [1]:

$$-M_H / M_B = 1 / i_{HB}^A; \quad -M_A / M_B = 1 / i_{AB}^H, \quad (2)$$

или так как  $1/i_{HB}^A = (1 - i_{BA}^H)$  и  $1/i_{AB}^H = i_{BA}^H$ ,  
то

$$M_H = -M_B(1 - i_{BA}^H); M_A = -M_B i_{BA}^H. \quad (3)$$

Для решения вопроса о распределении мощности в дифференциальном приводе необходимо определить направление действующих в передаче моментов. Схема движения звеньев дифференциального привода с управляемой скоростью водила представлена на рисунке 1.

Для того чтобы узнать, какое из звеньев  $H$  или  $B$  является ведущим в движении относительно центрального колеса  $A$ , надо определить знак  $\varphi_H$  и  $\varphi_B$  по уравнениям [2]:

$$\varphi_H = N_H^A / N_H = M_H(n_H - n_A) / M_H n_H = 1 - i_{AH}^B = 1 - (1 - i_{AB}^H) = i_{AB}^H; \quad (4)$$

$$\varphi_B = N_B^A / N_B = M_B(n_B - n_A) / M_B n_B = 1 - i_{AB}^H; \quad (5)$$

где  $\varphi_H, \varphi_B$  – отношение мощности водила и колеса в относительном и абсолютном движении;  $N_H^A$  и  $N_B^A$  – мощности в зацеплении;  $i_{AB}^H$  – передаточное отношение в дифференциале.

При  $i_{AB}^H = Z_B / Z_f \cdot Z_q / Z_A = 30/21 \cdot 24/27 = 1,269$ ;  $\varphi_H = 1,269$ ;  $\varphi_B = 1 - 1,269 = -0,269$ .

Таким образом,  $\varphi_H > 0$ , а  $\varphi_B < 0$ .

Так как в дифференциальном приводе принимается ведущим звено  $A$ , то  $M_A > 0$ , а величину и направление моментов в этом случае определим следующим образом:

$$-M_H / M_B = 1/i_{HB}^A; -M_A / M_B = 1/i_{AB}^H, \text{ или}$$

$$M_H = -M_B(1/i_{HB}^A) = -M_B(1 - 0,787) = -0,212M_B; \quad (6)$$

$$M_A = -M_B(1/i_{AB}^H) = -M_B(1/1,269) = -0,788M_B. \quad (7)$$

Направление момента  $M_A$  и  $M_H$  не совпадает с направлением момента  $M_B$ , т.е. момент  $M_A$  и  $M_H$  является ведущим, а момент  $M_B$  ведомым.

Потребная мощность в дифференциальном приводе определяется уравнениями:

$$N_A = M_A \omega_A; N_H = M_H \omega_H; N_B = M_B \omega_B. \quad (8)$$

Направление вращения звеньев и моментов в дифференциальном приводе представлено на рисунке 1. Закон сохранения энергии для дифференциального привода можно записать:

$$M_A \omega_A + (-M_B) \omega_B + M_H(-\omega_H) = N_A - N_B - N_H = 0. \quad (9)$$

Угловая частота вращения звеньев дифференциала по аналогии с уравнением скоростей и с учетом направления вращения ведущих звеньев  $A$  и  $H$  выразится:

$$\begin{aligned} \omega_B &= -(1 - i_0) \cdot \omega_H + i_0 \omega_A; \\ \omega_H &= (i_0 \omega_A - \omega_B) / (1 - i_0); \\ \omega_A &= [\omega_B + (1 - i_0) \cdot \omega_H] / i_0. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом уравнений (2), (8), (10) мощности ведомых и ведущих звеньев дифференциального привода, выраженные через  $M_B$ , будут равны:

$$\begin{aligned} N_A^{\max} &= M_B^{\max} i_0 \left\{ \left[ \omega_B^{\text{pac. min}} + (1 - i_0) \omega_H' \right] / i_0 \right\}; \\ N_B^{\max} &= -M_B^{\max} i_0 \left[ i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H' \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$N_H^{\max} = -M_B^{\max} (1 - i_0) \left[ -(i_0 \omega_A - \omega_B^{\text{pac. min}}) / (1 - i_0) \right].$$

Соответственно для минимальной мощности на ведомых и ведущих звеньях

$$\begin{aligned} N_A^{\min} &= -M_B^{\min} i_0 \left\{ \left[ \omega_B^{\text{pac. max}} + (1 - i_0) \omega_H'' \right] / i_0 \right\}; \\ N_B^{\min} &= -M_B^{\min} i_0 \left[ i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H'' \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$N_H^{\min} = -M_B^{\min} (1 - i_0) \left[ -(i_0 \omega_A - \omega_B^{\text{pac. max}}) / (1 - i_0) \right]. \quad (13)$$

Определим зависимость распределения мощности в приводе с учетом передаточного отношения для данной структуры дифференциала.

Регулируемая частота вращения водила  $\omega_H$  с учетом  $\omega_B^{\min}$  и  $\omega_B^{\max}$  и направление вращения ведущих звеньев определим из уравнения (10).

Для начальных параметров  $\omega_B^{\max} = 143 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $\omega_B^{\min} = 52,4 \text{ с}^{-1}$ ;  $M_B^{\min} = 64 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $\omega_B^{\max} = 104,7 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_A = 151,84 \text{ с}^{-1}$  выполнен расчет потребной мощности привода при различных значениях передаточного отношения дифференциала по уравнениям (11), (12), которые представлены на рисунке 2.

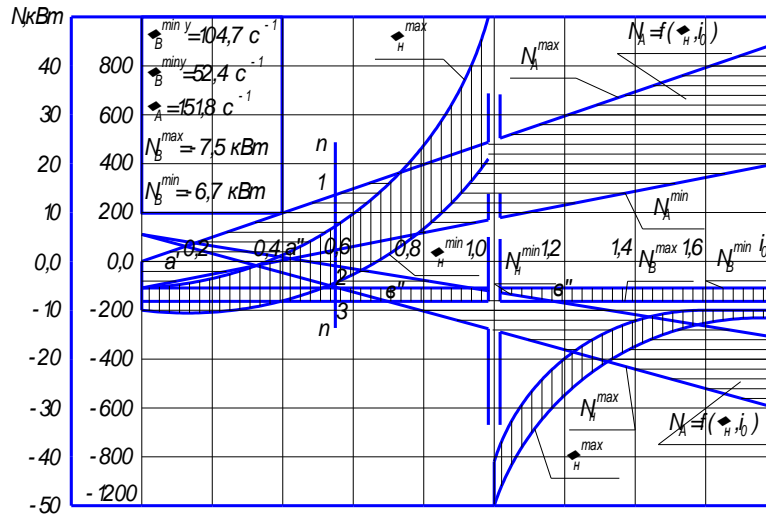


Рис. 2. Мощность дифференциального привода с ведущим водилом  $H$  при различных передаточных отношениях дифференциала

В заданном интервале передаточных отношений дифференциала  $i_0$  диапазон угловых скоростей водила  $H$  ограничивается кривыми  $\omega_H^{\max}$ ,  $\omega_H^{\min}$  во встречном и попутном вращении по отношению центрального колеса  $A$ . При этом на преодолении полезной работы на ведомом колесе  $B$  расход мощности ведущих звеньев  $H$  и  $A$ , связанных соответственно с управляемым электродвигателем постоянного тока, неоднозначный.

Пределы потребляемой мощности на ведущих звеньях  $N_A$  и  $N_H$  представлены диапазонами, для которых характерно то, что в любом сечении  $n - n$  выполняется баланс мощности, как это показано на рисунке 2.

Такое же равенство баланса мощностей получается в любом рассматриваемом сечении. Разница лишь в том, что при передаточных отношениях  $i_0 \ll 1$  для преодоления полезной работы потребная мощность ведущих звеньев меньше, чем при отношениях дифференциала  $i_0 > 1$ .

Так, в сечении « $n - n$ » справедливо равенство, получаемое проектированием точек пересечений линий « $n - n$ » с прямыми  $N_A^{\max}$ ,  $N_H^{\max}$  и  $N_B^{\max}$  или  $N_A^{\min}$ ,  $N_H^{\min}$  и  $N_B^{\min}$  на ось  $N$ :

$$N_B^{\max} = N_A^{\max} + N_H^{\max}; -7,5 = 13,03 - 5,53.$$

Кроме того, при  $i_0 \leq 0,2$  основная мощность отбирается от двигателя постоянного тока, а при  $i_0 > 0,2$  от двигателя переменного тока.

С увеличением передаточного отношения  $i_0$  мощность электродвигателя постоянного тока (водило  $H$ ) переходит из ведущей  $+N_H$  в ведомую мощность.

Аналогичная картина наблюдается и для минимальной мощности звеньев, но лишь при других передаточных отношениях.

На графиках имеются особые точки  $a$  и  $a'$ , в которых пересекаются прямые  $N_H$  и  $N_A$ ,  $N_B$ .

Точка  $a'$  – точка пересечения прямой  $N_H$  и  $N_A$ , точка  $a$  – точка пересечения прямой  $N_H$  и  $N_B$ .

Соответственно, для точки  $a'$  можно установить, что полезная мощность  $N_B$ , преодолеваемая равными долями от ведущих звеньев  $A$  и  $H$ , будет следующей:

$$-N_B = 0,5N_H + 0,5N_A; -7,5 \text{ кВт} = 3,75 \text{ кВт} + 3,75 \text{ кВт}.$$

Для точки  $a$  характерно равенство  $-N_B = -N_H$ , и баланс мощностей в этом случае запишется так:

$$-7,5 \text{ кВт} = -7,5 \text{ кВт} + 15 \text{ кВт}, \text{ где } N_A = 15 \text{ кВт}.$$

Исследуем случай, когда электродвигатель постоянного тока, связанный с водилом  $H$ , может быть взят минимальной мощности, т.е.  $N_H \Rightarrow 0$ .

Для этого установим связь между мощностью водила и передаточным отношением дифференциала  $i_0$  привода:  $N_H = M_H \omega_H$ .

Подставив вместо  $M_H$  и  $\omega_H$  значения из уравнения (3), (10) и произведя преобразования, получим:

$$N_H = M_B [(1 - i_0) \cdot (-\omega_H - i_0 \omega_A) / (1 - i_0)] = -N_B + N_B \omega_A i_0; \tag{14}$$

$$N_H = -N_B + N_B (\omega_A / \omega_B) i_0.$$

В уравнении (14), выраженном через мощность ведомого звена  $N_B$ , передаточное отношение и угловую скорость ведомого  $B$  и ведущего звена  $A$ , мощность  $N_H$  будет стремиться к минимуму, если множитель при  $N_B$  будет равен 1, т.е.

$$(\omega_A / \omega_B) i_0 = 1. \tag{15}$$

Откуда найдем передаточное отношение  $i_0$ , при котором

$$N_H \Rightarrow 0, \text{ т.е. } i_0 = \omega_B / \omega_A.$$

Из уравнения (14) можно также установить зависимость передаточного отношения дифференциала  $i_0$  от мощности и частоты вращения основных звеньев привода:

$$i_0 = \omega_B / \omega_A (1 - N_H / N_B). \tag{16}$$

Аналогично находим условия оптимизации  $N_H$  от  $i_0$  и  $N_A$ :

$$N_H = M_H \omega_H = M_A [(1 - i_0) / i_0] - [(\omega_H + i_0 \omega_A) / (1 - i_0)],$$

откуда

$$N_H = N_A - N_A (\omega_B / \omega_A) (1 / i_0); \tag{17}$$

$$i_0 = (\omega_B / \omega_A) [1 / (1 - N_H / N_A)].$$

Минимум  $N_H$  будет в случае, если в уравнении (17) множитель при  $N_A$  будет равен единице, т.е.

$$(\omega_B / \omega_A) (1 / i_0) = 1, \text{ откуда } i_0 = \omega_B / \omega_A. \tag{18}$$

Исходя из того, что угловая скорость ведомого звена изменяется в пределах от  $\omega_B^{\min}$  до  $\omega_B^{\max}$  при  $\omega_A = \text{const}$ ,  $N_A$  и  $N_B = \text{max}$ , рассмотрим, как влияет на  $N_H$  в балансе мощностей привода передаточное отношение дифференциала  $i_0$ .

Выберем начальные условия:  $\omega_B^{\min} = 16,75 \text{ c}^{-1}$ ;  $\omega_B^{\max} = 104,7 \text{ c}^{-1}$ ;  $\omega_A = 151,84 \text{ c}^{-1}$ ;  $N_A^{\max} = 7,5 \text{ кВт}$ ;  $N_B^{\max} = 7,5 \text{ кВт}$ ;  $i_0 = 0 \dots 2$ .

Графические зависимости  $N_H = f(i, \omega, N)$  представлены на рисунке 3.

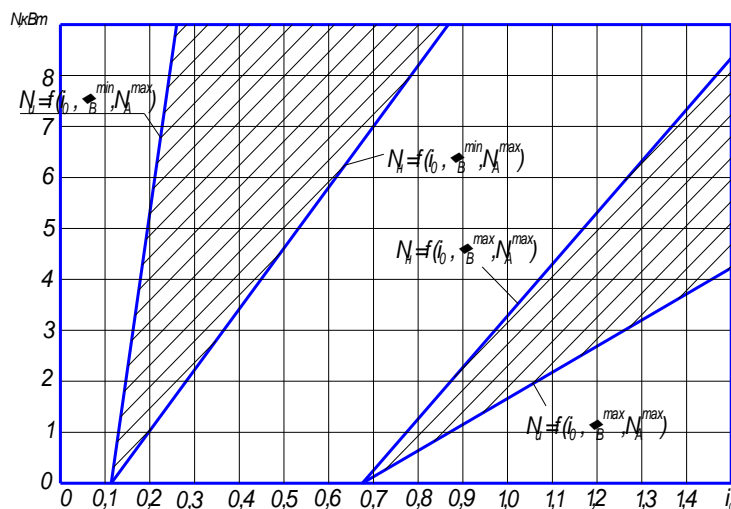


Рис. 3. Графические зависимости мощности на водиле  $H$  в функции переменных  $i_0, \omega_B, N_A, N_B$

Анализ графиков показывает, что минимальное значение мощности регулируемого электродвигателя постоянного тока будет для минимальной угловой скорости  $\omega_B^{\min}$  при  $i_0 = 0,11$ , а для максимальной  $\omega_B^{\max}$  при  $i_0 = 0,689$ . Таким образом, в диапазоне регулирования угловых скоростей ведомого звена  $B$  от  $\omega_B^{\min}$  до  $\omega_B^{\max}$  мощность  $N_H \Rightarrow 0$ , если выполняется условие по уравнению (18), когда передаточное отношение  $i_0 = \omega_B / \omega_A$  в диапазоне рассматриваемых угловых скоростей равно 0,11 и 0,689.

Рассмотрим зависимость между мощностями ( $R$ ) ведущих звеньев дифференциального привода и диапазоном регулирования частоты вращения ведомого звена дифференциала:

$$R_{\omega_B} = \omega_B^{\max} / \omega_B^{\min} = 6,25. \quad (19)$$

Из уравнения (5) можно записать:

$$\omega_B^{\max} = (\omega_A i_0) / (1 - N_H^{\min} / N_B) \quad \text{при } N_H < N_B; \quad (20)$$

$$\omega_B^{\min} = (\omega_A i_0) / (1 - N_H^{\max} / N_B) \quad \text{при } N_H < N_B. \quad (21)$$

Из уравнения (19), (20) и (21) получим:

$$R_{\omega_B} = (N_B - N_H^{\min}) / (N_B - N_H^{\max}),$$

или

$$R_B = N_A^{\max} / N_A^{\min}. \quad (22)$$

С другой стороны, диапазон регулирования скоростей ведомого звена дифференциального привода можно выразить следующим образом:

$$R_B = \omega_B^{\max} / \omega_B^{\min} = \{ [i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H^{\min}] / [i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H^{\max}] \}. \quad (23)$$

Преобразовав уравнение (23), получим:

$$R_B i_0 (\omega_A + \omega_H^{\max}) - i_0 (\omega_A + \omega_H^{\min}) = R_B \omega_H^{\max} - \omega_H^{\min}. \quad (24)$$

Обозначим:  $D_H = \omega_H^{\max} - \omega_H^{\min}$ ;  $\omega_H^{\max} = D_H + \omega_H^{\min}$ .

Преобразуя уравнение (24), найдем зависимость для вычисления диапазона частот регулируемого звена (водила), связанного с электродвигателем:

$$D_H = \{ (R_B - 1) [(\omega_A + \omega_H^{\min}) i_0 - \omega_H^{\min}] / [R_B (1 - i_0)] \}, \quad (25)$$

где  $D_H$  – ширина интервала регулируемых частот ведущего звена, связанного с управляемым электродвигателем;  $\omega_A$ ,  $\omega_H^{\min}$  – угловые скорости вращения ведущих звеньев;  $R_B$  – диапазон регулирования угловых скоростей ведомого звена дифференциала.

Минимальная угловая скорость водила  $\omega_H^{\min}$  выбирается с учетом минимально допустимого крутящего момента электродвигателя. Этот параметр устанавливается по паспорту электродвигателя.

С увеличением  $D_H$  увеличивается точность регулирования частот ведомого звена.

$$D_H = f(\omega_H^{\min}); \quad D_H = f(i_0); \quad D_H = f(\omega_A); \quad D_H = f(R_B) \quad (26)$$

при постоянных значениях других составляющих величин, входящих в уравнение (25).

Подставляя в уравнение (25) значение  $R_B$  из уравнения (23), получим зависимость для  $D_H$  в виде кинематических и силовых параметров:

$$D_H = \{ [i_0 (\omega_A + \omega_H^{\min}) - \omega_H^{\min}] \cdot [\omega_B^{\max} / \omega_B^{\min}] - 1 \} / (\omega_B^{\max} / \omega_B^{\min}) (1 - i_0); \quad (27)$$

$$D_H = \{ [i_0 (\omega_A + \omega_H^{\min}) - \omega_H^{\min}] \cdot [N_A^{\max} / N_A^{\min}] - 1 \} / (N_A^{\max} / N_A^{\min}) (1 - i_0), \quad (28)$$

где  $N_A = N_B - N_H^{\min}$ ;  $N_A^{\min} = N_B - N_H^{\max}$ .

При выборе параметров дифференциального механизма привода необходимо добиться максимальной величины интервала регулируемых частот электродвигателя при минимальной его мощности.

Так как  $D_H$  зависит от передаточного отношения дифференциала  $i_0$  и от диапазона регулирования частот выходного звена  $D_B$ , то можно записать следующее выражение:

$$D_B = \omega_B^{\max} - \omega_B^{\min} = [i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H]^{\max} - [i_0 \omega_A - (1 - i_0) \omega_H]^{\min} = \\ = (1 - i_0) (\omega_H^{\max} - \omega_H^{\min}), \text{ или } D_B = (1 - i_0) (\omega_H^{\max} - \omega_H^{\min}). \quad (29)$$

Выразим из уравнения (29) угловую скорость  $\omega_H^{\min}$ :

$$\omega_H^{\min} = \omega_H^{\max} - [D_B / (1 - i_0)]. \quad (30)$$

Начальные параметры системы  $D_B = \omega_B^{\max} - \omega_B^{\min} = 52,3 \text{ с}^{-1}$ .

Электродвигатель постоянного тока с тиристорным приводом имеет максимальную частоту вращения  $n^{\max} = 1500 \text{ об/мин}$ .

$$\omega_H^{\max} = \pi n / 30 = (3,14 \cdot 1500) / 30 = 157,08 \text{ с}^{-1}.$$

Так как  $D_H \Rightarrow \max$ ,  $\omega_H^{\max} = \text{const}$ , а  $\omega_H^{\min} \Rightarrow \min$ , то чтобы добиться максимальной ширины диапазона  $D_H$ , необходимо минимизировать  $\omega_H^{\min}$  в уравнении (28).

Распишем формулу (11) для верхнего предела мощности электродвигателя:

$$\begin{aligned} N_H^{\max} &= -M_B^{\max} (1 - i_0) [- (i_0 \omega_A - \omega_B^{\min}) / (1 - i_0)] = M_B^{\max} (i_0 \omega_A - \omega_B^{\min}) = \\ &= M_B^{\max} \{ i_0 \omega_A - [(1 - i_0) \omega_H^{\min} - i_0 \omega_A] \} = M_B^{\max} [i_0 \omega_A + (1 - i_0) \omega_H^{\min} - i_0 \omega_A] = M_B^{\max} (1 - i_0) \omega_H^{\min}. \end{aligned} \quad (31)$$

При заданном  $M_B^{\max} = 134 \text{ Н}\cdot\text{м}$  в формуле (31)  $N_H^{\min}$  будет зависеть только от передаточного отношения  $i_0$ :

$$N_H^{\max} = M_B^{\max} (1 - i_0) \omega_H^{\min} \Rightarrow \min;$$

$$N_H^{\min} = M_B^{\min} (1 - i_0) \omega_H^{\max} \Rightarrow \min. \quad (32)$$

Следовательно, наша задача сводится к минимизации двух функций (31) и (32) и определению такого передаточного отношения  $i_0$ , чтобы  $N_H^{\min}$  и  $\omega_H^{\min}$  были оптимальными. Для нахождения значений функций (31) и (32) протабулируем по  $i_0 = 1 \dots 2$  с шагом  $\Delta i_{01} = 0,1$  и  $\Delta i_{02} = 0,01$ .

В результате вычислений определены  $\omega_A^{\min}$ ,  $N_H^{\max}$ ,  $N_H^{\min}$  для каждого передаточного отношения  $i_0$  для данной структуры дифференциала. Оптимальные значения, удовлетворяющие условиям задачи, будут такими:  $i_0 = 0,66$ ;  $\omega_H^{\min} = 3,25 \text{ с}^{-1}$ ;  $N_H^{\max} = 7,08 \text{ кВт}$ .

Для использования номинальной скорости двигателя необходимо между электродвигателем и водилом  $H$  установить дополнительный редуктор.

**Заключение.** Регулирование технологического процесса на станках – актуальная проблема для выпуска качественной и конкурентоспособной продукции. Особенностью систем регулирования технологических процессов с помощью дифференциальных механизмов является использование простых механических передач с управляемыми электродвигателями малой мощности. Данные механизмы можно использовать в различных механических системах для регулирования скорости производственного процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Планетарные передачи: справ. / под ред. В.К. Кудрявцева, Ю.Н. Кирдяшева. – Л.: Машиностроение, 1977.
2. Кирдяшев, Ю.Н. Многопоточные передачи дифференциального типа / Ю.Н. Кирдяшев. – Л.: Машиностроение, 1977.
3. Седел, О.Я. Синтез дифференциальных механизмов регулирования технологического процесса на станках / О.Я. Седел // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2012. – № 11. – С. 24 – 30.

Поступила 29.01.2013

#### PARAMETER OPTIMIZATION OF DIFFERENTIAL DRIVE BASED SPEED RANGE OF THE DRIVEN MEMBER

*O. SEDEL*

*The issue of optimization of the parameters of capacities of differential drive is considered taking into account the range of regulation of the speed of the driven link. The paper presents the analysis of differential drives for process control given the range of variable speed and optimal parameters of the motor used in the differential gear. As an example of usage of this drive the process of control on weaving automatic machines can be represented.*