УДК 528.063

О НОВОМ МЕТОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ И О ПЕРСПЕКТИВАХ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ,
канд. техн. наук, доц. В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет);
П.В. СУББОТЕНКО
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

Рассматриваются вопросы теории уравнивания методами многостепенной и многокритериальной оптимизации. Приводятся формулы для реализации этих методов на ЭВМ. Отмечаются пути дальнейшего совершенствования многокритериальной оптимизации.

Как известно, существуют различные методы уравнивания:
- метод наименьших модулей МНМ (n = 1), предложенный Лапласом;
- метод наименьших квадратов МНК (n = 2), созданный и обоснованный Гауссом;
- метод Lp-оценок [1], объединяющий в себе предыдущие два метода и позволяющий применять другие методы уравнивания в соответствии с выбранной степенью n.

В результате варьирования степенью n можно получить: метод наименьших кубов (n = 3); метод наименьших полтора (n = 1,5) и другие на интервале $0,1 \le n < 7,0$.

О других аналоговых методах уравнивания, не связанных со степенью n, мы упоминать не будем.

Известно, что для уравнительных вычислений линейным параметрическим способом исходными являются три матрицы:

$A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, не связанная со степенью n;

$P_{N\times N}$ – матрица весов некоррелированных измерений, зависящая от n;

$L_{N\times 1}$ – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, не имеющий связи с n,

где N – количество измерений (число уравнений); t – число параметров.

При этом сами алгоритмы уравнивания не должны быть связаны с содержимым матрицы A, т.е. какие бы ни были геодезические сети – плановые, высотные, фотограмметрические, спутниковые, свободные, несвободные, нуль-свободные, алгоритм обработки должен оставаться одним и тем же. Важно, чтобы матрица A была составлена по стандартным, известным правилам.

Отсюда следует очевидное: выбор метода уравнивания зависит от содержимого матрицы P.

При вычислении P до уравнительных вычислений Гаусс предложил применять формулу:

$$P_i = \frac{c}{\sigma_i^2}, \tag{1}$$

где c – произвольная постоянная; σ – стандарт измерений.

Предлагаем эту формулу записать в следующем виде:

$$P_i = \frac{c}{\sigma_i^n}. \tag{2}$$

Учитывая, что обработка будет выполняться на ЭВМ, окончательно запишем

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i^n}. \tag{3}$$

Зная универсальное выражение (3), можно, используя формулы решения систем уравнений, не зависящие от n, реализовать любой метод уравнивания, даже многостепенной, когда каждому измерению соответствует своя степень n_i.

Предлагаем следующие обозначения для матрицы P:

$$P_n = \left(\frac{1}{\sigma_i^n}\right)\cdot E \tag{4}$$

для метода Lp-оценок;

$$P_{n_i} = \left(\frac{1}{\sigma_i^{n_i}}\right) \cdot E \qquad (5)$$

для многостепенного метода, где i – номер измерения.

Матрицы P_n и P_{n_i} будут диагональными для независимых измерений.

Мало предложить новый метод уравнивания, важно его обосновать. Обоснованным является только метод Гаусса, благодаря его известной теореме. Современные ученые по-разному трактуют эту теорему, приписывая мифические свойства МНК, якобы данный способ дает всегда наилучшую оценку точности по результатам уравнивания и др. В наших обозначениях следствием теоремы Гаусса является обязательное выполнение неравенства:

$$V_2^T P_2 V_2 \le V_n^T P_2 V_n, \qquad (6)$$

где $V_2 = V_n$ при $n = 2$ – вектор поправок в измерения из уравнивания размером $N \times 1$ (продукт математической обработки).

Запишем основные формулы нового многостепенного метода уравнивания, для которого в зависимости от выборки измерений возможно выполнение неравенства:

$$V_{n_i}^T P_{n_i} V_{n_i} \le V_2^T P_{n_i} V_2, \qquad (7)$$

где $V_{n_i} = [(\upsilon_1)_{n1}, (\upsilon_2)_{n2}, ..., (\upsilon_N)_{nN}]^T$, а V_2 – вектор поправок, найденный при $n = 2$.

Неравенство (7) не противоречит теореме Гаусса – Маркова, и МНК является частным случаем многостепенного метода.

Формулы, позволяющие реализовать новый метод уравнивания, имеют вид [2, с. 64]:

$$\hat{X} = X_0 + \delta X; \qquad (8)$$

$$\delta X = -F_{diag}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) \cdot L; \qquad (9)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C; \qquad (10)$$

$$C = C_i E;$$

$$C_i = P_{n_i} n_i (n_i - 1) \left|V_{n_i}\right|^{n_i - 2}; \qquad (11)$$

$$V_{n_i} = A\delta x + L. \qquad (12)$$

При использовании (11), когда $n_i < 2{,}0$, следует быть осторожным, так как при $V_{n_i} = 0{,}0$ произойдет деление на ноль. Поэтому к $\left|V_{n_i}\right|$ прибавляют малую величину.

Применение данных формул требует приближений, начиная с V_2. В формуле (8) X_0 – вектор начальных координат пунктов.

Если по $\hat{X}$ уточняются матрицы A и L, то $X_0 = \hat{X}_{j-1}$, где j – номер приближения.

Этот метод не был бы создан, если бы не помощь В.А. Падве, подсказавшего идею численного поиска матрицы F с использованием формулы Ю.П. Андреева [3].

Формула (9) при $n = 2$ уникальна для использования при математической обработке измерений по установке магнитов на ускорителе заряженных частиц:

1) один раз по формуле (10) находим F;
2) по датчикам измерений, расположенных на магнитах, определяем вектор измерений и находим L;
3) не выполняя трудоемкого обращения матрицы $A^T P_2 A$, мгновенно вычисляем вектор δx, соответствующий L, и производим корректировку положения магнитов в автоматическом режиме.

Если обрабатывается геодинамический полигон, а матрица A между эпохами неизменна (остается нетронутой геометрия сети), то формула (9) также полезна.

Выше мы упомянули о пользе формул (8) – (12) при использовании $n = 2$.

Укажем основные преимущества предложенного метода при применении n_i, индивидуального для каждого измерения.

Здесь вступает в силу другой, новый, многокритериальный метод (МК) уравнивания [2], в котором используется не одна целевая функция [1]:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{n_i} \left| L_i(X) \right|^{n_i}, \tag{13}$$

а две [2] или даже три [4] критериальные функции:

$$\Phi_2(n_i, X) = \max(M); \tag{14}$$

$$\Phi_3(n_i, X) = \max(\mu M), \tag{15}$$

где M – ошибка положения пункта, вычисляемая по известной формуле с помощью матрицы обратных весов, найденной из выражения [5]:

$$Q = F P_{n_i}^{-1} F^T; \tag{16}$$

μ определяют из равенства:

$$\mu = \sqrt{\frac{V_{n_i}^T P_{n_i} V_{n_i}}{N - t}}. \tag{17}$$

Следует отметить, что для целевых функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 отыскивается минимум.

Одновременное использование трех целевых функций проблематично. Поэтому нами вместо Φ_2 и Φ_3 предложено использовать следующую объединенную целевую функцию [4]:

$$\Phi_2(n_i, X) = \max[(1+\mu)M]. \tag{18}$$

Как минимизировать две целевые функции сразу, сказано в [2].

Мы научились стыковать две целевые функции с помощью специально разработанной методики посредством поиска индивидуальных степеней для каждого измерения путем приближений, начиная с $n_i = 2{,}0$ для всех i. Эта методика трудна в описании и требует большого объема вычислений. Можно разработать любую другую методику, но она может оказаться неэффективной.

Многокритериальный метод апробирован на тестовых примерах и с 2001 года внедрен в производство для уравнивания полигонометрических сетей по программе С.В. Маковского.

Исследования показали, что МК-метод имеет следующие преимущества:

1) для ошибок положения пунктов M всегда выполняется неравенство

$$\max M_{МК} \le \max M_{МНК},$$

несмотря на то, что наибольшие M соответствуют разным пунктам для одного и того же объекта при обработке по МК и по МНК. В наилучшем случае оказалось, что $\max M_{МК}$ в 1,5 – 2,0 раза меньше, чем $\max M_{МНК}$;

2) метод МК находит $\hat{X}$ ближе к $X^{ист}$, чем МНК. В наилучшем случае оказалось, что $\hat{X}_{МК}$ ближе к $X^{ист}$, чем $\hat{X}_{МНК}$ в 70 % вариантов.

Последнее исследование выполняют на моделях следующим образом:

1) всем пунктам геодезической сети задаются координаты $X^{ист}$;

2) по $X^{ист}$ из решения обратных геодезических задач находят вектор $T^{ист}$ для вектора измерений T;

3) по датчику псевдослучайных чисел генерируют ошибки и, вводя их в $T^{ист}$, находят $T^{изм}$;

4) вычисляют вектор $L = T^{ист} - T^{изм}$;

5) по формуле (8) находят из обработки $\hat{X}_{МК}$ и сравнивают его с $X^{ист}$.

Говоря о перспективах теории уравнивания, отметим основные задачи современного уравнивания:

1) научиться находить $(A^T C A)^+$ для любых геодезических сетей: с исходными или без исходных пунктов, с дефектом или без дефекта данных по единому алгоритму;

2) скорректировать используемую методику стыковки целевых функций с помощью рекуррентного способа вычисления матрицы *Q*, позволяющего изменять эту матрицу, удаляя или добавляя строки в матрице *A* [6];

3) продолжить исследования по поиску грубых ошибок в конкретных измерениях. Выполнять поиск не МК, а другими методами уравнивания.

Первые две задачи нами уже успешно решены, составлены универсальные программы, но алгоритмы пока еще не внедрены в производство.

Для уравнивания по МК-методу геодезической сети, содержащей 100 пунктов, на персональном компьютере по программе С.В. Маковского требуется до 10 минут машинного времени. По нашему мнению, лучше затратить это время, чем мгновенно получить результат уравнивания по МНК, являющийся, как правило, менее эффективным, чем после обработки измерений по МК-методу. Исследования показали, что новая программа дает решение в *N*/2 раза быстрее благодаря новым разработкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ялтыхов, В.В. Применение метода Lp-оценок в уравнительных вычислениях / В.В. Ялтыхов, Н.О. Куприенко, П.М. Левданский. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 100 с.
2. Мицкевич, В.И. Основы многокритериального уравнивания геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов. – Новополоцк: ПГУ, 2008. – 128 с.
3. Андреев, Ю.П. Вычисление оценок точности методом моделирования ошибок / Ю.П. Андреев // Геодезия и картография. – 1971. – № 11. – С. 20 – 24.
4. Левданский, П.М. Многокритериальная оптимизация с применением дополнительной целевой функции, зависящей от поправок в результаты измерений / П.М. Левданский, П.В. Субботенко, В.В. Ялтыхов // Геодезия, картография и геоинформационные системы: тр. междунар. науч.-техн. конф. – Новополоцк: ПГУ, 2009. – С. 122 – 125.
5. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических построений методами нелинейного программирования: автореф. дис. … д-ра техн. наук / В.И. Мицкевич. – СПб., 2004. – 29 с.
6. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.

Поступила 29.03.2012

A NEW METHOD OF MEASURING MATHEMATICAL PROCESSING AND PROSPECTS FOR THE FURTHER DEVELOPMENT OF THE THEORY OF EQUALIZATION CALCULATIONS

V. MICKEVICH, V. YALTYHOV, P. SUBBOTENKO

The problems of the theory of equalization by using the methods of multistage and multi-criteria optimization. The formulas for the implementation of these methods on a computer. Observed on ways to further improve the multi-criteria optimization.