

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам по курсу
«Основы научных исследований и инновационной деятельности»
для студентов специальности Т.19.01
«Промышленное и гражданское строительство»

Новополоцк 2012

УДК 628.1.2

Одобрены и рекомендованы к изданию
методической комиссией инженерно-строительного факультета

Кафедра «Строительное производство»

Составители Шабанов Д.Н., ассистент

Рецензенты: В.В. Бозылев, к.т.н., доцент

Введение

Настоящие методические указания предназначены в помощь студентам, занимающимся научно-исследовательской работой, знакомых с курсом «Теория вероятностей и математическая статистика». В них рассматриваются вопросы определения характеристик одной величины методом многократных измерений (истинная величина единичного объекта или общая характеристика группы однородных объектов исследования), что не следует смешивать с обработкой результатов экспериментов, в которых один или несколько факторов целенаправленно изменяются.

Излагаемый материал дает методические рекомендации по использованию из курса «Теория вероятностей и математическая статистика» формул применительно к условиям исследований и стандартных испытаний строительных материалов, изделий и конструкций.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

Прежде чем перейти к изучению, следует напомнить читателю некоторые важные соотношения между случайными событиями. Для случайных событий справедливы те же соотношения, что и для множеств, так что читатель легко может представить их себе с помощью наглядных схем. Используемая система обозначений принята в теории множеств.

1. Символ $A \subset B$ означает: «А влечет за собой В», т. е. при наступлении события А одновременно появляется и событие В. (В теории множеств этому соответствует утверждение, что А является подмножеством множества В; см. рис.1.)

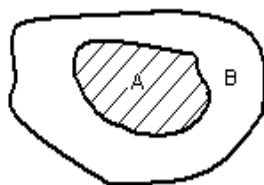


Рис.1

2. Событие $C = A \cup B$ называется (логической) суммой событий А и В и наступает, место хотя бы одно из событий А или В. (В теории множеств $A \cup B$ называется объединением А и В; см. рис.2)

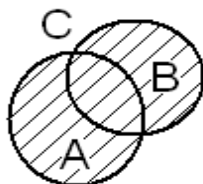


Рис.2

3. Событие $C = A \cap B$ называется (логическим) произведением событий А и В и имеет место, если произошло как событие А, так и событие В. (В теории множеств $A \cap B$ называется пересечением множеств А и В; см. рис.3)

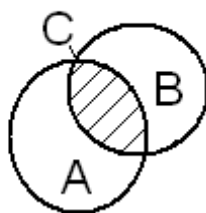


Рис.3

Понятие произведения событий применимо к любому числу случайных событий.

4. Событие E называется достоверным, если оно имеет место при любом испытании. Примером может служить бросание монеты, при каждом бросании монеты выпадает либо орел, либо решка, поэтому $E = \{\text{орел}, \text{решка}\}$;

5. Событие Φ называется невозможным, если оно не имеет места ни в одном испытании. В примере с бросанием монеты не возможно зависание монеты в воздухе.

6. \bar{A} — событие, противоположное событию A , наступающее только при отсутствии события A . (В теории множеств \bar{A} называется дополнением множества A). В примере с бросанием монеты событие $A = \{\text{орел}\}$, противоположным событием событию A , событие $\bar{A} = \{\text{решка}\}$. Всегда справедливы соотношения $A \cup \bar{A} = E$ и $A \cap \bar{A} = \Phi$. События E и Φ противоположны друг другу.

7. События A и B называются несовместными, если невозможно их одновременное наступление, т. е. если $A \cap B = \Phi$. В этом случае говорят также, что события A и B взаимно исключают друг друга. В примере с бросанием монеты $A = \{\text{орел}\}$ и $B = \{\text{решка}\}$, то события A и B будут не совместимы т.е. $A \cap B = \Phi$;

8. Все случайные события, которые могут произойти в определенной ситуации при неизменных условиях, образуют поле событий с математической точки зрения поле событий образует некоторое множество. Возможные события являются тогда подмножествами поля событий. Одноэлементные подмножества называются элементарными событиями.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Рассмотрим теперь закономерности появления случайных событий. Относительно появления случайного события A , принадлежащего полю, в каком-то определенном испытании ничего нельзя сказать заранее. Однако, рассматривая случаи появления или отсутствия события A в большом числе испытаний, проведенных в одних и тех же условиях, можно установить определенные закономерности наступления этого события. Если при проведении

n_1 испытаний событие A имело место m_1 раз, то частное $\frac{m_1}{n_1}$ есть относительная частота события A . В силу того что $0 \leq m_1 \leq n_1$, для этого частного спра-

$$0 \leq \frac{m_1}{n_1} \leq 1.$$

ведливо соотношение:

Условие $\frac{m_1}{n_1} = 1$ выполняется при $m_1 = n_1$ т. е. если событие A имело место в каждом из n_1 испытаний, а условие $\frac{m_1}{n_1} = 0$ возможно лишь при $m_1 = 0$,

т. е. если событие А не наступило ни в одном из n_1 испытаний. Говоря предметнее если n_1 раз бросить монету – это количество испытаний, и если при этих n_1 бросках m_1 раз выпала решка – это появление события А, то относительная частота появления события А, т.е. выпадение решки, запишется как $\frac{m_1}{n_1}$.

Пусть при проведении дополнительного числа испытаний n_2 событие А наступило m_2 раз; тогда относительная частота этого события составит $\frac{m_2}{n_2}$. Продолжение серии испытаний даст последовательность относительных частот $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_i}{n_i}$, на конкретных примерах можно проследить, что отношения $\frac{m_i}{n_i}$ для больших n_i ($i = 1, 2, \dots$) мало отличаются друг от друга. Относительная частота устойчива при достаточно большом количестве проведенных испытаний или измерений. Эта закономерность случайных событий - устойчивость относительной частоты - замечена уже очень давно и проверена на множестве самых различных примеров.

В общем случае существует постоянная величина, около которой колеблется относительная частот; случайного события и к которой она все более приближается с увеличением числа испытаний.

Эта константа называется вероятностью случайного события А и обозначается символом $P(A)$. На практике при большом числе испытаний за численное значение вероятности случайного события приближенно принимается относительная частота этого события.

Математическим основанием этого служит закон больших чисел, сформулированный и доказанный Я.Бернулли. Этот предельный закон гласит:

Вероятность того, что относительная частота некоторого события А отклоняется от вероятности $P(A)$ этого события более чем на произвольную величину $\varepsilon > 0$ становится сколь угодно малой, если число испытаний n бесконечно возрастает.

$P(A)$ представляет собой число, заключенное между 0 и 1, т. е. справедливо неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$.

По своему происхождению такая интерпретация вероятности как предельного значения относительной частоты есть результат некоторого процесса повторения и может быть понята лишь как следствие массовых явлений.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Еще до того, как было выработано понятие вероятности, основанное на относительной частоте появления события, при исследовании азартных игр использовалось иное определение вероятности, называемое теперь «классическим». Оно базируется на равновероятности, или равновозможности, случайных событий. Поскольку с термином «равновероятный» мы столкнулись в примере с бросанием монеты, используем теперь для иллюстрации этого термина тот же пример.

Рассмотрим элементарные события $A_{орел}$, $A_{решка}$, где $A_i = \{i\}$ ($i = \text{орел, решка}$). Они называются равновероятными (или равновозможными), так как

для них действительно $P(A_i) = \frac{1}{2}$ ($i = 1$ -ый исход орел, 2 -ой исход решка). Оба события A_i , имеют равную вероятность. Далее, согласно зависимостям, рассмотренным выше, имеет место соотношение:

$$A_{орел} \cup A_{решка} = E;$$

т. е. сумма двух возможных событий дает достоверное событие, так как при каждом бросании монеты наверняка наступит одно из двух событий (орел либо решка). Кроме того, два эти события взаимно исключают друг друга:

$$A_{орел} \cap A_{решка} = \Phi;$$

Пусть в общем случае поле θ событий содержит всего k элементарных событий A_1, A_2, \dots, A_k со свойствами:

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = E;$$
$$A_i \cap A_j = \Phi, \quad i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, k);$$

Все события являются равновероятными, иными словами, для всех $i = 1, 2, \dots, k$ имеет место $P(A_i) = \frac{1}{k}$. Поэтому если некоторое событие A из поля θ можно представить в виде суммы g элементарных событий, то вероятность события A дается соотношением:

$$P(A) = \frac{g}{k};$$

Или

$$P(A) = \frac{\text{Число элементарных событий, благоприятствующих } A}{\text{Число возможных элементарных событий}}$$

Данное выражение означает следующее: вероятность события A равна частному от деления числа наступлений благоприятствующих событию A элементарных событий (g), т.е. событий входящих в сумму g , на число всех

возможных элементарных событий (k) поля событий θ . Такова формулировка классического понятия вероятности.

По определению классическое понятие вероятности приложимо только к полям событий, которые содержат конечное число элементарных событий. Сложности, возникающие при наличии бесконечного множества возможных результатов, можно отчасти преодолеть путем введения геометрического понятия вероятности, которое мы здесь подробно не рассматриваем. Однако в настоящее время встречается много ситуаций, когда расчет вероятности случайного события по классическому или геометрическому определению не удастся, поскольку не всегда можно выявить все равновозможные элементарные события. Сразу заметим, что в условия эксперимента таких проблем нет. Каждый исход эксперимента является случайным событием, число проведения эксперимента – количество случайных событий. Исходы эксперимента могут быть равновероятностными, а могут и не быть, все зависит от условий эксперимента.

АКСИОМА I

Всякому случайному событию A из поля событий ставится в соответствие вещественное число $P(A)$ — вероятность события A , — заключенное между 0 и 1, т. е.

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

Это коренное свойство установлено нами при рассмотрении как относительной частоты, так и классического определения вероятности.

АКСИОМА II

Вероятность достоверного события E равна 1, т. е.

$$P(E) = 1;$$

АКСИОМА III (аксиома сложения)

Если случайные события A и B несовместны, т. е. если, $A \cap B = \Phi$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

Это означает, что вероятность наступления одного из событий A или B равна сумме вероятностей отдельных событий, если эти события взаимно исключают друг друга.

ТЕОРЕМА 4.1

Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\Phi) = 0;$$

ТЕОРЕМА 4.2

Для всякого случайного события A действительно соотношение

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1;$$

где \bar{A} — событие, противоположное событию A .

ТЕОРЕМА 4.3

Если случайные события A и B связаны соотношением $A \subset B$ (A влечет за собой B), то

$$P(A) \leq P(B);$$

$P(A|B)$ называется условной вероятностью события A при условии B (или при появлении B). Она равна частному от деления вероятности события $A \cap B$ на вероятность события B при условии, что вероятность B положительна, т. е.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{если } P(B) > 0;$$

Аналогично

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{если } P(A) > 0;$$

$P(B|A)$ — условная вероятность события B при условии A . В общем случае справедливы неравенства $P(A|B) \geq P(A)$ и $P(B|A) \geq P(B)$.

Из приведенных выше уравнений следует соотношение:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A);$$

Вероятность события $A \cap B$ равна, таким образом, произведению вероятности события B на условную вероятность события A при условии B или произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии A . Формула представляет собой теорему умножения вероятностей. Она позволяет нам, определить важное свойство случайных событий:

Два события A и B называются (стохастически) независимыми, если их условные вероятности $P(A|B)$ и $P(B|A)$ не зависят от условий B и A соответственно, т. е. если имеют место соотношения

$$P(A|B) = P(A), \quad \text{и} \quad P(B|A) = P(B);$$

Проведя подстановку, мы получаем уравнение, являющееся определением независимых событий:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A);$$

Пусть далее $P(A_i) > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда вероятность произвольного события B рассчитывается из соотношения:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_k) \cdot P(B|A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i) \cdot P(B|A_i);$$

$$P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P(A_i|B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i),$$

Так что

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}; \quad P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j) \cdot P(B|A_j)}.$$

Данное уравнение называется формулой *Байеса* или формулой вероятности гипотез (случайные события A_i , могут именоваться также гипотезами).

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали случайные события и действия над ними. Но в теории вероятностей и математической статистике часто целесообразно связывать различные случайные события с действительными числами и вести расчеты последних. В результате возникает новое понятие: *случайная величина*, которая называется также *случайной переменной*.

Случайная величина X называется *дискретной*, если она может принимать конечное или счетное число различных значений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Примером может служить бросание монеты, каждый исход величина случайная и дискретная, либо орел, либо решка.

Непрерывная случайная величина X обладает следующим свойством: она может принимать любые значения в определенном интервале числовой оси. Примером может служить произвольное перемещение какого-либо тела в одном направлении (движение автомобиля по дороге), автомобиль может проехать весь путь, может сломаться либо остановиться на любом произвольном расстоянии от начальной точки, причем величина пройденного расстояния будет лежать в каком-то интервале, в отличие от случая с монетой.

Функция распределения случайной величины X определяется выражением:

$$F(x) = P(X < x);$$

где x пробегает все без исключения значения на действительной числовой оси.

Выражение имеет следующий смысл: функция распределения случайной величины X равна вероятности того, что X принимает значение ниже предела x . Тем самым случайную величину X можно исчерпывающим образом охарактеризовать следующими словами:

Случайная величина X — это величина, которая при любом испытании случайным образом принимает определенное действительное числовое значение и обладает функцией распределения, определяемой выше приведенной формулой.

Пусть X принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с соответствующими вероятностями $P(X = x_i) = p_i, (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$. Тогда $F(x)$ можно записать в виде:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i;$$

Суммирование распространяется на все точки x_i , которые расположены ниже предела x .

Распределение дискретной случайной величины можно охарактеризовать либо посредством *дискретной (прерывной) функции распределения*, либо — путем указания отдельных вероятностей.

Функцию распределения непрерывной случайной величины, именуемую также *непрерывным распределением*, можно выразить через соотношение:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt;$$

Здесь $f(x)$ —*плотность вероятности* или просто *плотность* X , причем всегда имеет место $f(x) \geq 0$.

Наиболее известной и часто используемой в математической статистике плотностью вероятности непрерывной случайной величины является *нормальное распределение*, которое часто называют также *гауссовой* (или колоколообразной) *кривой*.

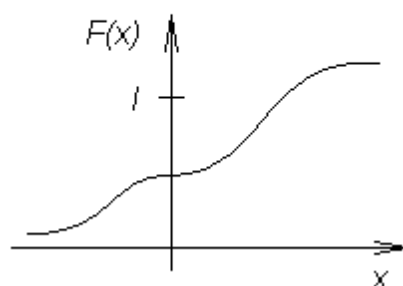


Рис. 3 Функция распределения непрерывной случайной величины

Параметры функций распределения

Важнейшими параметрами являются *математическое ожидание* случайной величины X (сокращенно: EX или μ) и *дисперсия* (сокращенно: $D^2 X$ или σ^2).

Математическое ожидание EX дискретной случайной величины X , принимающей значения x_i с вероятностями p_i , ($i=1,2, \dots$), определяется формулой:

$$\mu = EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i;$$

Если X принимает конечное число значений, скажем n , то суммирование в формуле производится до n . Математическое ожидание существует только при абсолютной сходимости суммы, т. е. если:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty;$$

Математическое ожидание EX непрерывной случайной величины X определяется уравнением:

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx;$$

Значение EX существует при абсолютной сходимости интеграла, т.е. если:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty;$$

Нужно еще указать и на следующее важное соотношение.

Если образовать сумму $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ из случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , то S_n в свою очередь является случайной величиной, математическое ожидание которой равно сумме математических ожиданий X_1, X_2, \dots, X_n т.е.

$$ES_n = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n EX_i;$$

Дисперсия дискретной случайной величины X определяется выражением:

$$\sigma^2 = D^2 X = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i;$$

Квадратный корень (положительный) из дисперсии называется *стандартным* или *средним квадратическим (среднеквадратичным)* отклонением случайной величины X и обозначается через σ .

Посредством простого преобразования приведенного выше уравнения получаем удобную формулу для проведения практических расчетов:

$$\sigma^2 = D^2 X = E[X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2] = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \mu^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2.$$

Полученная формула называется *формулой смещения*.

Дисперсия непрерывной случайной величины X равна

$$\sigma^2 = D^2 X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2;$$

Равномерное дискретное распределение

Если случайная величина X принимает n различных значений x_1, x_2, \dots, x_n соответствующими вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n и если $p_i = \frac{1}{n}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то X считается распределенной *равномерно*.

Биномиальное распределение

Отправной точкой для вывода *биномиального закона распределения* является модель, лежащая в основе многих практических исследований, особенно в области контроля качества, когда из партии выбирают n деталей и надо найти вероятность того, что среди этих n деталей k будут бракованные.

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

где q - вероятность того, что из партии вытащат годную деталь;

p - вероятность того, что из партии вытащат бракованную деталь;

$\binom{n}{k}$ - *биномиальные коэффициенты* определяемые уравнением:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k};$$

Дискретная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \sum_{k < x} p_k = \begin{cases} 0, \text{ при } x \leq 0, \\ \sum_{k < x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ при } 0 < x \leq n, \\ 1, \text{ при } x > n. \end{cases}$$

Суммирование в формуле распространяется на все целочисленные значения $k = 0, 1, 2, \dots, n$, которые меньше x , причем:

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n p_k = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} q p^{n-1} + p^n = (p + q)^n = 1.$$

Уравнения или для распределения случайной величины X , принимающей значения $k = 0, 1, \dots, n$ с вероятностями P_k , называются *биномиальными*.

Гипергеометрическое распределение

Моделью для построения биномиального распределения в разделе приведенном выше служит партия изделий, из которой последовательно выбирается n изделий. Существует возможность выбора бракованного изделия (событие A) или годного изделия (событие \bar{A}). Важнейшей предпосылкой, приводящей к биномиальному распределению, является независимость испытаний, так что вследствие выбора одной детали вероятности не изменяют-

ся, т. е. вероятность p остается постоянной от опыта к опыту. На практике это обеспечивается либо большим объемом партии, либо возвратом отобранных изделий обратно в партию. Практически удобнее привлечь к расчетам объем партии и не возвращать изделия. Обозначим объем партии символом N и пусть символ n , показывает число отобранных изделий. Предположим далее, что партия содержит M бракованных изделий, так что доля брака составляет $p = \frac{M}{N}$. Требуется найти вероятность обнаружения точно k дефектных изделий в выборке объема n . Пусть эта вероятность составляет $P(X = k)$, где дискретная случайная величина X указывает число бракованных деталей из n .

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

где k принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \dots$ с ограничениями $k \leq M$ и $k \leq n$. Тогда дискретная функция распределения X :

$$F(x) = \sum_{k \leq x} P(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0, \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{для } 0 < x \leq \min(M, n), \\ 1 & \text{для } x > \min(M, n) \end{cases}$$

при

$$\sum_{k=0}^{\min(M, n)} P(X = k) = 1.$$

Дискретное распределение, соответствующее приведенным выше уравнениям, называется *гипергеометрическим*. *Биномиальные коэффициенты* $\binom{M}{k}$, $\binom{N-M}{n-k}$ и $\binom{N}{n}$. Гипергеометрическое распределение играет важную роль в области статистического контроля качества при составлении выборочных планов.

Распределение Пуассона

Пусть случайная величина X дискретна и принимает значения $k=0, 1, 2, \dots$
Дискретное распределение с плотностью вероятности

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) или функцией распределения

$$F(x) = \sum_{k \leq x} P(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

называется *распределением Пуассона*. Константа $\lambda (> 0)$ есть его параметр; имеет место условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

Чтобы получить представление о распределении Пуассона, нужно рассчитать вероятности для различных λ . Для этой цели

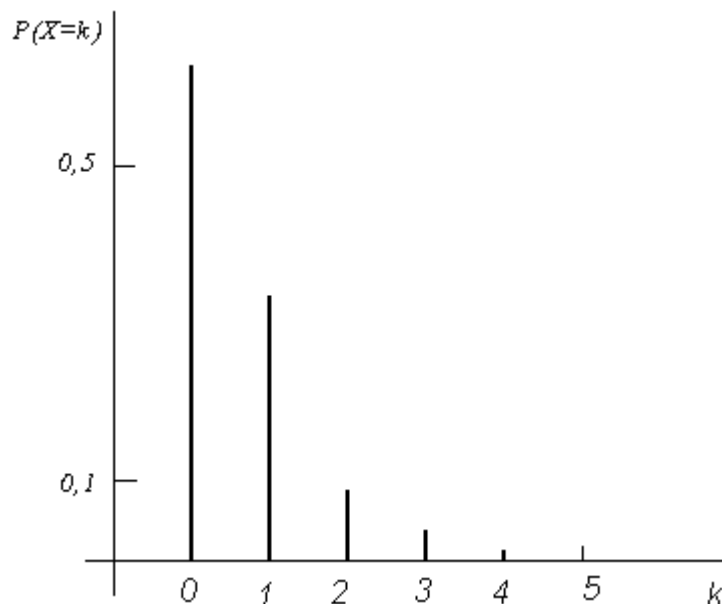


Рис. 4 Вероятность $P(X = k)$ распределения Пуассона для случая $\lambda = 0,5$

можно воспользоваться табл.1 приложения. Вероятности для значений $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 5$, представленные графически на рис.4 и 5, взяты из этой таблицы. Чем меньше выбранное значение λ , тем асимметричнее распределение.

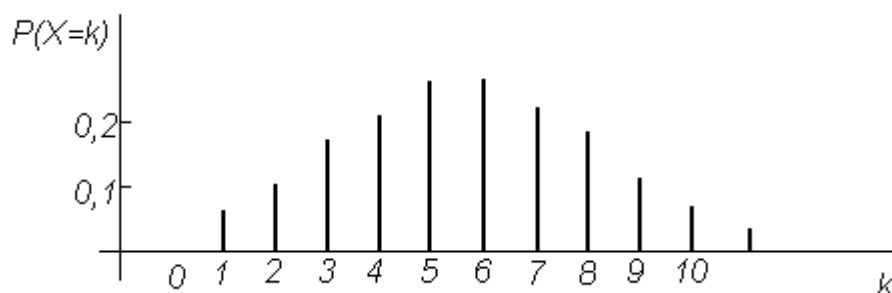


Рис. 5 Вероятность $P(X = k)$ распределения Пуассона для случая $\lambda = 5$

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона вычисляются методом, описанным для биномиального распределения:

$$\begin{aligned}\mu &= EX = \lambda; \\ \sigma^2 &= D^2 X = \lambda;\end{aligned}$$

иными словами, в распределении Пуассона математическое ожидание и дисперсия равны параметру λ .

На практике можно найти множество примеров случайных величин, распределенных по закону Пуассона. Например, число разговоров, регистрируемое на АТС в течение определенного интервала времени (скажем, 1 мин), в определенных условиях, в частности при независимости вызовов и их равномерном распределении, можно считать распределенным по закону Пуассона. Формула дискретного распределения вероятности Пуассона показывает вероятность того, что в 1 мин осуществляется точно k разговоров, если среднее число поступающих в минуту вызовов равно λ . Примерами случайных величин, подчиняющихся закону распределения Пуассона, могут далее служить: количество распадающихся за короткий промежуток времени атомов радиоактивного вещества; в прядильном цехе - число обрывов нити определенного сорта пряжи в течение заданного периода; число дефектов в куске ткани определенной длины; число зафиксированных за определенный период метеороидов.

Связь биномиального распределения с распределением Пуассона

Распределение Пуассона вытекает из биномиального распределения если n стремится к бесконечности, а $np = \lambda$ остается постоянным. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Это формулировка *предельной теоремы Пуассона*.

Так как в силу того, что $n \rightarrow \infty$ и $np = \lambda = \text{const}$ вероятность p исследуемого события становится очень мала, то распределение Пуассона называют также *распределением редких событий*. Ввиду указанных свойств распределение Пуассона часто находит применение и в статистическом контроле качества. Если, в частности, доля брака p в контролируемой партии очень мала, то вероятность обнаружения k дефектных изделий среди n взятых из партии можно приближенно рассчитать по формуле распределения Пуассона или найти по таблице приложения λ . Тогда следует подставить $np = \lambda$;

Нормальное распределение

Наиболее известным и часто применяемым при решении задач математической статистики и статистического контроля качества распределением непрерывной случайной величины является *нормальное распределение*.

Непрерывная случайная величина X , принимающая значения на вещественной осп от $-\infty$ до $+\infty$, имеет нормальное распределение, если ее плотность описывается уравнением

$$\varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

при $-\infty < x < +\infty$

($e = 2,71828\dots$, $\pi = 3,14159\dots$). μ и σ^2 называются параметрами нормального распределения (6.25). Обычно в этом случае говорят:

случайная величина X нормально распределена с параметрами μ и σ^2 , что символически записывается так: $X \in N(\mu; \sigma^2)$.

Если известны значения μ и σ^2 , то плотность вероятности (6.25) полностью определена. Согласно (5.4), плотности вероятности (6.25) соответствует следующая функция распределения:

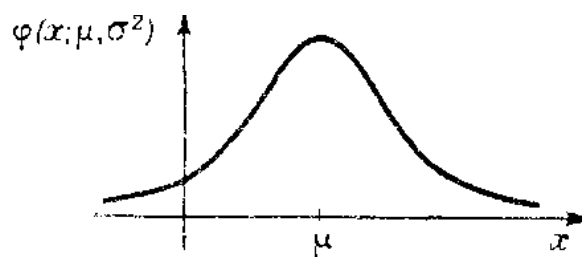
$$\Phi(x; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (6.26)$$

Нетрудно видеть, что условие нормировки в этом случае выполняется, так как

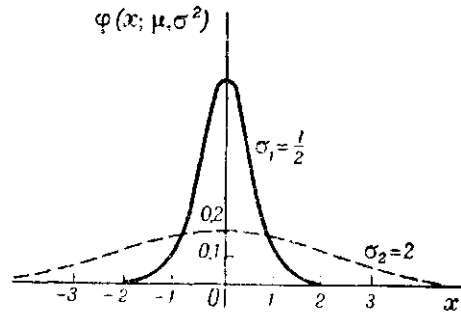
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t; \mu; \sigma^2) dt = 1.$$

Функции (6.25) и (6.26) математически довольно сложны. Но ввиду того, что на практике для обработки данных обычно используются таблицы, нахождение этих функций не вызывает трудностей. Если в прямоугольной системе координат по оси абсцисс нанести

Фиг.18. Плотность $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ нормального распределения.



значения x , а по оси ординат — соответствующие им значения плотности $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ по уравнению (6.25), то получится известная колоколообразная кривая Гаусса. Максимальное значение $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ соответствует значению $x = \mu$ и составляет $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$. Функция $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ симметрична относительно $x = \mu$ и при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$ асимптотически приближается к оси абсцисс (фиг. 18).



Фиг.19.

Плотность $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ нормального распределения при $\mu=0$ и стандартных отклонениях $\sigma_1 = \frac{1}{2}, \sigma_2 = 2$.

Дальнейшее изучение формулы (6.25) показывает, что точки перегиба, определяемые из уравнения $\varphi''(x; \mu; \sigma^2) = 0$, соответствуют абсциссам $x_2 = \mu + \sigma$ и $x_1 = \mu - \sigma$. Таким образом, кривая тем выше и круче, чем меньше σ . На фиг. 19 $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ представлено графически для значений параметра $\mu=0$ и $\sigma_1 = \frac{1}{2}$, а также для $\mu=0$ и $\sigma_2 = 2$.

Математическое ожидание и дисперсии для нормального распределения согласно формулам (5.9) и (5.13) равны:

$$EX = \mu \quad (6.27)$$

$$D^2 X = \sigma^2 \quad (6.28)$$

Таким образом, параметры в формуле (6.25) имеют следующий смысл: μ есть математическое ожидание случайной величины X , а σ^2 — дисперсия X . Указанные в формулах (5.8) — (5.13) сокращенные формы записи μ и σ^2 для EX и $D^2 X$ связаны с символами, принятыми для нормального распределения.

Значение нормального распределения в статистике

Закон нормального распределения был вслед за Муавром (1733) и Лапласом (1780) получен Гауссом (1809) в связи с разработкой теории ошибок наблюдения и назван им кривой ошибок. Такое название объясняется практикой его применения. Если многократно измерять один и тот же объект, скажем длину бруска или диаметр вала, то, как известно, не все измерения дадут один и тот же результат. Если, например, наружный диаметр колеса измеряется с точностью до 0,01 мм, то оказывается, что при частом повторении измерения одного и того же колеса полученные значения обнаруживают большие или меньшие отклонения друг от друга и от некоторого «истинного» значения — среднего значения или номинала. Эти отклонения, или ошибки наблюдения, обусловлены разными причинами: температурными колебаниями в помещении, воздействием окружающей среды на измерительный прибор, неточностью измерительной шкалы, сменой контрольного персонала и т. д. В зависимости от источников появления ошибок различают систематические и случайные ошибки.

К систематическим ошибкам относятся, например, односторонние отклонения, вызванные, скажем, изменением настройки измерительного прибора или сменой контрольного персонала. Эти ошибки можно устранить, установив путем систематического изучения причины их возникновения.

Случайные ошибки складываются из множества различных неконтролируемых причин: температурных колебаний в помещении, вибраций в окружающей среде, осадения пыли на измерительный прибор и т. д. Каждая из случайных причин оказывает на результаты измерения очень небольшое влияние по сравнению с общим эффектом. Полностью исключить их воздействие невозможно, так как нельзя заранее предусмотреть степень их влияния на конкретное измерение в силу их случайного характера. Подобные случайные ошибки (согласно разд. 5 они являются случайными величинами) вызывают при измерениях отклонения в обе стороны от истинного значения. Обычно говорят: «Результаты измерений рассеиваются». Посредством предельных теорем теории вероятностей¹ можно найти распределение случайных ошибок, складывающееся из суммы случайных взаимно независимых воздействий. Многие из этих теорем в качестве предельного указывают нормальное распределение. Так, центральная предельная теорема утверждает, что при выполнении определенных условий сумма независимых случайных величин асимптотически стремится к нормальному распределению. Это служит основой того, что в большинстве ситуаций случайные ошибки хотя бы приближенно можно считать нормально распределенным и.

С другой стороны, как методы проверки гипотез, так и методы оценок в математической статистике базируются на случайных величинах, полученных по выборкам, — на так называемых выборочных функциях, которые при достаточно большом объеме выборки распределяются приблизительно нормально, даже если сам признак не подчиняется нормальному распределению. Примером этому является предельная теорема Муавра—Лапласа, гласящая,

что распределенная по биномиальному закону случайная величина (определенная в разд. 6.1.2) $Y = X/n$ с математическим ожиданием p и дисперсией $p(1-p)/n$ при больших n распределена приближенно нормально, что обозначается так: $N(p;p(1-p)/n)$.

Этот факт объясняет, почему нормальное распределение нашло столь широкое распространение для решения задач математической статистики и контроля качества.

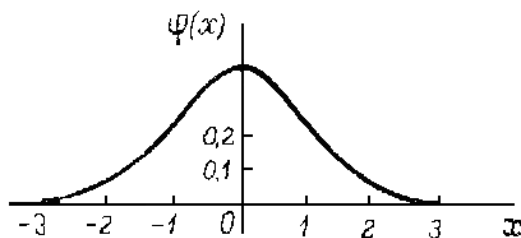
Следует, однако, подчеркнуть, что на практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, распределенными не по нормальному закону. Например, в задачах по статике строительных сооружений часто встречаются так называемые «усеченные» нормальные распределения. При иной постановке практических задач мы приходим к другим функциям распределения: например, к равномерному, треугольному или экспоненциальному распределению.

Вернемся к формулам нормального распределения (6.25) и (6.26). Если подставить в них параметры $\mu=0$ и $\sigma^2=1$, получается нормированное нормальное распределение $N(0;1)$. Плотность вероятности и функция распределения в этом случае выражаются формулами

$$\varphi(x;0,1) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (6.29)$$

$$\Phi(x;0,1) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. \quad (6.30)$$

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы. По таблицам можно найти для данных значений



Фиг.20. Плотность $\varphi(x)$ нормированного нормального распределения ($\mu=0, \sigma=1$).

$x(x \geq 0)$ соответствующие функции $\varphi(x)$ или $\Phi(x)$ которые легко представить в виде кривых.

ТЕОРЕМА 6.1

Если X — нормально распределенная случайная величина с параметрами μ и σ^2 , то величина $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ также распределена нормально с параметрами 0 и 1, т. е. плотность вероятности Z соответствует формуле (6.29), а функция распределения — формуле (6.30).

Эта теорема, часто применяемая в математической статистике, позволяет пользоваться таблицами II и III для расчета плотности вероятностей и функции распределения нормально распределенной случайной величины X с параметрами μ и σ^2 , $N(\mu; \sigma^2)$. Необходимо лишь преобразовать ось абсцисс, положив $z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$.

Ниже выводится ряд часто применяемых в математической статистике соотношений.

Пусть X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Рассчитать вероятность того, что отклонение между случайной величиной X и ее математическим ожиданием μ по абсолютной величине меньше заданного числа $\varepsilon (> 0)$, т. е. найти $P(|X - \mu| < \varepsilon) = P(|X - \mu| < \varepsilon)$.

Для расчета этой вероятности по табл. 2 и III положим $\varepsilon = \aleph \sigma$ что дает [с применением формулы (5.7)]

$$P(|X - \mu| < \aleph \sigma) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < \aleph\right) = P(-\aleph < \frac{X - \mu}{\sigma} < +\aleph) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \aleph\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < -\aleph\right)$$

Поскольку случайная величина $Z = (X - \mu)/\sigma$, согласно теореме 6.1, соответствует нормированному нормальному распределению с функцией распределения (6.30), то

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \aleph\right) = P(Z < \aleph) = \Phi(\aleph),$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < -\aleph\right) = P(Z < -\aleph) = \Phi(-\aleph) = 1 - \Phi(\aleph),$$

так что искомая вероятность равна

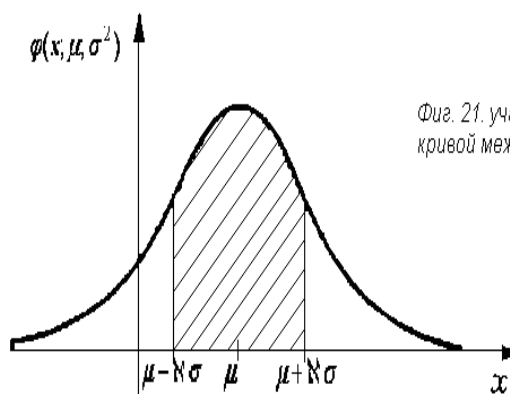
$$P(|X - \mu| < \aleph \sigma) = \Phi(\aleph) - \Phi(-\aleph) = 2\Phi(\aleph) - 1. \quad (6.33)$$

Эта вероятность зависит только от \aleph . Значения $\Phi(\aleph)$ для различных значений \aleph можно найти по табл. III. В силу соотношения

$$P(|X - \mu| < \aleph \sigma) = P(\mu - \aleph \sigma < X < \mu + \aleph \sigma) = \int_{\mu - \aleph \sigma}^{\mu + \aleph \sigma} \varphi(x; \mu; \sigma^2) dx,$$

где $\varphi(x; \mu; \sigma^2)$ определяется соотношением (6.25), формула (6.33) дает наглядное представление о доле общей площади, расположенной под кривой нормального распределения между абсциссами $\mu - \aleph \sigma$ и $\mu + \aleph \sigma$ (фиг. 21). В частности, по формуле (6.33) имеем: для $\aleph = 1$

$$P(|X - \mu| < \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,84135 - 1 = 0,6827,$$



Фиг. 21. участок площади под Гауссовой кривой между абсциссами $\mu - \aleph \sigma$ и $\mu + \aleph \sigma$.

т. е. между абсциссами $\mu - \sigma$ и $\mu + \sigma$ располагается 68,27% всей площади кривой нормального распределения;
для $\aleph = 2$

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,9545,$$

т. е. в интервале $(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)$ лежит 95,45% всей площади;
для $\aleph = 3$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,99865 - 1 = 0,9973,$$

т. е. в интервале $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ лежит 99,73% всей площади.

Как показывает последний результат, вероятность того, что случайная величина X меньше чем на 3σ отличается от своего математического ожидания μ , составляет 0,9973, т. е. почти равна единице. Таким образом, «практически почти достоверно», т. е. с уверенностью 99,73%, нормально распреде-

ленная по закону $N(\mu; \sigma^2)$ случайная величина X принимает лишь значения в пределах «трехсигмовых границ», т. е. в интервале $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

Выход результата измерения X за пределы этого интервала может объясняться двумя обстоятельствами: либо случайная величина X нормально распределена с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 ; тогда вероятность этого события равна 0,0027 и о нем можно говорить, как о редком событии, т. е. о событии, могущем наступить 27 раз на 10000; либо же рассматриваемая случайная величина не распределена по нормальному закону с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , т. е., например, у нее другое математическое ожидание или она удовлетворяет другой функции распределения. При рассмотрении математико-статистических методов проверки гипотез обычно имеют дело со вторым случаем, т. е. «гипотеза» о нормальном распределении величины X по закону $N(\mu; \sigma^2)$ отвергается, причем в 0,27% случаев допускается ошибка.

В математической статистике принято при оценке результатов измерений работать с определенными долями площади кривой нормального распределения (95, 99 или 99,9%). Этим процентам, как легко видеть из табл. 111, соответствуют значения \aleph : 1,960; 2,576 или 3,291. Какое значение \aleph выбирается при практическом применении, зависит от конкретных условий задачи.

При всех подобных рассмотрениях необходимо убедиться в том, что действительно имеет место нормальное распределение случайной величины. Если случайная величина X распределена не по нормальному закону, то вместо соотношения (6.33) используется оценка

$$P(|X - \mu| < \aleph \sigma) > 1 - \frac{1}{\aleph^2}, \quad (6.34)$$

которая может быть получена из неравенства Чебышева. Параметры μ и σ^2 представляют собой соответственно математическое ожидание и дисперсию величины X . Из формулы (6.34) для $\aleph = 3$ следует «более слабое» утверждение, которое, однако, верно для любого распределения: в интервале $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ лежат минимум 89% всех значений X .

6.2.2. Экспоненциальное распределение

Непрерывная случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром α если ее плотность равна

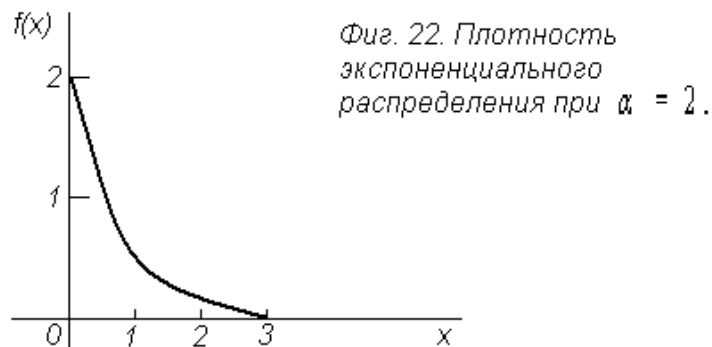
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{для } x \geq 0, \end{cases} \quad (6.35)$$

так что функция распределения X имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{для } x \geq 0. \end{cases} \quad (6.36)$$

На фиг. 22 графически представлена плотность вероятности (6.35) для $\alpha = 2$.

Путем применения формул (5.9) и (5.12) и интегрирования по частям получаем значения математического ожидания и дисперсии



для экспоненциального закона распределения:

$$\mu = EX = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha},$$

$$\sigma^2 = D^2 X = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

В природе и технике существует множество явлений, в основе которых, по крайней мере приближенно, лежит экспоненциальное распределение, т. е. в которых исследуемый признак удовлетворяет распределению типа (6.35) или (6.36). Так, в общем случае результаты измерений временных показателей хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением.

I. Планирование эксперимента.

Планирование эксперимента позволяет ускорить исследования, улучшить их качество и уменьшить трудоемкость.

До проведения опытов отбирают факторы, оказывающие основное влияние на результаты эксперимента. При большом числе факторов проводится их ранжирование по степени значимости, чтобы обосновано отбросить несущественные из них. Варьирование факторов обычно ведут на двух уровнях: верхняя (с кодовым обозначением +1) и нижняя (с кодовым обозначением -1); или на трех: верхнем (с кодовым обозначением +1), среднем (с кодовым обозначением 0) и нижнем (с кодовым обозначением -1).

Математическая модель эксперимента записывается в виде функции

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где y – отклик;

x_1, x_2, \dots, x_n – факторы, или в виде степенного ряда, коэффициенты которого определяют экспериментально:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \dots$$

Интервалы варьирования $\Delta x_i = x_{i\max} - x_{i\min}$ выбирают таким образом, чтобы они не превышали удвоенную среднеквадратическую ошибку измерения i -го фактора. Используют скользящую систему координат, начало которой совпадает с нулевым уровнем факторов.

$$x_{i0} = (x_{i\max} - x_{i\min}) / 2$$

Нормализацию факторов преобразование натуральных их уровней в безразмерные – проводят по формуле

$$\tilde{x}_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i,$$

где x_i - натуральное значение факторов;

x_{i0} – натуральное значение фактора, соответствующее его основному уровню;

Δx_i – интервал варьирования.

Для двухфакторного эксперимента все возможные комбинации будут исчерпаны четырьмя опытами (таблица). Если оптимизируемая функция описывается линейным

$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$, то коэффициенты регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = [(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4] / 4;$$

$$b_1 = [(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4] / 4;$$

$$b_2 = [(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4] / 4;$$

$$b_{12} = [(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4] / 4;$$

Таблица: Матрица планирования эксперимента типа 2^2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+1	-1	-1	+1	
2	+1	+1	-1	-1	
3	+1	+1	+1	+1	
4	+1	-1	+1	-1	

Коэффициент регрессии значим, им пренебрегать нельзя, если

$$|b| \geq \sqrt{S^2(x)} t_p,$$

где $S^2(x)$ – дисперсия коэффициента регрессии;

t_p – коэффициента Стьюдента, соответствующий заданной доверительной вероятности и числу степеней свободы, принятым при определении коэффициента регрессии.

Приемлемость линейного уравнения регрессии проверяют по критерию Фишера. Если результаты опытов с линейной моделью не согласовываются, принимают модель второго порядка.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2,$$

Т.е. проводят 5-ый опыт в центре плана (при $x_1=x_2=0$) и опыты в звездных точках 6-9 (таблица)

Таблица

Матрица плана двухфакторного эксперимента

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	0	0	0	y_5
6	+1	0	+1	0	y_6
7	+1	0	-1	0	y_7
8	+1	+1	0	0	y_8
9	+1	-1	0	0	y_9

Наглядно условия эксперимента можно представить в виде квадрата номера вершин, которого соответствуют номерам опытов, а площадь квадрата - области экспериментирования (рисунок).

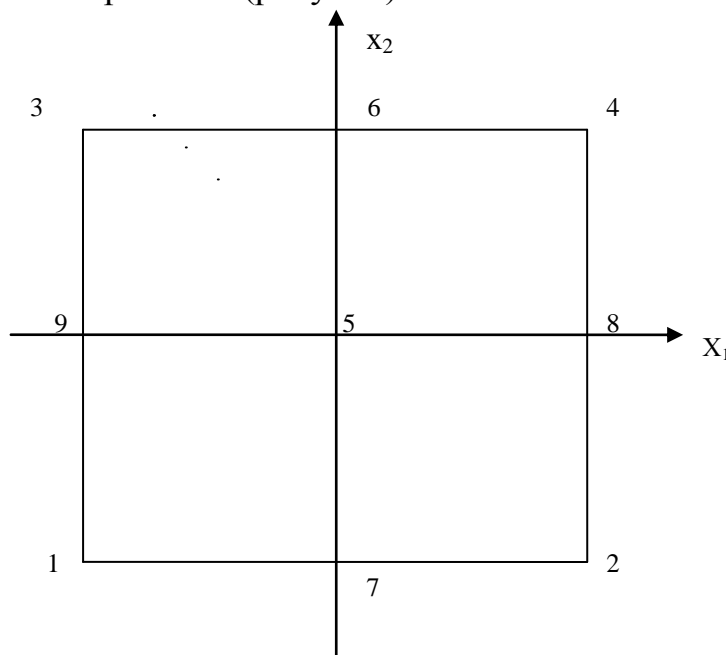


Рис. Геометрическое изображение полного факторного плана эксперимента типа 2^2

Матрицу плана для трех факторов, варьируемых на двух уровнях, получают из матрицы плана эксперимента для двух факторов, повторяя ее при значениях третьего фактора, заданного сначала на нижнем, а затем на верхнем уровне. Аналогично поступают и при большем числе факторов (таблица).

Таблица

Матрицы планов эксперимента для 2, 3, 4, 5 факторов

№ опыта	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
1	-1	-1	-1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1
5	+1	-1	-1	+1	-1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	-1	+1
9	+1	-1	-1	-1	+1	+1
10	+1	+1	-1	-1	+1	+1
11	+1	-1	+1	-1	+1	+1
12	+1	+1	+1	-1	+1	+1
13	+1	-1	-1	+1	+1	+1
14	+1	+1	-1	+1	+1	+1
15	+1	-1	+1	+1	+1	+1
1	2	3	4	5	6	7
16	+1	+1	+1	+1	+1	+1
17	+1	-1	-1	-1	-1	+1
18	+1	+1	-1	-1	-1	+1
19	+1	-1	+1	-1	-1	+1
20	+1	+1	+1	-1	-1	+1
21	+1	-1	-1	+1	-1	+1
22	+1	+1	-1	+1	-1	+1
23	+1	-1	+1	+1	-1	+1
24	+1	+1	+1	+1	-1	+1
25	+1	-1	-1	-1	+1	+1
26	+1	+1	-1	-1	+1	+1
27	+1	-1	+1	-1	+1	+1
28	+1	+1	+1	-1	+1	+1
29	+1	-1	-1	+1	+1	+1
30	+1	+1	-1	+1	+1	+1
31	+1	-1	+1	+1	+1	+1
32	+1	+1	+1	+1	+1	+1

С увеличением числа факторов реализация полного факторного плана эксперимента затрудняется в виду значительного возрастания числа опытов. Для сокращения числа опытов пользуются дробными репликами полного факторного плана, которые получают делением числа опытов в последнем на число кратное двум. Для понимания сказанного можно привести пример с 6-ти факторным экспериментом. Полный факторный план, полуреплика – 2^{6-}

$1=32$ опыта, а четверть реплика – $2^{6-2}=16$ опытов. Дробный факторный план позволяет получать регрессионные модели при меньшем числе опытов.

Если на основании проведенного анализа установлено, что к существенным факторам относятся x_0, x_1, x_2, x_3 , но основными являются x_1 и x_2, x_3 зависит от взаимодействия двух первых факторов (x_1x_2), то матрица полуреплики 2^{3-1} будет соответствовать выделенной рамкой в таблице.

Статистический анализ результатов экспериментальных исследований позволяет на основе ограниченной по объему выборки сделать обоснованные выводы с требуемыми точностью и надежностью, назначая доверительную вероятность или уровень значимости, которые считаются достаточными для решения поставленной задачи. Практически при исследованиях погрешность измерения для испытания сооружений не должна превышать 5%.

Рекомендуемая последовательность операций статистической обработки результатов измерений может иметь вид:

- запись результатов измерений в таблицу;
- определение среднего арифметического измеряемой величины \bar{x} ;
- вычисление отклонений отдельных результатов измерений от среднего арифметического $x_i - \bar{x}$;
- вычисление $(x_i - \bar{x})^2$;
- выявление и исключение промахов;
- определение погрешности измерений $\varepsilon = \Delta x / \bar{x}$;
- определение необходимого числа дополнительных измерений при недостаточности экспериментальных данных.

Число опытов необходимых для получения результатов требуемой точности $n = (t_p S / \Delta x)^2$.

См. пример №1, Приложение А.

Планирование эксперимента при оптимизации процесса получения суперпластификатора на основе сульфированных отходов тяжелых смол пиролиза жидких углеводородов (Т. Т).

Параметры характеризующие процесс: y_1 -количество осадка, в %; y_2 - прочность образцов балочек 40x40x160; y_4 -увеличение подвижности раствора при заедании суперпластификатора в количестве посчитанной согласно его концентрации.

Формулировка задачи оптимизации: Достижение максимального выхода суперпластификатора с наиболее хорошим качеством, которое удовлетворяет требованиям предъявляемым к добавкам аналогичного класса: y_1 -ограничение; y_2 -параметр оптимизации ($y_{12} \rightarrow \max$); y_3 -параметр оптимизации ($y_3 \rightarrow \max$). Качество продукта определяется по концентрации полученного нейтрализованного продукта, которая зависит от количества просульфированного ТЖТ и по его температуре в начальный период процесса сульфирования, скорости вращения лопастей смесителя.

Согласно литературных данных конечный продукт, т.е. нейтрализованный продукт сульфирования тяжелых смол пиролиза, должен иметь концентраций в пределах от 25-36%, которая зависит от степени осадка, измеряемая в граммах и который должен стремиться к минимуму; а температура исходных компонентов должна находиться в пределах: а) для серной кислоты -95°C ; б) для тяжелых смол пиролиза в пределах $110^{\circ}\text{C} \div 170^{\circ}\text{C}$, скорость вращения лопастей мешалки должна находиться в пределах от 200 об/мин до 360 об/мин, т.е. $y_1 \geq 36\%$, $110^{\circ}\text{C} < y_2 < 170^{\circ}\text{C}$; $200 \text{ об/мин} < y_3 < 3600 \text{ об/мин}$.

Факторы определяющие процесс: X_1 - отношение серной кислоты к ТЖТ, мл; X_2 - скорость подачи 60 мл. ТЖ, мл/мин; X_3 - период сульфирования до подачи воды, мин; X_4 - скорость подачи воды 200 мл, мл/мин; X_5 - время перемешивания, об/мин; X_6 - скорость перемешивания, об/мин; X_7 - температура ТЖТ, $^{\circ}\text{C}$.

Выбор варьируемых факторов: Принято решение изменять в опытах все семь факторов. Температура серной кислоты $95^{\circ}\text{C} = \text{const}$. Температура реакционной среды является производной состава и начальных температур исходных компонентов. Поэтому она, если не применять специальных способов воздействия на температуру, не является независимой величиной и не может служить в качестве фактора. Однако температуру необходимо контролировать в течение всех опытов.

Выбор технологии: Отход от производства этилена, так называемый тяжелая смола пиролиза жидких углеводородов нагревается отдельно до реакционно-способной температуры. Отдельно нагревается определенное количество серной кислоты, опять же до реакционно-способной температуры. После этого отход пиролиза вводят в серную кислоту с одновременным перемешиванием. После полного распределения смолы пиролиза в серной кислоте, начинаем вводить воду для разбавления полученного продукта с последующей нейтрализацией.

Необходимые анализы: Анализ исходного сырья: смолы пиролиза жидких углеводородов, серной кислоты (следует описание). Анализ полученного продукта: сульфированного продукта пиролиза тяжелых смол жидких углеводородов (следует описание).

Описание экспериментальной установки: Опыты проводятся на лабораторной установке и на полупромышленной, состоящей из емкостей для хранения исходных продуктов (серной кислоты и смолы пиролиза (ТЖТ), если серная кислота агрессивное составляющее, то ТЖТ пассивный материал и специальной защиты емкостей не требуется). Далее идут емкости для предварительного разогрева исходных материалов, серная кислота разогревается в смесителе и поэтому не требуется дополнительной емкости. Смеситель имеет лопасти специальной конфигурации, полученной в результате экспериментальных данных по качеству перемешивания, получения однородного раствора. Лопасти связаны с двигателем, который имеет изменяемое число оборотов - это необходимо для более равномерного и полного перемешивания. Однако же необходимо стремиться к наиболее полному перемешиванию при каком-то одном числе оборотов. После перемешивания необходимо по-

дать определенное количество воды для растворения продукта сульфирования с последующей нейтрализацией в емкости с одновременным перемешиванием, с целью ускорения этого процесса и улучшения его качества. Температурный интервал фиксируется контактными термометрами и поэтому не требуется дополнительного времени для наблюдения за ее приростом или падением.

Выбор основного уровня и интервалов варьирования: Для того чтобы выбрать уровни реакторов, следует собрать и проанализировать литературные и заводские данные. По этим следующим условиям:

Факторы	Уровни		
	-1	0	+1
1	2	3	4
1.ТЖТ	0,45	0,5	0,55
2.Скорость подачи 60мл.ТЖТмл/мин	4	6	8
3.Период сульфирования до подачи воды , мин.	2	8	14
4.Скорость подачи воды 200 мл., мл/мин.	7	9	11
5.Время перемешивания, мин.	60	80	100
6.Скорость перемешивания об/мин.	200	280	360
7.Температура ТЖТ, °С	110	140	170

Опубликованные данные и сведения из отчетов (априорная информация). Влияние времени реакции, времени перемешивания, температуры исходных материалов, скорости перемешивания для оптимизации получения добавки в лабораторных условиях противоречивы. Так работы, проводимые в Новополюцком политехническом институте по получению сульфированного продукта отличались поиском наиболее полного интервала использования материалов, т.е. отношение ТЖТ к и возможности замены серной кислоты олеумом, отходом, содержащим большое количество серной кислоты в растворе, это дает возможность снизить температуру, с которой проходит процесс сульфирования. Наиболее полное решение проблемы сбережения энергоресурсов и получения более качественного конечного продукта нашло в работах Одесского инженерно-строительного института совместно с Новополюцком политехническим институтом на кафедре "Процессы и аппараты" возглавляемой профессором доктором наук Вознесенским В.А. Эта работа заключалась в применении разработанной кафедрой методики планирования эксперимента по получению добавки. Это вызвано отсутствием строгой теории действия добавок и поэтому вынуждает использовать математическую теорию эксперимента и статистическое моделирование на этапе получения.

Реакция по получению сульфированного продукта пиролиза тяжелых смол жидких углеводородов имеет вид:

$RH_x + xR(SO_3H)_x + xHO$, где RH_3 - ароматический углеводород

x- число атомов водорода

$RCH=CH_2 + RC_2H_4 - OSO_3H$

$RCH=CH_2 + RC_2H_4 - SO_3$

$RCH=CH_2 \rightarrow RC_2H_4 - SO_3$

Соотношение серной кислоты к продукту пиролиза подбираются опытным путем в пределах:

27мл 60мл ТЖТ

33мл 60мл ТЖТ

30мл 60мл ТЖТ

Матрица планирования:

Усл. Обозн.	№ опыта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1. z ₀	1	-	-	-	-	-	-	-
2. z ₁	2	-	+	+	+	+	+	+
z ₂	3	+	-	+	+	+	+	+
z ₃	4	+	+	-	+	+	+	+
z ₄	5	+	+	+	-	+	+	+
z ₅	6	+	+	+	+	-	+	+
z ₆	7	+	+	+	+	+	-	+
z ₇	8	+	+	+	+	+	+	-
3. y ₁₂	9	+	+	-	-	-	-	-
y ₁₃	10	+	-	+	-	-	-	-
y ₁₄	11	+	-	-	+	-	-	-
y ₁₅	12	+	-	-	-	+	-	-
y ₁₆	13	+	-	-	-	-	+	-
y ₁₇	14	+	-	-	-	-	-	+
y ₂₃	15	-	+	+	-	-	-	-
y ₂₄	16	-	+	-	+	-	-	-
y ₂₅	17	-	+	-	-	+	-	-
y ₂₆	18	-	+	-	-	-	+	-
y ₂₇	19	-	+	-	-	-	-	+
y ₃₄	20	-	-	+	+	-	-	-
y ₃₅	21	-	-	+	-	+	-	-
y ₃₆	22	-	-	+	-	-	+	-
y ₃₇	23	-	-	+	-	-	-	+
y ₄₅	24	-	-	-	+	+	-	-
y ₄₆	25	-	-	-	+	-	+	-
y ₄₇	26	-	-	-	+	-	-	+
y ₅₆	27	-	-	-	-	+	+	-
y ₅₇	28	-	-	-	-	+	-	+
y ₆₇	29	-	-	-	-	-	+	+
y ₁	30	+	0	0	0	0	0	0
y ₂	31	0	+	0	0	0	0	0
y ₃	32	0	0	+	0	0	0	0
y ₄	33	0	0	0	+	0	0	0
y ₅	34	0	0	0	0	+	0	0
y ₆	35	0	0	0	0	0	+	0
y ₇	36	0	0	0	0	0	0	+
y ₁₀	37	0	0	0	0	0	0	0

План в натуральных переменных

№	Мл.	ТЖТ. мл	Вр. ТЖТ мин	Вр. Суть мин	Вр. Под воды мин.	Вр. Пер. мин.	Скор. Пер. Об/мин.	Т°С
1	27	60	15	2	28.30	60	200	110
2	33	60	15	14	18.10	100	360	170
3	33	60	15	14	28.30	60	200	110
4	33	60	15	2	18.10	60	200	110
5	33	60	15	2	28.30	100	200	110
6	33	60	15	2	28.30	60	360	110
7	33	60	15	2	28.30	60	200	170
8	27	60	15	14	18.10	60	200	110
9	27	60	15	14	28.30	100	200	110
10	27	60	15	14	28.30	60	360	110
11	27	60	15	14	28.30	60	200	170
12	27	60	15	2	18.10	100	200	110
13	27	60	15	2	18.10	60	360	110
14	27	60	15	2	18.10	60	200	170
15	27	60	15	2	28.30	100	360	110
16	27	60	15	2	28.30	100	200	170
17	27	60	15	2	28.30	60	360	170
18	27	60	7.30	14	18.10	100	360	170
19	33	60	7.30	2	18.10	100	360	170
20	33	60	7.30	14	28.30	100	360	170
21	33	60	7.30	14	18.10	60	360	170
22	33	60	7.30	14	18.10	100	200	170
23	33	60	7.30	14	18.10	100	360	110
24	33	60	7.30	2	28.30	60	200	110
25	27	60	7.30	14	28.30	60	200	110
26	27	60	7.30	2	18.10	60	100	110
27	27	60	7.30	2	28.30	100	200	100
28	27	60	7.30	2	28.30	60	360	100
29	27	60	7.30	2	28.30	60	200	170
30	33	60	10	8	22.20	90	280	140
31	30	60	15	8	22.20	90	280	140
32	30	60	10	14	22.20	90	280	140
33	30	60	10	8	18.10	90	280	140
34	30	60	10	8	22.20	100	280	140
35	30	60	10	8	22.20	90	280	170
36	30	60	10	8	22.20	90	280	170
37	30	60	10	8	22.20	90	280	140

Результаты эксперимента

№ добав.	РН до нейтрал.	РН после нейтрал.	К-во осадка.	% осадка	Концентр. %	К-во до- бавки от веса Ц (в гр.)	плотность
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,8	4,6	33	17,3	27,78	11,07	1,13710
2	1,8	10,7	35	16,6	30,72	10,03	1,13624
3	1,8	26	36	13,6	29,92	10,31	1,13380
4	1,8	4	34,2	22,0	30,68	10,00	1,14178
5	2	7,7	36,2	21,1	34,70	8,71	1,15806
6	2	4,8	34	20,3	28,36	10,9	1,13232
7	2	9,5	40	29,4	33,22	9,14	1,15224
8	2	4,4	30	18,6	29,42	9,01	1,13218
9	1,9	4,8	30	17,0	29,71	10,03	1,1750
10	1,1	8	34,6	29,6	25,93	11,95	1,12994
11	2	6,3	35,4	19,6	33,92	9,13	1,13830
12	1,8	8	32,2	12,4	30,75	10,55	1,0686
13	1,6	8	38	19,5	33,74	9,25	1,15604
14	1,5	11,6	18	22,1	36,93	7,50	1,26350
15	1,9	7,6	38	19,2	32,56	9,26	1,16044
16	1,9	9	31,5	25,2	16,25	18,25	1,1800
17	2	5,3	34	7,7	27,32	11,42	1,12216
18	1,5	10	37	44,4	28,96	9,01	1,14904
19	1,9	7,2	32	25,7	34,02	8,82	1,16600
20	2	8,6	36	35,4	27,8	10,0	1,17422
21	1,9	6,8	35	24,3	30,19	10,2	1,13414
22	1,9	5,9	38	19,7	31,49	9,8	1,13864
23	2	7,2	31	27,9	34,86	8,7	1,15718
24	1,9	6,6	36	15,6	29,76	8,8	1,14430
25	2	9,8	35	23,8	16,45	18,56	1,14600
26	1,8	10	40	25,3	24,52	12,6	1,13180
27	1,9	4,4	33,5	21,1	34,14	8,79	1,16550
28	1,9	7,5	35	22,4	29,48	10,3	1,14994
29	2	8,2	38	20,3	27,64	11,1	1,14028
30	2	4	37,2	22,13	32,22	9,4	1,16060
31	2	6,8	35,6	23,8	32,76	9,1	1,15856
32	4,9	7,7	36	23,2	32,43	9,4	1,15402
33	1,9	5,4	32,3	27,4	24,82	11,9	1,18342
34	1,9	6,5	35,8	17,7	24,95	12,2	1,14564
35	1,9	7	38,2	20,4	36,16	8,4	1,15842
36	1,9	6	36,8	18,6	31,63	9,5	1,16498
37	1,9	5,8	33,4	13,4	28,70	10,6	1,15456
15(a)	1,5	4,2	30,1	26,3	39,62	8,8	1,18260
18(a)	1	5,0	32,2	11,4	35,65	8,5	1,15952
20(a)	1,2	7,5	36,6	23,6	29,81	10,2	1,15644

Результаты получения после испытания образцов 40х40х160 с добавкой отнесенные к образцам без добавки

№ доб.	Подвиж. Мм.	% от концтр.	Изгиба Кгс/см ²	% от ма- рочной	Сжатие Кгс/см ²	% от ма- рочной
1	2	3	4	5	6	7
К	107	100	44,47	100	190,66	100
1	162	151,4	37,33	83,94	145,29	76,20
2	159	148,6	28,17	63,35	117,79	61,48
3	165	154,2	30,43	68,43	123,29	64,47
4	170	164,8	29,7	66,7	115,0	60,3
5	147	137,4	34,73	78,10	128,33	67,31
6	156	145,8	36,93	83,04	169,58	88,94
7	157	146,7	33,97	76,93	144,37	75,72
8	142	132,7	34,80	78,26	145,29	76,2
9	140	130,8	34,17	76,84	145,29	76,20
10	156	145,8	35,10	78,93	138,42	72,60
11	140	130,8	30,57	68,74	134,29	70,43
12	160	144,5	34,5	77,58	143,00	75,00
13	170	138,6	36,5	82,0	153,5	80,5
14	135	126,2	30,73	69,10	128,33	67,31
15	130	121,5	42,87	96,90	179,66	94,23
16	180	168,2	31,00	69,71	157,21	82,46
17	165	152,3	32,6	73,3	121,9	63,9
18	170	164,8	33,5	76,1	126,0	66,1
19	158	147,7	38,53	86,64	170,5	89,43
20	152	142,8	33,6	75,5	132,5	69,5
21	160	149,5	132,5	73,0	129,7	68,0
22	165	152,3	32,5	73,0	128,8	67,6
23	165	152,3	28,4	63,8	94,9	49,8
24	155	144,9	34,87	78,41	153,54	80,53
25	170	64,8	44,3	99,5	187,9	98,6
26	140	130,8	38,2	85,8	144,4	75,8
27	140	130,8	36,07	81,11	139,33	73,08
28	143	132,2	38,0	85,4	140,7	73,8
29	155	144,9	35,1	78,9	138,4	72,6
30	185	170,8	36,8	82,7	138,9	72,6
31	173	166,4	34,8	78,2	142,1	74,5
32	160	149,5	32,7	33,5	129,3	67,8
33	172	158,9	29,5	66,3	103,1	54,1
34	154	143,9	33,6	75,5	129,7	68,0
35	162	151,2	33,4	75,9	117,8	61,8
36	167	154,3	32,1	72,1	132,1	69,7
37	165	152,3	33,7	75,7	137,0	71,9

Условн. Обозн.	№	x_1-x_7	Осадок $Y=R$	$\frac{R}{1-R}$	Подвиж. $Y=R$	$\frac{R}{1-R}$	Прочн. $Y=R$	$\frac{R}{1-R}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. z_0	1	-----	17	-1.0625	162	-1.0062	140.98	-1.0071
2. Z_1	2	-++++++	17	-1.0625	159	-1.0063	113.62	-1.0089
Z_2	3	+++++++	14	-1.0769	165	-1.0061	111.61	-1.0084
Z_3	4	+++++++	22	-1.0476	170	-1.0059	124.69	-1.0090
Z_4	5	+++----+	21	-1.0500	147	-1.0068	124.69	-1.0081
Z_5	6	++++-++	20	-1.0526	156	-1.0064	164.74	-1.0061
Z_6	7	+++++--	20	-1.0526	157	-1.0064	140.18	-1.0072
Z_7	8	+++++--	19	-1.0556	142	-1.0071	140.98	-1.0071
3. y_{12}	9	++-----	17	-1.0625	140	-1.0072	141.06	-1.0071
y_{13}	10	+----	20	-1.0626	156	-1.0064	134.30	-1.0075
y_{14}	11	+---+---	20	-1.0526	140	-1.0072	130.30	-1.0078
y_{15}	12	+---+--	12	-1.0909	160	-1.0063	138.84	-1.0073
y_{16}	13	+----+-	20	-1.0526	170	-1.0059	148.99	-1.0068
y_{17}	14	+-----+	22	-1.0476	135	-1.0075	124.69	-1.0087
y_{23}	15	-+++----	19	-1.0556	130	-1.0077	174.35	-1.0058
y_{24}	16	-++-----	25	-1.0407	180	-1.0056	152.72	-1.0066
y_{25}	17	-++-----	8	-1.1429	165	-1.0061	118.28	-1.0085
y_{26}	18	-+----+-	11	-1.100	170	-1.0059	122.29	-1.0082
y_{27}	19	-+-----+	26	-1.040	158	-1.0064	165.54	-1.0061
y_{34}	20	--++----	24	-1.0435	152	-1.0066	128.69	-1.0078
y_{35}	21	--++-----	24	-1.0435	160	-1.0063	126.02	-1.0080
y_{36}	22	--+----+-	20	-1.0526	165	-1.0061	124.96	-1.0081
y_{37}	23	--+-----+	28	-1.0370	165	-1.0061	92.15	-1.0110
y_{45}	24	---+----	16	-1.0667	155	-1.0065	148.99	-1.0068
y_{46}	25	---+----	24	-1.0435	170	-1.0059	182.36	-1.0055
y_{47}	26	---+----	25	-1.0417	140	-1.0072	140.12	-1.0072
y_{56}	27	----+--	21	-1.0500	140	-1.0072	135.10	-1.0075
y_{57}	28	----+--	22	-1.0476	143	-1.0070	136.70	-1.0074
y_{67}	29	-----++	20	-1.0526	155	-1.0065	134.30	-1.0075
4. y_1	30	+000000	22	-1.0476	185	-1.0054	134.84	-1.0075
y_2	31	0+00000	24	-1.0435	173	-1.0058	137.77	-1.0073
y_3	32	00+0000	23	-1.0454	160	-1.0063	125.49	-1.0080
y_4	33	000+000	27	-1.0585	172	-1.0058	100.13	-1.0101
y_5	34	0000+00	18	-1.0588	154	-1.0065	126.02	-1.0080
y_6	35	00000+0	20	-1.0576	162	-1.0062	114.28	-1.0038
y_7	36	000000+	17	-1.0625	167	-1.0060	128.96	-1.0078
y_{10}	37	0000000	13	-1.0833	165	-1.0061	132.97	-1.0076

В рассмотренной ранее сводной таблице приведены результаты эксперимента при испытании в каждом опыте $m=3$ образца. Проверка однородности дисперсии средних $s^2\{\bar{y}_i\}$ по критерию $G = \frac{s^2}{n} \sum s_{i2}$ показала (см. при-

ложение 3), что такую гипотезу нужно отклонить. Поэтому был осуществлен

переход к относительным ошибкам - коэффициентам вариации $\delta\{\bar{y}_u\} = S\{\bar{y}_u\} / \bar{y}_u$, для которых вновь проверяется гипотеза однородности по критерию G , которая уже может быть признана правдоподобной. Таким образом, можно рассчитать среднюю ошибку по всем опытам:

$$\delta\downarrow 3 = \delta\{\bar{y}_u\} = \sqrt{((\sum \delta\uparrow 2\{y\}_u) : 27)}$$

Переход к относительным ошибкам влечет за собой преобразование выходов в логарифмические $\omega_u = \ln \bar{y}_u$.

Расчет коэффициентов квадратичной модели.

Расчет коэффициентов модели по плану Рехтшафнера отличается от алгоритмов симметричных планов, используются элементы матриц и результаты опытов в каждой строке плана. Анализ 4 -матриц показал, что для планов можно построить специальный бланк-алгоритм, не только существенно упрощающий расчеты на микрокалькуляторах, но и предусматривающий промежуточный контроль. В нем используются полные и частичные суммы результатов по четырем блокам плана с индексами I, II, III, IV. Для расчета свободного члена и вспомогательных сумм $\rho\{i\}$, $\rho\{ii\}$ и $\rho\{ij\}$ находим суммы y_4 по блокам:

$$\sum I = 2.8332, \sum II = 20.5436, \sum III = 62.2798, \sum IV = 21.41$$

аполняем следующую таблицу произведения соответствующих сумм $\sum I, \dots, A, B, C, \dots, C(-0.0347) \sum I = G(0.0347) * 2.8332 = 0.0983687$

Построчным суммированием получаем искомые величины l_0 ; $\rho\{i\}$; $\rho\{ii\}$ и $\rho\{ij\}$ например, оценка свободного члена $l_0 = 3.0710861$; $\rho\{ii\} = 3.0710861 - 0.5595625 - 2.511556 = 0$

Вспомогательные таблицы к расчету коэффициентов по плану R_7 .

а) Расчет свободного члена l_0 и вспомогательных сумм $\rho\{i\}$; $\rho\{ii\}$ и $\rho\{ij\}$.

	$\sum I$ 2.8332	$\sum II$ 20.5436	$\sum III$ 62.2798	$\sum IV$ 21.64197	$\sum (II + III)$ 82.8234	$\sum 0$ 189.899 7
B-0	$A(0.0764) * \sum I$ =0.216456 4	$-D(-0.0243) * \sum II$ =-0.4992094	$A(-0.0035) * \sum III$ = -0.2161109	$R(I/6) * \sum IV$ =3,56995	-	$B_0 = 3.0710861$
$\rho\{i\}$	$-B(-I/24) * \sum I$ = -0.11805	$B(I/24) * \sum II$ =0.8559833	$-F(I/48) * \sum III$ =-1,2974958	-	-	$\rho\{i\} = -0.559525$
$\rho\{ii\}$	$C(-0.0347) * \sum I$ =0.098368 7	$M(-0.0174) * \sum II$ =-0.3566368	$D(0.0243) * \sum III$ =1.5133991	$-R(-I/6) * \sum IV$ =-3.56995	-	$\rho\{ii\} = -2.511556$
$\rho\{iy\}$	$B(I/24) * \sum I$ =0.11805	-	-	-	$F(I/48) * \sum (II+III)$ =1.72 54875	$\rho\{iy\} = 1.8435375$
	- 0.0000377	0.0001371	-0.0002	-	-	-

Для расчета линейных b_i , квадратичных b_{ii} эффектов и вспомогательных сумм $\sum iy$ находим по блоку III семь сумм Y_{IIIy} для каждой комбинации из 6 строк, содержащих данный подстрочный индекс

$$\sum Y_{IIIy} = \sum \text{строк III13;III23;III34;III36;III37}$$

Контроль: сумма всех семи $\sum Y_{IIIy} = 2\sum(\text{III})$

Находим 15 вспомогательных сумм $\sum iy$ по парным суммированием $\sum Y_{IIIy}$, образующих из первых подстрочных индексов сочетание «iy» $\sum Y_{III2y} + \sum Y_{III3y}$ и т.д.

Контроль: сумма всех 15 $\sum iy = 10\sum(\text{III})$

Находим по семь вспомогательных произведений $\rho_{i,1}$ и $\rho_{i,2}$ например, для столбца $i=4$

$$\rho_{4,1} = (F+B) * \sum Y_{III4y}$$

Записываем из таблицы значения Y_{II} и находим вспомогательные произведения $\rho_{I,3}$ и $\rho_{I,4}$, пример для столбца $i=4$

$$\rho_{4,3} = (-B-E) Y_{II4}$$

Находим значение оценок линейных эффектов, например:

$$b_4 = \rho\{i\} + \rho_{4,1} + \rho_{4,3}$$

Записываем из таблицы значения Y_{IVi} и находим семь вспомогательных произведений $\rho_{i5} = Y_{IVi}$

Находим значения оценок квадратичных эффектов: $b_{44} = \rho\{ii\} + \rho_{4,3} + \rho_{4,4} + \rho_{4,5}$

Контроль: сумма $b_0 + b_i + b_{ii} = Y_{Iii}$

Все рассмотренные выше расчеты по определению линейных квадратичных b_i эффектов, вспомогательных сумм $\sum ii$, $\sum iy$, а так же вспомогательных произведений $\rho_{i,1}$, $\rho_{i,2}$, $\rho_{i,3}$, и оценок линейных эффектов, а так же квадратичных эффектов после определения их численного зачисления заносим в таблицу.

i	1	2	3	4	5	6	7
$\sum Y_{IIIy}$	{1y} 17.3962	{2y} 16.7319	18.6242	18.5623	16.6505	17.6505	18.9869
$\sum 1y$	-	{1k+2k} 34.1281	{1k+3k} 36.0204	{1k+4k} 35.9585	{1k+5k} 34,0467	{1k+6k} 35.0038	{1k+7k} 36.3831
$\sum 2y$	-	-	{2k+3k} 35.3561	{2k+4k} 35.2942	{2k+5k} 33.3824	{2k+6k} 34.3395	{2k+7k} 35.7188
$\sum 3y$	-	-	3k+4k	{3k+4k} 35.1865	{3k+5k} 35.2747	{3k+6k} 36.2318	{3k+7k} 37.6111
$\sum 4y$	-	Контроль $\sum Y_{IIIy} = 2\sum(\text{III})$		-	4k+5k 35.2128	4k+6k 36.1699	4k+7k 37.5492
$\sum 5y$	-	$\sum iy = 10\sum(\text{III})$		-	5k	{5k+6k} 34.2581	{5k+7k} 35.6374
$\sum 6y$	-	-	-	-	-	-	{6k+7k}
$\rho_{i1} = (F+B) (1/16) \sum Y_{IIIy}$	1.08726	1.04574	1.16401	1.11014	1.04066	1.10048	1.18668

$\rho_{i1} =$ $=P+D$ (1/16) $\sum Y_{IIIy}$	1.08726	-1.04574	-1.16401	-1.16014	-1.04066	-1.10048	-1.11866
Y_{IVi}	3.0910	3.1781	3.1355	3.2958	2.8904	2.9957	2.8332
$B_{ii} = +$ $\rho_{4,3+}$ $\rho_{4,4+}$ $\rho_{4,5}$	B_{11} 0.02341	B_{22} 0.11563	B_{33} 0.11563	B_{44} 0.19494	B_{55} -0.1001	B_{66} -0.0546	B_{77} -0.3129
Конт- роль $Y_{IVi} =$ $b_0 + b_{i+}$ $+ b_{ii}$	3.09097	3.17807	3.13547	3.29577	2.89037	2.99567	2.83317

Далее для расчёта оценок взаимодействий b_{iy} находим 15 вспомогательных сумм $\sum Y_{IIIy}$ попарным суммированием Y_{III} , образующих из подстрочных индексов рассчитываемое сочетание «iy», данные для этих расчётов берём из сводной таблицы. Так для сочетания “23” берём

$$Y_{II2} + Y_{II3} = \ln(1.0625) + \ln(-1.0769) = 5.7301$$

Затем находим 15 вспомогательных произведений $\rho_{6,iy}$, для сочетания ”23”.

Это величина будет соответствовать следующему выражению:

$$\rho_{6,23} = (-B-F) \sum Y_{III23} = (-1/16) \cdot 5.7301 = -0.35813$$

По данным блока 3 находим 15 вспомогательных произведений $\rho_{7,iy}$, рассмотрим так же на сочетании “23” $\rho_{7,23} = (2B+E+F) Y_{II23} = 0.61342$

По данным таблицы расчёта эффект b_i , b_{ii} и сумм $\sum iy$ находим из $\sum iy$ 15 вспомогательных произведений $\rho_{8,iy}$, так же рассмотрим для сочетания “23”

$$\rho_{8,23} = (-B-F) \sum_{23} = -2,20976$$

Находим значения оценок эффектов взаимодействия:

$$b_{23} = \rho_{\{iy\}} + (\rho_6 + \rho_7 + \rho_8)23 = 0.11093$$

$$\text{Контроль: сумма } b_0 = \sum b_i + \sum b_{ii} + \sum b_{yi} = Y_I = 2.8332$$

Проверка значимости оценок коэффициентов регрессии проведена при $\alpha = 0.50$. Оценка любого коэффициента регрессии получается как сумма произведений по данному столбцу. Запись планов в форме как они рассмотрены в таблице “матрица планирования типа Ретшафнера и коэффициенты 4- матрицы; позволяет развивать их на любую размерность. На основании этого значение расчётных коэффициентов для $K=4-9$ приведены в таблице “расчётные коэффициенты к планам Рехтшафнера при $K=4-9$ ”. В этой таблице указаны так же расчётные коэффициенты $S\{b\}:S_3$, необходимые для определения среднеквадратических ошибок. Оценок коэффициентов регрессии, в соответствии с этим для:

$$S\{b_0\} = t^* \delta_3 * T\{b_0\} = 0.45240$$

$$S\{b_i\} = t^* \delta_3 * T\{b_i\} = 0.22441$$

$$S\{b_{ii}\} = t^* \delta_3 * T\{b_{ii}\} = 0.95423$$

Незначительные оценки про коэффициентах можно удалить из модели без пересчёта остальных оценок, поэтому, что коэффициенты оценок весьма малы

($\rho \leq 0.06$).

Таким образом получается конечная модель

$$x_1 \quad P=30.71-0.154x_1-x_3-0.147x_1x_4-0.131x_1x_5-0.084x_1x_6-0.148x_1x_7$$

$$x_2 \quad P=0.116x_2^2-0.147x_2x_3-0.162x_2x_5-0.155x_2x_6$$

$$x_3 \quad P=-0.202x_3x_4-0.079x_3x_5-0.117x_3x_6-0.190x_3x_7$$

$$x_4 \quad P=0.195x_4^2-0.157x_4x_5-0.152x_4^3x_6-0.207x_4x_7$$

$$x_5 \quad P=-0.111x_5x_7$$

$$x_6 \quad P=-0.160x_6x_7$$

$$x_7 \quad P=0.075x_7-0.313x_7^2$$

Расчет взаимодействия

iy	$\sum Y_{iiy}$	$\rho_{6,iy}$ -B-F $(1/16) \sum Y_{iiy}$	$\rho_{7,iy}$ 2B+E+F $(5/24) \sum Y_{iiy}$	$\rho_{8,iy}$ -B-F $-(1/16) \sum Y_{iiy}$	B_{iy} $\rho \{iy\} + (\rho_6 + \rho_7 + \rho_8) * iy$
12	5.4723	-0.34202	0.59025	-2.13301	-0.04124
13	5.9242	-0.37025	0.62410	-2.25128	-0.15389
14	5.9777	-0.36736	0.62410	-2.24741	-0.14713
15	5.8289	-0.36431	0.51769	-2.12741	-0.13100
16	5.8289	-0.36431	0.62410	-2.18774	-0.08441
17	5.7776	-0.3611	0.64396	-2.27394	-0.14754
23	5.7301	-0.35813	0.61342	-2.20976	-0.11093
24	5.6836	-0.35523	0.67060	-2.20976	-0.04698
25	5.6348	-0.35218	0.43321	-2.20589	-0.16183
26	5.6348	-0.35218	0.49956	-2.0864	-0.1553
27	5.5835	-0.34897	0.67877	-2.14622	-0.05909
34	6.1355	-0.38347	0.66210	-2.23293	-0.20199
35	6.0867	-0.38042	0.66210	32416	-0.07945
36	6.0867	-0.38042	0.52410	-2.20467	-0.17727
37	6.0354	-0.37721	0.69421	-2.26449	-0.19015
45	6.0402	-0.37751	0.57763	-2.35069	-0.15714
46	6.0402	-0.37751	0.66210	-2.2008	-0.13249
47	5.9889	-0.37431	0.52410	-2.26062	-0.20699
56	5.9914	-0.57446	0.67060	-2.34683	-0.03778
57	5.9401	-0.57126	0.63396	-2.14113	-0.1111
67	5.4397	-0.33998	0.62410	-2.22734	-0.1595

Таким образом, полученная конечная модель используется для минимизации получаемого при производстве суперпластификатора осадка.

II. Общие методические положения обработки результатов испытаний.

В общем виде обработка результатов испытаний включает следующие этапы:

1. Предварительные работы:

- а) принять требуемый уровень доверительной вероятности (надежности) или уровень значимости;
- б) рассчитать необходимое число измерений до начала испытаний;
- в) установить допустимый уровень ошибки в определении измерений;
- г) произвести выбор измерительного оборудования.

2. Расчет базовых характеристик ряда:

- а) определить среднее арифметическое ряда;
- б) рассчитать дисперсию или среднее квадратическое ряда;

3. Определить качество проведенных измерений:

- а) определить наличие грубых ошибок;
- б) проверить нормальность распределения;
- в) проверить однородность дисперсий.

4. Установление статистических характеристик:

- а) определить коэффициент вариации;
- б) рассчитать доверительные интервалы;
- в) выполнить технологический анализ полученных результатов.

В общем виде можно выделить две группы технологических задач.

1. Измерить параметр конкретного единичного объекта.

Существует некоторая истинная величина этого параметра, но определить ее трудно, вследствие погрешностей самого процесса измерений. В этом случае ряд измерений его x_1, x_2, \dots, x_{12} называется рядом измерений. Примером такого ряда задач можно привести следующие: измерение величины натяжения в напрягаемой арматуре; определение размеров кристалла в цементном тесте; Концентрация ионов СаО в вытяжке из цементного камня.

2. Измерить параметр группы.

Изделия в ней, по идеи, должны быть абсолютно одинаковыми, однако, в силу множества дефектов структуры и погрешностей в изготовлении отличаются друг от друга.

Такой ряд измерений назовем стахостическим рядом. Его отличием от ряда измерений является то, что истинного значения параметра не существует, каждый отдельно взятый объект измерения имеет свою величину этого параметра. Общим является только то, что существует математическая абстракция, которая указывает на существующий центр группирования большинства значений измеряемого свойства. Реальный смысл приобретают показатели отдельных измерений. В качестве примеров можно привести: определение различных свойств песка, щебня, цемента; определение свойств бетона по результатам испытаний серий образцов-близнецов, специально отобранным из партии.

Общим обоим рядам измерения является то, что разброс показаний носит случайный характер, обработка результатов производится по одним и тем же формулам математической статистики (таблица 1).

Таблица 1

Смысл основных статистических показателей рядов измерения в зависимости от задач исследований

1	Объекты статистических исследований	
	2	3
Среднее арифметическое: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$	Условная, не имеющая физического смысла величина, характеризующая центр группирования большинства значений показателей измеряемого свойства	Характеризует истинное значение измеряемой величины, стремится к ней при $n \rightarrow \infty$ (состоятельность оценки)
Среднее квадратическое отдельного отклонения: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	Вспомогательная величина, характеризующая разброс показателей свойств относительно среднего арифметического	Вспомогательная величина, характеризующая точность измерения
Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100, \%$	Показатель стабильности свойства, точности технологического процесса	Относительная величина среднего квадратического в %
Отклонение отдельного измерения $\varepsilon = \pm t_{\alpha} \cdot \sigma$	Отклонение отдельного измерения от среднего арифметического	Ошибка отдельного измерения
Ошибка среднего арифметического $\varepsilon_{\bar{x}} = \pm t_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Отклонение вероятных значений средних арифметических групп измерений \bar{x} от математического ожидания $M(x)$ - среднего генеральной совокупности	Средняя ошибка измерения истинной величины
Доверительный интервал среднего арифметического $\bar{x} - t_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M(x) < \bar{x} + t_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Пределы вероятных значений \bar{x} групп образцов, партий изделий в генеральной совокупности	Вероятные границы истинного значения измеряемой величины
Размах распределения отклонений $R = \bar{x} \pm 3\sigma$	Вероятные значения максимальной и минимальной абсолютных величин измеряемого параметра	Экстремальные значения результатов измерения
Асимметрия $A = \mu_3 : \sigma^3$	Показатель, используемый для выявления факторов систематически освещающих показатель изучаемого свойства	Показатель характеризующий наличие систематических погрешностей измерений
Экцесс $E = (\mu_4 : \sigma^4) - 3$	Показатель отклонения распределения от нормального вблизи среднего	Показатель отклонения распределения ошибок измерения от нормального вблизи истинного значения

3. Назначение доверительной вероятности

Значения статистических характеристик ряда в значительной степени зависят от принятой величины вероятности события (γ), которая может считаться достаточной для решения конкретной задачи – доверительной вероятности или надежности.

Надежность и точность взаимосвязаны и сопоставление точности возможно при равных значениях надежности.

Можно рекомендовать следующие значения доверительной информации в зависимости от целей и задач исследования:

- когда определяемая величина связана с надежностью сооружения, γ принимается равной 0,9973. В этом случае согласно «правилу трех сигм» событие является практически достоверным; в задачах определения таких свойств как морозостойкость, жесткость смеси достаточен уровень доверительной вероятности 0,95. В расчетах часто используется не величина γ , а производная от нее, уровень значимости, $\alpha = 1 - \gamma$. Уровень значимости характеризует степень риска допустить ошибку при оценке результата измерения.

4. Расчет базовых статистических характеристик выборки

Базовыми являются среднее арифметическое и дисперсия (σ^2).

В выборках малых объемов ($n < 30$) эти характеристики определяются прямым расчетом по формулам:

$$\bar{x} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \cdot \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2.$$

В выборках больших объемов ($n > 60$) допустимо группировать в несколько (10-12) интервалов в пределах от x_{min} до x_{max} . Тогда ряд случайных величин будет состоять из $n = 10-12$ интервалов со средними значениями x_1, x_2, \dots, x_n и числом измерений попавших в данный интервал m_1, m_2, \dots, m_n .

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{\sum_1^n m_i} \cdot \sum_1^n x_i m_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_1^n m_i} \cdot \sum_1^n m_i (x_i - \bar{x})^2$$

Чаще в расчетах используется не дисперсия, а среднее квадратичное ряда: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Средние квадратические отклонения малых выборок допускается вычислять по упрощенным формулам:

$$\sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{K}$$

где x_{max} и x_{min} соответственно наибольший и наименьший результат измерений;

K – коэффициент зависящий от объема выборки (таблица 2)

Таблица 2

Значения коэффициента K в зависимости от объема выборки

Объем выборки	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
К	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	3,17	3,26

5. Определение необходимого числа измерений

Принимая количество измерений (выборка) исследователь должен иметь в виду, что принятое им решение позволило бы правильно оценить всю инженерную совокупность, она должна быть представительной.

Для выполнения этого условия необходимо чтобы:

- образцы для испытаний отбираются в случайном порядке;
- при малых объемах выборок ($n < 30-60$) расчеты параметров распределения производятся не по нормальному закону, а по другим, связанным с ним законами, что позволяет корректировать объем выборки:

χ^2 – распределение Пирсона;

t - распределение Стьюдента;

F – распределение Фишера.

- правильно назначается число образцов в выборке.

При испытаниях, требующих высокой точности результатов объем выборки принимается $n \geq 60$, при рядовых испытаниях $n = 12$, достаточность которого затем проверяется по показателям однородности выборки (таблица 3)

Таблица 3

Расчеты объемов выборок

Виды работ	Сведения, которыми располагает эксперимент	Расчетные формулы	Примечание
Проверка достаточности объема выборки n , который принят интуитивно или по рекомендациям нормативных документов. Испытания производены	Допустимая величина Δ в определении x , в абсолютных величинах. Принимается по нормативным документам или задается. Уровень значимости α - задается	$n \geq \left(\frac{t_\alpha \cdot \sigma}{\Delta}\right)^2 \cdot /8/$ $n \geq \left(\frac{t_\alpha \cdot V}{\delta}\right)^2 \cdot /9/$	t_α - из распределения Стьюдента σ, V и $\delta = \frac{\Delta}{x}$ - определяются из выборки
	То же и объем генеральной совокупности N	$n = \frac{t_\alpha^2 \cdot V^2 \cdot N}{\delta \cdot N + t_\alpha^2 V^2} /10/$	
Расчет необходимого объема выборки до начала испытаний	Коэффициент вариации V , % по результатам предыдущих испытаний. Уровень значимости α - задается, δ (см. выше) – по результатам предыдущих испы-	Рассчитывается по формулам /8/, /9/, или /10/ методом шагового приближения. На первом шаге t_α принимается из условия $n \geq 60$. Если $n_{\rho_1} \neq 60$ на втором шаге t_α принимаются из условия $n = n_{\rho_1}$. Если по расчету $n_{\rho_1} \neq n_{\rho_2}$, то принимаются $n = n_{\rho_2}$ и т.д. до тех пор, пока они не сравняются. $n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, n_{\rho_3}$ и т.д. – расчетные значения объемов выборок на 1, 2, 3 и т.д. шагах приближения	

	таний или задается в пределах 1-10%		
Планируется сравнение средних двух выборок x_1 и x_2 . Необходимо определить их объемы n_1 и n_2 , при которых сравнение корректно	$\rho = \left(\frac{\bar{x}_1}{x_2} - 1\right)^2 \cdot 100$, в % - предельная величина различия между x_1 и x_2 , которая признается несущественной. V см. выше	$n_1 = n_2 = n_i$ $n_i = [V^2 + V^2 \cdot (\rho + 1)^2 \cdot t_\alpha^2 \cdot \rho^{-2}] / 11/$	Величина ρ принимается положительной
	То же и объем одной из выборок, например, n_1	$n_2 = \frac{t_\alpha^2 \cdot V^2 \cdot (\rho + 1)^2}{\rho^2 - t_\alpha^2 \cdot V^2 \cdot n_1^{-1}} / 12/$	

Определение грубой ошибки

Для определения грубой ошибки, одно из измерений, которое в наибольшей мере (независимо от знака) отклоняется от среднего, принимается ошибочным (x_{ep}) по причине небрежности экспериментатора, выхода из строя прибора и т.д.

Измерение можно признать грубой ошибкой, если

$$\frac{x_{ep} - \bar{x}}{\sigma} \geq \tau_\alpha, \quad (1)$$

где τ_α - табличная величина, принимается из таблицы 4.

Таблица 4

Критические точки некоторых статистических распределений

	τ_α - критерий			t_α - распределение Стьюдента			q - распределение		
	0,05	0,01	0,001	0,05 *	0,01 *	0,001 *	0,05	0,01	0,001
	Уровни значимостей, $\alpha = 1 - \gamma$								
				0,1	0,02	0,002			
2	15,56	77,96	779,7	2,92	6,97	22,33	-	-	-
4	3,56	6,58	14,47	2,13	3,75	7,17	1,37	2,67	5,64
6	2,77	4,35	7,41	1,94	3,14	5,21	1,09	2,01	3,88
8	2,51	3,71	5,73	1,86	2,90	4,50	0,80	1,38	2,42
10	2,37	3,41	5,01	1,81	2,76	4,14	0,65	1,08	1,80
12	2,29	3,23	4,62	1,78	2,68	3,93	0,55	0,90	1,45
14	2,34	3,12	4,37	1,76	2,62	3,79	0,48	0,78	1,23
16	2,19	3,04	4,19	1,75	2,58	3,69	0,44	0,70	1,07
18	2,17	2,99	4,07	1,73	2,55	3,61	0,40	0,63	0,96
20	2,14	2,98	3,98	1,73	2,58	3,55	0,37	0,58	0,88
25	2,11	2,86	3,84	1,71	2,49	3,47	0,32	0,49	0,73
30	2,08	2,80	3,72	1,65	2,34	2,96	0,28	0,43	0,63
60	2,018	2,683	3,402	1,65	2,34	2,96	0,188	0,269	0,380
120	1,988	2,628	3,388	1,65	2,34	2,96	0,115	0,160	0,211

* обозначении уровней значимости распределения Стьюдента принято: в числителе для односторонней, в знаменателе для двухсторонней критических областей.

Признанное из расчета измерение, соответствующее грубой ошибке, исключается из ряда. Вновь рассчитываются значения \bar{x} и σ и определяется возможная грубая ошибка. Так пока не будет выполнено неравенство (1).

6. Проверка нормальности распределения.

Для малых выборок ($n < 10$) нормальность распределения можно определять по формуле:

$$\sigma \approx (x_{\max} - x_{\min}) \cdot K_w$$

где K_w принимается по таблице 5

Таблица 5

Значения K_w для оценки σ по размаху выборки объемом $n < 10$

n	K_w
2	0,8862
3	0,5908
4	0,4857
5	0,4299
6	0,3948
7	0,3398
8	0,3512
9	0,3367
10	0,3249

В выборках объемом больше 10 целесообразно определять следующие показатели:

$$\text{Коэффициент асимметрии } A = M_3 : \sigma^3$$

$$\text{и эксцесс } E = (M_4 : \sigma^4) - 3,$$

где M_3 и M_4 - моменты третьего и четвертого порядка, определяемые по формуле:

$$M_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$$

Для оценки значимости A и E используют то положение, что в нормальном распределении они равны нулю. Поэтому, если доверительные интервалы A и E (таблица 8) покрывают с принятой надежностью нуль, то можно предположить, что отмеченные отклонения вызваны малым числом измерения и при $n \rightarrow \infty$ A и $E \rightarrow 0$.

7. Оценка однородности образцов.

Для оценки однородности ряда чисел измерения принимается коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Коэффициент вариации является величиной относительной, не зависит от абсолютных значений ряда и может быть использован для сравнения однородной продукции различных партий. Применительно к прочности бетона на сжатие, стабильность качества продукции, может быть оценена по пятибальной шкале

Оценка однородности бетона по прочности	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Коэффициент вариации, %	менее 6	6-10	10-16	более 16

Коэффициент однородности - отношение минимальной, по возможности, прочности (R_{min}) к нормативной (заданной марке), который нормируется СНБ

$$K_{одн} = \frac{R - 36}{R_{нор}}$$

Коэффициент однородности бетона по прочности (СНБ)

Вид напряжения	Коэффициент однородности при марке бетона	
	B20	B25 и более
Осевое сжатие при изгибе	0,55	0,6
Растяжение	0,45	0,55

8. Сравнение характеристик нескольких выборок:

Для решения поставленной задачи выдвигается гипотеза (H_0) о том, что сравнение выборки принадлежит к одной генеральной совокупности. При этом считается, что различия между \bar{x} и \bar{y} сравниваемых выборок обусловлены естественным разбросом, а их генеральные характеристики равны (нулевая гипотеза):

$$H_0 : M(x) = M(y)$$

Одновременно выдвигается и конкурирующая гипотеза (H_1) о неравенстве генеральных оценок, так как всегда одна из величин ($\bar{x} > \bar{y}$), для удобства расчетов конкурирующая гипотеза формулируется как:

$$H_1 : M(x) > M(y)$$

По данным сравниваемых выборок вычисляется наблюдаемый критерий ($K_{набл}$) сравнивается с соответствующей табличной критической величиной ($K_{кр}$) при заданном уровне значимости. Если $K_{набл} < K_{кр}$, принимается нулевая гипотеза, если $K_{набл} > K_{кр}$ – конкурирующая с риском α допускает ошибку (таблица 7)

Таблица 7

Формулы для сравнения статистических характеристик малых выборок

Вид сравнения	Характеристики выборок	Наблюдаемый критерий	Критическая величина
Сравнение дисперсий (однородности продукции) независимых выборок	Для выборки с $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F_{набл} = \sigma_1^2 / \sigma_2^2 / 22/$	$F_{кр}$ из распределения Фишера, по табл.9
	Несколько выборок равных объемов. Проверяется по максимальной, из всех сравниваемых выборок, дисперсии - σ_{max}^2	$G_{набл} = \frac{\sigma_{max}^2}{\sum_1^n \sigma_i^2} / 23/$	$G_{кр}$ – Кохрена по табл.10

Сравнение средних арифметических допустимо после принятия гипотезы о равенстве σ^2	Две выборки со средними арифметическими \bar{x} и \bar{y} объемами соответственно n_x и n_y	$T_{набл.} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n_x \cdot \sigma_x^2 + n_y \cdot \sigma_y^2}} \cdot x$ $x \sqrt{\frac{n_x \cdot n_y \cdot (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}$	t_α из t - распределения Стьюдента, табл.4								
Сравнение двух зависимых выборок (когда x_i одной выборки и y_i другой относятся к одной и той же измеренной величины)	<p style="text-align: center;">Ряды</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>...</td> <td>x_n</td> </tr> <tr> <td>y_1</td> <td>y_2</td> <td>...</td> <td>y_n</td> </tr> </table> <p>заменяются одним рядом d_1, d_2, \dots, d_n состоящим из парных значений $d_i = x_i - y_i$ для нового ряда определяются \bar{d} и σ_d</p>	x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_n	$T_{набл.} = \frac{\bar{d} \cdot \sqrt{n}}{\sigma_d}$	t_α из t - распределения Стьюдента, табл.4
x_1	x_2	...	x_n								
y_1	y_2	...	y_n								

9. Определение доверительных интервалов

Свойство нормального распределения, в действительности, обеспечивает оценку ряда не только одной величины, их называют точечными, но и позволяет определять измерения разбросанные симметрично средней. В силу случайностей их размеров правильно любую величину определять двумя цифрами: началом и концом их вероятного значения или интервалом.

Так как действительное значение относительного параметра неизвестно, то рассчитывается такая интервальная оценка, которая с заданной надежностью показывает возможное значение этого параметра – доверительный интервал. Отклонение единичного измерения от среднего определяется по формуле:

$$\varepsilon = \pm t_\alpha \cdot \sigma$$

Для рядов с $n > 30$ величина t_α принимается по распределению Лапласа $2\Phi(t)$, а при $n < 30$ величина t_α принимается из распределения Стьюдента (таблица 4).

Если измерения равноточны и независимы, количественный признак генеральной совокупности распределен нормально.

Сама генеральная совокупность тогда оценивается с помощью выборок и вероятная ошибка в оценке $M(x)$ с помощью \bar{x} равна :

$$\varepsilon = \pm t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Важным обстоятельством является то, что ошибка измерения зависит от числа опытов n . Поэтому, если возникает необходимость повысить точность измерения, необходимо увеличить число измерений n .

Таблица 8

Доверительные интервалы основных числовых характеристик распределения

Характеристика распределения	Большая выборка, $n > 30$; t_α - определяется по распределению Лапласа	Малая выборка, $n < 30$; t_α определяется по распределению Стьюдента
Единичное измерение x_i	$\bar{x} - t_\alpha \cdot \sigma \langle x_i \rangle \langle \bar{x} + t_\alpha \cdot \sigma \rangle$ /28/	$\bar{x} - t_\alpha \cdot \sigma \langle x_i \rangle \langle \bar{x} + t_\alpha \cdot \sigma \rangle$ /28/
Математическое ожидание или истинная величина $M(x)$	$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle M(x) \rangle \langle \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rangle$ /29/	$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle M(x) \rangle \langle \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rangle$ /29/
Среднее квадратическое генеральной совокупности M / σ	$\sigma - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \langle M(\sigma) \rangle \langle \sigma + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \rangle$ /30/	$\sigma(1 - q_\alpha) \langle M(\sigma) \rangle \langle \sigma(1 + q_\alpha) \rangle$ /31/
Коэффициент асимметрии, А	$A - t_\alpha \sqrt{\frac{c(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \langle M(A) \rangle \langle A + t_\alpha \sqrt{\frac{c(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \rangle$ /32/	Не вычисляется
Экцесс, Е	$E - t_\alpha \sqrt{\frac{24(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \langle M(E) \rangle \langle E + t_\alpha \sqrt{\frac{24(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \rangle$ /33/	Не вычисляется

Таблица 9

Критические точки F – распределения Фишера при $\alpha = 0,05$, f_1 – число степеней свободы большей дисперсии, f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии

f_1/f_2	1	2	3	4	5	6	10	20	50	100	
1	161	200	216	255	230	234	242	248	252	253	254
2	18,51	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,39	19,44	19,47	19,49	19,56
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,78	8,66	8,58	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	5,96	5,80	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,74	4,56	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,06	3,87	3,75	3,71	3,67
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,34	3,15	3,03	2,98	2,93
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	2,97	2,77	2,64	2,59	2,54
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,55	2,33	2,18	2,12	2,07
20	4,85	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,35	2,18	1,96	1,90	1,84
40	4,08	3,28	2,84	2,61	2,45	2,34	2,07	1,84	1,66	1,59	1,51
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	1,92	1,68	1,48	1,39	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,45	2,26	2,14	1,87	1,62	1,42	1,32	1,19
	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,83	1,57	1,35	1,24	1,00

При прямых измерениях для определения вероятностной ошибки достаточно вычислить σ из выборки и без каких-либо трансформаций подставить в формулу. При косвенных измерениях, когда изучаемая величина измеряется не прямо, а через другую, зависящую от нее, найденное по выборке значение σ следует скорректировать.

Таблица 10

G кр. Кохрена для уровня значимости $\alpha = 0,05$

Число опытов в выборке	Число сравниваемых выборок					
	3	4	5	6	7	8
3	0,9750	0,7679	0,6161	0,4775	0,2705	0,1134
4	0,9392	0,6841	0,5821	0,4027	0,2205	0,0895
5	0,9057	0,6287	0,4803	0,3584	0,1921	0,0766
6	0,8584	0,5895	0,4447	0,3286	0,1785	0,0682
7	0,8534	0,5598	0,4184	0,3067	0,1602	0,0623
8	0,8332	0,5865	0,3980	0,2901	0,1501	0,0583
10	0,8010	0,5017	0,3682	0,2659	0,1357	0,0520
17	0,7341	0,4366	0,3135	0,2226	0,1108	0,0411
37	0,6602	0,3720	0,2612	0,1820	0,0879	0,0316
145	0,5813	0,3093	0,2119	0,1446	0,0675	0,0234
	0,5000	0,2500	0,1667	0,1111	0,0500	0,01667

Пусть результат измерения y представляет собой функцию одной или нескольких измеренных величин, т.е. $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ каждая из них характеризуется своим значением σ и между собой независимы. Требуется определить σ величины y . Для различения будем обозначать выборочный стандарт σ по принадлежности к функции и аргументу таким образом: $\sigma\{y\}$ или $\sigma^2\{y\}$

Пусть результат измерения y представляет собой функцию одной или нескольких измеренных величин, т.е. $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Каждая из них характеризуется своим значением σ и между собой независимы.

Требуется определить σ величину y . Для разграничения обозначим выборочный стандарт σ по принадлежности к функции и аргументу таким образом: $\sigma\{y\}$ или $\sigma^2\{y\}$ и $\sigma\{x\}$ и $\sigma^2\{x\}$ и т.д. вплоть до $\sigma\{x_n\}$ и $\sigma^2\{x_n\}$. Тогда суммарная ошибка функции определяется как:

$$\sigma^2\{y\} = \left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_1\} + \left(\frac{dy}{dx_2}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_2\} + \dots + \left(\frac{dy}{dx_n}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_n\}$$

Для упрощения расчетов суммарной ошибки можно пользоваться данными таблиц 11 и 12, рассчитанными по выражению для расчета ошибки функции.

Таблица 11

Приближенное определение ошибки функции одного переменного
(a, b, c – постоянные величины)

№№ п/п	$y=f(x)$	Стандартная ошибка $\sigma\{y\}$
1	$a \cdot x$	$a\sigma\{x\} / 35/$
2	$a \cdot x + b$	$a\sigma\{x\} / 36/$

3	$\frac{c}{a \cdot x \pm b}$	$\frac{a \cdot c}{(ax \pm b)^2} \cdot \sigma\{x\}$ /37/
4	$b \cdot x^a$	$ab\bar{x}^{a-1} \cdot \sigma\{x\}$ /38/
5	\sqrt{ax}	$\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \cdot \sigma\{x\}$ /39/
6	$\frac{ax}{b \pm cx}$	$\frac{ab}{(b \pm cx)^2} \cdot \sigma$ /40/
7	e^{ax}	$av \cdot \ln b \cdot \sigma\{x\}$
8	l^{ax}	$a \cdot l^{ax} \cdot \sigma\{x\}$
9	x^x	$\bar{x}^{\bar{x}}(1 + \ln \bar{y}) \cdot \sigma\{x\}$ /43/
10	$\ln x$	$\frac{1}{\bar{x}} \cdot \sigma\{x\}$ /44/
11	$lg x$	$\frac{0,434}{x} \cdot \sigma\{x\}$ /45/
12	$a \pm bx \pm cx^2$	$(\pm b \pm 2c\bar{x}) \cdot \sigma\{x\}$ /46/

Таблица 12

Приближенное определение ошибки функции нескольких переменных
(a, b, c – постоянные величины)

№№ п/п	$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Квадрат абсолютной ошибки $\sigma^2\{y\}$
1	$ax_1 + bx_2 + cx_3 \dots$	$a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 + \dots$ /47/
2	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1^2 \cdot \bar{x}_2^2 \cdot \bar{x}_3^2 \left(\frac{\sigma_1^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\bar{x}_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{\bar{x}_3^2} \right)$ /48/
3	$x_1(x_2 + x_3)$	$(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)^2 \cdot \sigma_1^2 + \bar{x}_1^2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)$ /49/
4	$\frac{x_1 \pm x_2}{x_3 \pm x_4}$	$\left(\frac{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2}{\bar{x}_3 \pm \bar{x}_4} \cdot \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)^2} + \frac{\sigma_3^2 + \sigma_4^2}{(\bar{x}_3 \pm \bar{x}_4)^2} \right] \right)$ /50/
5	$\frac{x_1}{x_2}$	$\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right) \left(\frac{\sigma_1^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\bar{x}_2^2} \right)$ /51/

10. Измерительная аппаратура

Выбор измерительной аппаратуры производится с учетом «класса точности» по максимальной величине погрешности единичного измерения по формуле:

$$\Delta_{max} = \frac{x_{max} \cdot \Delta_T}{100},$$

где Δ_T – класс точности;

x_{max} – наибольшее значение шкалы прибора;

Для случая, когда необходимую информацию получают по одному измерению, требуется соблюдение условия:

$$\varepsilon \leq \Delta_{max}.$$

Вычисленное среднеквадратическое отклонение группы измерений вычисленное из выражения:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

то среднеквадратическое прибора можно ориентировочно определить из «правила трех сигм»

$$\Delta_{\max} = 3\sigma \text{ или } \sigma = 1/3\Delta_{\max}$$

Если задаться числом измерений n , обычно в пределах 6-12 измерений, то можно определить необходимый класс точности измерительной аппаратуры:

$$\Delta_T \leq \frac{300 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{n}}{t_\alpha \cdot X_{\max}},$$

а число измерений определяется как:

$$n = \sqrt{\frac{t_\alpha \cdot X_{\max} \cdot \Delta_T}{300 \cdot \varepsilon}}$$

Дисперсия ошибки измерения определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{приб}} = \frac{1}{12} \Delta^2,$$

среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{приб}} = 0,289\Delta$

Максимальная ошибка измерения согласно «правилу трех сигм» равна $3\sigma = 3 \cdot 0,289\Delta = 0,866\Delta$ или, округленно, $\pm \Delta$.

Если принять доверительную вероятность равной 0,95, то ошибка измерения будет равна $1/2 \Delta$.

При получении косвенных измерений измерительное оборудование и число измерений подбирают таким образом, чтобы суммарная ошибка функции не превысила допустимую.

Так как $\varepsilon_T = t_\alpha \cdot \frac{\sigma\{y\}}{\sqrt{n}}$ легко получить $\sigma\{y\} = \frac{\varepsilon_T \cdot \sqrt{n}}{t_\alpha}$.

Иногда задаются величиной дисперсии исходя из максимального допустимого отклонения:

$$\sigma^2\{y\} = \frac{1}{3} \Delta_{\max}^2$$

Имея значения $\sigma\{y\}$ или $\sigma^2\{y\}$ функции $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ находят (обратная задача) допустимые значения $\sigma\{x\}$ или $\sigma^2\{x\}$ из выражения :

$$\sigma\{y\} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{d \cdot y}{d \cdot x_i}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_i\}}$$

Так как получается одно уравнение с n неизвестным ($\sigma^2\{x_1\}, \sigma^2\{x_2\}, \dots, \sigma^2\{x_n\}$), то для определения их значений необходимо пользоваться одним из способов:

1. Способ попыток. Значение $\sigma\{x_i\}$ или $\sigma^2\{x_i\}$ подбирают на основе априорной информации.

2. Способ равного класса точности.

При $\sigma\{x_1\} = \sigma\{x_2\} = \sigma\{x_n\} = \sigma\{x\}$

Тогда $\sigma\{x\} = \frac{\sigma\{y\}}{\sqrt{\sum_1^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

3. Способ равного влияния.

При $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_1\} = \left(\frac{dy}{dx_2}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_2\} = \dots = \left(\frac{dy}{dx_n}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x_n\} = c^2$, тогда

$$c \leq \frac{\sigma\{y\}}{\sqrt{n}}; \quad \sigma\{x_i\} = \frac{c}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

4. Способ равного допуска по предельным погрешностям.

Принимаются значения $2\sigma\{y\}$ или $3\sigma\{y\}$, а от значений $\sigma\{x_i\}$ переходят к соответствующим величинам предельных погрешностей. Затем эти погрешности находят способом равного класса или равного влияния.

Если говорить о точности вычисления ошибок, то если σ вычислено по малой выборке, оно является грубой оценкой $M(\sigma)$ с σ можно производить по формуле:

$$\sigma_{M(\sigma)}^2 = \frac{\sigma^2}{2(n-1)}$$

Подставив вместо n ряд чисел, можно получить вероятную погрешность оценки $M(\sigma)$ с помощью σ и ориентировочное число значащих цифр в оценке $M(\sigma)$.

Второй прием округления заключается в отбрасывании некоторых членов уравнения для случая, когда одни члены пренебрежимо малы по сравнению с другими.

Например, имеем функцию:

$$y = x_1 + x_2$$

Среднеквадратические ошибки их соответственно равны

$$\sigma\{x_1\} = 2,5 \text{ и } \sigma\{x_2\} = 0,3. \text{ Тогда}$$

$$\sigma\{y\} = \sqrt{2,5^2 + 0,3^2} = \sqrt{6,25 + 0,09} = 2,518$$

Как видно, $\sigma\{y\}$ незначительно отличается от $\sigma\{x_1\}$ и без ущерба для точности, ошибкой в измерении x_2 можно пренебречь и принять

$$\sigma\{y\} = \sigma\{x_1\} = 2,5$$

Графическое изображение вариационного ряда.

Для графического изображения вариационного ряда строят полигоны, гистограммы и кумулятивные кривые.

Полигоны строят по данным дискретного вариационного ряда, построив прямоугольную координатную систему (рисунок 1) по оси абсцисс откладывают дискретные значения x :

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \text{ а по оси ординат – частоты } m: m_1, m_2, \dots, m_k$$

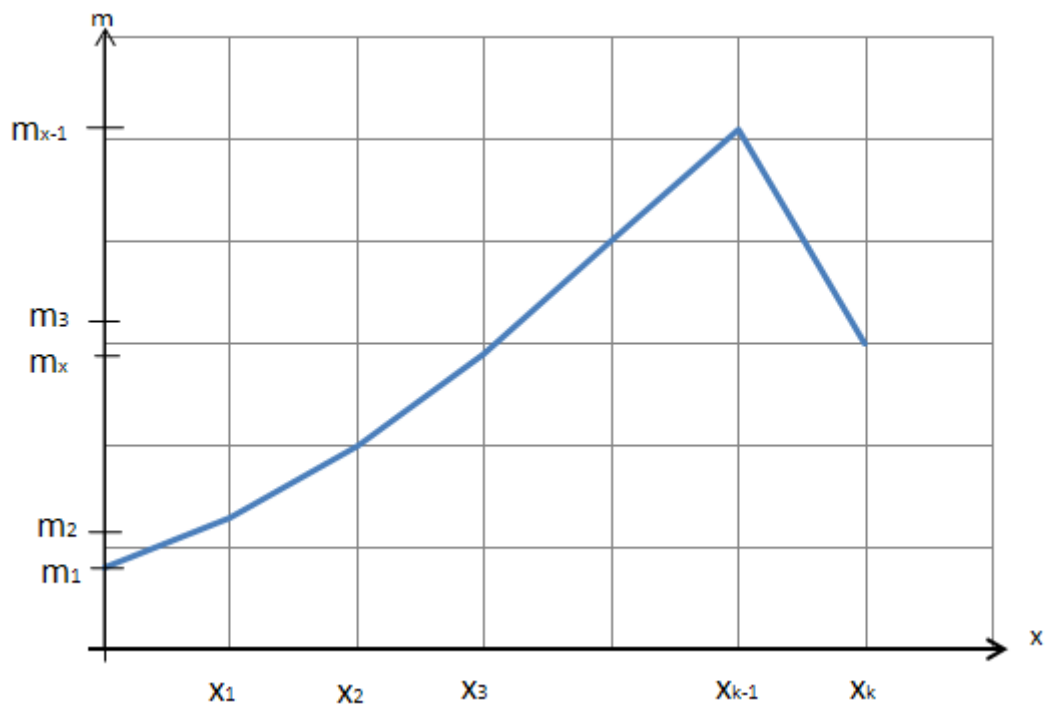


Рисунок 1

Построение полигона частоты для дискретной вариации.

На пересечении перпендикуляров, проведенных из соответствующих точек на осях x и m , получают точки, которые соединяют ломанной линией, изображающей распределение в виде полигона частоты.

Гистограмму строят по данным непрерывного вариационного ряда. По оси абсцисс откладывают интервалы $x'_1 - x''_1, x'_2 - x''_2$ и т.д.; по оси ординат – частоты m_1, m_2, \dots, m_k . Из левого и правого концов интервала проводят два перпендикуляра, которые пересекаясь с перпендикуляром, проведенным к оси ординат в точку с соответствующей ординатой m дают совокупность прямоугольников (рисунок 2). Это изображение и представляет собой распределение в виде гистограммы частоты.

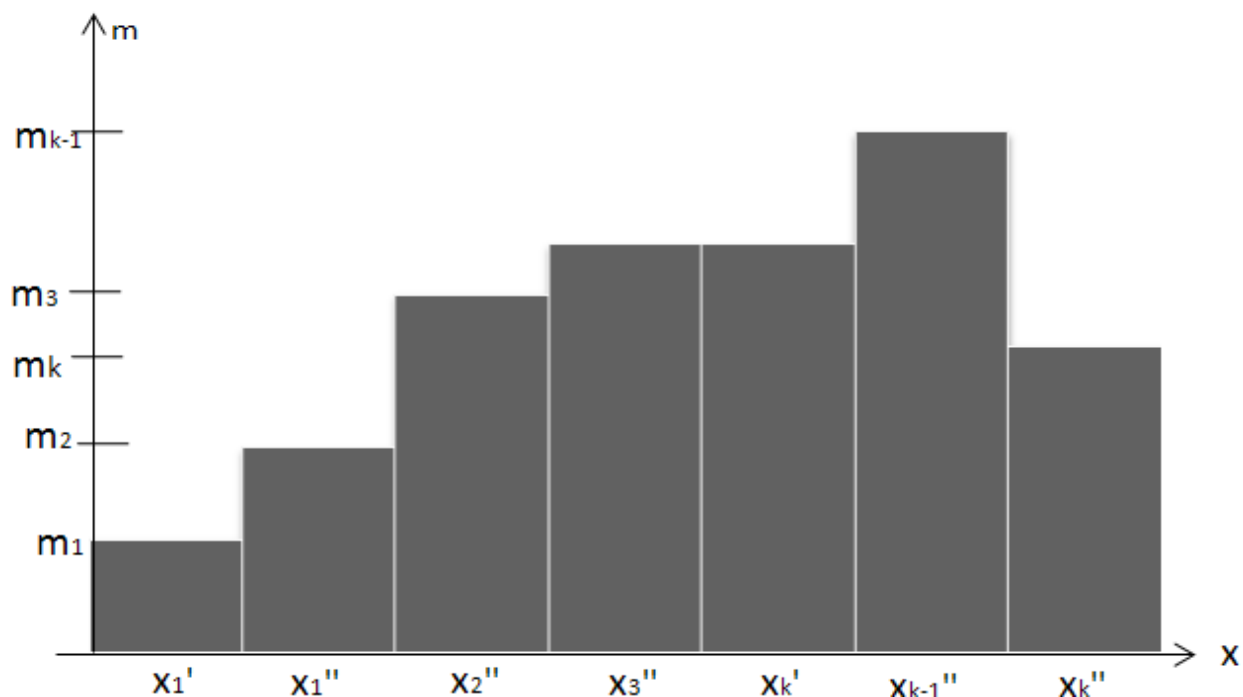


Рисунок 2 Построение гистограммы частоты (частости) для непрерывной вариации.

Кумулятивную кривую строят, откладывая по оси абсцисс значения вариационного ряда x_1, x_2, \dots, x_k , а по оси ординат – накопление частоты γ по формулам

$$\gamma_1 = m_1;$$

$$\gamma_2 = m_1 + m_2;$$

$$\gamma_i = m_1 + m_2 + \dots + m_i$$

где γ_1 - накопленная частота 1-го интервала;

γ_2 - тоже, 2-го интервала;

γ_i - i -го интервала

Точки пересечения перпендикуляров, проведенных из соответствующих точек, затем соединяют плавной линией (рисунок 3)

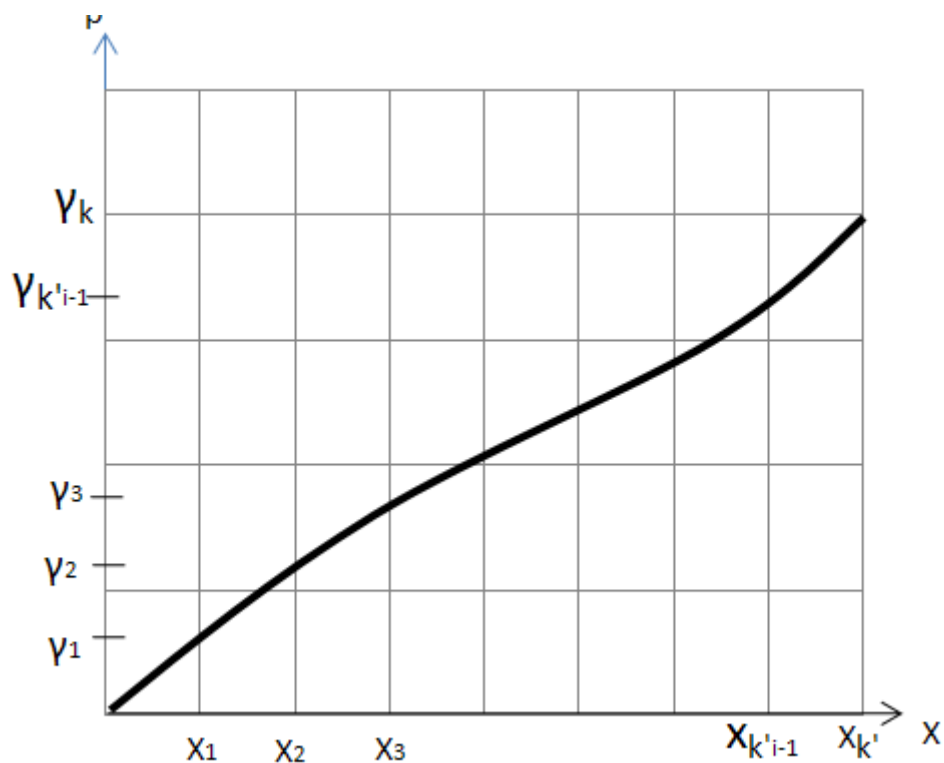


Рисунок 3. Построение кумулятивной кривой
Основные распределения.

При сглаживании вариационных рядов, полученных при обработке экспериментальных данных, используют несколько видов распределения. Применяемое нормальное распределение $N(a, \sigma)$ полностью определяемое двумя параметрами – математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 выражается в виде графика (рисунок 4)

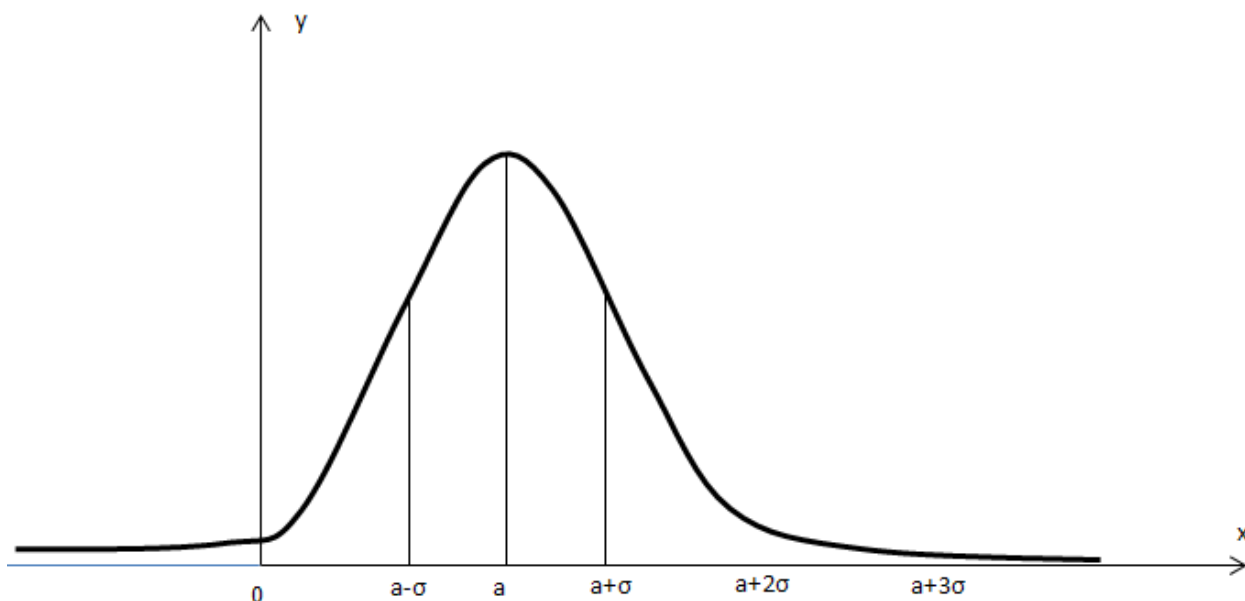


Рисунок 4. График кривой нормального распределения.

Плотность нормального распределения выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\pi = 3,14\dots$; $e = 2,71\dots$

Для конкретного случая асимметрия A и эксцесс τ нормального распределения равны нулю.

Для нахождения теоретического нормального распределения по экспериментальным данным применяется следующая методика:

- строится расчетная таблица для определения сводных статистических характеристик;
- вычисляются характеристики \bar{x} и σ ;
- составляется расчетная таблица теоретического распределения (таблица 1)

1)

Таблица 1

$x' - x''$	m	t_1	t_2	$\Phi(t_1)$	$(i=1, 2, \dots, \kappa)$	P	m_i
1	2	3	4	5	6	7	8
$x'_1 - x''_1$	m_1	t_{11}	t_{21}	$\Phi(t_{11})$	$\Phi(t_{21})$	P_1	m_1
$x'_\kappa - x''_\kappa$	m_κ	$t_{2\kappa}$	$t_{2\kappa}$	$\Phi(t_{11})$	$\Phi(t_{21})$	P_κ	m_κ
\sum	n	-	-	-	-	-	n_1

В графе записываются левые нормированные отклонения, вычисленные по формуле: $t_{1i} = \frac{x'_i - \bar{x}}{\sigma}$ ($i=1, 2, \dots, \kappa$)

В графе 4 – правые нормированные отклонения, определяемые по формуле:

$$t_{2i} = \frac{x''_i - \bar{x}}{\sigma} \quad (i=1, 2, \dots, \kappa)$$

В графе 5 проставляются значения функции $\Phi(t_1)$, соответствующие значениям t_1 , приведенным в графе 3; в графе 6 даны значения функции $\Phi(t_2)$, соответствующие значениям t_2 в графе 4.

В графе 7 записывается величина P , определенная по формуле

$$P = [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] \cdot \frac{1}{2}$$

В графе 8 приводятся теоретические частоты m_i

Значения функции*

$$\Phi_y = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \int_0^y e^{-t^2/2} dt}$$

даны в таблице (см. приложение Б, таблица 1).

Полученные значения m_i , соответствующие серединам выбранных интервалов x , наносятся на график в виде ординат. Соединяя эти ординаты плавной кривой, получают теоретический график.

На практике часто пользуются наряду с функцией $\Phi(y)$ функцией

$$F_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt$$

Между $F_0(y)$ и $\Phi(y)$ существует зависимость

$$F_0(y) = \frac{1}{2} + \Phi(y)$$

Пример вычисления теоретических частот приведен в приложении (пример 2).

Изменчивость характеристик прочности хрупких строительных материалов и конструкций из них хорошо описывается распределением Вейбулла (рис.5), имеющим плотность вероятностей.

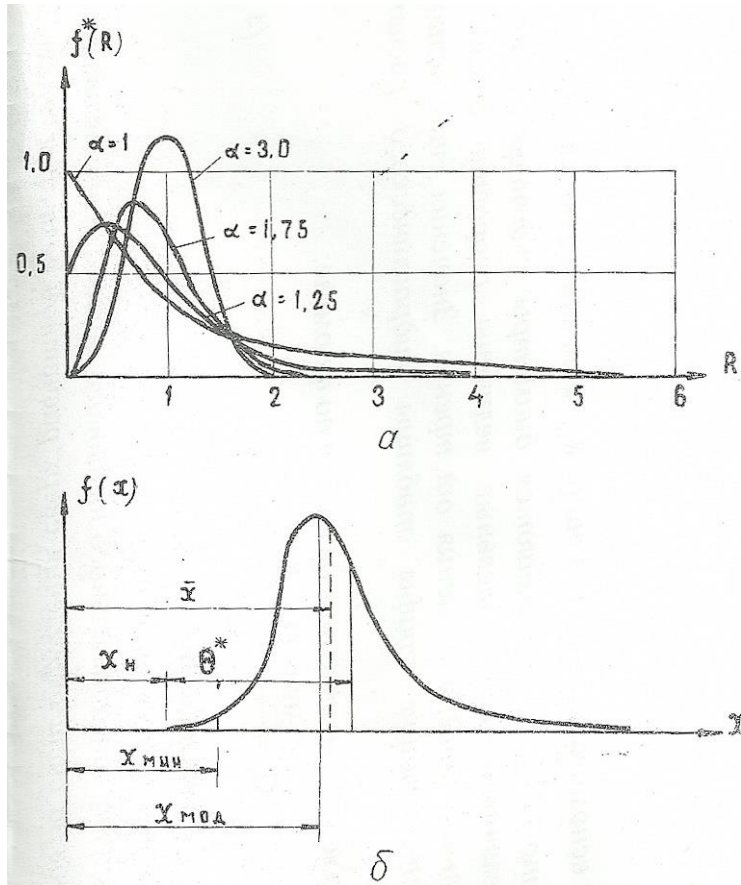


Рисунок 5. Графики кривых распределения Вейбулла:

а) семейство кривых распределения Вейбулла для разных значений параметра α ;

б) общий случай кривой распределения Вейбулла.

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0} (x - x_n)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-x_n)}{x_0}},$$

где x_0 , x_n , α - параметры распределения.

При $x_n=0$ получаем предельное распределение Вейбулла с плотностью

$$f^*(x) = \frac{\alpha}{x_0} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha/x_0}$$

Для обработки экспериментальных данных принимается следующая методика, использующая распределение Вейсбулла:

а) по опытным данным строят интервальный вариационный ряд;

б) Вычисляют сводные статистические характеристики;

в) определяют значения параметра x_n следующим образом:

- составляется разность $\bar{x} - 3\sigma(x_1')$;

x_n вычисляют по формуле

$$x_n = \bar{x} - 3\sigma;$$

если же $\bar{x} - 3\sigma \geq x_1'$,

по формуле $x_n = x_1'$,

где x_1' - левый конец первого интервала вариационного ряда;

г) вычисляют статистические характеристики для предельного распределения по формулам

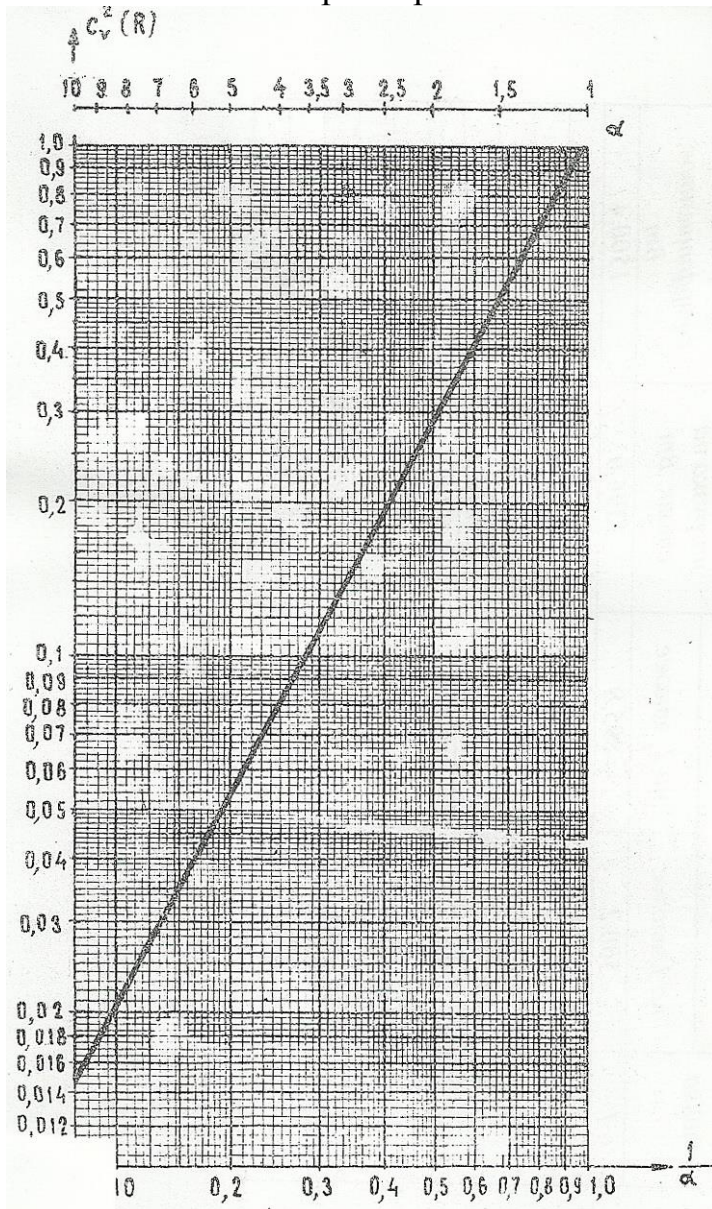
$$\bar{x}^* = \bar{x} - x_n;$$

$$\sigma^* = \sigma_1;$$

$$c_v^* = \sigma^* / \bar{x}^*;$$

д) пользуясь таблицей по величине c_v^* находят соответствующие значения α^* параметра предельного распределения (см. Приложение Б, табл.2)

Это же значение параметра α^* может быть определено по графику (рис.6);



е) значение параметра x_0^* вычисляют по формуле:

$$x_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - x_n)^{\alpha^*};$$

ж) теоретические частоты предельного распределения Вейбулла

$$m_i^* = \frac{hnf_1(t)}{Q^*}.$$

Вычисления по формуле () производят следующим образом:

Зная параметр $Q^* = (x_0^*)^{1/\alpha^*}$, находят значение аргумента t из соотноше-

ний

$$t_i = x_i^*/Q^*, \quad i=1, 2, \dots, k;$$

$$x_i^* = x_i - x_n.$$

Из таблицы 7 по заданным $\alpha^* = 1,00$ t_i определяют соответствующие значения вспомогательных функций для распределения Вейбулла

$$f_1(t_i) = \alpha^* t_i^{\alpha^*-1} \exp(-t_i^{\alpha^*})$$

В таблице приведены значения функции распределения Вейбулла
 $F(t)=1-e$

Эта функция применяется при оценке степени соответствия эмпирического и теоретического распределения. Вычисления для удобства проводят в табличной форме

x	m	x*	t	f(t)	m _T *
x ₁	m ₁	x ₁ *	t ₁	f ₁ (t ₁)	m _{T1}
x _k	m _k	x _k *	t _k	f ₁ (t _k)	m _{Tk}
∑	n				n _T *

Примечание: Значения m_{Ti} , которые соответствуют x_i^* , переходят в m_{Ti} для соответствующих значений x_i , (т.е. число m_{T1}^* , показывающее частоту появления значения x_1^* равно частоте m_{T1} появления значения x_1 и т.д.).

Определение теоретических частот приведено в примере (приложение).

Таблица

x	m	m _T
x	m ₁	m _{T1}
...
x _k	m _k	m _{Tk}

Кроме изложенного выше приближенного метода определения параметров теоретического распределения Вейбулла (x_n, α, x_0) , по экспериментальным данным можно получить оценки параметров, пользуясь формулами, составленными на основе метода максимума правдоподобия:

$$\alpha^* = \left[\frac{\sum_{i=1}^k m_i (x_i - x_n) \ln(x_i - x_n)}{\sum_{i=1}^k m_i (x_i - x_n)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i \ln(x_i - x_n) \right]$$

$$x_n = x_e + m_e \left[\frac{-\alpha n \sum_{i=1}^k m_i (x_i - x_n)}{(\alpha^* - 1) \sum_{i=1}^k (x_i - x_n)^{\alpha^*}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq e}}^k \frac{m_i}{x_i - x_n} \right]^{-1}$$

Однако этот метод требует специальной подготовки и при условии применения быстродействующих вычислительных машин.

Проверить соответствие эмпирического и теоретического распределения можно также, применив вероятностную бумагу.

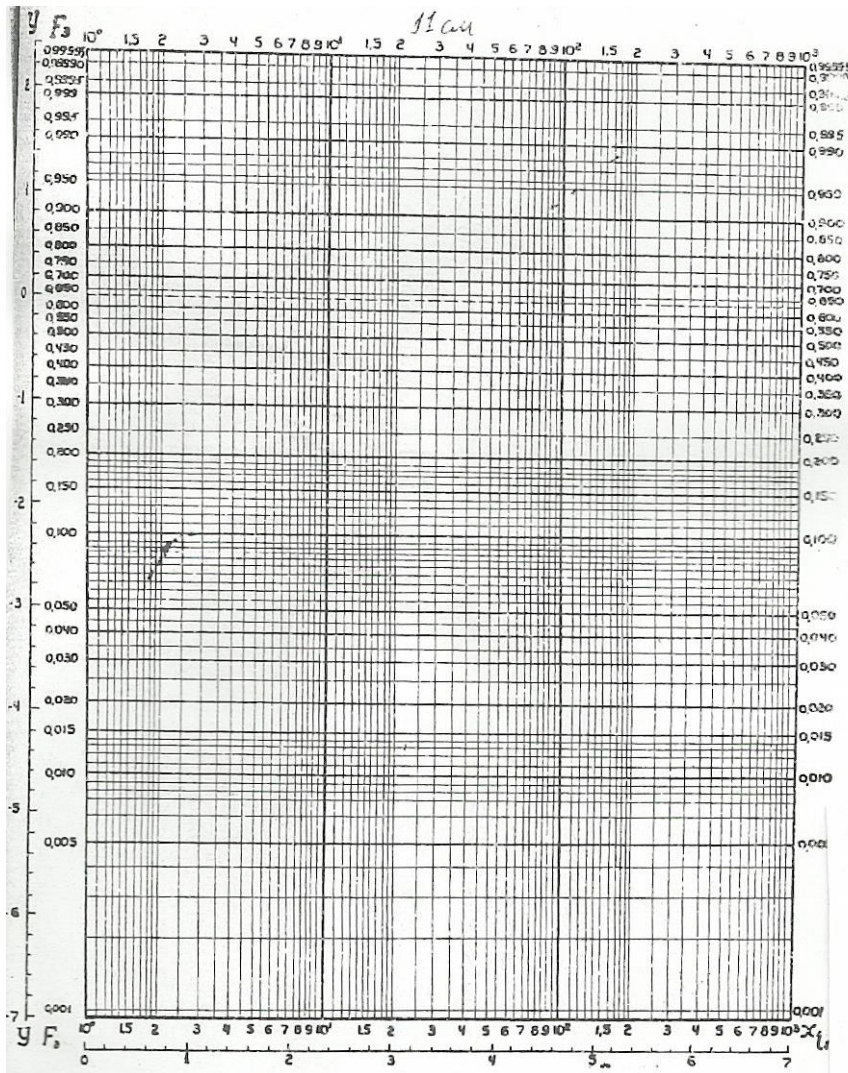


Рисунок 7. Вероятностная бумага для распределения Вейбулла

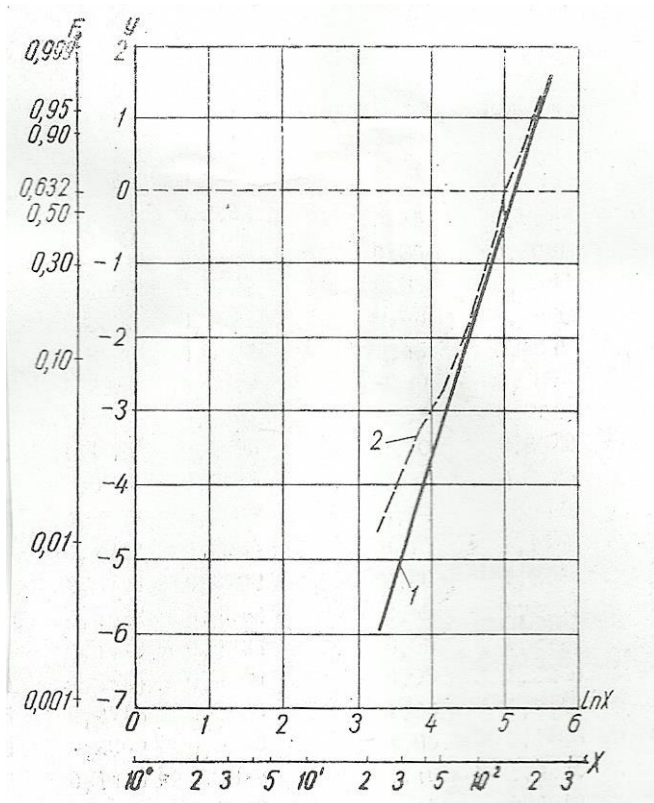


Рисунок 8. Образец проверки соответствия эмпирического распределения и теоретического распределения Вейбулла при помощи вероятностной бумаги:

1 – теоретическая линия; 2 – эмпирическая линия.

Эта проверка для распределения Вейбулла осуществляется таким образом (рисунок 8):

По оси абсцисс (шкала x) откладываются значения $x_i^* = x_i - x_n$, по оси ординат (шкала F) – значения экспериментальных накопленных частот (см. формулу 4), совпадающие с величинами эмпирической функции распределения вероятностей, т.е.

$$F^0(x_1^*) = \delta_1, \quad F^0(x_2^*) = \delta_2, \quad \dots, \quad F^0(x_k^*) = 1$$

Находя на вероятностной бумаге точки, соответствующие указанным координатам, и соединяя их между собой, получаем график выровненной эмпирической функции распределения.

Теоретическая функция распределения, изображаемая на вероятностной бумаге прямой линией, строится по двум точкам.

Первая точка расположена на пунктирной Лии с абсциссой, равной Q^* , отсчитанной по шкале x . Координаты второй точки находят следующим образом: Ордината y равна величине параметра α с минусом, $y = -\alpha$, значение Q^* определяют по формуле (51) и откладывают по шкале x . По вертикале переходят на шкалу $\ln x$. От полученного значения отнимают единицу шкалы $\ln x$ и получают абсциссу для второй точки.

Полученные точки соединяют прямой линией. Близость теоретической и эмпирической линий свидетельствует во первых о правильном выборе па-

раметров α и x_n , во вторых – служит критерием однородности данной выборки результатов испытаний.

Если расхождение между теоретической и экспериментальной функцией распределения в области величин прочности с малой вероятностью окажется значительным, то следует скорректировать параметр Q^* в нужную сторону и повторить все операции сначала, вплоть до построения новых кривых на вероятностной бумаге. И так до удовлетворительного совпадения теоретической и экспериментальной функции распределения.

III. Обработка результатов в зависимости от объема выборки

В зависимости от объема выработки исследуемых величин обработка их может осуществляться различными способами.

1. Объем выработки при n менее 25. Рассмотрим этот способ обработки результатов на примере.

Допустим, что с помощью прибора при испытании бетона были получены различные по величине измерения откоса в мм (количество измерений -7)

$$x_1=8,2; x_3=8,1; x_5=8,3; x_7=9,5$$

$$x_2=8,5; x_4=8,7; x_6=9$$

Прежде всего устанавливают, является ли величина $x_7=9,5$ мм случайной и следует ли ее учитывать при определении x_{cp} по формуле:

$$\frac{x_7 - \bar{x}}{S}$$

Для этого подсчитывают \bar{x}_{cp} - среднее квадратическое отклонение S , точность ε и надежность измерений α

2. Обработка полученных измерений записывается в виде таблицы 1

Таблица 1

Результаты измерений

№ измерений	Наблюдаемое значение x_i , мм	Отклонение наблюдаемого значения от средней величины $x_i - x_{cp}$, мм	Квадрат отклонений $(x_i - x_{cp})^2$
1	8,2	-0,27	0,0729
2	8,5	+0,03	0,0009
3	8,1	-0,37	0,1309
4	8,7	+0,23	0,0529
5	8,3	-0,13	0,0169
6	9,0	+0,51	0,2601

Определяем среднее квадратическое отклонение по формуле:

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \pm \frac{0,5406}{5} = \pm 0,33$$

$$\sum_1^6 x_i = 50,8 ; \quad \sum_1^6 (x_i - \bar{x})^2 = 0,5406$$

Если принять вероятность $\beta=0,05$ (табл.2), то измерение $x_7=9,5$ не учитывается при определении искомой величины откоса, поскольку

$$\frac{x_7 - \bar{x}}{S} = \frac{9,5 - 8,47}{0,33} = 3,1 > t_\beta = 2,777$$

Таблица 2

Значение величины t_β в зависимости от числа измерений

Число измерений	Значение величины t_β при вероятности β			
	0,05	0,02	0,01	0,001
2	15,561	38,973	77,964	779,696
3	4,960	8,042	11,460	36,486
4	3,558	5,077	6,530	14,468
5	3,041	4,105	5,043	9,432
6	2,777	3,635	4,355	7,409
7	2,616	3,360	3,963	6,370
8	2,508	3,180	3,711	5,733
9	2,431	3,053	3,536	5,314
10	2,372	2,959	3,409	5,014
11	2,327	2,887	3,310	4,691
12	2,291	2,829	3,233	4,618
13	2,261	2,782	3,170	4,481
14	2,236	2,743	3,118	4,369
15	2,215	2,710	3,075	4,276

Определяют точность измерений ε при надежности $\alpha=0,99$ (табл.18)

$$\varepsilon = t_\alpha \cdot S_{\bar{x}} = 4,032 \cdot 0,134 = \pm 0,54,$$

что составляет 6,35% от среднего арифметического значения \bar{x} величины отскока.

Величина $t_\alpha = 4,032$ принята по табл.18 при $n-1=5$ для $\alpha = 0,99$

Таблица 3

Значение величины t_α в зависимости от n-1

n-1	Значение величины t_α при вероятности α			
	0,95	0,93	0,99	0,999
1	2	3	4	5
1	12,706	31,821	63,657	636,619
2	4,303	6,965	9,925	31,598
3	3,182	4,541	5,841	12,941
4	2,775	3,747	4,604	8,610
5	2,571	3,365	4,032	6,859
6	4,447	3,143	3,707	5,959
7	2,365	2,998	3,499	5,405
8	2,306	2,896	3,355	5,041
1	2	3	4	5
9	2,262	2,821	3,250	4,781
10	2,228	2,764	3,169	4,587
11	2,201	2,718	3,106	4,487
12	2,179	2,681	3,055	4,318

13	2,160	2,650	3,012	4,221
14	2,145	2,624	2,977	4,140
15	2,131	2,602	2,947	4,073

На основании полученных данных можно утверждать, что с вероятностью 0,99 искомая величина отскока заключается в пределах:

$$\bar{x} - \varepsilon = 8,47 - 0,54 = 7,93 \text{ мм}$$

$$\bar{x} + \varepsilon = 8,47 + 0,54 = 9,01 \text{ мм}$$

Искомая величина отскока принимается равной $\bar{x} = 8,47$ мм. При этой величине, пользуясь тарировочным графиком, определяют

$$R_{сж} = 187,5 \text{ кгс/см}^2$$

Анализируя полученные данные можно отметить, что количество проведенных испытаний достаточно для получения средней арифметической величины, а результаты находятся в пределах допустимых отклонений.

Рассмотренным методом статистической обработки можно определить и достоверность частных значений прочности бетона. Для этого показания приборов и соответствующие им частные значения прочности записываем в таблицу (табл. 4).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{n} = \frac{50,8}{6} = 8,47$$

Значение $t_{\beta} = 2,777$ взято из таблицы () для $n=6$ при вероятности $\beta = 0,05$.

Если принять вероятность $\beta = 0,02$, то измерение x_7 может быть учтено при определении искомой величины поскольку $\frac{x_7 - \bar{x}}{s} = 3,1 < t_{\beta} = 3,635$ далее определяют квадратичную ошибку по формуле

$$S_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0,5406}{30}} = \pm 0,134$$

Определяют точность измерений ε при надежности $\alpha = 0,99$ (таблица 3)

$\varepsilon = t_{\alpha} \cdot S_{\bar{x}} = 4,032 \cdot 0,134 = \pm 0,54$, что составляет 6,35% от среднего арифметического значения \bar{x} величины отскока.

Величина $t_{\alpha} = 4,032$ принята по таблице 3 при $n-1=5$, для $\alpha = 0,99$

На основании полученных данных можно утверждать, что с вероятностью 0,99 искомая величина отскока заключается в пределах:

$$\bar{x} - \varepsilon = 8,47 - 0,54 = 7,93,$$

$$\bar{x} + \varepsilon = 8,47 + 0,54 = 9,01$$

Ископаемая величина отскока принимается равной $\bar{x} = 8,47$ мм. При этой величине, пользуясь тарировочным графиком, определяют

$$R_{сж} = 187,5 \text{ кгс/см}^2 = 18,8 \text{ МПа}$$

Анализируя полученные данные можно отметить, что количество проведенных испытаний достаточно для получения средней арифметической величины, а результаты находятся в пределах допускаемых отклонений.

Рассматриваемым методом статистической обработки можно определить и достоверность частных значений прочности бетона. Для этого показания приборов и соответствующие им частные значения прочности записываем в таблицу 4.

Таблица 4

Величина отскока и соответствующие значения прочности

№ измерений	Величина отскока h , мм	R_0 , кгс/см ² (МПа)	$R-R_{cp}$	$(R-R_{cp})^2$
1	8,2	180 (18,0)	-7,5	56,25
2	8,5	190 (19,0)	+2,5	6,25
3	8,1	175 (17,5)	12,5	156,25
4	8,7	195 (19,5)	+7,5	56,25
5	8,3	185 (18,5)	-2,5	6,25
6	9,0	200 (20,0)	+12,5	156,25
	$h_{cp}=8,47$	$R_{0(cp)}=187,5$ (18,75)		

$$\sum (R - R_{cp}) = \sum (R - R_{cp})^2 = 437,5$$

Определить среднее квадратическое отклонение S :

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum (R - R_{cp})^2}{n - 1}} = \pm \sqrt{\frac{437,5}{5}} = \pm 9,35 \text{ кгс/см}^2 \text{ (0,94 МПа)}$$

Затем находят среднюю квадратическую ошибку:

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum (R - R_{cp})^2}{n(n - 1)}} = \pm \sqrt{\frac{437,5}{30}} = \pm 3,8 \text{ кгс/см}^2 \text{ (0,38 МПа)}$$

Точность полученных данных при надежности $\alpha = 0,99$ равна

$$\varepsilon = t_{\alpha} \cdot S_{R_{cp}} = 4,032 \cdot 3,8 = \pm 15,3 \text{ кгс/см}^2 \text{ (1,53 МПа)}, \text{ что составляет:}$$

$$\frac{\alpha}{R_{cp}} \cdot 100\% = \frac{15,3}{187,5} \cdot 100\% = 8,1\% \text{ от среднего арифметического значения } R_{cp}$$

Следовательно, искомая величина прочности бетона с вероятностью 0,99 находится в пределах:

$$R_{cp} - \varepsilon = 187,5 - 15,3 = 172,2 \text{ кгс/см}^2 \text{ (17,22 МПа)}$$

$$R_{cp} + \varepsilon = 187,5 + 15,3 = 202,8 \text{ кгс/см}^2 \text{ (20,28 МПа)}$$

$$\text{Принимаем } R_{cp} = 187,5 \text{ кгс/см}^2 \text{ (18,75 МПа)}$$

2. Объем выбора при n более 25.

Значения выбора могут быть заданы двухзначными и многозначными числами.

В этом случае все значения случайных величин необходимо разбить на интервалы и произвести подсчет частот (встречаемости).

В случае, когда значения случайной величины заданы трех- и более значными числами, расчет параметров целесообразно вести путем введения новой случайной величины x_i^1

$$x_i^1 = \frac{x_i - x_0}{h},$$

где h – величина интервала;
 x_0 – некоторое начальное значение (обычно принимают середину средних значений – x_i или середины интервалов).

Последовательность вычислений рассмотрим по данным таблицы 5.

Таблица 5

№ п/п	Интервалы прочности бетона, кгс/см ² (МПа)	Встречаемость, m_i	x_i	x_i^1	$m_i x_i^1$	$m_i (x_i^1)^2$
1	150-160	2	155	-2	-4	8
2	160-170	7	165	-1	-7	7
3	170-180	11	175	0	0	0
4	180-190	3	185	1	3	3
5	190-200	6	195	2	12	24
6	200-210	8	205	3	24	72
7	210-220	1	215	4	4	16

$$\sum = 38 \quad \sum m_i x_i^1 = 32 \quad \sum m_i (x_i^1)^2 = 130$$

1. Вычисляют x_i по формуле:

$$x_i = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{155 - 175}{10} = -2;$$

2. Вычисляют начальные моменты:

$$\alpha_1 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{32}{38} = 0,84;$$

$$\alpha_2 = \frac{\sum m_i (x_i^1)^2}{\sum m_i} = \frac{130}{38} = 3,42$$

3. Вычисляют среднее значение \bar{x}

$$\bar{x} = x_0 + \alpha_1 \cdot h = 175 + 0,84 \cdot 10 = 183$$

где h равно интервалу прочности 10 кгс/см²

4. Вычисляем квадратическое отклонение (стандарт)

$$(S)\sigma = h \cdot \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} = 10 \sqrt{(3,42 - 0,84)^2} = 16,4$$

5. Построение гистограммы или полигона распределений.

См. Приложение А, пример № 2

IV. Комплекс задач решаемых по одной модели.

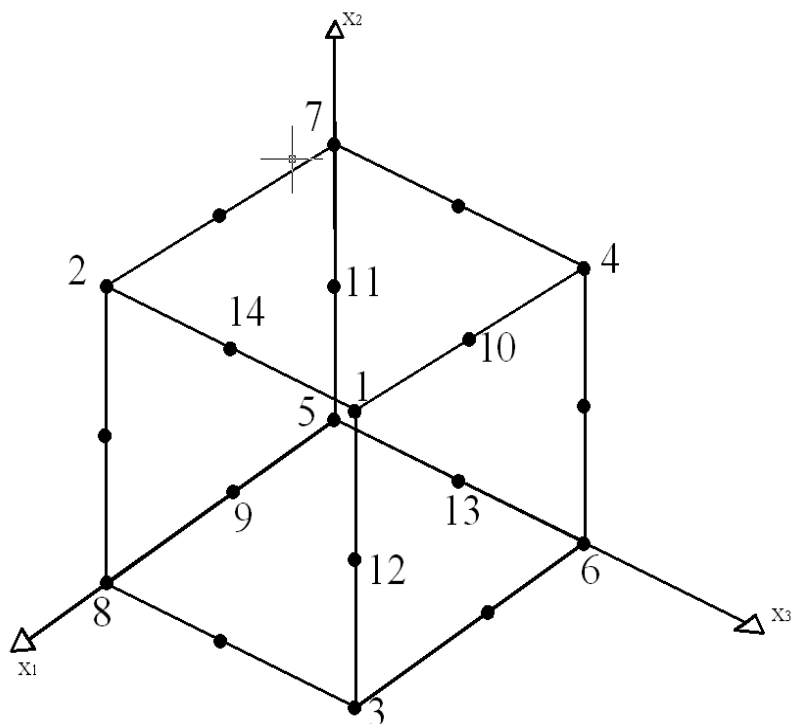
Выбор модели и планирование эксперимента.

Решается комплекс типовых задач по модели, описывающей изменение предела прочности на сжатие R_p МПа, мелкозернистого бетона после тепловлажностной обработки (ТВО). Согласно имеющимся данным принимаем условие при котором управлять качеством изделия можно за счет:

- изменения соотношения между песком и цементом (П/Ц);
- концентрацией суперпластификатора С-3 (% сухого вещества от массы цемента);
- температуры изотермической выдержки ТВО.

Все факторы влияют на R нелинейно.

Предполагается, что воздействие каждого из них можно описать параболой второго порядка. Таким образом, на первом этапе моделирования $\hat{\epsilon}_i$ необходимо построить трехфакторный квадратичный полигон, содержащий 10 оценок коэффициентов, а на втором – упростить его, исключив статистически равные нулю оценки методом последовательного регрессионного анализа. Поскольку парабола от каждого фактора может быть построена не менее, чем по трем точкам, расположение которых в пространстве нормализованных факторов $x_1; x_2; x_3$ показано на рисунке.



Расположение 15 опытных точек в трехфакторности пространства.

С учетом стратегии сравнительного исследование добавок выбран план B_3 с одной центральной точкой, показанный в таблице и приняты обозначения: безразмерной концентрации z : температуры ТВО – t .

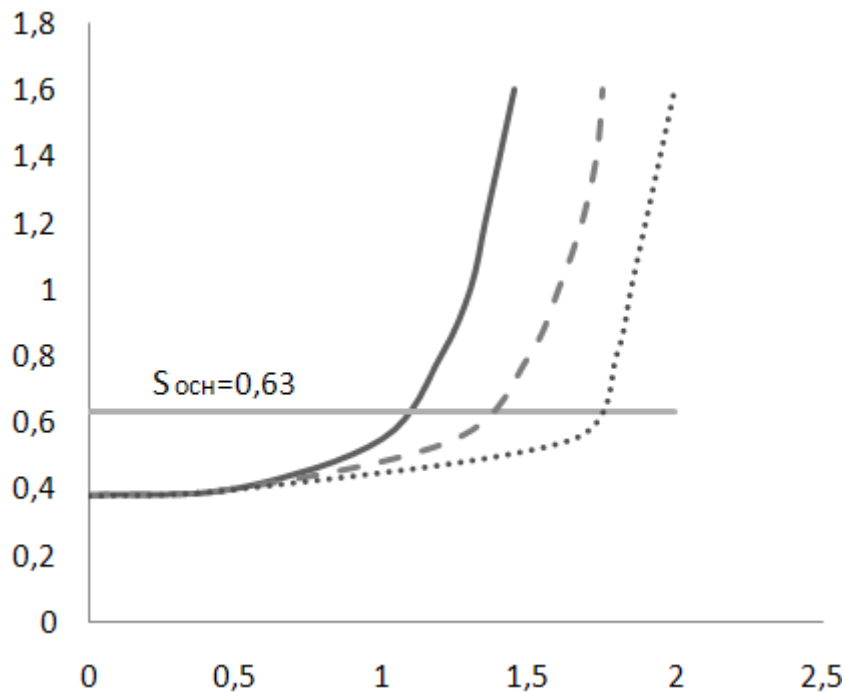
Таблица
Трехфакторный

№ точек плана	в нормализованных факторах			в натуральных факторах		
	$x_1=x$	$x_2=z$	$x_3=t$	$x_1=Г/Ц$	$x_2=C, \%$	$x_3=T, ^\circ C$
1	+1	+1	+1	2 : 1	0,7	80
2	+1	+1	-1	2 : 1	0,7	40
3	+1	-1	+1	2 : 1	0	80
4	-1	+1	+1	3 : 1	0,7	80
5	-1	-1	-1	3 : 1	0	40
6	-1	-1	+1	3 : 1	0	80
7	-1	+1	-1	3 : 1	0,7	40
8	+1	-1	-1	2 : 1	0	40

9	+1	0	0	2 : 1	0,35	60
10	-1	0	0	3 : 1	0,35	60
11	0	+1	0	2,5 : 1	0,7	60
12	0	-1	0	2,5 : 1	0	60
13	0	0	+1	2,5 : 1	0,35	80
14	0	0	-1	2,5 : 1	0,35	40
15	0	0	0	2,5 : 1	0,35	60

По результатам эксперимента (средняя ошибка $S_{осн}=0,63$ МПа) получена модель со всеми значимыми ($\alpha = 0,1$) оценками коэффициентов

$$\hat{R} = 19,5 + 5,5x + 1,9x^2 + 2,0xz + 1,5x_t + 0,8z - 1,8z^2 + 0,4zt + 6,8t + 0,6t^2$$



Рисунок

Задача 1. – интерполяционная.

Определить расчетное значение прочности R_1 для расположенной внутри области изученного факторного пространства точки с коэффициентами отличными от точек плана эксперимента. Например, для точки с коэффициентами $x=+0,6$; $z=-0,5$; $t_p=+0,8$ ($П/Ц=2,2$; $C=0,175\%$; $T=76^0C$)

$$R = 19,5 + 5,5(0,6) + 1,9(0,6)^2 + 2,0(0,6)(-0,5) + 1,5(0,6)(0,8) + 0,8(-0,5) - 1,8(-0,5)^2 + 0,4(-0,5)(0,8) + 6,8(0,8) + 0,6(0,8)^2 = 28,4 МПа$$

Задача 2. – экстраполяционная (прогноз)

Определить расчетное значение прочности \hat{R}_2 для точки, расположенной вне области изученного факторного пространства.

Например, для $x_p=-0,4$; $z_p=+0,2$; $t_p=+1,5$

По процедуре, аналогичной задаче № 1 будет получено $\hat{R}_2=28,3$ МПа.

Задача № 3 – оценка точности расчетов \hat{R}

Определить средне квадратическую ошибку $S_{out}\{R\}$ при расчете прочности бетона \hat{R} по выбранной модели. С учетом значений элементов C_{ii} и C_{ij} , содержащих информацию о статистических характеристиках модели (диагональные ее элементы C_{ii} связаны с дисперсиями коэффициентов $S^2\{b_i\}$, а внедиагональные C_{ij} оценивают взаимосвязи между ними – ковариации и представляющих собой элементы ковариационной матрицы плана B_3 при $S_{out}=0,63$ МПа, исследуемая модель приобретает вид

$$S\{\hat{R}\} = 0,1156 - 0,0499(x^2 + z^2 + t^2) - 0,0389(x^2 \cdot z^2 + x^2 \cdot t^2 + z^2 \cdot t^2) + 0,1556(x^4 + z^4 + t^4)$$

По предложенной зависимости определяют среднее квадратическое ошибки предсказания:

- для точки внутри исследованной области $\hat{R}_1 = 28,4$ МПа

(при $x_p=0,6$; $z_p=-0,5$ и $t_p=0,8$);

$S^2\{\hat{R}_1\} = 0,1281$; $S\{\hat{R}_1\} = 0,36$ МПа, что дает относительную ошибку

$$\delta\{\hat{R}_1\} = 0,36 \cdot 100 : 28,4 = 1,26\%$$

- для точки вне исследованной области $\hat{R}_2 = 28,3$ МПа

при $x_p=-0,4$; $z_p=0,2$ и $t_p=1,5$

$$S^2\{\hat{R}_2\} = 0,88 \text{ МПа или } \delta\{\hat{R}_2\} = 0,31\%$$

Результаты расчетов ярко иллюстрируют тот важный факт, что точность расчетов по моделям существенно ухудшаются при выходе за экспериментально исследуемую область изменения факторов.

Анализ зависимости, полученной нами, имеет вид многомерной чаши с переменным радиусом $\rho_x = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, центр которой совпадает с центром эксперимента ($x_i=0$).

Задача 4. – анализ влияния каждого фактора на \hat{R} .

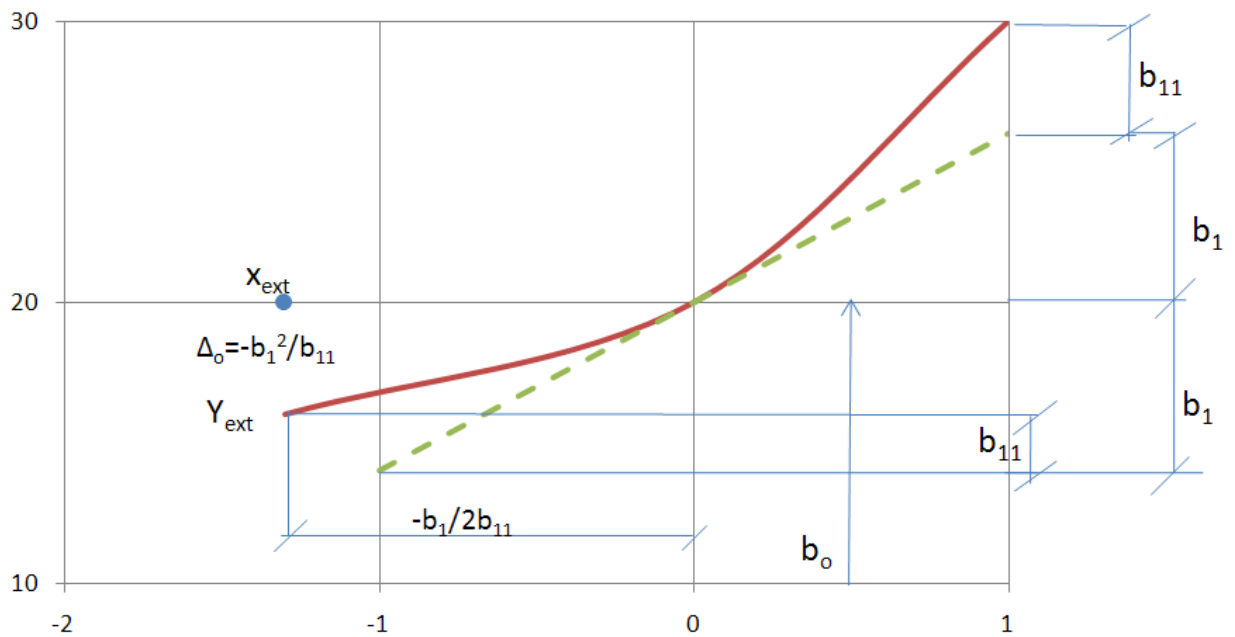
Воздействие каждого из факторов (например, x_1) на отклик \hat{y} , при условии стабилизации всех остальных на некотором уровне (без потери общности $x_2=x_3=0$), описывается параболой с экстремумом в точке

$$\text{Парабола} - \hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_{11} x_1^2$$

$$\text{Экстремум} - \hat{y}_{ext} = b_0 - 0,25 b_1^2 : b_{11};$$

$$\text{Точка} - x_{1ext} = -b_1 : 2b_{11}$$

Все элементы параболы ($b_1 > 0$; $b_{11} < 0$) показаны на рисунке.



Рисунок

Связь оценок коэффициентов b_0 , b_i , b_{ij} с геометрическим образом параболы.

Однако в своем влиянии на выход системы \hat{y} фактор x_i взаимодействует с другими факторами x_j , что находит количественную оценку в эффектах модели типа $b_{ij}x_i x_j$. Поэтому анализировать влияние факторов следует по квазиоднофакторным моделям вида

$$W_i = \hat{y}\{x_j\} - b_{oj} = (b_i + b_{ij}x_j)x_i + b_{ij}x_i^2,$$

где b_{oj} – свободный член, отражающий влияние на выход всех членов номинала, кроме включенных в модель. Таким образом, имея модель с тремя переменными факторами можно получить три квазиоднофакторные модели:

$$\hat{W}_x = (5,5 + 2,0z + 1,5t)x + 1,9x^2;$$

$$\hat{W}_z = (0,8 + 2,0x + 0,4t)z - 1,8z^2;$$

$$\hat{W}_t = (6,8 + 1,5x + 0,4z)t + 0,6t^2;$$

Получаем, что эффекты взаимодействия b_{ij} меняют значения линейного эффекта b_i . Поскольку каждый фактор исследуется в пределах от -1 до +1, их подстановка в полученные квазиоднофакторные модели приводит от единичной параболы к семейству парабол. Графическое изображение которых позволяет ограничить область эксперимента (центральная $\sum_j /x_j / = 0$ граничные $\sum_j /x_j / < 0$ и $\sum_j /x_j / > 0$, а эффекты взаимодействия передвигают вершину неизменной параболы вдоль оси x_i .

Задача 5 – поиск максимума и минимума \hat{R}

Для нахождения максимума необходимо выполнить следующие действия:

$-b_{33} > 0$; $/b_3/ > (/b_{13}/ + /b_{23}/)$ $x_3 = t = +1$; и тогда

$$\hat{R} = 26,9 + 7,0x + 1,9x^2 + 2,0xz + 1,2z - 1,8z^2$$

$-b_{11} > 0$; $/b_1/ > /b_{12}/$ $x_1 = x = +1$ и тогда

$$\hat{R} = 35,8 + 3,2z = 1,8z^2$$

$-b_{22} < 0$; $/b_2/ < /2b_{22}/$; и тогда $z_{opt} = 0,89$; $\hat{R}_{max} = 37,22 \text{ МПа}$;

$$S\{\hat{R}_{max}\} = 0,53$$

Для нахождения минимума необходимо выполнить условие:

$-b_{33} > 0$; $/b_3/ - (/b_{13}/ + /b_{23}/) > /2b_{33}/$; $x_3 = t = -1$ и тогда

$$\hat{R} = 13,3 + 4,0x + 1,9x^2 + 2,0xz + 0,4z - 1,8z^2$$

$-b_{22} < 0$; $/b_2/ < /b_{12}/$; и имеем две конкурирующие модели, в которых:

$x_2 = z = -1$; и $x_2 = z = +1$

$$\hat{R} = 11,1 + 2,0x + 1,9x^2 \quad \hat{R} = 11,1 + 6,0x + 1,9x^2$$

$-b_{11} > 0$; $/b_1/ \leq /2b_{11}/$; $-b_{11} > 0$; $/b_1/ > /2b_{11}/$;

$x_{opt} = -0,53$; $x_{opt} = -1$

$$\hat{R}_x = 10,57 \text{ МПа} \quad \hat{R}_{min} = 7,8 \text{ МПа}$$

$$S\{\hat{R}_x\} = 0,52 \quad S\{\hat{R}_{min}\} = 0,56$$

Таким образом \hat{R}_{min} находим при $x = -1$; $z = +1$; $t = -1$. Единственность решения приближенно проверяют по t-критерию, в котором N – число опытов в плане:

$$t = (\hat{R}_x - \hat{R}_{min})\sqrt{N} : \sqrt{S^2\{\hat{R}_x\} + S^2\{\hat{R}_{min}\}} = (10,57 - 7,80)\sqrt{15} : \sqrt{0,52^2 + 0,56^2} = 14 \geq t_{табл} \{f=30\}$$

Задача 6 – анализ изоповерхностей \hat{R}

Все многофакторные модели можно представить в виде изоповерхностей. Эти изоповерхности представляют собой вырезку факторным пространством $/x/ = /z/ = /t/ = 1$ части поверхностей гиперboloида. Для их построения достаточно определить вид поверхности и коэффициенты ее центра и посчитать следующие инварианты:

$$I_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33}; \quad I_2 = b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} + b_{11}b_{33} + 0,25(b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2);$$

$$I_3 = b_{11}b_{22}b_{33} + 0,25b_{12}b_{13}b_{23} - 0,25(b_{11}b_{23}^2 + b_{22}b_{13}^2 + b_{33}b_{12}^2);$$

По знакам произведения $I_1 I_3 \leq 0$ и (или) $I_2 < 0$ $I_3 \neq 0$ -гиперboloид и конус;

$I_1 > 0$ $I_2 > 0$ - эллипсоиды - это центральные

Если $I_2 = 0$ - цилиндр параболический;

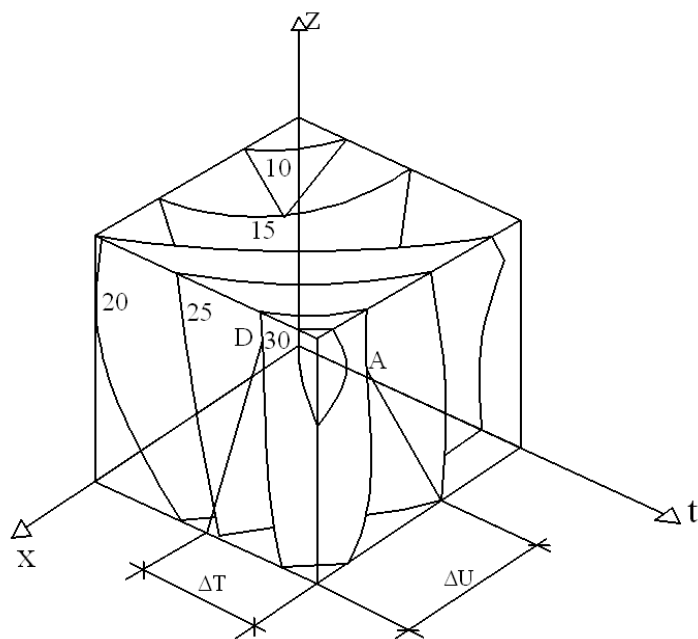
$I_2 < 0$ - параболоиды и цилиндры гиперболические;

$I_2 > 0$ - параболоиды и цилиндры эллиптические;

$I_3 = 0$ - нецентральные.

Определить три координаты центра, например, x_{ix}

$$x_{ix} = [(b_i b_{jk}^2 + 2b_{ij} b_j b_{kk} + 2b_{ik} b_{ij} b_k) - (4b_i b_{ii} b_k + b_{ij} b_k b_{ik} + b_{ik} b_j b_{jk})] : 8I_3$$



Рисунок

Изоповерхности прочности бетона R (в области эксперимента).

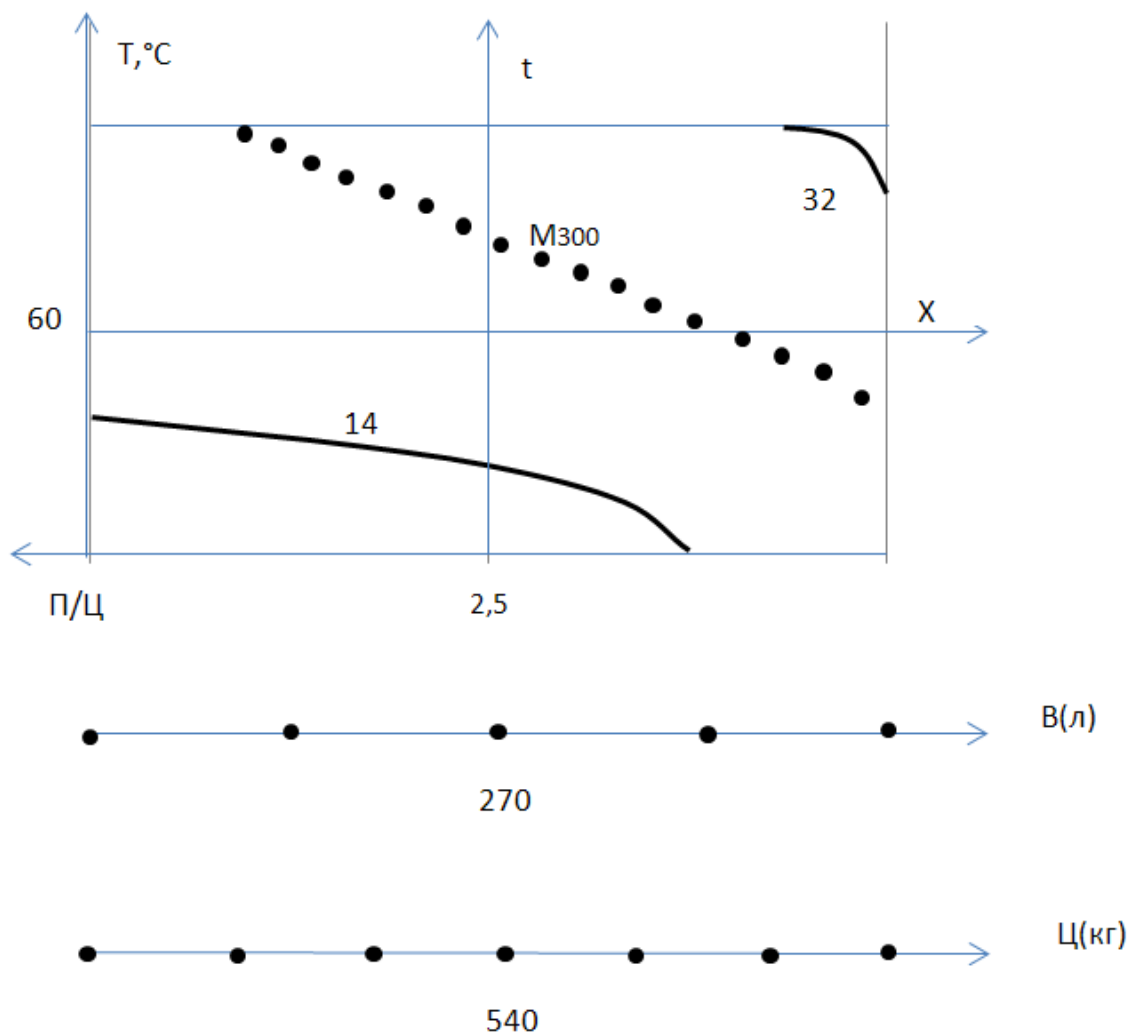
На рисунке нижняя плоскость куба (пространство в координатах $\{x-t\}$ при $z=-1$) предназначена для отображения свойств эталонного бетона. Остальные поверхности куба несут информацию о количестве добавки, температуре и цементе, что позволяет выполнить оптимизацию цемента (точка А) или расход тепловой энергии (точка Д).

Задача 7 - анализ прочности бездобавочного эталонного бетона $\hat{R}_{\text{ст}}$.

Это возможно при $z=-1$, т.е. соответствовал нулевой концентрации. При подстановки в модель получим:

$$\hat{R}_n = 16,9 + 3,5x + 1,9x^2 - 1,5xt + 6,4t + 0,6t^2$$

Изолинии показаны на рисунке



Рисунок

Несомненно, моделирование систем сложной трудоемкий процесс, имеющий ярко выраженный творческий характер. Поэтому дать во всех случаях рекомендации по моделированию невозможно.

Однако, практикой выработаны принципы моделирования, придерживаясь которых, осуществляют построение соответствующих моделей [27].

Различные методы моделирования предполагают планирование активного физического и вычислительного эксперимента. В пространстве управляемых переменных (в факторном пространстве) точки, отображающие условия опытов (реализаций), следует выбирать в соответствии с определенным оптимальным планом эксперимента. При фиксированном числе опытов оптимальный план приводит к наибольшему объему информации об изучаемом объекте, полученной из эксперимента.

Если зафиксировать объем получаемой информации, то оптимальное планирование эксперимента позволит сократить до минимума число опытов.

В настоящее время разработана, теоретически обоснована и внедряется в научно-исследовательскую и производственную практику вероятно статическая концепция анализа и оптимизации инженерных решений в области строительного материаловедения, в которой системный подход и многофакторное моделирование на основе алгоритмизированного планирования син-

тезируется с физико-химической механикой и общей теорией композиционных материалов [36].

Среди статических моделей, различающихся по алгоритму обработки опытных данных, в инженерной практике наиболее широко используются регрессионные модели вида:

$$y = bf(x);$$

где $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ - вектор неизвестных параметров модели;

$f(x) = [f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)]$ - вектор заданных функций входных переменных.

Необходимый объем знаний, предшествующий эксперименту, позволяет либо сразу задать структуру модели, либо определится с классом функций для компонент вектора. Практически это можно сделать тогда, когда об изучаемом объекте исследователь имеет хотя бы смутное представление общетеоретического характера. При недостаточности объема априорной информации модель может быть представлена с помощью полиномов от переменных x_i .

Если при R факторах аппроксимировать регрессионную модель полиномом первой степени (линейная модель, которая описывает плоскость в пространстве размера $R + 1$, то оценка \hat{y} для u находится по формуле:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_i x_i + b_k x_k$$

Здесь получаем следующее выражение для компонент вектора

$$f(x) = (1, x_1, \dots, x_i, x_k)$$

V. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК), элементы планирования и статистического анализа эксперимента.

При обработке результатов экспериментов всегда имеется риск не извлечь из них всей необходимой информации и прийти к выводам, которые не следуют из опытных данных. Среди разнообразных статистических методов обработки результатов эксперимента наиболее широко используется МНК.

Изучать этот метод начнем с самого простого случая. Пусть между откликом y и фактором x_1 , имеет место линейная связь.

Тогда ее можно записать в виде уравнения прямой линии (уравнения регрессии). Чтобы вычислить значения коэффициентов (свободный член уравнения регрессии и при первом факторе) проводят эксперимент, результаты которого могут вступать в некоторое противоречие с выдвинутой гипотезой относительно линейной связи, т.е. не все точки опыта лежат на прямой линии.

Поэтому имеет место разность между опытным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в некоторой u -ой точке эксперимента

$$y_u - b_0 - b_1 \cdot x_{1u} = e_u$$

Где величина e_u является отклонением или невязкой.

Невязка возникает из-за ошибки эксперимента и из-за неадекватности (непригодности) модели. Обычно с помощью повторных опытов оценивают ошибку эксперимента, а затем проверяют адекватность модели.

Рассмотрим метод МНК для однофакторного случая на матричном языке. В этой процедуре участвуют три множества экспериментов: задающие условия различных опытов, отражающие их результаты и неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. В матричной форме можно записать $XV=Y$, где Y – матрица результатов эксперимента.

$$\frac{Y}{n+1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

V – матрица неизвестных коэффициентов

$$V = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

X – расчетная матрица

$$\frac{X}{n+2} = \begin{bmatrix} X_{01} & X_{11} \\ X_{02} & X_{12} \\ \vdots & \vdots \\ X_{0n} & X_{1n} \end{bmatrix}$$

Задаемся условием, что элементы матрицы Y получены при проведении всех опытов без повторений или с одинаковым числом повторений. В последнем случае для расчета оценок коэффициентов в качестве элементов матрицы Y используются средние значения повторных опытов. В матрице условия опытов задет второй столбец, а первый столбец – это вектор-столбец фиктивной переменной X_0 , которая принимает во всех опытах значение +1. Первый столбец введен для удобства вычисления коэффициентов. Это значит, что исходное уравнение прямой линии будет иметь вид:

$$Y = b_0 \cdot X_0 + b_1 \cdot X_1$$

Применяя матрицу X^T , транспонированную по отношению к матрице X , получим систему нормальных уравнений МНК.

$$(X^T \cdot X)V = X^T \cdot Y$$

Так как строки транспонированной матрицы получаются из столбцов исходной, то матрица X^T имеет вид

$$\frac{X}{2+n} = \begin{bmatrix} X_{01} & X_{02} & \cdots & X_{0n} \\ X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \end{bmatrix}$$

Матрица $(X^T X)$ называется информационной матрицей Фишера или матрицей системы нормальных уравнений.

Чтобы записать элементы вектора V в явном виде найдем матрицу $(X^T X)^{-1}$, обратную матрице $(X^T X)$ и тогда систему нормальных уравнений МНК после умножения слева обеих частей уравнения получим:

$$(X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot X) \cdot V = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y$$

Обратная матрица содержащая $(X^T \cdot X)^{-1}$, содержащая информацию о статических характеристиках модели, играет ведущую роль при анализе полученных моделей и их интерпретации. Эта матрица часто называется ковариационной.

Произведение обратной матрицы на прямую дает единичную матрицу.

$$E = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y)$$

Элементы главной диагонали единичной матрицы состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю.

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y)$$

Это и есть решение, вид которого не меняется и для многофакторного случая.

Выведенная формула справедлива при проведении всех опытов без повторений или с одинаковым числом повторений. После получения МНК – оценок модели следует ее обычный статистический анализ, состоящий из проверок гипотезы об адекватности построенной модели и проверки гипотезы об значимости ее коэффициентов.

На практике в качестве характеристики точности модели предпочитают использовать остаточную дисперсию адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{S_{ост}}{V_1} = \frac{\sum_{u=0}^n (Y_u - Y_u^л)^2}{V_1}$$

Где $S_{ост}$ представляет собой не что иное, как невязку;

Y_u и $Y_u^л$ – значения отклика в u -том опыте, соответственно определенное экспериментально и рассчитанное по полученному уравнению регрессии;

V_1 – число степеней свободы, определяемое как

$$V_1 = N - p$$

Где p – число параметров модели (включая b_0), вычисленных по результатам n опытов.

Для проверки гипотезы об адекватности модели необходимо сопоставить полученную точность модели ($S_{ад}^2$) с величиной характеризующей ошибку эксперимента. В качестве такой величины используют оценку дисперсии отклика Y , которую будем называть дисперсией воспроизводимости эксперимента и обозначать S_Y^2 . В эксперименте может несколько раз дублироваться только один u -тый опыт. Тогда дисперсия подсчитывается по формуле

$$S_Y^2 = S_{Y_u}^2 = \frac{\sum_{q=0}^{n_u} (Y_{uq} - \bar{Y}_u)^2}{V_u}$$

Где Y_{uq} – результат q -того повторения u -того опыта;

\bar{Y}_u – среднее арифметическое значений всех n_u повторений u -того опыта;

$V_u = n_u - 1$ – число степеней свободы u -того опыта.

Следующий этап – это сопоставление точности полученной модели с ошибкой эксперимента и проверка гипотезы об адекватности модели. Эту гипотезу проверяют с помощью F -критерия (критерия Фишера). Его расчетное значение находится из отношения дисперсий

$$F_{V_1; V_2}^{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_Y^2}$$

Определенных при соответствующих степенях свободы V_1 и V_2 .

Гипотезу об адекватности модели принимают тогда, когда рассчитанное значение F – критерия не превышает табличного (см. приложение) для выбранного уровня значимости α и степеней свободы числителя V_1 и знаменателя V_2 .

Следующий этап обработки данных связан с проверкой гипотезы о статистической значимости коэффициентов модели.

Для этого рассчитывают дисперсии оценок коэффициентов, необходимые для проверки гипотезы значимости

$$S_{b_i}^2 = C_{ii} \cdot S_y^2$$

Где C_{ii} - диагональные элементы матрицы $(X^T \cdot X)^{-1}$

Затем для коэффициента b_i устанавливается доверительный интервал

$$\Delta b_i = t^{\text{табл}} \cdot S_{b_i}$$

Где t – критерий Стьюдента, который находится из таблицы (см. приложение), для выбранного уровня значимости α (обычно 0,05) и числа степеней свободы V при определении дисперсии S_y^2

$$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2} - \text{среднеквадратическая ошибка.}$$

Коэффициент b_i считается статистически значимым (отличающимся от нуля), если его абсолютная величина превышает величину доверительного интервала

$$|b_i| \geq \Delta b_i$$

Пользоваться такой проверкой можно тогда, когда матрица $(X^T X)^{-1}$ диагональна. Это становится возможным, если для любых двух различных столбцов матрицы X выполняется условие ортогональности

$$\sum_{u=0}^n X_{iu} \cdot X_{ju} = 0; i \neq j$$

А план в этом случае называется ортогональным.

Пусть на основании экспериментов получено n значений двух взаимосвязанных величин x и y (например, изучается зависимость прочности бетона от содержания в нем цемента или других факторов). Построив эти n точек на графике (рис.9) можем установить какой вид зависимости следует принять

Если экспериментальные точки достаточно хорошо укладываются вдоль некоторой прямой, то следует найти коэффициенты a и b уравнения $y=ax+b$

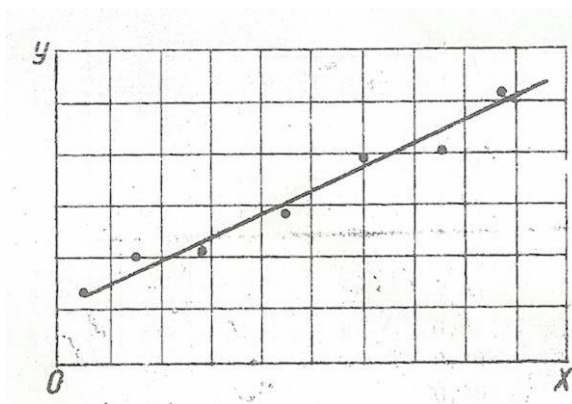


Рисунок 9. Построение зависимости между двумя величинами по методу наименьших квадратов.

Для их определения необходимо:

а) составить рабочую таблицу (таблица 10)

Таблица 10

n	x	y	x ²	xy
1	2	3	4	5
1	x ₁	y ₁	x ₁ ²	x ₁ y ₁
2	x ₂	y ₂	x ₂ ²	x ₂ y ₂
...
n	x _k	y _k	x _k ²	x ₁ y ₁
∑	∑x _i	∑y _i	∑x _л ²	∑x _i y _i

В таблице в графах 2 и 3 проставляются соответствующие экспериментальные значения, в графах 4 и 5 записываются вычисляемые: квадраты экспериментальных значений x и произведения соответствующих величин x и y . Столбцы суммируются:

б) определить коэффициенты a и b по формулам:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2,$$

$$\Delta a = n(\sum x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i$$

$$\Delta b = \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum y_i$$

в) решается уравнение прямой на основании вычисленных данных таблицы и решенных равенств.

Рассмотренный вид модели самый простой и поэтому не совсем точный. Для получения более достоверных результатов необходимо находить из нелинейности влияния факторов на выход и явления синергизма, т.е. не прямо пропорциональное приращение выхода при одновременном изменении двух и более факторов. Нелинейность учитывается добавлением к полиному еще k слагаемых $b_{ii}x_i^2$, которые будут учитывать влияние x_i на y по квадратичной параболе. Синергизм двух факторов учитывается взаимодействиями $b_{ij}x_i x_j$, число которых $k(k-1)/2$. В результате получаем модель в виде полного полинома второй степени.

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2$$

Если вектор задан, а модель линейна относительно коэффициентов, то при наличии результатов N опытов (выборки) могут быть найдены оценки \hat{b}_i коэффициентов модели, а затем проведены статистические гипотезы об адекватности модели и значимости найденных коэффициентов. Все это выполняется с помощью одного из методов математической статистики, который называется регрессивным анализом. Следует помнить, что регрессивный анализ, как и любой статистический метод, применим при определенных предположениях, постулатах.

Невыполнение одного из них, а их рассматривается в количестве трех, следует отказаться от модели регрессивного анализа и использовать модели корреляционного или дисперсионного анализа.

Не менее важным является и оценка коэффициентов регрессии $\hat{\epsilon}_i$. Точность оценок $\hat{\epsilon}_i$ в общем случае зависит не только от дисперсии ошибок опытов (воспроизводимости эксперимента), но и от выбранной структуры модели и точек постановки опытов (плана эксперимента). Поэтому нужно токсилонировать эксперимент и обработать его результаты, чтобы найти наилучшие в определенном смысле оценки $\hat{\epsilon}_i$.

См. Приложение А, пример № 3

VI. Изопараметрический анализ структуры композиционных материалов(Ягубкин)

Структурная оптимизация теплозащитных свойств композитов.

Улучшение теплозащитных свойств при повышении общей пористости сопровождается снижением прочности материала. Поэтому при создании композитов многоцелевого назначения, типичный пример которых конструкционно-теплоизоляционные изделия, предназначенные для ограждающих конструкций, приходится находить компромиссные решения.

Вполне обосновано стремление снизить теплопроводность изделия при сохранении прочности материала путем специальной организации его пористой структуры. Поиск условий оптимизма иллюстрируется на рисунке.

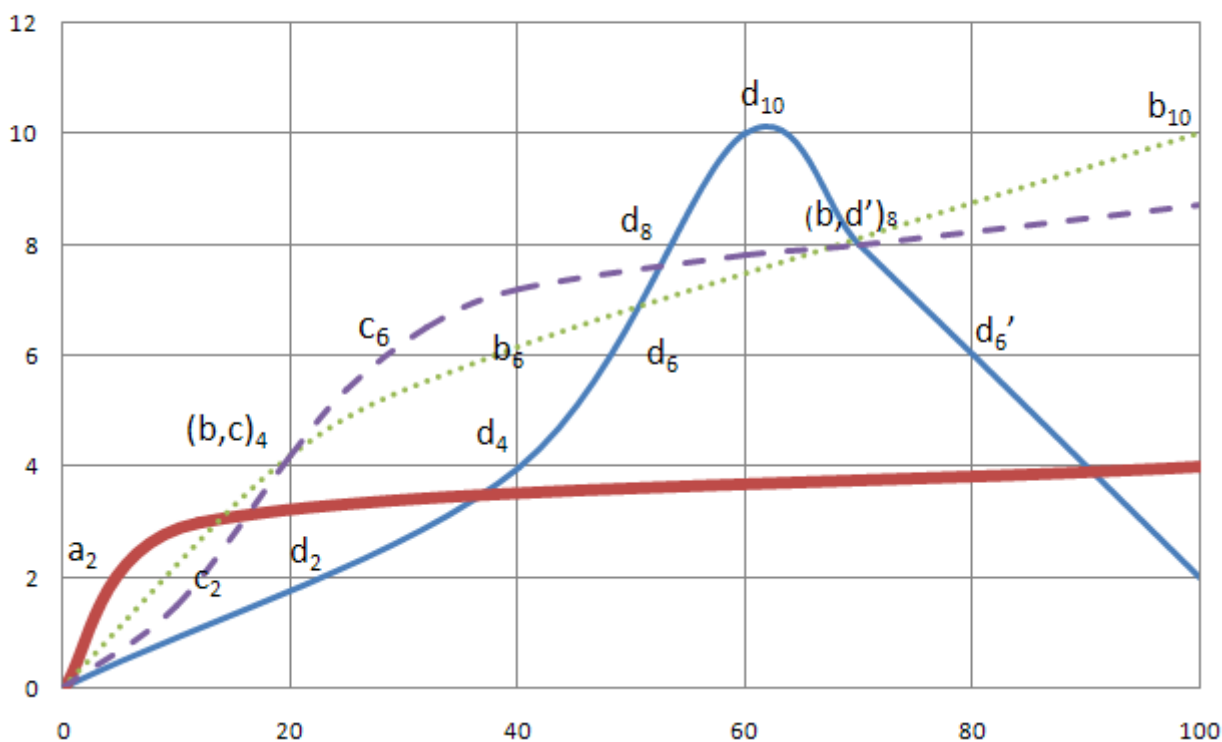


Рисунок 1

Возможные оптимальные решения на четырех траекториях управления системой.

Требуется перевести объект из состояния $Y=0$ в состояние $Y>0$, увеличивая расход ресурса X .

Причем можно использовать одну из 4 альтернативных стратегий А,В,С или D. Каждая стратегия образует в пространстве $\{Y - X\}$ траекторию управления, описываемую функцией

$$Y = Y_A(X); Y = Y_B(X); Y = Y_C(X); Y = Y_D(X)$$

Оптимальность четырех альтернативных траекторий определяется целью оптимизации, т.е. прогнозируемыми конечными результатами. Качество действия по приближению к цели оценивается по количественному критерию эффективности: абсолютному или относительному. В поставленных задачах цели могут быть двух типов:

Достигнуть максимума, израсходовав любую часть выделенного ресурса $0 < X < 100$. По величине $X=10$ этой цели отвечают две траектории $Y = Y_B(X)$ в точке B_{10} ; $Y = Y_D(X)$ в точке D_{10}

Для выбора одной из них нужно выдвинуть новые гипотезы, сформулировать и применить дополнительный критерий, также как:

наименьший расход ресурса $(X_{opt})_{min}$ - лучшая траектория $UD(X)$

устойчивость dY/dX в зоне Y_{max} при колебаниях $(X_{opt} + \Delta X)$ - лучшая траектория $UB(X)$

достигнуть заданного уровня $Y=const$ при минимальном расходе X_{min} . Здесь решения будут зависеть от величины $Y=const$.

Для $y=10$, то $D_{10} < B_{10}$

$y=8$, то $D_8 < C_8 < B_8$

$y=6$, то $C_6 < B_6 < D_6$

$y=4$, то $B_4 = C_4 < D_4 < A_4$

$y=2$, то $A_2 < B_2 < C_2 < D_2$

Если в задаче сформулировано два и более критериев Y_i , то цель становится неопределенной. В общем случае два критерия Y_1 и Y_2 имеют оптимум в разных точках факторного пространства X_1 и X_2 . Поэтому можно определить лишь зону компромисса между ними.

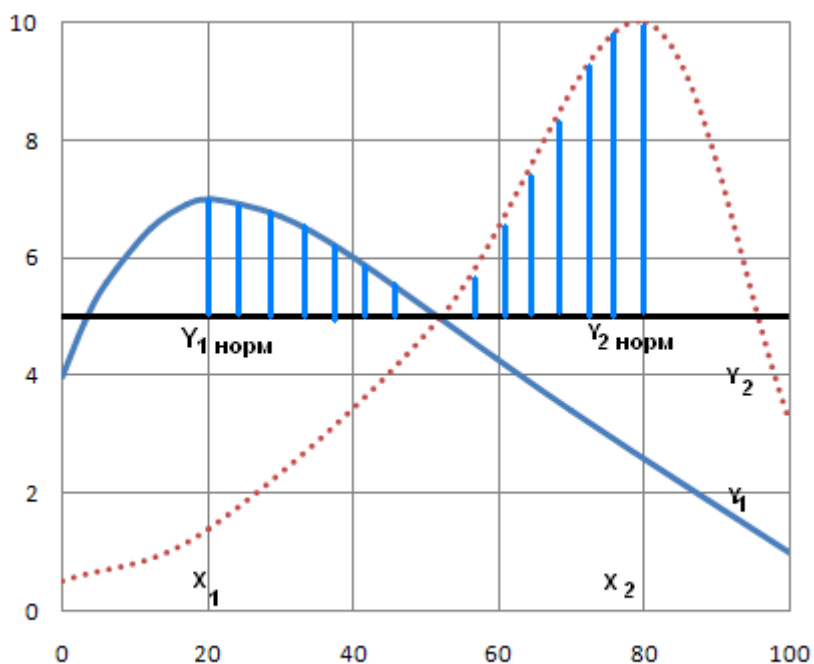


Рисунок 2

Зона компромисса ($X_2 - X_1$) при двух критериях качества

VII. БЕТОН

Бетон для железобетонных конструкций

I Бетон как материал для железобетонных конструкций должен обладать вполне определенными, наперед заданными физико-механическими свойствами: необходимой прочностью, хорошим сцеплением с арматурой, достаточной плотностью (непроницаемостью) для защиты арматуры от коррозии.

В зависимости от назначения железобетонной конструкции и условий ее эксплуатации бетон должен еще удовлетворять специальным требованиям: морозостойкости при многократном замораживании и оттаивании (например, в панелях наружных стен зданий, в открытых сооружениях и др.), жаростой-

кости при длительном воздействии высоких температур, коррозионной стойкости |при агрессивном воздействии среды и др. Бетоны подразделяют по ряду признаков: Р а) структуре — плотной структуры, у которых пространство между зернами заполнителя полностью занято затвердевшим вяжущим; крупнопористые малопесчаные: беспесчаные; поризованные, т. е. с заполнителями и искусственной пористостью затвердевшего вяжущего; ячеистые с искусственно созданными замкнутыми порами; | б) средней плотности — особо тяжелые со средней |плотностью более 2500 кг/м³; тяжелые — со средней плотностью более 2200 и до 2500 кг/м³; облегченные со средней плотностью более 1800 и до 2200 кг/м³; легкие со вредней плотностью более 500 и до 1800 кг/м³;

в) виду заполнителей — на плотных заполнителях; пористых заполнителях; специальных заполнителях, удовлетворяющих требованиям биологической защиты, жастойкости и др.;

г) зерновому составу — крупнозернистые с крупными и мелкими заполнителями; мелкозернистые с мелкими заполнителями;

д) условиям твердения — бетон естественного твердения; бетон, подвергнутый тепловлажностной обработке при атмосферном давлении; подвергнутый автоклавной обработке при высоком давлении.

Сокращенное наименование бетонов, применяемых для несущих железобетонных конструкций, установлено следующее:

тяжелый бетон — бетон плотной структуры, на плотных заполнителях, крупнозернистый, на цементном вяжущем, при любых условиях твердения;

мелкозернистый бетон — бетон плотной структуры, тяжелый, на мелких заполнителях, на цементном вяжущем при любых условиях твердения;

легкий бетон — бетон плотной структуры, на пористых заполнителях, крупнозернистый, на цементном вяжущем, при любых условиях твердения.

В качестве плотных заполнителей для тяжелых бетонов применяют щебень из дробленых горных пород — песчаника, гранита, диабазы и др. — и природный кварцевый песок. Пористые заполнители могут быть естественными — перлит, пемза, ракушечник и др. — или искусственными — керамзит, шлак и т. п. В зависимости от вида пористых заполнителей различают керамзитобетон, шлакобетон, перлитобетон и т. д.

Бетоны поризованные, ячеистые, а также на пористых заполнителях со средней плотностью 1400 кг/м³ и менее применяют преимущественно для ограждающих конструкций. Бетоны особо тяжелые применяют в конструкциях для биологической защиты от излучений. Чтобы получить бетон, обладающий заданной прочностью и удовлетворяющий перечисленным выше специальным требованиям, подбирают по количественному соотношению необходимые составляющие материалы: цементы различного вида, крупные и мелкие заполнители, добавки различного вида, обеспечивающие удобоукладываемость смеси или морозостойкость, и т. п.

На прочность бетона оказывают влияние многие факторы: зерновой состав (его подбирают так, чтобы объем пустот в смеси заполнителей был наименьшим), прочность заполнителей и характер их поверхности, марка цемента и его количество, количество воды и др. При шероховатой и угловатой поверхности заполнителей повышается их сцепление с цементным раствором, поэтому бетоны, приготовленные на щебне, имеют большую прочность, чем бетоны, приготовленные на гравии. Вопросы подбора состава бетона излагаются в курсах строительных материалов.

Необходимая плотность бетона достигается подбором зернового состава, высококачественным уплотнением бетонной смеси при формировании, применением достаточного количества цемента, которое колеблется от 250 до 500 кг/м³. Повышение плотности бетона ведет и к повышению его прочности. Чтобы сократить расход цемента, марка его должна быть выше требуемой прочности бетона.

2. Структура бетона и ее влияние на прочность и деформативность

Структура бетона оказывает большое влияние на прочность и деформативность бетона. Чтобы уяснить этот вопрос, рассмотрим схему физико-химического процесса образования бетона. При затворении водой смеси из заполнителей и цемента начинается химическая реакция соединения минералов цемента с водой, в результате которой образуется гель — студнеобразная пористая масса со взвешенными в воде, еще не вступившими в химическую реакцию, частицами цемента и незначительными соединениями в виде кристаллов. В процессе перемешивания бетонной смеси гель обволакивает отдельные зерна заполнителей, постепенно твердеет, а кристаллы постепенно соединяются в кристаллические сростки, растущие с течением времени. Твердеющий гель превращается в цементный камень, скрепляющий зерна крупных и мелких заполнителей в монолитный твердый материал—бетон.

Существенно важным фактором, влияющим на структуру и прочность бетона, является количество воды, применяемое для приготовления бетонной смеси, оцениваемое водоцементным отношением W/C (отношением взвешенного количества воды к количеству цемента в единице объема бетонной смеси). Для химического соединения с цементом необходимо, чтобы $W/C \ll 0,2$. Однако по технологическим соображениям — для достижения достаточной подвижности и удобоукладываемости бетонной смеси — количество воды берут с некоторым избытком.. Так, подвижные бетонные смеси, заполняющие форму под влиянием текучести, имеют $W/C = 0,5 \dots 0,6$, а жесткие бетонные смеси, заполняющие форму под влиянием механической виброобработки, имеют $W/C = 0,3 \dots 0,4$.

Избыточная, химически несвязанная вода частью вступает впоследствии в химическое соединение с менее активными частицами цемента, а частью заполняет многочисленные поры и капилляры в цементном камне и полостях между зернами крупного заполнителя и стальной арматурой и, постепенно испаряясь, освобождает их. По данным исследований, поры занимают около трети объема цементного камня; с уменьшением W/C пористость це-

ментного камня уменьшается и прочность бетона увеличивается. Поэтому в заводском производстве железобетонных изделий применяют преимущественно жесткие бетонные смеси с возможно меньшим значением W/C . Бетоны из жестких смесей обладают большей прочностью, требуют меньшего расхода цемента и меньших сроков выдержки изделий в формах.

Таким образом, структура бетона оказывается весьма неоднородной: она образуется в виде пространственной решетки из цементного камня, заполненной зернами песка и щебня различной крупности и формы, пронизанной большим числом микропор и капилляров, содержащих химически несвязанную воду, водяные пары и воздух. Физически бетон представляет собой капиллярно-пористый материал, в котором нарушена сплошность массы и присутствуют все три фазы — твердая, жидкая и газообразная. Цементный камень также обладает неоднородной структурой и состоит из упругого кристаллического сростка и наполняющей его вязкой массы — геля.

Длительные процессы, происходящие в таком материале, — изменение водного баланса, уменьшение объема твердеющего вязкого геля, рост упругих кристаллических сростков — наделяют бетон своеобразными упруго-пластическими свойствами. Эти свойства проявляются в характере деформирования бетона под нагрузкой, во взаимодействии с температурно-влажностным режимом окружающей среды.

Исследования показали, что теории прочности, предложенные для других материалов, к бетону неприменимы. Зависимость между составом, структурой бетона, его прочностью и деформативностью представляет собой задачу, над которой работают исследователи. Суждения о прочности и деформативности бетона основаны на боях-ккш числе экспериментов, выполненных & лабораторных и натурных условиях.

Усадка бетона и начальные напряжения

Бетон обладает свойством уменьшаться в объеме при твердении в обычной воздушной среде (усадка бетона) и увеличиваться в объеме при твердении в воде (набухание бетона). Бетоны, приготовленные на специальном цементе (расширяющемся или безусадочном-), не дают усадки. Усадка бетона, как показывают опыты, зависит от ряда причин: 1) количества и вида цемента — чем больше цемента на единицу объема бетона, тем больше усадка, при этом высокоактивные и глиноземистые цементы дают большую усадку; 2) количества воды — чем больше W/C , тем больше усадка; 3) крупности заполнителей — при мелкозернистых песках и пористом щебне усадка больше.

Влияние заполнителей на уменьшение усадки тем сильнее, чем выше их способность сопротивляться деформированию, т. е. чем выше их модуль упругости. При разной крупности зерен заполнителей и меньшем объеме пустот меньше и усадка. Различные гидравлические добавки и ускорители твердения (например, хлористый кальций), как правило, увеличивают усадку.

Обычно усадка бетона происходит наиболее интенсивно в начальный период твердения и в течение первого года, в дальнейшем она постепенно за-

тухает. Скорость усадки зависит от влажности окружающей среды — чем меньше влажность, тем больше усадочные деформации и выше скорость их роста. Усадка бетона под нагрузкой при длительном сжатии ускоряется, а при длительном, растяжении, наоборот, замедляется.

Усадка бетона связана с физико-химическими процессами твердения и уменьшения объема цементного геля, потерей избыточной воды на испарение во внешнюю среду, на гидратацию с еще непрореагировавшими частицами цемента. По мере твердения цементного геля, уменьшения его объема и образования кристаллических сростков усадка бетона затухает. Капиллярные явления в цементном камне, вызванные избыточной водой, также влияют на усадку бетона — поверхностные натяжения менисков вызывают давление на стенки капилляров происходят объемные деформации.

Усадке цементного камня в период твердения бетона У препятствуют заполнители, которые становятся внутренними связями, вызывающими в цементном камне начальные растягивающие напряжения. По мере твердения геля образующиеся в нем кристаллические сростки становятся такого же рода связями. Неравномерное высыхание бетона приводит к неравномерной его усадке, что в свою очередь, ведет к возникновению начальных усадочных напряжений. Открытые, быстрее высыхающие поверхностные слои бетона испытывают растяжение, в то время как внутренние, более влажные зоны, препятствующие усадке поверхностных слоев, оказываются сжатыми. Следствием таких начальных растягивающих напряжений являются усадочные трещины в бетоне.

Начальные напряжения, возникающие под влиянием усадки бетона, не учитывают непосредственно в расчете прочности железобетонных конструкций; их учитывают расчетными коэффициентами, охватывающими совокупность характеристик прочности, а также конструктивными мерами — армированием элементов. Уменьшить начальные усадочные напряжения в бетоне можно технологическими мерами — подбором состава, увлажнением среды при тепловой обработке твердеющего бетона, увлажнением поверхности бетона и др., а также конструктивными мерами — устройством усадочных швов в конструкциях.

4. Прочность бетона

Основу прочности. Так как бетон представляет собой' неоднородный материал, внешняя нагрузка создает в нем сложное напряженное состояние. В бетонном образце, подвергнутом сжатию, напряжения концентрируются на более жестких частицах, обладающих большим модулем упругости, вследствие чего по плоскостям соединения этих частиц возникают усилия, стремящиеся нарушить связь между частицами. В то же время в местах, ослабленных порами и пустотами, происходит концентрация напряжений. Из теории упругости известно, что вокруг отверстий в материале, подвергнутом сжатию, наблюдается концентрация сжимающих и растягивающих напряжений; последние действуют по площадкам, параллельно сжимающей силе. Поскольку в бетоне много пор и пустот, растягивающие напряжения у одного

твердые или поры накладываются на соседние. В результате в бетонном образце, подвергнутом осевому сжатию, возникают продольные сжимающие и поперечно растягивающие напряжения (вторичное поле напряжений).

Разрушение сжимаемого образца, как показывают опыты, возникает вследствие разрыва бетона в поперечном направлении. Сначала по всему объему возникают микроскопические трещинки отрыва. С ростом нагрузки трещинки отрыва соединяются, образуя видимые трещины, направленные параллельно или с небольшим наклоном к направлению действия сжимающих сил (1.1,6). Затем трещины раскрываются, что сопровождается кажущимся увеличением объема. Наконец, наступает полное разрушение. Разрушение сжимаемых образцов из различных материалов, обладающих высокой сплошностью структуры, наблюдается вследствие разрыва в поперечном направлении. В бетонных же образцах это явление развивается еще и под влиянием вторичного поля напряжений. Граница образования структурных микроразрушений бетона под нагрузкой может определяться по результатам ультразвуковых измерений. Скорость ультразвуковых колебаний и, распространяющихся поперек линий действия сжимающих напряжений, уменьшается с развитием микротрещин в бетоне! Сжимающее напряжение в бетоне $R^{\circ}_{срс}$, при котором начинается образование микротрещин, соответствует началу уменьшения скорости ультразвука на кривой (1.2). По значению напряжения $R^{\circ}_{срс}$ судят о прочностных и деформативных свойствах бетона.

Отсутствие закономерности в расположении частиц, составляющих бетон, в расположении и крупности пор приводит к тому, что при испытании образцов, изготовленных из одной и той же бетонной смеси, получают неодинаковые показатели прочности — разброс прочности. Прочность бетона зависит от ряда факторов, основными из которых являются: 1) технологические факторы, 2) возраст и условия твердения, 3) форма и размеры образца, 4) вид напряженного состояния и длительные процессы. Бетон при разных напряжениях — сжатии, растяжении и срезе — имеет разное временное сопротивление.

Классы и марки бетона. В зависимости от назначения железобетонных конструкций и условий эксплуатации устанавливают показатели качества бетона, основными из которых являются:

- класс бетона по прочности на осевое сжатие B ; указывается в проекте во всех случаях;
- класс бетона по прочности на осевое растяжение B ; назначается в тех случаях, когда эта характеристика имеет главенствующее значение и контролируется на производстве;
- марка бетона по морозостойкости F ; должна назначаться для конструкций, подвергающихся в увлажненном состоянии действию попеременного замораживания и оттаивания (открытые конструкции, ограждающие конструкции и т. п.);

марка по водонепроницаемости W; назначается для конструкций, к которым предъявляют требования непроницаемости (резервуары, напорные трубы и т. п.);

марка по плотности D; назначается для конструкций, к которым кроме требований прочности предъявляются требования теплоизоляции, и контролируется на производстве.

Заданные класс и марку бетона получают соответствующим подбором состава бетонной смеси с последующим испытанием контрольных образцов. Высокое сопротивление бетона сжатию — наиболее ценное его свойство» широко используемое в железобетонных конструкциях. По этим соображениям основная характеристика — класс бетона по прочности на сжатие указывается во всех случаях.

Классом бетона по прочности на осевое сжатие B (МПа) называется временное сопротивление сжатию бетонных кубов с размером ребра 15 см, испытанных через 28^{дней} хранения при температуре 20±2°С по ГОСТу с учетом статистической изменчивости прочности. Сроки твердения бетона устанавливают так, чтобы требуемая прочность бетона была достигнута к моменту загрузки конструкции проектной нагрузкой. Для монолитных конструкций на обычном портландцементе этот срок, как правило, принимается равным 28 дням. Для элементов сборных конструкций заводского изготовления отпускная прочность бетона может быть ниже его класса; она устанавливается по стандартам и техническим условиям в зависимости от условий транспортирования, монтажа, сроков загрузки конструкции и др. Классы бетона по прочности на сжатие для железобетонных конструкций нормами устанавливаются следующие: для тяжелых бетонов B7,5; B10; B12,5; B15; B20; B30; B35; B40; B45; B50; B55; B60; для мелкозернистых бетонов вида А на песке с модулями крупности 2,1 и более — в том же диапазоне до B40 включительно; вида Б с модулем крупности менее 1 — в том же диапазоне до B30 включительно; вида В, подвергнутого автоклавной обработке — в том же диапазоне до B60 включительно; для легких бетонов — в том же диапазоне до B40 включительно.

Классы бетона по прочности на осевое растяжение B_{0,8}; B_{1,2}; B_{1,6}; B₂; B_{2,4}; B_{2,8}; B_{3,2} характеризуют прочность бетона на осевое растяжение (МПа) по ГОСТу с учетом статистической изменчивости прочности.

Марки бетона по морозостойкости от F25 до F500 характеризуют число выдерживаемых циклов попеременного замораживания и оттаивания в насыщенном водой состоянии.

Марки бетона по водонепроницаемости от W2 до W12 характеризуют предельное давление воды, при котором еще не наблюдается просачивание ее через испытываемый образец.

Легкие бетоны на пористых заполнителях и цементном вяжущем при одинаковых классах и марках по морозостойкости и водонепроницаемости применяют в сборных и монолитных железобетонных конструкциях наравне с тяжелыми бетонами. Для многих конструкций они весьма эффективны, так как приводят к снижению массы.

Влияние времени и условий твердения на прочность бетона. Прочность бетона нарастает в течение длительного времени, но наиболее интенсивный ее рост наблюдается в начальный период твердения. Прочность бетона/приготовленного на портландцементе, интенсивно нарастает первые 28 суток, а на пуццолановом и шлаковом портландцементе медленнее — первые 90 суток. Но и в последующем при благоприятных условиях твердения — положительной температуре, влажной среде — прочность бетона может нарастать весьма продолжительное время, измеряемое годами. Объясняется это явление длительным процессом окаменения цементного раствора — твердением геля и ростом кристаллов. По данным опытов, прочность бетонных образцов, хранившихся в течение И лет, нарастала в условиях влажной среды вдвое, ; а в условиях сухой среды — в 1,4 раза; в другом случае :> нарастание прочности прекратилось к концу первого года (1.3). Если бетон остается сухим, как это часто бывает при эксплуатации большинства железобетонных конструкций, то по истечении первого года дальнейшего нарастания прочности ожидать уже нельзя.

Процесс твердения бетона значительно ускоряется при повышении температуры и влажности среды. С этой целью железобетонные изделия на заводах подвергают тепловой обработке при температуре до 90 °С и влажности до 100 % или же специальной автоклавной обработке при высоком давлении пара и температуре порядка 170 °С. Эти способы позволяют за сутки получить бетон прочностью ~70L% проектной. Твердение бетона при отрицательной температуре резко замедляется или прекращается.

Кубиковая прочность бетона при сжатии. При осевом сжатии кубы разрушаются вследствие разрыва бетона в поперечном направлении (1.4, а). Наклон трещин разрыва обусловлен силами трения, которые развиваются на контактных поверхностях — между подушками пресса и гранями куба. Силы трения, направленные внутрь, препятствуют свободным поперечным деформациям куба и создают эффект обоймы. Удерживающее влияние сил трения по мере удаления от торцовых граней куба уменьшается, поэтому после разрушения куб приобретает форму усеченных пирамид, сомкнутых малыми основаниями. Если при осевом сжатии куба устранить влияние сил трения смазкой контактных поверхностей, поперечные деформации проявляются свободно, трещины разрыва становятся вертикальными, параллельными действию сжимающей силы, а временное сопротивление уменьшается примерно вдвое (1.4,6). Согласно стандарту, кубы испытывают без смазки контактных поверхностей.

Опытами установлено, что прочность бетона одного и того же состава зависит от размера куба: если временное сопротивление сжатию бетона для базового куба с ребром 15 см равно R_t то для куба с ребром 20 см оно уменьшается и равно приблизительно 0,93 R_t , а для куба с ребром 10 см увеличивается и равно ~1,1 R_t

Это объясняется изменением эффекта обоймы с изменением размеров куба и расстояния между его торцами.

Призменная прочность бетона при сжатии. Железобетонные конструкции по форме отличаются от кубов, поэтому кубиковая прочность бетона не может быть непосредственно использована в расчетах прочности элементов конструкции. Основной характеристикой прочности бетона сжатых элементов является призменная прочность R_b — временное сопротивление осевому сжатию бетонных призм. Опыты на бетонных призмах с размером стороны основания a и высотой h показали, что призменная прочность бетона меньше кубиковой и что она уменьшается с увеличением отношения h/a . Кривая, приведенная на рис. 1.5, иллюстрирует зависимость отношения R_b/R от h/a по усредненным опытным данным. / Влияние сил трения на торцах призмы уменьшается с увеличением ее высоты и при отношении $h/a \geq 4$ значение R_b становится почти стабильным и равным примерно $0,5 R$. Влияние гибкости бетонного образца при этих испытаниях не сказывалось, так как оно ощущимо лишь при $h \leq 4a$.

В качестве характеристики прочности бетона сжатой зоны изгибаемых элементов также принимают R_b , при этом вместо действительной криволинейной эпюры напряжений бетона сжатой зоны в предельном состоянии принимают условную прямоугольную эпюру напряжений.

Прочность бетона при растяжении зависит от прочности цементного камня при растяжении и сцепления его с зернами заполнителей. Согласно опытным данным, прочность бетона при растяжении в 10—20 раз меньше, чем при сжатии, причем относительная прочность при растяжении уменьшается с увеличением класса бетона. В опытах наблюдается еще больший по сравнению со сжатием разброс прочности.

Прочность бетона при срезе и скалывании. В чистом виде явление среза состоит в разделении элемента на две части по сечению, к которому приложены перерезывающие силы. При этом сопротивление срезу зерен крупных заполнителей, работающих как шпонки в плоскости среза, оказывает существенное влияние. При срезе распределение напряжений по площади сечения считается равномерным.

В железобетонных конструкциях чистый срез встречается редко; обычно он сопровождается действием продольных сил.

Сопротивление бетона скалыванию возникает при изгибе железобетонных балок до появления в них наклонных трещин. Скалывающие напряжения по высоте сечения изменяются по квадратной параболе. Временное сопротивление скалыванию при изгибе, согласно опытным данным, в 1,5—2 раза больше R_{bt} .

Прочность бетона при длительном действии нагрузки.

Согласно опытным данным, при длительном действии нагрузки и высоких напряжениях под влиянием развивающихся значительных неупругих деформаций и структурных изменений бетон разрушается при напряжениях, меньших, чем временное сопротивление осевому сжатию R_b . Предел длительного сопротивления бетона осевому сжатию по опытным данным может составлять $R_{bi} = 0,9 R_b$ и меньше. Если при эксплуатации кон-

струкции в благоприятных для нарастания прочности бетона условиях уровень напряжений σ/R_b постепенно уменьшается, отрицательное влияние фактора длительного нагружения может и не проявляться.

Прочность бетона при многократно повторных нагрузках. При действии многократно повторных нагрузок с повторяемостью в несколько миллионов циклов временное сопротивление бетона сжатию под влиянием развития структурных микротрещин уменьшается.

Наименьшее значение предела выносливости, как показывают исследования, связано с границей образования структурных микротрещин так, что $R_r = R_{cr}$. Такая

связь между R_r и R_{cr} позволяет находить предел выносливости по первичному нагружению образца определением границы образования структурных микротрещин ультразвуковой аппаратурой. Значение R_r необходимо для расчета на выносливость железобетонных конструкций, испытывающих динамические нагрузки, — подкрановых балок, перекрытий некоторых промышленных зданий и т. п.

Динамическая прочность бетона. При динамически нагрузке большой интенсивности, но малой продолжительности, развивающейся вследствие ударных и взрывных воздействий, наблюдается увеличение временно сопротивления бетона — динамическая прочность, $4e_1$ меньше время t нагружения бетонного образца заданной динамической нагрузкой (или, что то же самое, $4e_1$ больше скорость роста напряжений МПа/с), тем больше коэффициент динамической прочности бетона $k_d < *$. Этот коэффициент равен отношению динамического временного сопротивления сжатию R_d к призмочной прочности R_b (1,8, в). Например, если время нагружения динамической разрушающей нагрузкой составляет $0,1$ с коэффициент $k_d = 1,2$. Это явление объясняют энергопоглощающей способностью бетона, работающего в течение короткого промежутка нагружения динамической нагрузкой только упруго.

Деформативные характеристики бетона

Деформативность.

Под деформативностью твердых тел понимают их свойство изменять размер и форму под влиянием силовых воздействий и несиловых факторов. В соответствии с этим деформации твердых тел разделяют на силовые и несиловые. Под несиловыми понимают деформации, проявляющиеся вследствие нарушения гигрометрического баланса парового давления, изменения температур. Несиловые деформации (усадка, набухание, температурные воздействия) являются объемными и развиваются одинаково во всех направлениях. Свободное несиловое деформирование не сопровождается изменением напряженного состояния твердого тела. Стесненные несиловые деформации приводят к возникновению напряжений называемых собственными напряжениями твердого тела. Эти напряжения могут служить причиной разрушения материала.

Под силовыми понимают деформации, проявляющиеся под воздействием внешних сил. Силовые деформации твердых тел развиваются преимущественно вдоль направления действия внутренних усилий. Они прояв-

ляются в виде сжатия, растяжения, сдвига. Одновременно с ними, как следствие продольного деформирования, возникают поперечные деформации. Деформативность твердых тел обусловлена их физической природой, поэтому разделение деформаций на силовые и несиловые, предполагающее их взаимонезависимость, является условным. В действительности силовые и несиловые деформации взаимосвязаны. Например, изменения влажности или температуры образцов приводят к изменению их механических характеристик (модуль упругости, меры ползучести) и тем самым влияют на проявление силовых деформаций.

По временной связи с напряжениями силовые деформации бывают мгновенные и запаздывающие. Мгновенные деформации фиксируют при неизменных во времени напряжениях; они развиваются одновременно с изменением напряжения, проявляются со скоростью, близкой к скорости звука, и прекращаются мгновенно, как только стабилизируются напряжения. Величина их зависит от упругопластических свойств материала, поэтому их часто называют упругопластическими деформациями.

В литературе часто при рассмотрении мгновенного деформирования материала имеют в виду однократное изменение формы и размеров тела при нагружении кратковременной нагрузкой. На самом деле всякое нагружение осуществляется во времени, поэтому неправильно сопоставлять экспериментальные результаты, полученные разными исследователями. Под мгновенным (в статическом понимании) понимают загрузку образцов с немедленным автоматическим отсчетом деформаций. Для получения запаздывающих деформаций (ползучесть) необходимо одновременно испытывать серию образцов-близнецов: у одних образцов замерять общие силовые деформации, а у других — мгновенные силовые деформации. Разность между ними даст значение деформации ползучести материала. Запаздывающие деформации развиваются и при постоянных напряжениях; теоретически они стабилизируются лишь в бесконечной отдаленности, если напряжения не превышают длительной прочности материала.

В литературе принято силовые деформации условно разделять на линейные и нелинейные.

Под линейными понимают деформации, которые пропорциональны напряжению. Линейные мгновенные деформации являются упругими. При этом должно соблюдаться требование одинаковой меры ползучести при сжатии и растяжении, загрузке и разгрузке. Под нелинейными понимают мгновенные пластические и запаздывающие деформации; они непропорциональны напряжениям. Под непропорциональностью связи между напряжениями и деформациями понимают следующее: если несколько образцов-близнецов нагрузить разными силами, то запаздывающие деформации, накопленные образцами за равные промежутки времени, не пропорциональны этим силам. Нелинейность деформирования твердых тел связывают с их структурными и возрастными изменениями.

С ростом прочности материала и уплотнении структуры за счет предшествующих стационарных или многократно переменных силовых воздействий условный порог нелинейности деформирования материала сдвигается в сторону нагружения. В этом одно из проявлений влияния предшествующего характера деформирования на сопротивление материала силовым нагружениям. Разгрузка материала происходит практически линейно, так как определяется упругой частью мгновенных деформаций и упругим последствием запаздывания. Деформации нагружения всегда больше, чем деформации разгрузки. Разница между ними представляет собой остаточные деформации. Доля остаточных деформаций растет с ростом уровня нагружения и падает по мере старения материала, с увеличением его прочности, после активного силового предшествующего воздействия, например после многократно переменного нагружения.

Взаимосвязь между напряжениями, временем и деформациями, а также другими факторами, определяющими механическое состояние материалов, описывают с помощью так называемых физических уравнений. Уравнения механического состояния материалов, используемые в механике твердого тела, являются феноменологическими, т. е. построенными на базе экспериментальных данных с помощью некоторых рабочих гипотез. Как правило, эксперименты проводят над простейшими образцами при эталонных напряженных состояниях и режимах нагружения. Рабочие гипотезы представляют собой обобщение опыта и связаны с фундаментальными исследованиями естественных наук.

Бетон является материалом с ярко выраженными упругопластическими свойствами. Уже при небольших напряжениях в нем кроме упругих (восстанавливающихся) деформаций развиваются пластические (остаточные), зависящие от характера приложения и длительности действия нагрузки, возраста бетона и режима нагружения. Чем бетон старше, тем выше его сопротивление деформированию. Для бетона силовые деформации подразделяют на три вида: при однократном нагружении кратковременной нагрузкой, при длительном действии нагрузки, при многократно повторяющейся нагрузке.

Динамическое деформирование бетона имеет дополнительную специфику. Мгновенные деформации бетона (упругие и пластические) не связаны режимом и длительностью нагружения; они определяются лишь конечными напряжениями. Деформации ползучести бетона, как запаздывающие, всегда связаны режимом и длительностью приложения нагрузки; их величина уменьшается по мере увеличения возраста бетона к моменту начала нагружения.

Сопротивление деформированию.

При силовых воздействиях твердые тела деформируются. В теории деформаций бетона рассматривают относительные деформации, равные отношению абсолютного удлинения (укорочения, поворота сечения) элемента к его первоначальному размеру, замеряемому до наблюдения. В тексте книги вместо термина относительные деформации употребляется слово — деформации. Мерой деформаций твердых тел являются удельные деформации. В

общем случае сопротивление деформированию твердых тел уменьшается с приближением действующих напряжений к пределу прочности материала, а удельные деформации растут. Удельные деформации, таким образом, являются функциями напряжений. В этом проявляется нелинейность деформирования и это определяет нелинейную постановку задачи в теории железобетона. В частных случаях сопротивление деформированию твердых тел усредняется на всем возможном диапазоне изменения напряжений — от нулевых значений до предела прочности. Тогда считается, что удельные деформации не зависят от величины действующих напряжений. В этом — приближенная, линейная постановка задачи теории железобетона.

У материалов, чьи механические свойства меняются со временем, в частности у стареющих бетонов, мгновенные деформации, как и деформации ползучести, зависят от режима нагружения. У материалов со стабильными механическими свойствами, в частности у так называемых старых бетонов, от режима нагружения зависят лишь деформации ползучести. Подавляющее большинство строительных конструкций находятся в условиях неоднородного напряженного состояния (изгиб, внецентренное сжатие или растяжение) и величины напряжений в разных их сечениях и даже точках по сечениям неодинаковы; например, у простой балки, опирающейся на две шарнирные опоры, при равномерной нагрузке, наибольшие моменты и наибольшие фибровые напряжения будут посередине пролета, а наименьшие — у опор; одновременно по высоте каждого сечения на нулевой оси напряжения равны нулю и имеют экстремальные значения вблизи границы сечения (на фибровом волокне). Прямой учет многочисленной изменчивости деформативных характеристик бетона с помощью признанных методов строительной механики становится неоправданно трудоемким и поэтому не используется. На практике применяются более простые инженерные способы.

Деформации при однократном длительном нагружении.

Как показывают опыты и практика эксплуатации зданий, при продолжительном действии постоянной нагрузки деформации каменных, бетонных и железобетонных конструкций не остаются неизменными, а увеличиваются во времени. Процесс деформирования остается неравновесным весьма длительное, а теоретически — неограниченное время; развитие деформаций, следуя за напряжениями, запаздывает во времени. Конечные полные деформации конструкций могут за 3...4 года в несколько раз превышать мгновенные деформации.

Ползучестью называют свойство бетона, характеризующееся нарастанием неупругих деформаций при длительном действии нагрузки. Деформации ползучести бетона обусловлены его структурными несовершенствами; абсолютная величина деформаций ползучести зависит от возраста, прочности бетона и материалов его составляющих, влажности среды и предыстории деформирования; она уменьшается по мере старения бетона, увеличения его прочности в момент нагружения и уплотнения после предшествующего многократного знакопеременного деформирования. Являясь силовой деформацией, деформации ползучести бетона тем больше, чем выше уровень напря-

жений. При этом скорость деформаций ползучести бетона затухает во времени, асимптотически приближаясь к нулевому значению. Наибольшую интенсивность нарастания деформаций ползучести бетона наблюдают в первые 3...4 мес.

При стеснении деформации ползучести напряженное состояние сечения бетонного образца меняется. Доля упругих деформаций и, следовательно, величина напряжений уменьшаются, а доля деформаций ползучести бетона возрастает. Происходит замещение одних деформаций другими. Ползучесть бетона увеличивается с уменьшением размеров испытуемого образца и уменьшается с понижением водоцементного отношения, увеличением влажности окружающей среды. На деформации ползучести бетона оказывают также непосредственное влияние зерновой состав бетона, вид цемента, крупных и мелких заполнителей, технологические и многие другие факторы.

Бетоны на пористых заполнителях обладают большей ползучестью по сравнению с тяжелыми бетонами. Нелинейная ползучесть бетона обуславливает перераспределение напряжений по высоте бетонных сечений и в статически неопределимых железобетонных конструкциях. При проектировании предварительно напряженных железобетонных конструкций нормы учитывают быстро натекающую ползучесть, под которой понимают ползучесть бетона, проявляющуюся непосредственно после нагружения бетона.

Релаксация напряжений.

Релаксацией напряжения бетона называют процесс снижения напряжения при стеснении его деформаций. Если деформации бетона нарастают свободно, напряжения в сечениях элементов остаются постоянными. В железобетоне ненапрягаемая арматура стесняет свободное развитие деформаций ползучести бетона, поэтому напряжения в бетоне не будут оставаться постоянными. Они будут снижаться по мере ползучести бетона, а в арматуре в связи с самоуравновешиванием — увеличиваться. Ползучесть и релаксация напряжений бетона имеют общую физико-механическую основу. Математически они взаимосвязаны и оказывают существенное влияние на работу железобетонных конструкций, испытывающих воздействие длительной нагрузки. Ползучесть бетона и релаксация напряжений (реологические свойства бетона) обуславливают рост прогибов железобетонных конструкций с течением времени, снижают предварительные напряжения в арматуре, способствуют перераспределению усилий в железобетонных статически неопределимых системах.

Деформации при многократном повторении нагрузки.

Многократно повторные нагрузки могут иметь как статический, так и динамический характер.

Статическими многократно повторными нагрузками являются такие, возрастание и снижение которых происходит медленно, а силы инерции не оказывают влияния на результаты расчета.

К динамическим многократно повторным нагрузкам относят меняющиеся во времени нагрузки, при которых нельзя пренебречь влиянием инер-

ционных сил на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций или конструкций в целом.

К статическим многократно повторяемым можно отнести нагрузки от периодически освобождаемых хранилищ, к динамическим — нагрузки от вибрационных машин. Площадь петли означает энергию, необратимо рассеянную единицей объема тела за один цикл нагружения — разгрузки за счет несовершенства деформативных свойств материала. При повторении циклов нагрузка — разгрузка происходит постепенная выборка неупругих деформаций; при этом площадь петли гистерезиса постепенно уменьшается, достигая в пределе стабильной величины. Если при загрузении образца напряжения не превосходят предел выносливости бетона, деформации, постепенно затухая, достигают предельной величины, а стабильная зависимость между напряжениями и деформациями сохраняется при неограниченно большом числе циклов загрузки.

Снижение длительной прочности и виброползучести бетона проявляется резче с ростом уровня напряжений, асимметрии циклов и частоты колебаний и смягчаются с увеличением исходных возраста и класса бетона. Указанные изменения механических свойств бетона существенно влияют на несущую способность и деформативность железобетонных конструкций, поэтому их учитывают при расчетах.

Предельные деформации при осевом растяжении и сжатии.

Под предельными деформациями бетона при растяжении (или сжатии) понимают относительные средние удлинения (или укорочения) в момент разрушения центрально-растянутых (центрально-сжатых) образцов, испытанных по государственному стандарту. Предельная растяжимость бетона $0,1 \dots 0,2$ мм/м длины образца. Предельная растяжимость увеличивается при влажном хранении (примерно вдвое) с увеличением длительности приложения нагрузки и уменьшается с повышением прочности и плотности бетона. От предельной растяжимости бетона зависит сопротивляемость растянутых зон сечений железобетонных элементов образованию трещин. Предельное относительное укорочение бетона в $10 \dots 20$ раз больше его предельного относительного удлинения и составляет $0,8 \dots 4$ мм/м длины образца. Предельная сжимаемость бетона в сжатой зоне изгибаемых железобетонных элементов достигает $0,003 \dots 0,005$. При уменьшении ширины сечения к низу и особенно в тавровых сечениях с полкой в сжатой зоне уменьшается, а при уменьшении высоты сжатой зоны сечения — увеличивается.

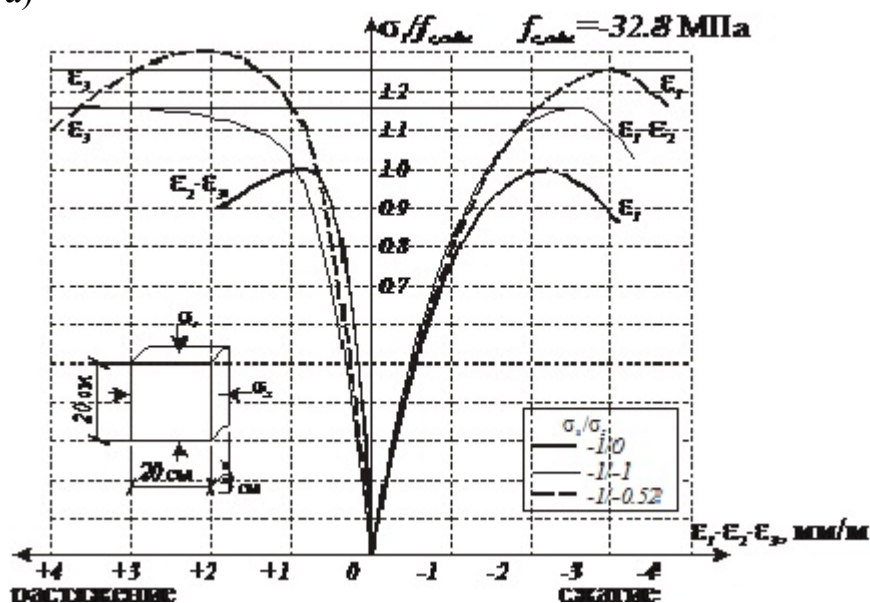
У бетонов на пористых заполнителях предельная сжимаемость и растяжимость бетона примерно в два раза выше, чем у тяжелых бетонов тех же марок. Предельные поперечные деформации бетона при сжатии и растяжении определяют соответственно по предельным продольным относительным деформациям сжатия и растяжения посредством коэффициента поперечной деформации (коэффициента Пуассона) $\nu = 0,2$. Рост поперечных деформаций как при сжатии, так и при растяжении способствует образованию в бетоне микротрещин. Это отрицательно сказывается на морозо- и коррозиостойкости бетона.

Диаграмма деформирования бетона

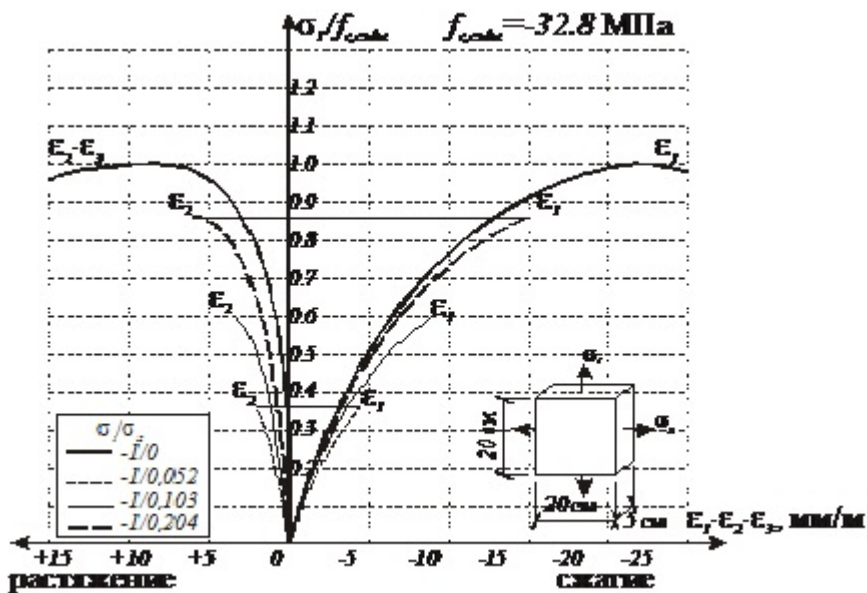
В соответствии с положениями норм по проектированию железобетонных конструкций [1] диаграмму деформирования (состояния) бетона, устанавливающую связь между напряжениями и продольными относительными деформациями бетона при кратковременном действии однократно приложенной нагрузки вплоть до установленных ее предельных значений, отвечающих разрушению бетона при однородном напряженном состоянии, следует рассматривать в качестве обобщенной характеристики механических свойств бетона.

Процедура получения полной диаграммы деформирования бетона при сжатии на первый взгляд выглядит несложной. Для этого опытный бетонный образец, оснащенный измерительными приборами для регистрации продольных деформаций необходимо поместить в испытательную машину, создающую осевую нагрузку. Измерение продольных деформаций в процессе нагружения производят, например, при помощи индикаторов часового типа с ценой деления 0,001 мм, устанавливаемых на базовой длине 10 (см. рис. 4.5а). Тогда относительную продольную деформацию образца в процессе нагружения определяют (см. рис. 4.5б).

а)



б)



в)

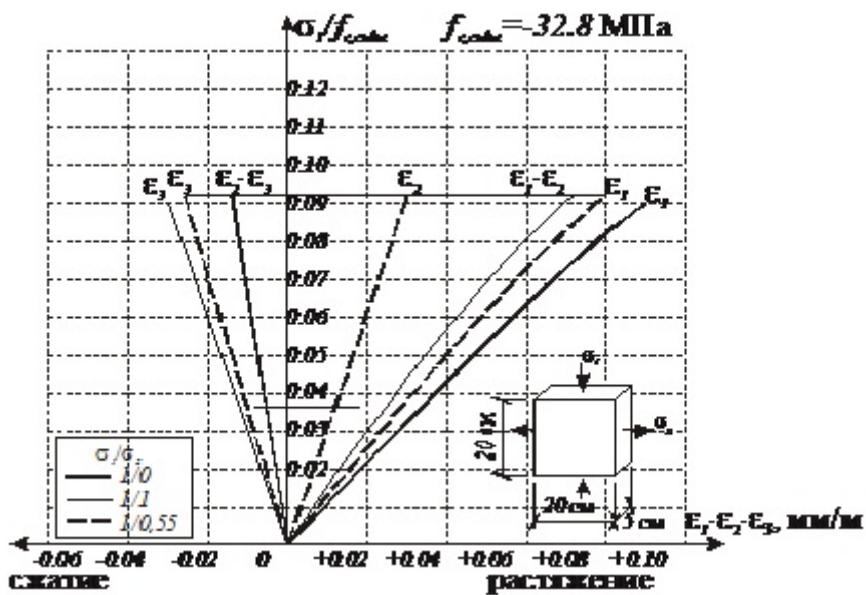


Рис. 4.4.

Зависимости «напряжения – относительные деформации»: а) в условиях двухосного сжатия; б) в условиях двухосного растяжения; в) в условиях комбинации напряжений сжатия растяжения согласно [34].

Методика получения полных диаграмм деформирования бетона

- а) схема измерения деформаций; б) общий вид образца, оснащенного индикатором часового типа;
- в) общий вид испытательной машины
- 1 – пластины испытательной машины; 2 – опытный образец; 3 – индикаторы часового типа;

тензорезисторов, наклеенных на поверхности бетона, или индикаторов часового типа, установленных на определенной базе (см. рис. 4.5 а, б).

Исследования нисходящей ветви диаграммы представляет собой наиболее сложную и трудоемкую часть эксперимента, требует применения специального испытательного оборудования. На этом этапе существенное влияние на работу бетона оказывает взаимодействие системы «испытательная машина – опытный образец», а появление продольных трещин делает затруднительным измерение действительных деформаций бетона. В силу того, что традиционные испытательные прессы, позволяющие производить испытания при равномерном приращении нагрузки, обладают определенной деформативностью (податливостью) к моменту достижения пиковой точки диаграммы деформирования (рис. 4.6), соответствующей пределу кратковременной прочности, испытательная машина накапливает значительную потенциальную энергию деформации, которая затем мгновенно реализуется в энергию удара. Поэтому при достижении пиковой точки диаграммы наблюдается внезапное разрушение образца, и определить нисходящую ветвь не представляется возможным.

Существует целый ряд методических приемов, посредством которых взаимодействие «испытательная машина – опытный образец» стремятся исключить или снизить до приемлемого уровня. Один из них – применение стальных цилиндров и колонн, нагружаемых параллельно основным образцам, либо специальных устройств, нагружаемых параллельно основному образцу. Следует отметить, что в ряде случаев применение таких методических подходов ведет к погрешностям и при испытаниях получают противоречивые, трудно сопоставимые данные.

Для получения полной диаграммы деформирования бетона созданы специальные испытательные машины с компьютерным контролем скорости нагружения (деформации) от 0,01 до 1,0 мм/мин, оснащенные контрольно-измерительными устройствами, зафиксированными не только непосредственно на бетонном образце, но и между плитами пресса (по аналогии с т.н. Danison Closed – Loop Servo Controlled Hydraulic Testing Machine – 300 kN, см. рис. 4.5в).

Основной отличительной особенностью таких испытательных машин является то, что их основу составляет жесткая недеформируемая (в диапазоне нагружения) рама, а опытный образец подвергается испытанию при равномерном наращивании продольной деформации, а не напряжения (усилия), как это принято в традиционных методиках. При этом в процессе испытания истинная продольная деформация образца определяется при помощи специального метода, исключаяющего погрешности.

Большую роль при проведении испытаний играет скорость нагружения образца, влияющая на формирование и развитие микротрещин в структуре материала. С увеличением скорости нагружения возрастает как предел кратковременной прочности, так и упругие свойства бетона, и наоборот. На рис. 4.7 показаны диаграммы деформирования бетона, испытанного при различных скоростях нагружения образца. Скорость нагружения

устанавливается соответствующими стандартами, оговаривающими требования к методике проведения испытаний бетонных образцов.

Экспериментальные исследования показывают, что форма кривой, представляющей зависимость «напряжения – относительные деформации» существенно зависит от кратко-временной прочности бетона. Идеализированные диаграммы деформирования, полученные путем аппроксимации опытных данных для бетонов разной прочности, показаны на рис. 4.8.

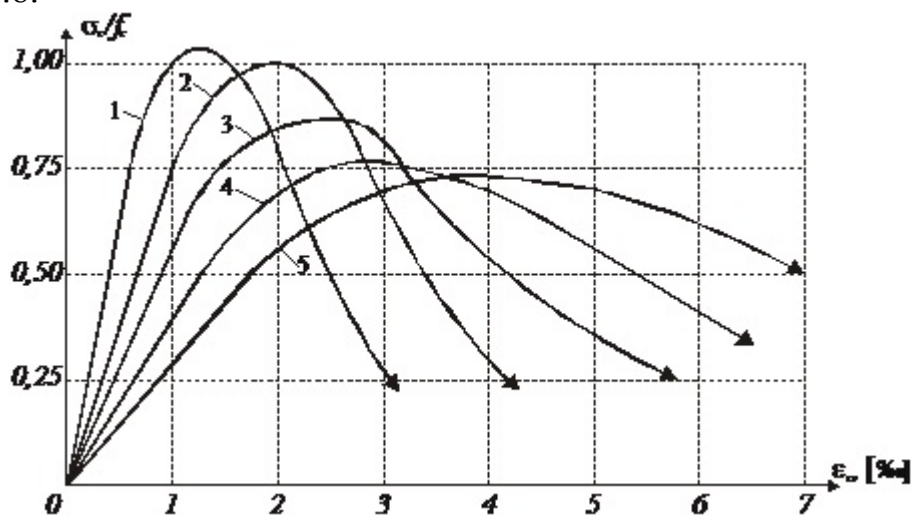


Рис. 4.7.

Влияние скорости нагружения образца на форму кривой и параметрических точек диаграммы деформирования бетона при сжатии [40]

1 – 1 ‰/0,6 сек.; 2 – 1 ‰/мин.; 3 – 1 ‰/100 мин.; 4 – 1 ‰/7 дней; 5 – 1 ‰/700 дней.

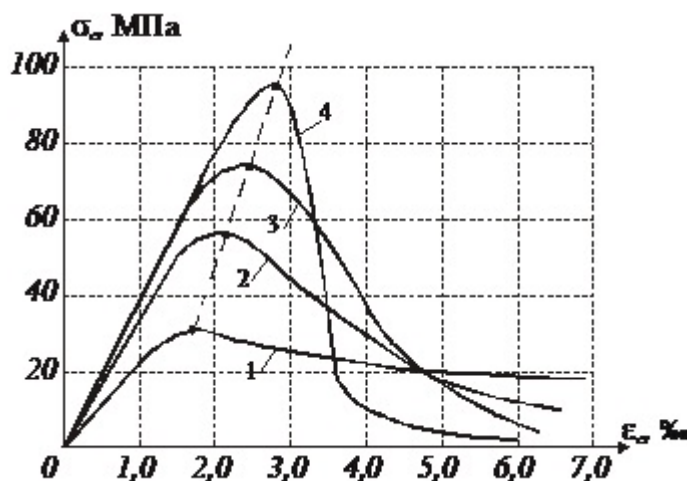


Рис. 4.8.

Зависимость « $\sigma_c - \epsilon_c$ » для бетонов разной прочности

1 – МПа; 2 – МПа;

3 – МПа; 4 – МПа.

Как видно из графиков (см. рис. 4.8), с возрастанием кратковременной прочности увеличивается упругая составляющая деформаций, что соответствует характеру микротрещинообразования структуры, рассмотренному выше. Вместе с тем, вслед за достижением пиковых напряжений в бетонах с высокой прочностью следует довольно крутая нисходящая ветвь, соответствующая хрупкому разрушению материала.

Бетоны низкой и средней прочности имеют относительно пологую нисходящую ветвь. В случае применения высокопрочных бетонов (см. рис. 4.8) их расчетные характеристики должны вводиться в расчет с большими значениями коэффициентов безопасности, что позволит предотвратить нежелательное хрупкое разрушение конструкции.

Учитывая различия в форме кривых, связывающих напряжения и относительные деформации для бетонов разной прочности, достаточно сложно подобрать единую математическую зависимость, пригодную для аппроксимации опытных данных.

Поэтому при выборе аналитических зависимостей, описывающих диаграмму деформирования, авторы с большей или меньшей степенью точности стремятся повторить вид фактической кривой, установленной опытным путем. Различные предложения по описанию диаграмм деформирования для бетона, подробно рассмотрены в монографии [34].

Вместе с тем при выборе аналитического описания диаграммы деформирования, пригодного для использования в инженерных расчетах конструкций, должны быть выполнены следующие требования:

1) возможность наиболее полного отображения через форму кривой деструктивных процессов в структуре бетона при действии напряжений (см. п. 4.1);

2) сравнительная простота аналитической зависимости, что соответствует условию, по которому элементы диаграммы деформирования одинаково легко выражаются как через напряжения, так и через относительные деформации;

3) возможность простой перестройки (трансформирования) диаграммы при учете различных дополнительных факторов (длительного действия нагрузки, сложного напряженно-деформированного состояния и т.д.).

Поэтому полные диаграммы деформирования бетона, удовлетворяющие перечисленным требованиям, являются по существу идеализацией фактических зависимостей, связывающих напряжения и относительные деформации бетона при нагружении. Идеализированные полные диаграммы деформирования, используемые в нелинейных расчетах железобетонных конструкций, должны удовлетворять следующим общим критериям:

1) при напряжениях, равных пределу кратковременной прочности σ_{sk} , относительные деформации должны равняться относительным деформациям ϵ_{sk} , соответствующим пиковой точке фактической диаграммы деформирования, или ϵ_{sk} ;

2) – тангенс угла наклона касательной в пиковой точке диаграммы, отвечающей кратковременной прочности бетона, равен нулю при ;

3) – при возрастании относительной деформации относительные напряжения стремятся к нулю;

4) принятая функция для описания диаграммы деформирования не имеет корней и вертикальной асимптоты в интервале ;

5) для предельных деформаций.

При проектировании железобетонных конструкций нормы [1, 6] используют условную полную идеализированную диаграмму деформирования бетона (с учетом нисходящей ветви, см. рис. 4.6), удовлетворяющую перечисленным критериям, аналитическое описание которой в интервале имеет вид:

Таким образом, для математического описания базовой диаграммы деформирования бетона при сжатии, принятой в нормах [1, 6, 11], необходимо иметь обоснованные значения следующих нормируемых параметрических точек:

– величину напряжений в пиковой точке диаграммы деформирования, соответствующих пределу кратковременной прочности бетона при осевом сжатии;

– величину относительной продольной деформации ϵ_1 , соответствующей напряжениям в пиковой точке диаграммы;

– величину относительной продольной деформации ϵ_u , принятой в качестве предельной деформации бетона при сжатии, соответствующую назначенному уровню напряжения ;

– величину модуля упругости бетона E_s .

VIII Влияние технологических и рецептурных факторов на надёжность изделий автоклавного твердения

Д.Н.Шабанов, А.Н.Ягубкин

1. Введение

Обобщение физико-химических и математических методов с теорией композиционных материалов позволяет на основе вероятностно-статистической концепции объяснить природу изменения структурных характеристик, определить степень влияния элементов на эксплуатационные свойства материалов. Постановка исследований основывается на реальном управлении синтезом гидросиликатов кальция (ГСК), в соответствии с чем свойства силикатного кирпича определяются возможностями технологических воздействий и могут быть осуществлены при раскрытии взаимосвязей в цепи «состав — синтезированный минерал - свойства». Характер соответствующих физико-химических связей наиболее ярко выражен и зафиксирован в вяжущем, т.е. микроструктурной части конгломерата. Затвердевшее вяжущее представляет собой микробетон, в котором заполняющая часть представлена непрореагировавшими частицами материала, а вяжущая – гидросиликатами в виде геля. Гель типа CSH(B) состоит из частичек, характеризующихся кристаллической структурой, и

постепенно присоединяя окись кальция, перекристаллизовывается в тоберморит. Чем больше образуется этой фазы, тем прочнее и менее деформативной становится затвердевшая составляющая [1-8].

Процессы твердения вяжущих веществ с применением микронаполнителей, изготовленных из ваграночного шлака, отличаются сложностью и многообразием взаимодействий смеси компонентов с водой, в которой имеется известковая и шлаковая часть. При добавке извести к ваграночным шлакам наблюдается очень узкий диапазон эффективного ее влияния, выход за который приводит к падению прочности образцов. В нашем конкретном случае требуемая прочность достигается при добавке 5 % извести. В этом случае наличие аморфных гидравлических составляющих обеспечивают сырьевой смеси необходимую активность. В связи с этим полученные прочностные характеристики обусловлены не только составом новообразований, но и прочностью самого конгломерата. Исключение составляют смеси, у которых исходное содержание СаО на поверхности песка низкое (ниже 0,2 – 0,3 г СаО на 1 м²). В этом случае образование CSH(B) происходит при наличии свободного Са(ОН)₂, поскольку подобные смеси не способны поддерживать необходимую для образования C₂SH(A) концентрацию [9-15]. Таким образом, для обеспечения эксплуатационных характеристик (прочности, морозостойкости и др.) необходимо присутствие в составе сырьевых смесей активных аморфных составляющих, участвующих в синтезе гидросиликатов кальция наравне с гидроксидом кальция и способствующих увеличению количества низкоосновных гидросиликатов кальция и тоберморита существенно влияющих на показатели долговечности силикатных изделий.

2. Оценка влияния шлакового наполнителя на процессы синтеза

Анализ влияния на синтез новообразований сырьевых и технологических факторов, при условии, что сырьевая смесь содержит шлаковый микронаполнитель, определённой дисперсности и количества исследовался на полиномиальных моделях второго порядка при фиксированных уровнях варьирования: X₃=0 (водо вяжущего отношения), X₄=0 (удельного давления прессования, МПа), X₆=0 (давления пара в автоклаве, МПа). Эксперимент был выполнен так, чтобы нижний уровень соответствовал нулевому количеству шлака в вяжущем (X₂ = -1). Это позволяет определить участие в синтезе ГСК шлакового наполнителя с размером частиц 75-100 мкм при автоклавном твердении силикатного кирпича на основании моделей (1,2), описывающих фазовый состав силикатных изделий во всей области эксперимента.

$$CSH(B) = 24 + 2,4x_1 + 3,4x_1^2 - 4,6x_1x_2 - 7,8x_2 + 3,4x_2^2 - 0,7x_1x_5 + 1,9x_2x_5 - 2,1x_5 - 2,1x_5^2 \quad (1)$$

$$C_4S_5H_5 = 94,9 + 25x_1 + 22x_1^2 - 13,1x_1x_2 + 37,2x_2 + 16,3x_2^2 + 4,6x_1x_5 - 2,6x_2x_5 - 2,5x_5 - 15,5x_5^2 \quad (2)$$

Влияние шлакового наполнителя можно оценить по моделям (5,6), полученным путём вычитания из (1,2) моделей фазового состава эталонного образца (3,4):

$$CSH(B)_6 = 3,4x_1^2 + 7x_1 + 28,4 - 0,7x_1x_5 - 4x_5 - 2,1x_5^2 \quad (3)$$

$$C_4S_5H_{56} = 22x_1^2 + 38,1 x_1 + 148,4 + 4,6 x_1x_5 + 0,1 x_5 - 15,5 x_5^2 \quad (4)$$

$$\Delta CSH(B) = CSH(B) - CSH(B)_6 = (24 + 2,4x_1 + 3,4x_1^2 - 4,6 x_1x_2 - 7,8x_2 + 3,4 x_2^2 - 0,7x_1x_5 + 1,9 x_2x_5 - 2,1 x_5 - 2,1 x_5^2) - (3,4x_1^2 + 7 x_1 + 28,4 - 0,7 x_1x_5 - 4 x_5 - 2,1 x_5^2) \quad (5)$$

$$\Delta C_4S_5H_5 = C_4S_5H_5 - C_4S_5H_{56} = (94,9 + 25 x_1 + 22x_1^2 - 13,1 x_1x_2 + 37,2x_2 + 16,3 x_2^2 + 4,6x_1x_5 - 2,6x_2x_5 - 2,5x_5 - 15,5 x_5^2) - (22x_1^2 + 38,1x_1 + 148,4 + 4,6x_1x_5 + 0,1x_5 - 15,5 x_5^2) \quad (6)$$

Полученные модели (5,6) можно рассматривать как семейство парабол (рисунок 1а,б) проходящих через точку $\Delta CSH(B)=0$, $\Delta C_4S_5H_5=0$ и $X_2 = -1$, что следует из самой постановки задачи. Верхняя парабола характеризует прирост количества ГСК в силикатном кирпиче с повышенным расходом вяжущего $X_1=25\%$ и временем запаривания $X_5=10$ часам. При таких X_1 и X_5 - $\Delta CSH(B)$, $\Delta C_4S_5H_5$ всегда положительны, оптимальное количество шлакового наполнителя находится вне области эксперимента и в натуральных значениях соответственно равно $x_2=75\%$ (для $\Delta CSH(B)$) и $x_2=62,5\%$ (для $\Delta C_4S_5H_5$). Нижняя парабола относится к силикатному кирпичу с минимальным расходом вяжущего $X_1 = 15\%$ и временем запаривания $X_5 = 4$ часам. В этом случае присутствие в вяжущем шлакового наполнителя может оказать и отрицательное действие. Оптимальное количество шлакового наполнителя в натуральных значениях соответствует $x_2=12,5\%$ для $\Delta CSH(B)$ и $x_2=25\%$ для $\Delta C_4S_5H_5$. Оптимальная концентрация x_{2opt} изменяется в зависимости от уровней X_1, X_5 .

3. Мероприятия по экономии сырьевых и энергетических ресурсов при фиксированной прочности равной 15 МПа.

Пути повышения экономичности производства силикатных изделий при $R = \text{const}$ можно проанализировать по построенной для заданного $R = \text{const}$ (в данной задаче $R = 15$ МПа) отдельной изоповерхности (см. рис. 2) совместно с плоскостью $z_{opt} = f(x_1, x_5)$. Если линию пересечения LM (7,9) изоповерхности R и плоскости z_{opt} спроектировать на плоскость эталонного образца, то проекция Im (8,10) будет находиться левее соответствующей линии L_3M_3 для $R_э$, т. е. в области меньшего расхода вяжущего и пониженной температуры пропаривания в автоклаве. Область между линиями Im и L_3M_3 — это *пространство экономии ресурсов за счет оптимальной переменной дозировки шлака*. Аналитическое решение задачи об экономии ресурсов крайне затруднительно, поскольку из координат линии L_3M_3 нужно вычесть соответствующие координаты линии Im , все они связаны неявными функциями:

Для $CSH(B)$

LM:

$$(24 + 2,4x_1 + 3,4x_1^2 - 4,6 x_1x_2 - 7,8x_2 + 3,4 x_2^2 - 0,7x_1x_5 + 1,9 x_2x_5 - 2,1 x_5 - 2,1 x_5^2) - (3,4x_1^2 + 7 x_1 + 28,4 - 0,7 x_1x_5 - 4 x_5 - 2,1 x_5^2) - (1,15 + 0,68 x_1 - 0,28 x_5) = 0 \quad (7)$$

Im:

$$(24 + 2,4(-1) + 3,4(-1)^2 - 4,6 (-1)x_2 - 7,8x_2 + 3,4 x_2^2 - 0,7(-1)x_5 + 1,9 x_2x_5 - 2,1 x_5 - 2,1 x_5^2) - (3,4(-1)^2 + 7 (-1) + 28,4 - 0,7 (-1)x_5 - 4 x_5 - 2,1 x_5^2) - (1,15 + 0,68 (-1) - 0,28 x_5) = 0 \quad (8)$$

Для $C_4S_5H_5$

LM:

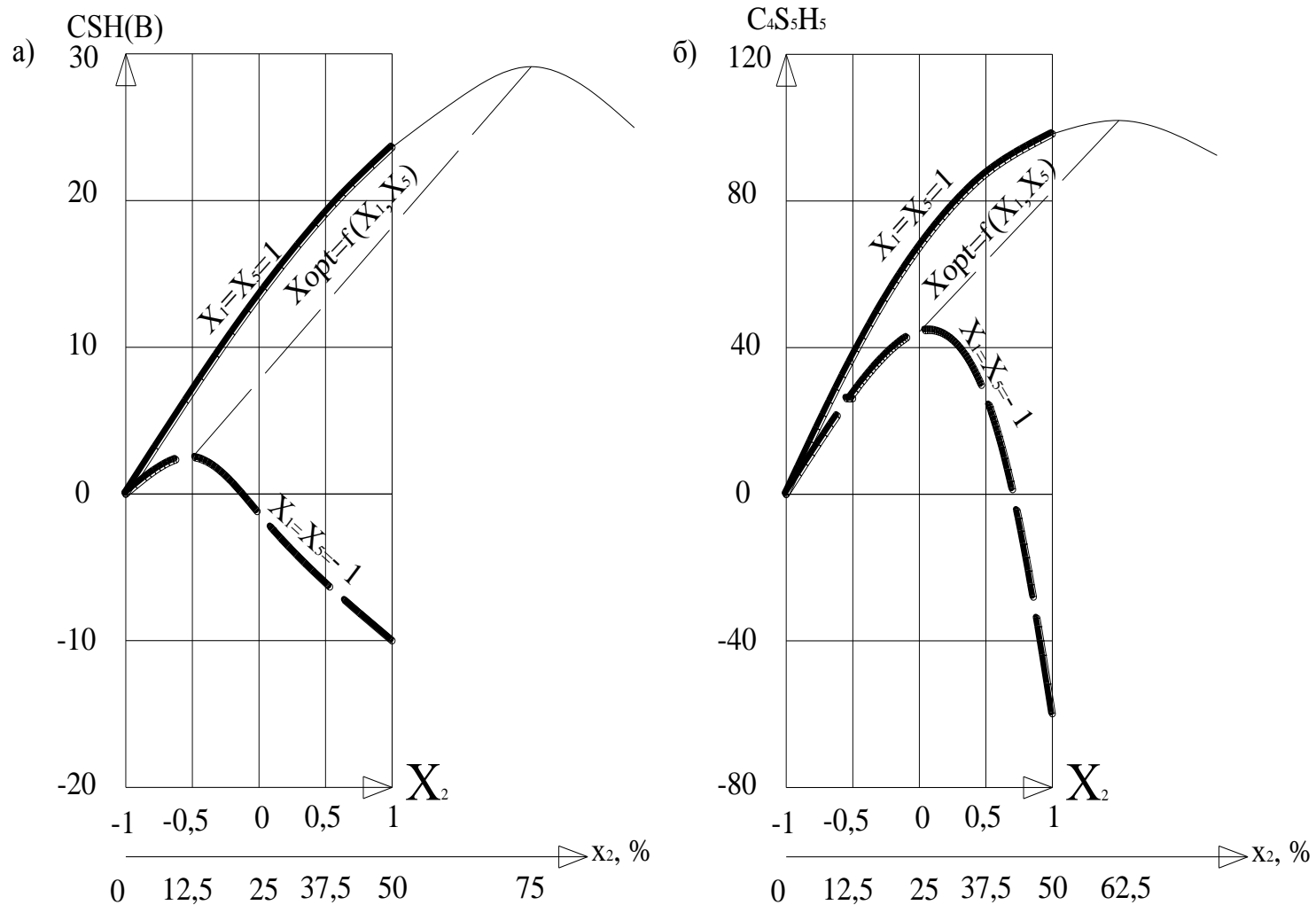
$$(94,9+25 x_1+ 22x_1^2- 13,1 x_1x_2+37,2x_2+16,3 x_2^2 +4,6 x_1x_5-2,6 x_2x_5-2,5 x_5-15,5 x_5^2) - (22x_1^2+38,1 x_1 +148,4+4,6 x_1x_5+0,1 x_5-15,5 x_5^2) - (-1,14+0,4 x_1+0,08 x_5)=0 \quad (9)$$

Im:

$$(94,9+25 (-1)+ 22(-1)^2- 13,1 (-1)x_2+37,2x_2+16,3 x_2^2 +4,6(-1)x_5-2,6 x_2x_5-2,5 x_5-15,5 x_5^2) - (22(-1)^2+38,1 (-1) +148,4+4,6 (-1)x_5+0,1 x_5-15,5 x_5^2) - (-1,14+0,4 (-1)+0,08 x_5)=0 \quad (10)$$

Для решения задачи используется графоаналитический метод. Изолиния Im квантуется на N_L равных частей и из каждой точки 1...12 проводят параллельно осям линии до пересечения с изолинией LЭМэ. Полученные отрезки, например 1-Mx₁ (ΔX_1) или 1-Mx₅ (ΔX_5), масштабируют по осям x_1 и x_5 и используют для построения графиков (рис 3 а.1-а.3, б1-б3). Эти графики характеризуют возможное снижение x_1 и x_5 за счёт введения $z_{opt} = f(x_1, x_5)$.

Если в каждой из 12 точек на изолинии Im определить по моделям (5,6) значения $Rэ$ будет получен график (рис. 3 а.3, б.3), из которого следует, что при $R_{opt}=15$ МПа прочность эталонного образца уменьшается линейно (вдоль Im).



$$x_{2\text{opt}} = 1,15 + 0,68x_1 - 0,28x_5 (\Delta \text{CSH(B)}),$$

$$x_{2\text{opt}} = -1,14 + 0,4x_1 + 0,08x_5 (\Delta \text{C}_4\text{S}_5\text{H}_5).$$

Рис. 1. Семейство парабол, описывающих влияние количества ваграночного шлака в вяжущем на синтез низкоосновных гидросиликатов кальция (а) и тоберморита (б).

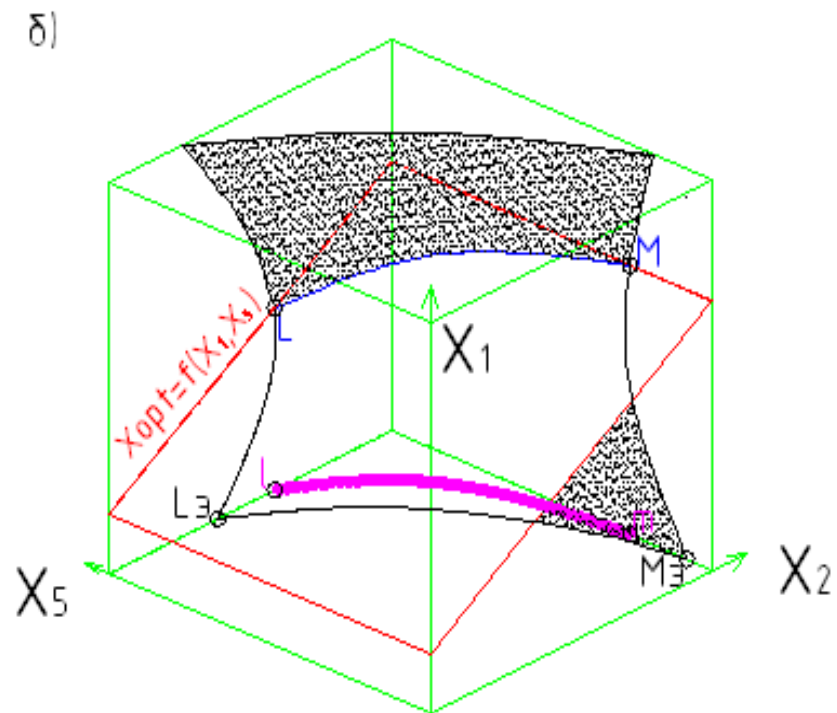
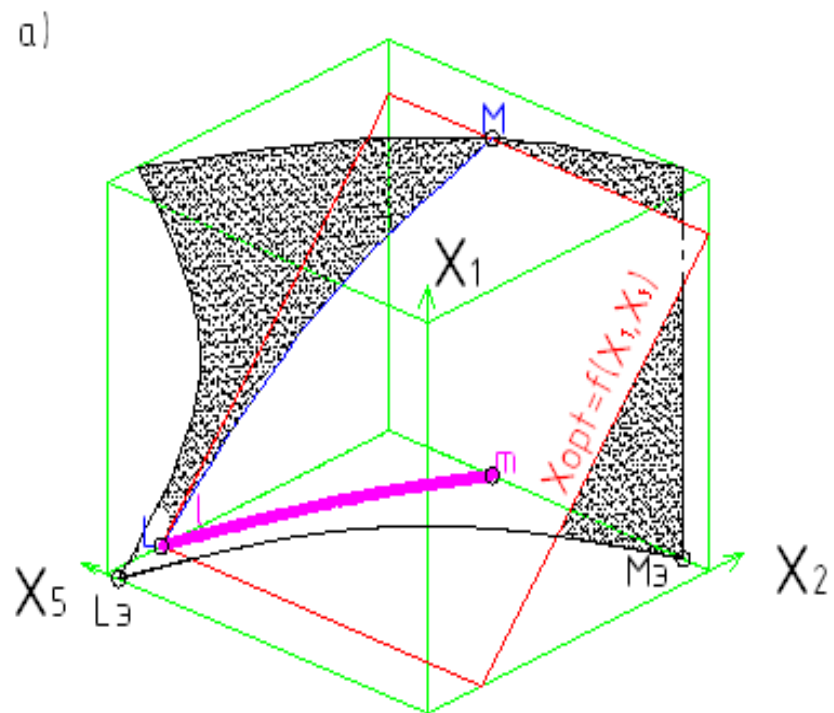
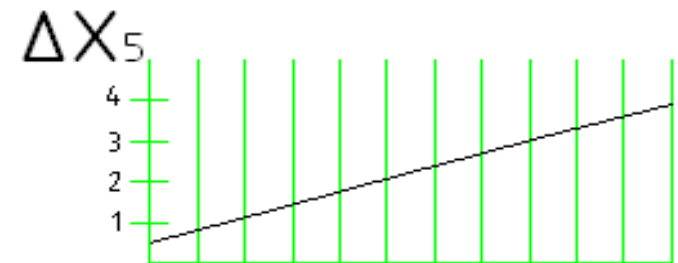
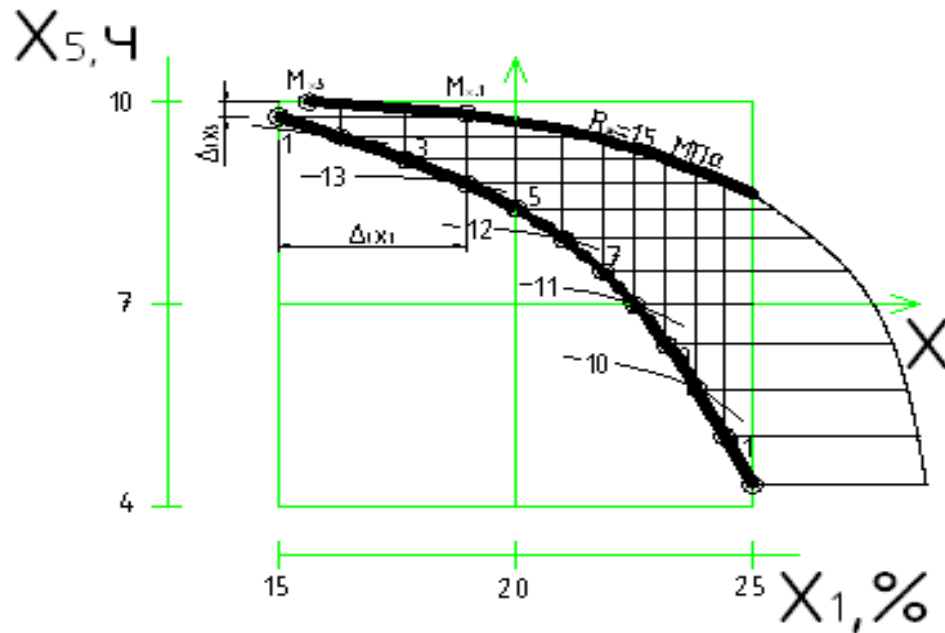
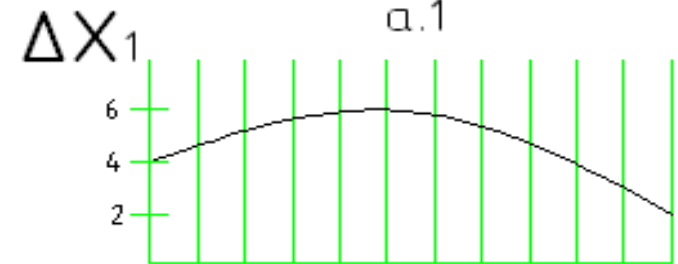


Рис. 2. Графоаналитический метод расчета рецептурных и технологических факторов: а – для CSH(B), б – для $C_4S_5H_5$

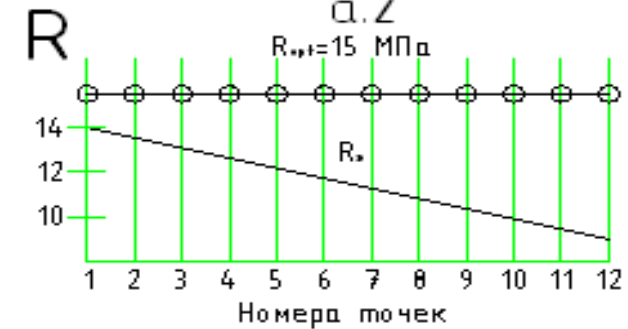
a)



a.1



a.2



a.3

Рис. 3. Графоаналитический метод расчета возможной экономии ресурсов: а – для CSH(B), и его результаты по уменьшению температуры (а. 1 – для CSH(B)) и расхода вяжущего (а. 2 – для CSH(B)) вдоль линии $R=15$ МПа, а также изменение R_s в таких условиях (а. 3 – для CSH(B))(изопараметрический анализ)

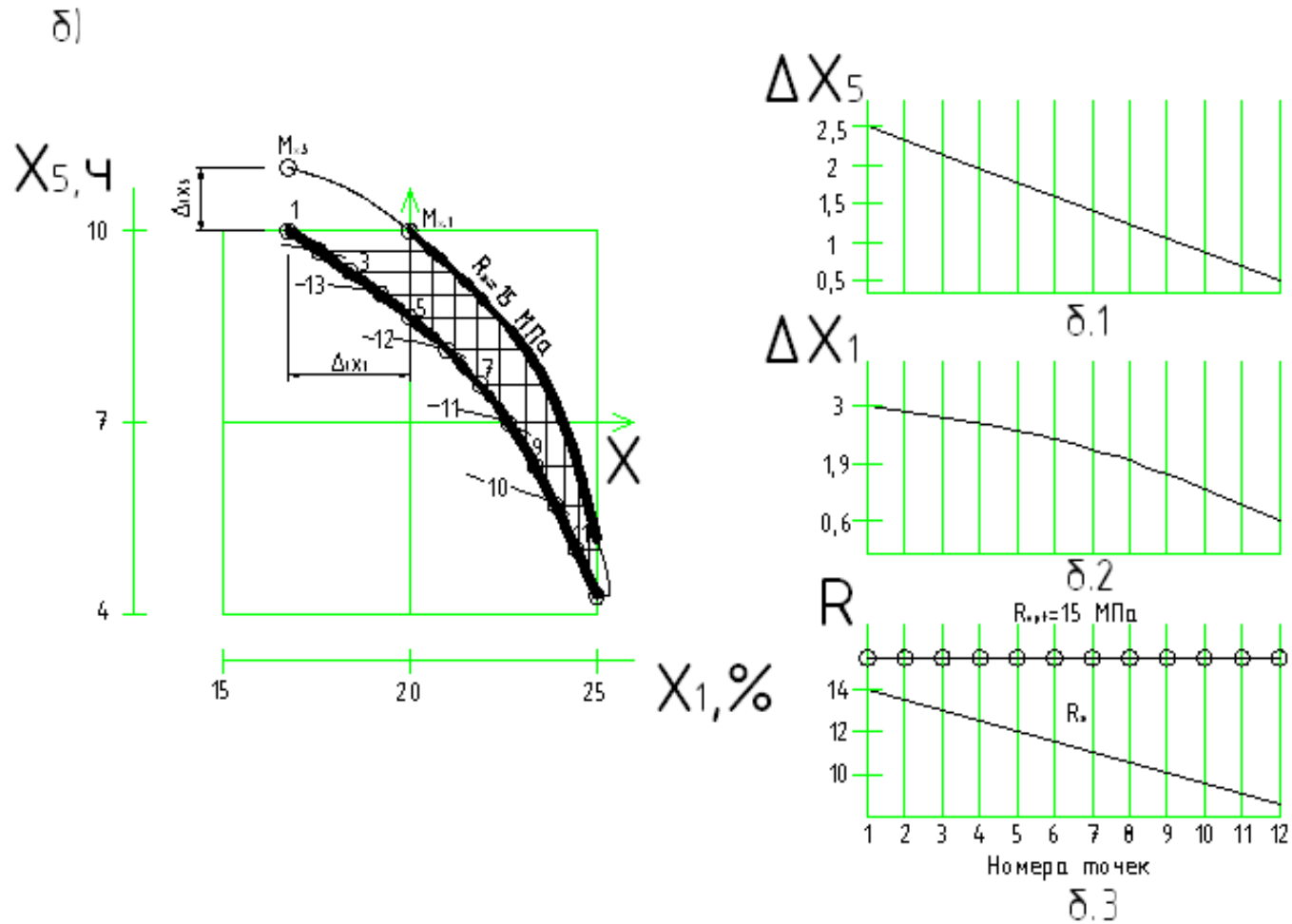


Рис. 4. Графоаналитический метод расчета возможной экономии ресурсов: б – для $C_4S_5H_5$, и его результаты по уменьшению температуры (б. 1 – для $C_4S_5H_5$) и расхода вяжущего (б. 2 – для $C_4S_5H_5$) вдоль линии $R=15 \text{ МПа}$, а также изменение R_s в таких условиях (б. 3 – для $C_4S_5H_5$)(изопараметрический анализ)

При высоких расходах вяжущего (рис. 3а,б) время пропаривания в автоклаве может быть снижено до 4 часов. При низких расходах вяжущего время пропаривания в автоклаве увеличивается до 10 часов.

Едиственного оптимального решения по расходу вяжущего и времени пропаривания в автоклаве согласно рисунку 3а,б нет. Необходимо делать выбор между повышенным расходом вяжущего и малым временем пропаривания в автоклаве или пониженным расходом вяжущего и более продолжительным временем пропаривания в автоклаве.

4. Заключение

Таким образом оказывается весьма полезным для улучшения эксплуатационных характеристик силикатных изделий применение в них порошкообразных кремнезёмистых добавок – микронаполнителей, способствующих синтезу дополнительного количества новых комплексных цементирующих новообразований.

Полученные номограммы могут быть использованы технологами при производстве силикатных изделий.

Движение вдоль изолинии (10) соответствует переходу от высокотемпературных режимов автоклавной обработки с малым расходом вяжущего (точка 1) к низко температурным с повышенным расходом вяжущего (точка 11). Выбор того или иного пути от линии L_3M_3 к линии $1m$ полностью формализован быть не может, так как приоритет критериев x_1 и x_5 (или связанной ими обоими себестоимости изделия) зависит от локальной технико-экономической ситуации на данном производстве.

Приложение А

Пример №1

Требуется определить класс бетона по результатам исследований, в частности по величине предела прочности при сжатии (МПа).

Таблица

Результаты испытаний бетона на сжатие

№ опытов	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	25,4	-1,9	3,61
2	26,2	-1,1	1,21
3	27,7	-0,4	0,16
4	28,0	0,7	0,49
5	28,1	0,8	0,64
6	28,2	0,9	0,81
	$\sum_{i=1}^n x_i = 163,6$		$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 6,92$

$$\bar{x} = 27,3 \text{ МПа}$$

Среднее квадратичное отклонение результатов испытаний находим из выражения:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad S = \sqrt{6,92(6-1)} = 1,18 \text{ МПа}$$

коэффициент вариации по формуле

$$V(x) = S/\bar{x}; \quad V = 1,18/27,3 \cdot 100 = 4,32\%$$

При доверительной вероятности $P=0,95$ значение коэффициента Стьюдента (см.таблицу) $t_h=2,57$, а критерий Романовского (см.таблицу) $t' = 2,78$.

Поскольку $(25,4-27,3)/1,18=1,61 < t' = 2,78$, значит результат первого опыта не является промахом. Погрешность результата испытаний

$$\Delta x = 2,57 \cdot 1,18 \sqrt{6} = 1,21 \text{ МПа}$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = 1,21/27,3 \cdot 100 = 4,43 < 5\%$$

С доверительной вероятностью $P=0,95$

$$27,3 - 2 \cdot 1,18 = 24,04 < x < 27,3 + 2 \cdot 1,18 = 29,66 \text{ МПа}$$

По нижнему интервалу предела прочности при сжатии бетон может быть отнесен к классу В25.

Линейная корреляционная зависимость случайных величин x и y , подчиняющихся нормальному закону распределения, характеризуемая выборочным коэффициентом корреляции

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y};$$

где $\bar{x}, \bar{y}, S_x, S_y$ - средние соответственно арифметические значения величин x и y и их квадратические отклонения, определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Эмпирические уравнения регрессии:

$$y = \bar{y} + r_{xy} \frac{S_x}{S_y} (x - \bar{x});$$

$$x = \bar{x} + r_{xy} \frac{S_x}{S_y} (y - \bar{y})$$

Выборочный коэффициент корреляции характеризует степень приближения зависимости между случайными величинами к линейной, его значение находится в пределах $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

При $r_{xy}=0$ корреляционная зависимость отсутствует или они не коррелируемы, а при $|r_{xy}|=1$ между ними имеется линейная связь.

Если $r_{xy}=0,5$, теснота связи считается удовлетворительной, а если $r_{xy}=0,8-0,89$ - хорошей.

Пример № 2

Предел прочности при сжатии бетонного образца в виде цилиндра определяется по формуле:

$$R_c = k \cdot \frac{1}{F} \cdot P = \frac{k\bar{P}}{\pi/4 \cdot \bar{d}^2},$$

где k – коэффициент формы, равный 0,82, величина постоянная;

\bar{P} - значение разрушающей нагрузки (32100 кгс – среднее из 6 испытаний с $\sigma_p = 160,5$);

\bar{d} - среднее значение диаметра цилиндра 8,1 см, определенное по 6 измерениям ($n_d = 6$) с $\sigma_d = 0,35$

Следовательно, в формуле содержится две величины, определяемые с ошибкой - \bar{P} и \bar{d}

Для расчета $\sigma\{R\}$ воспользуемся формулой из таблицы 12:

$$\sigma^2\{y\} = \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_1^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\bar{x}_2^2}\right),$$

$$\text{причем } \bar{x}_1 = k\bar{P}; \quad \bar{x}_2 = \pi/4 \cdot \bar{d}^2;$$

$$\sigma_1 = \sigma\{Pk\}; \quad \sigma_2 = \sigma\{\pi/4 \cdot \bar{d}^2\},$$

Имея исходные данные, определим значение этих величин:

$$x_1 = 0,82 \cdot 32100 \text{ кгс} = 26322 \text{ кгс};$$

$$x_2 = 0,25 \text{ см} \cdot 3,14 \cdot 8,12 \text{ см} = 51,53 \text{ см}^2;$$

$\sigma_1 = \sigma\{\text{кР}\}$, согласно формуле из таблицы 11, имеем

$$\text{к}\sigma_p = 0,82 \cdot 160,5 = 131,61;$$

$\sigma_2 = \sigma\{0,25 \cdot \pi \cdot \bar{d}^2\}$ по формуле из таблицы 11 определяется как для функции $y = bx^d$,

где $b = 0,25 \cdot \pi$, и $d = 2$

$$\sigma = \sigma\{0,25 \cdot \pi \cdot \bar{d}^2\} = 2 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot \bar{d}^{(2-1)} \cdot \sigma\{d\} = 0,5 \cdot \pi \cdot \bar{d} \cdot \sigma\{d\} = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 8,1 \cdot 0,35 = 4,45$$

Тогда

$$\sigma^2\{R_{\text{сж}}\} = \left(\frac{26322}{51,58}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{131,61}{26322}\right)^2 + \left(\frac{4,45}{51,53}\right)^2\right] = 1952; \quad \sigma\{R_{\text{сж}}\} = 44,18$$

Среднее значение прочности равно:

$$\bar{R}_{\text{сж}} = \frac{x_1}{x_2} = 510 \text{ кгс/см}^2$$

Ошибка в ее определении при $\alpha = 0,05$ составит:

$$\varepsilon = t_{0,05} \cdot \frac{44,18}{\sqrt{6}} = 2,447 \cdot \frac{44,18}{\sqrt{6}} = 44,13$$

в результате прочность бетона равна:

$$R_{\text{сж}} = 510 \pm 44 \text{ кгс/см}^2$$

Пример № 3

Параметр y , характеризующий прочность волокнистого композита, зависит от объемной концентрации волокна V_B . Эту зависимость из физических соображений можно считать линейной

$$y = b_0 + b_1 V_1$$

В матричной записи

$$XB = Y$$

Для оценки коэффициентов линейной модели, меняя V_B от 0 с частотой 0,1 провели 5 опытов без повторений. Результаты измерений (в условных единицах) представлены вектором

$$X = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3,0 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

Расчетная матрица, второй столбец которой задает условия опытов,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,1 \\ 1 & 0,2 \\ 1 & 0,3 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Вектор коэффициентов

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Для вычисления этих коэффициентов найдем последовательно матрицу ХТ

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Матрицу ХХТ

$$X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,1 \\ 1 & 0,2 \\ 1 & 0,3 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Определитель:

$$\det(X \cdot X^T) = \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0,3 \end{bmatrix} = 0,5$$

Обратную матрицу(ХХТ)-1

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Матрицу YХТ

$$Y \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3,0 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3,98 \end{bmatrix}$$

Далее находим В

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 3,98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,04 \\ 9,8 \end{bmatrix}$$

Таким образом МНК – оценка линейной модели имеет вид

$$Y^L = 1,04 + 9,8V_B$$

Для упрощения вычислений можно было заменить V_B нормированной переменной X_1

$$X_1 = \frac{V_B - 0,2}{0,2}$$

И оценивать коэффициенты модели

$$y = b_0 + b_1 X_1$$

Тогда получили следующие результаты

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0,5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Нетрудно заметить, что для столбцов матрицы X выполняется условие ортогональности

Далее вычисляем

$$X^T \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0,5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}$$

$$\det(X^T \cdot X) = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} = 12,5$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$Y \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3,0 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 4,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,96 \end{bmatrix}$$

$$Y^L = 3 + 1,96X_1$$

При замене нормированной переменной X_1 на переменную VB этот результат совпадает с полученным ранее. Матрица XX^T получилась диагональной. Поэтому сразу можно записать обратную, так как на главной диагонали матрицы, обратной и диагональной, будут стоять числа, обратные соответствующим числам, стоящим на диагонали прямой матрицы. Можно оценить коэффициенты независимо друг от друга. Чтобы воспользоваться такой возможностью необходимо иметь оценку дисперсии воспроизводимости эксперимента, SY^2 .

Дисперсия воспроизводимости, принятая по априорной информации, оказалась равной $SY^2=0,0333$ при степенях свободы $V2=3$

Для дисперсии оценок коэффициентов получаем:

$$S_{b_0}^2 = 0,2 \cdot SY^2 = 0,000666$$

$$S_{b_1}^2 = 0,4 \cdot SY^2 = 0,001332$$

Для выбранного уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $V2=3$ табличное значение t -критерия $t_{ТАБЛ} = 3,18$. Затем

подсчитываем доверительные интервалы коэффициентов регрессии:

$$\Delta_{B_0} = 3,18 \sqrt{0,000666} = 0,082$$

$$\Delta_{B_1} = 3,18 \sqrt{0,001332} = 0,116$$

Таким образом коэффициенты модели следует признать статически значимыми.

Теперь проверим адекватность модели. При отсутствии повторных опытов дисперсию адекватности определяем по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{S_{ост}}{V_1}$$

Где

$$S_{ост} = \sum_{i=0}^n (Y_u - Y_u^L)^2,$$

а в матричной форме имеет вид:

$$\sum_{u=0}^n (Y_u - Y_u^L)^2 = (Y - Y^L)^T \cdot (Y - Y^L)$$

Где

$$Y - Y^L = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 3,0 \\ 3,7 \\ 5,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,04 \\ 2,02 \\ 3 \\ 3,98 \\ 4,96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix}$$

транспонированная матрица.

Транспонирование ХТ и перемножение дают

$$(Y - Y^L)^T \cdot (Y - Y^L) = [0,16 \quad -0,12 \quad 0 \quad -0,28 \quad 0,24] \cdot \begin{bmatrix} 0,16 \\ -0,12 \\ 0 \\ -0,28 \\ 0,24 \end{bmatrix} = 0,176$$

Степень свободы вычисляем из выражения $5 - 2 = 3 = V$

Тогда дисперсия адекватности равна $S_{ад}^2 = \frac{0,176}{3} = 0,0587$

Гипотезу об адекватности модели проверим по F-критерию. Для этого

находим расчетное значение $F_{3;3}^{расч} = \frac{0,0587}{0,0333} = 1,76$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ табличное значение F-критерия равно

$$F_{0,05;3;3}^{расч} = 9,28$$

Так как $F^{расч} < F^{табл}$, гипотеза об адекватности модели при 5%-ном уровне значимости не отвергается.

Пример № 4

Требуется найти уравнение регрессии и оценить его погрешность по результатам исследований.

Таблица

Расчетные данные для определения зависимости Y от x:

Номер опыта	x	y	x ²	y ²	xy	x+y	(x+y) ²	Y _T	ΔY _T
1	2	36,6	4	1339,56	73,2	38,6	1489,96	36,6	0
2	4	57,6	16	3317,76	230,6	61,6	3794,56	57,4	0,2
3	6	77,4	36	5990,76	464,4	85,4	6955,56	78,2	0,8
4	8	99,8	64	9960,04	798,4	107,8	11620,84	99	0,8

5	10	121,6	100	14786,56	1216	131,6	17318,56	119,8	1,8
6	12	139,1	144	19348,81	1669,2	151,1	22831,21	140,6	-1,5
7	14	162	196	26244	2668	176	30976	161,4	0,6

Сумма 56694,156080987,496719,6750,194986,69

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по методу наименьших квадратов (МНК):

$$B_0 = \frac{(\sum y * \sum x^2 - \sum xy * \sum x)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{694.1 * 560 - 6719.6 * 56}{7 * 560 - 3136} = 15.8$$

$$B_1 = \frac{(n \sum xy - \sum x * \sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{7 * 6719.6 - 56 * 694.1}{7 * 560 - 3136} = 10.4$$

Уравнение регрессии

$$Y_T = 15.8 + 10.4x$$

Теоретические значения Y_T и $\Delta Y_T = Y - Y_T$ приведены в таблице.

Проверка правильности вычислений:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 560 + 2 * 6719.6 + 80987.49 = 94986.69$$

Относительная погрешность результата с наибольшим отклонением

$$E = \frac{121.6 - 119.8}{119.8} * 100 = 1.5\%$$

Следовательно, сходимость линейного уравнения регрессии удовлетворительная.

Корреляционная зависимость X от Y

Методика однофакторного дисперсионного анализа состоит в следующем. Пусть в результате исследования определены m совокупностей значений независимой величины X . Причем в каждой группе опытов получена выборка объемов m . Каждая группа результатов измерений рассматривается как выборка из генеральной их совокупности, в которой каждый результат обозначается x_{ij} , где i - номер опыта ($i=1, 2, \dots, m$), а j - номер уровня независимой переменной ($j=1, 2, \dots, n$). Такую выборку можно представить в виде матрицы (таблица).

ТАБЛИЦА

I	Номер уровня независимой переменной фактора			
	1	2	...	N
1	X11	X12	...	X1n
2	X21	X22	...	X2n
...

Среднее арифметическое результатов каждой группы измерений

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n X_{ij}$$

Общее среднее арифметическое результатов всех измерений

$$\bar{X} = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n X_{ij}$$

Рассеивание результатов наблюдений оценивается величиной

$$Q_1 = n \sum_{i=0}^m (X_i - \bar{X})^2$$

Сумма квадратов отклонений результатов группы опытов

$$Q_2 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

Полная сумма квадратов отклонений

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Обработку результатов дисперсионного анализа ведут в табличной форме (таблица)

ТАБЛИЦА

Однофакторный комплекс

	Сумма квадратов отклонений	Число степеней свободы	Среднее квадратов отклонений
Дисперсия результатов измерений			
Межгрупповая	Q1	m-1	Q1/(m-1)
Внутригрупповая	Q2	m(n-1)	Q2/[m(n-1)]
Полная	Q1+Q2	mn-1	Q/(mn-1)

Оценку различия межгрупповой и внутригрупповой дисперсии производят по F- критерию Фишера.

$$F = \frac{Q_1/(m-1)}{Q_2/[m(n-1)]} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

В зависимости от числа степеней свободы и уровня значимости рассчитывается и критерий Фишера и если $F \leq F_{\text{табл}}$, то гипотезу о равенстве дисперсий считают подтвержденной, в противном случае ее отвергают.

Пример

По результатам испытаний бетонных углов, в которых мелкий заполнитель заменен отходами песчаных форм литейного производства, требуется определить является ли замена заполнителя существенным фактором, влияющим на прочность бетона (таблица)

Таблица

Результаты испытаний бетонных углов на сжатие

Номер партии	Значение R, МПа, для образца					$\sum_{i=0}^5 R_i$	\bar{R}_j , МПа
	1	2	3	4	5		
1	33	35	29	30	27	154	30,8
2	19	21	24	23	20	104	21,4
3	24	25	26	22	24	121	24,2
4	31	33	28	26	29	144	29,4

Средние значения предела прочности при сжатии образцов каждой партии записаны в последней колонке таблицы. Среднее значение предела прочности бетона для всех партий образцов определяется:

$$\bar{R} = \frac{154 + 104 + 121 + 144}{4 \cdot 5} = 26,15 \text{ МПа}$$

Величина рассеивания результатов наблюдений:

$$Q_1 = 5[(30,8 - 26,15)^2 + (21,4 - 26,15)^2 + (24,2 - 26,15)^2 + (29,4 - 26,15)^2] = 292,7 \text{ МПа}$$

Число степеней свободы: $m-1=4-1=3$; $m(n-1)=4(5-1)=16$; $mn-1=4 \cdot 5-1=19$

Величина внутригрупповой дисперсии:

$$Q = (33 - 30,8)^2 + (35 - 30,8)^2 + (29 - 30,8)^2 + (30 - 30,8)^2 + (27 - 30,8)^2 + (19 - 21,4)^2 + (21 - 21,4)^2 + (24 - 21,4)^2 + (23 - 21,4)^2 + (20 - 21,4)^2 + (24 - 24,2)^2 + (25 - 24,2)^2 + (26 - 24,2)^2 + (22 - 24,2)^2 + (24 - 24,2)^2 + (31 - 29,4)^2 + (33 - 29,4)^2 + (28 - 29,4)^2 + (26 - 29,4)^2 + (29 - 29,4)^2 = 95,8$$

Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица
Результаты дисперсионного анализа

Дисперсия результатов опытов	Сумма квадратов отклонений	Число степеней свободы	Среднее квадратов отклонений
Межгрупповая	292,7	3	97,6
Внутригрупповая	95,8	16	5,99
Полная	388,5	19	20,4

Определяем критерий Фишера

$$F = \frac{292,7 \cdot 16}{95,8 \cdot 3} = 16,3$$

При уровне значимости $q=0,05$ и числу степеней свободы $R1=3$ и $R2=16$ получаем $Fq=3,24$.

Значение $F_{табл}=16,3 > 3,24$ находится в критической области.

Следовательно, замена песка является существенным фактором, определяющим прочность бетона.

Рассмотрим пример проведения эксперимента и обработки его данных

Методика исследования и планирование эксперимента

2.1 Характеристика применяемых материалов.

2.1.1 Составляющие многокомпонентной добавки

А. Суперпластификатор БП-1 (продукт конденсации меланина с формальдегидом). Изготовлен Кремиковским ЗСК (НРБ). Передан кафедре ПАТСМ для выполнения исследовательских работ в рамках договора о творческом сотрудничестве между ОИСЫ и Высшим институтом архитектуры и строительства в городе Софии.

Техническая характеристика суперпластификатора БП-1

Наименование показателей	Показатель
1. Внешний вид	Бесцветная маслянистая жидкость
2. Содержание активного вещества в пересчете на сухой	20

продукт: %	
3.Плотность	1.125
4.рН 20%-ного раствора	8.0
5.Рекомендуемое к-во для применения в % от веса цемента	1-3

Б.Тонкодисперсная добавка.

Получен путем разложения гидроокиси алюмо-кремнефтористой кислоты. Высушена до постоянного веса .

Технические показатели наполнителя, используемого в опытах

Наименование показателей	Показатель
1.Внешний вид	Белый с розовым оттенком, тонкодисперсный порошок
2.Химический состав	SiO ₂ , AlF ₃ (SiO ₂ -98%, AlF ₃ -2%)
3. рН 30%-ного раствора	5.0
4. Рекомендуемое к-во для применения в % от веса цемента [38]	1-4
5.Объемный вес :кг/м ³	336

В. Сульфидно-дрождевая бражка СДБ

Технические характеристики добавки СДБ

Наименование показателей	Показатель
1.Внешний вид	Масляная жидкость коричневого цвета
2. Содержание активного вещества в пересчете на сухой продукт: %	30
3. Рекомендуемое к-во для применения в % от веса цемента	0.15-0.25
4. рН 30%-ного раствора	10
5. Плотность	1.020

Г. Сырьевые компоненты смеси

Характеристики вяжущего.

Использовался портландцемент М-400 из клинкера Одесского цементного завода. Помол проводился на вибромельнице.

Тонкость помола и объемный вес цемента

Тонкость помола г/см ²	3000	4000	5000
Объемный вес кг/м ³			

Минералогический состав клинкера

Клинкерные минералы	%
3CaO·SiO ₂ (C3S)	68.12
2CaO·SiO ₂ (C2S)	9.06
3CaO·Al ₂ O ₃ (C3A)	5.35
4CaO·Al ₂ O ₃ ·FeO ₃ (C4AF)	12.46

Д. Заполнитель

В опытах применялся кварцевый песок Вольского месторождения, прошедший через сито 1.25

Пылевидные частицы отсеивались на сите 0.63, объемный вес –
Керамзитовый песок Одесского керамзитового завода, прошедший через сито 1.25

Пылевидные частицы отсеивались на сите 0.63, объемный вес –

2.2 Математическое планирование эксперимента. Выбор плана.

Методика испытаний бетонной смеси и образцов.

При помощи методов планирования эксперимента был проведен поиск составов многокомпонентной добавки. Для реализации эксперимента был выбран насыщенный несимметричный план Рехшафнера R7, наиболее полно отвечающий поставленной задаче.

Факторы и уровни их варьирования набирались на основе инструкций [36,7,6] и из предварительных опытов, а также на основании литературных источников [10,12,17,19,23].

Исследовалось одновременно изменяющиеся на 3 условиях 7 факторов разбитых на группы(табл.1) X,Z,V по методике, разработанной д.т.н. профессором В.А. Вознесенским.

Кодирование переменных проводилось по стандартному методу

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i},$$

где x_i - значение i -ого фактора в новом кодовом масштабе

X_i - значение i -ого фактора в натуральном масштабе

X_{i0} основной уровень i -ого фактора

ΔX_i – интервал варьирования i -ого фактора

Факторы и уровни их варьирования. Табл. 1

Факторы	Кодир. знач. факторо в	Уровни варьирования		
группа X. Факторы, связанные со свойствами сырьевых компонентов				
-тонкость помола цемента; см/г	x1	300 0	400 0	500 0
Смесь керамзитового и кварцевого песков одной крупности %	x2	0,25	0,5	0,75
группа Z. Конденсация (% от массы цемента составляющих полифункциональные добавки)				
- суперпластификатор (20% р-р)	z3	0	1,5	3
- кремнесодержащий отход химического производства	z4	0	3	6
-добавка СДБ	z5	0	0,1	0,2
группа V. Рецептурные факторы песчаного бетона				
-Ц/В	v6	2,5	2,25	2,0
-объемные соотношения Ц:П	v7	1:1	1:2	1:3

Откликами служили:

1. Прочность на сжатие и изгиб нормально твердеющего и подвергнувшегося тепловлажностной обработке (по режиму 3+3+8+2) песчаного бетона в возрасте 3,9,28 суток.

2. Предельное напряжение сдвигу, характеризующее удобоукладываемость смеси.

3. Влагоудерживающая способность

Согласно выбранному плану R7 было исследовано 37 различных рецептур песчаного бетона. Всего на сжатие было испытано образцов бетона, твердеющего в нормальных условиях – 888, на изгиб – 444, такое же количество для бетона, подвергающегося тепловлажностной обработке.

2.3 Методика испытания растворной смеси и затвердевшего раствора.

А. Определение удобоукладываемости растворной смеси.

Удобоукладываемостью растворной смеси называют способность ее растекаться под действием собственного веса или приложенных к ней внешних сил. Удобоукладываемость определяется при помощи конуса Стройцниила. Величина удобоукладываемости выражается в сантиметрах (глубина погружения конуса в растворную смесь). Для определения удобоукладываемости в диапазоне выбранного плана было решено выразить ее через предельное напряжение сдвигу:

$$\dot{\tau} = \frac{\alpha P}{h^2} \quad \text{[1]}$$

где α - константа конуса, зависящая от угла α при его вершине.

P - усилие действующее на конус; гс

h - глубина погружения конуса; см.

Был модифицирован конус Стройцниила и разработана специальная методика, схожая с определением величины предельного напряжения сдвига на пластометре. Контролировался вес конуса и вес пригруза, отмечалась глубина погружения конуса в бетонную смесь. Величина погружения принималась как среднее арифметическое из результатов 3 испытаний.

Б. Определение водоудерживающей способности цементно-песчаного раствора.

Был использован метод определения влагоудерживающей способности раствора, предложенной В.Н. Цунагиным. Устройство для определения влагоотдачи состоит из вакуум-насоса с манометром(1), резинового шланга, вакуумного сосуда(2) с двумя отверстиями, мерной колбой (3) и воронкой Шатта с пробкой.

Устройство для определения влагоудерживающей способности растворной части бетона. Брались одинаковые объемы. Взвешенную смесь, помещенную в воронку Шатта вакуумировали при 0.5 атм. – постоянно в течение 60 сек. Влага выходила из смеси попадая в мерную колбу. Влагоудерживающая способность определялась как количество воды, выделившееся в мерную колбу, или как разность веса бетона в воронке Шатта до вакуумирования и после за 60 сек. при 0.5 атм.

В. Расчет составов приготовления смесей.

Расчет составов приведен в таблице.

Кварцевый и керамзитовые пески одной крупности хранились во влагонепроницаемых емкостях, смешивались непосредственно перед формованием. Сырье взвешивалось на торговых весах, добавки – на лабораторных. Тонкодисперсная добавка высушивалась до постоянного веса и хранилась во влагонепроницаемом сосуде. Остальные добавки

хранились в герметических сосудах. После смешивания добавки подавались с водой затворения в цементно-песчаной смеси.

Г. Изготовление образцов.

Из приготовленной смеси изготавливались образцы-балочки 4x4x16 по ГОСТ.

Всего из одного состава смеси готовились 24 балочки. После уплотнения на лабораторной виброплощадке 12 образцов помещались в камеру с нормально-влажностными условиями, остальные 12 образцов после предварительной выдержки 3 часа в пропарочной камере, снабженной программным регулятором Р-31. Режим тепловлажностной обработки 382. Температура изотермической выдержки - 80°C. Равномерное распределение пара в камере регулировалось вентилятором.

Д. Определение прочностных характеристик. Испытание на изгиб.

Предел прочности при изгибе образцов балочек из песчаного бетона размером 4x4x16см определялся на испытательной машине МИИ-100. Предел прочности при изгибе в кгс/см фиксируется счетчиком. Рабочий диапазон 20-100 кгс/см. Скорость нагружения 70 кгс/см в минуту.

Е. Испытание на сжатие.

Полученные после испытания на изгиб образцы испытывались на сжатие. Испытание проводилось по методике ГОСТ. Для определения предела прочности при сжатии применялся пресс типа ПСУ-50 с нагрузкой 20т. Каждую половину балочки помещали между пластинками так, чтобы боковые грани, которые при изготовлении прилегали к продольным стенкам формы, находились на плоскостях пластинок, а пластинок плотно прилегали к торцевой стенке образца. Образец вместе с пластинками сжимают на прессе. Скорость увеличения нагрузки 20 ± 5 кгс/см² в 1 сек. Предел прочности отдельного образца вычисляют как среднее арифметическое результатов 4 образцов получивших наибольшие показатели из 6 испытаний.

Реализация эксперимента. Обработка результатов и моделирование.

После реализации всех опытов были получены модели типа части бетона и смеси. Влияние $R_{сж}$ и $R_{изг}$ на 3, 9, 28 сут. Бетон твердел в тепловлажностных условиях 2 часа (362), далее в нормальных условиях.

$R_{сж}$ и $R_{изг}$ на 3, 9, 28 сут. Бетон твердел в нормальных условиях (табл). Удобоукладываемость, характеризуемая величиной предельного напряжения сдвигу (табл.3)

Влагоудерживающая способность раствора (табл)

Математическая обработка результатов эксперимента.

(На примере модели Rсж 28 при нормальном твердении бетона.)
 Результаты эксперимента по прочности на сжатие образцов из нормального твердения бетона в возрасте 28 суток приведены в таблице. В этой таблице указаны следующие статические характеристики эксперимента.

а. среднее по результатам в строке плана

$$\bar{y}_n = \frac{\sum y_n}{n}$$

б. Дисперсия в строке плана

$$S_u^2 = \frac{\sum (y_n - \bar{y}_n)^2}{n-1}$$

в.среднеквадратичное в строке плана

$$S_u = \sqrt{S_u^2}$$

Проведена проверка однородности дисперсий по критерию Кохрена

$$\sigma = \frac{S_{\max}^2}{\sum_n S_u^2}$$

$$\sigma = \frac{7175}{47337.4} = 0.164$$

Что меньше чем σ табл. при $f = n-1 = 5$ и $l \leq 37$ по [41 стр.185] при $\alpha=0.1$

Вывод: гипотеза об однородности дисперсий допускается и можно рассчитать среднюю дисперсию по всему плану.

$$\bar{S}_2 = \frac{\sum S_u^2}{37} = \frac{4733.4}{37} = 1279$$

При оценке статистической значимости коэффициента регрессии целесообразно использовать не дисперсию отдельных результатов S^2 ,

$$\bar{S}^2(\bar{y}) = \frac{\bar{S}^2}{n} = \frac{1279}{4} = 319$$

а дисперсию средних

Соответствующее среднеквадратичное отклонение и принимается в качестве ошибки эксперимента.

$$S_{y\bar{e}} = \sqrt{319} = 17,860$$

Расчет начальных моделей

Расчет модели сжатия производится по формулам на бланках – алгоритмах.(см приложение 1)

Исключение незначимых коэффициентов модели

Расчет критических коэффициентов модели производится в соответствии с рекомендациями [41 с 99] по формулам

$$b_{кр} = t \cdot \{f, \alpha\} T S_3$$

то есть для плана R7

$$b_{0кр} = t \cdot 0.45210 \cdot S_3$$

$$b_{i\text{кр}} = t \cdot 0.22441 \cdot S_{\sigma}$$

$$b_{ij\text{кр}} = t \cdot 0.22441 \cdot S_{\sigma}$$

$$b_{ii\text{кр}} = t \cdot 0.95423 \cdot S_{\sigma}$$

При $t=1,615$, для $\alpha=0,1[42 \text{ с } 184]$ $f=5 \cdot 37=185$ и $S_{\sigma} = 17,86$

$$b_{0\text{кр}} = 1,615 \cdot 0.45210 \cdot 17,86 = 13,04 = 1,3\text{МПа}$$

$$b_{i\text{кр}} = 1,615 \cdot 0.22441 \cdot 17,86 = 6,46 = 0,65\text{МПа}$$

$$b_{ij\text{кр}} = 1,615 \cdot 0.22441 \cdot 17,86 = 6,46 = 0,65\text{МПа}$$

$$b_{ii\text{кр}} = 1,615 \cdot 0.95423 \cdot 17,86 = 27,5 = 2,75\text{МПа}$$

Получена адекватная модель, в которой удалены все незначимые коэффициенты регрессии:

$$\begin{aligned} R = & 23.2 - 1.2x_1 + 7.9x_2^2 + 1.8x_1x_2 - 2x_1z_3 - 1.8x_1z_4 - 1.3x_1z_5 \quad \bullet \quad + 1.2x_1v_7 \\ & - 2.3x_2 - 16x_2^2 \quad \quad \quad + 1.6x_2z_3 + 0.8x_2z_4 \quad \bullet \quad - 2.6x_2v_6 - 2x_2v_7 \\ & + 3.5z_3 - 11.7z_3^2 \quad \quad \quad - 2z_3z_4 \quad \bullet \quad - 1.1z_3v_6 - 2.6z_3v_7 \\ & - 1.9z_4 - 18.2z_4^2 \quad \quad \quad - 0.8z_4z_5 + 1.1z_4z_6 - 1.4z_4v_7 \\ & \quad \quad \quad + 10.3z_5^2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0.7z_5v_6 \quad \bullet \\ & - 1.3v_6 + 14.4v_6^2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 4.9z_6v_7 \\ & - 12.5v_7 + 15.7v_7^2 \end{aligned}$$

В общем виде модель содержит один свободный член, по 7 линейных и квадратичных эффектов

и 21 эффект взаимодействия, позволяющие уже на этом этапе технологически интерпретировать семифакторную ситуацию, сделать предварительные выводы о влиянии рецептурно-технологических факторов на прочность. Аналогично был проведен анализ.

Для оптимизации прочности используется диссорциативно-шаговый метод. Каждый шаг строится на основе анализа коэффициентов модели. Используется принудительное расчепление модели на две: «Эталонный» бетон – это бетон без добавок с цементом тонкостью помола 3000см²/гр. Подстановкой в модель R значений $x_1 = -1$; $z_2 = -1$; $z_3 = -1$; $z_4 = -1$; $z_5 = -1$; определяем числовые значения коэффициентов b_0 , b_2 , b_6 , b_7 , «Эталонного» бетона.

$$b_0 = 23.2 + 1.2 + 7.9 + 1.9 - 3.5 - 11.7 - 18.2 - 2.0 - 1.8 - 1.3 + 2.0 - 0.8 + 10.3 = 7.2$$

$$b_2 = -2.3 - 1.8 - 1.6 - 0.8 = -6.5$$

$$b_6 = -1.3 + 1.1 - 1.6 - 0.7 = -2.6$$

$$b_7 = -12.5 - 1.2 + 2.6 + 1.4 = -9.7$$

$$R_{\text{эб}} = 7,2 - 6,5x_2 - 16,0x_2^2 - 2,6x_2v_6 - 2,0x_2v_7$$

$$- 2,0v_6 + 14,4v_6^2$$

$$- 9,7v_7 + 15,7v_7^2 \quad \quad \quad 4,9z_6v_7$$

Подстановкой $v_7 = -1$ и $v_6 = -1$ обеспечивается

$$R_{y0.max} = 48.3 - 1.9x_2 - 16.0x_2^2$$

Модель прироста прочности за счет введения добавок и регулирования свойств цемента.

Для выявления влияния на оптимизируемый параметр химических добавок и цемента с тонкостью помола 3000 см²/гр. используется

разность

$$\Delta R = R - R_{y0}$$

$$\begin{aligned} \square R = & 16.0 - 1.2x_1 + 7.9x_1^2 + 1.8x_1x_2 - 2.0x_1z_3 - 1.8x_1z_4 - 1.3x_1z_5 + 1.2x_1v_7 \\ & + 4.2x_2 + 1.6x_2z_3 + 0.8x_2z_4 + 3.5z_3 - 11.7z_3^2 + 2.0z_3z_4 - 1.1z_3v_6 - 2.6z_3v_7 \\ & - 1.9z_4 - 18.2z_4^2 - 0.8z_4z_5 + 1.1z_4v_6 - 1.4z_4v_7 \\ & + 10.3z_5^2 + 0.7z_5v_6 + 0.7v_6 - 2.8v_7 \end{aligned}$$

Ведем поиск оптимальной концентрации кремнесодержащего компонента.

Условие $(|b_i| + \sum_{i+j} |b_{ij}|) \leq z |b_{ii}|$ и $b_{ii} < 0$ для квазиоднородной и квадратичной зависимости;

$$\bar{W}_4 = -1.9z_4 - 18.2z_4^2 - 1.8x_1z_4 + 0.8x_2z_4 + 2.0z_3z_4 - 0.8z_4z_5 + 1.1z_4v_6 - 1.4z_4v_7$$

где $2 \times 18.2 > (1.8 + 0.8 + 2.0 + 0.8 + 1.1 + 1.4)$, следовательно по формуле

$$z_{4opt} = \frac{-1.9 + 1.8x_1 + 0.8x_2 + 2.0z_3 - 0.8z_5 + 1.1v_6 - 1.4v_7}{21 - 18.2} = 0.05 - 0.049x_1 + 0.02x_2 + 0.054z_3 - 0.02z_5 + 0.03v_6 - 0.04v_7$$

Определяем приращение коэффициентов $\square b_0; \square b_i; \square b_{ii}; \square b_{es}$ за счет z_{4opt} по формулам

$$\Delta b_0 = -0.25b_i^2 \cdot b_{ii}$$

$$\Delta b_j = -0.5b_i \cdot b_{ij} \cdot b_{ii}$$

$$\Delta b_{es} = -0.5b_{ie} \cdot b_{is} \cdot b_{ii}$$

$$\Delta b_{jj} = -0.25b_{ij}^2 \cdot b_{ii}$$

Получена модель ΔR при x_{4opt}

$$\begin{aligned} \square R_4 = & 16.0 - 1.1x_1 + 7.9x_1^2 + 1.8x_1x_2 - 1.9x_1z_3 \\ & + 4.2x_2 + 1.6x_2z_3 - 1.3x_1z_5 \\ & + 3.4z_3 - 11.7z_3^2 + 1.3x_1v_7 \\ & + 10.3z_5 + 1.0z_3v_6 - 2.7z_3v_7 \\ & - 0.7v_6 + 0.7z_5v_6 \\ & - 2.7v_7 + 0.7z_5v_6 \end{aligned}$$

Находим оптимальную концентрацию суперпластификатора z_{3opt}

$$z_{3opt} = \frac{3.4 - 1.9x_1 + 1.6x_2 - 1.0v_6 - 2.7v_7}{2(-11.7)}$$

После определения прироста коэффициентов за счет z_{3opt} получаем

модель $\Delta R_{4/3}$ при z_{4opt} и z_{3opt}

$$\begin{aligned} R_{4/3} = & 16.2 - 1.4x_1 + 8.0x_1^2 + 1.7x_1x_2 - 1.3x_1z_5 \cdot + 1.5x_1v_7 \\ & + 4.4x_2 \qquad \qquad \qquad + 0.7z_5v_6 \\ & + 0.7v_6 + 10.4x_5^2 \\ & - 3.1v_7 \end{aligned}$$

В модели $\Delta R_{4/3}$ $b_{55} \geq 0$; выполняется условие $|b_i| < \sum |b_{ij}|$, $(-0,7) < (1.3; 0.7)$, следовательно решения $z_5 = +1$ и $z_5 = -1$ временно равнозначны и модель расщепляется на две конкурирующие. В результате подстановки $z_5 = +1$ получается две модели.

$$\Delta R_{4/3}(z_5 = -1) = 26.6 - 0.1x_1 + 8x_1^2 + 1.7x_1x_2 + 1.5x_1v_7 + 4.4x_2 - 3.1v_7; (a)$$

$$\Delta R_{4/3}(z_5 = +1) = 26.6 - 2.7x_1 + 8x_1^2 + 1.7x_1x_2 + 1.5x_1v_7 + 4.4x_2 - 3.1v_7; (a')$$

Поиск оптимальных вариантов ведется отдельно по каждой модели, для которых имеет место неравенство $|b_i| < \sum |b_{ij}|$. В этом случае x_1 принимает два конкурирующих граничных решения.

После подстановки в модели (a) и (a') получаем четыре модели:

$$P_1(x_1 = -1) = 34.7 - 2.7x_2 - 4.6v_7; \text{ при } x_2 = -1; v_7 = -1$$

$$P_1'(x_1 = +1) = 34.7 - 6.1x_2 - 1.6v_7; \text{ при } x_2 = +1; v_7 = -1$$

$$P_2(x_1 = -1) = 37.3 + 2.7x_2 + 1.4v_6 - 4.6v_7; \text{ при } x_2 = +1; v_6 = +1; v_7 = -1$$

$$P_2'(x_1 = +1) = 31.9 + 6.1x_2 + 1.4v_6 - 1.6v_7; \text{ при } x_2 = +1; v_6 = +1; v_7 = -1$$

Принимая $v_6 = v_7 = -1$ (технологический вывод) получаем модели

$$\bar{P}_1 = 39.3 - 2.7x_2; \qquad \bar{P}_2 = 40.5 + 2.7x_2$$

$$\bar{P}_1' = 36.1 + 6.1x_2; \qquad \bar{P}_2' = 32.1 + 6.1x_2$$

Получены графики изменения \bar{P} в зависимости от вида песка

Модели $R_{\text{св}}^{\text{св}}$ и $R_{\text{св}}^{\text{св}}$, $R_{\text{св}}^{\text{св}}$ и $R_{\text{св}}^{\text{св}}$ на 3 сутки.

$$\begin{aligned}
R_{\text{ěčá}}^{i\dot{o}} = & 85 + 11x_1 + 19x_1^2 + 9x_1x_2 - 10x_1x_3 - 6x_1x_4 - 15x_1x_5 \cdot -5x_1x_7 \\
& -10x_2 - 37x_2^2 \quad -8x_2x_3 + 8x_2x_4 + 5x_2x_5 - 15x_2x_6 - 6x_2x_7 \\
& -22x_3 - 29x_3^2 \quad +3x_3x_4 + 7x_3x_5 \quad \cdot \quad +8x_3x_7 \\
& -14x_4 - 58x_4^2 \quad -7x_4x_5 \\
& +22x_5^2 \quad -5x_5x_6 - 4x_5x_7 \\
& -17x_6 + 55x_6^2 \quad +26x_6x_7 \\
& -34x_7 + 21x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{ěčá}}^{\dot{o}\dot{o}} = & 84 + 15x_1 + 45x_1^2 + 9x_1x_2 - 16x_1x_3 - 16x_1x_4 - 4x_1x_5 + 8x_1x_6 - 17x_1x_7 \\
& -24x_2 - 20x_2^2 \quad +16x_2x_3 + 7x_2x_4 + 5x_2x_5 - 14x_2x_6 - 4x_2x_7 \\
& -17x_3 - 38x_3^2 \quad +30x_3x_5 \quad \cdot \quad -7x_3x_6 + 4x_3x_7 \\
& -20x_4 - 58x_4^2 \\
& -4x_5 + 11x_5^2 \quad +5x_5x_7 \\
& +3x_6 + 29x_6^2 \quad +38x_6x_7 \\
& -57x_7 + 61x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{ně}}^{i\dot{o}} = & 25 + 1,24x_1 - 8,4x_1^2 + 2,6x_1x_2 - 0,2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 3x_1x_5 - 0,2x_1x_6 - 0,3x_1x_7 \\
& -3,7x_2 - 16,4x_2^2 \quad -1x_2x_3 + 3,3x_2x_4 - 0,2x_2x_5 - 3x_2x_6 - 1x_2x_7 \\
& -6,9x_3 - 1,2x_3^2 \quad +1x_3x_4 + 15x_3x_5 - 1x_3x_6 + 2x_3x_7 \\
& -5x_4 - 13x_4^2 \quad +1x_4x_5 + 0,5x_4x_6 - 1x_4x_7 \\
& -2x_5 + 22x_5^2 \quad +1x_5x_6 + 0,6x_5x_7 \\
& -2,5x_6 + 16,4x_6^2 \quad +7x_6x_7 \\
& -7x_7 + 6,4x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{нэ}}^{\infty} = & 27 + 0,02x_1 - 5x_1^2 + 4x_1x_2 - 1x_1x_3 + 2x_1x_4 + 0,2x_1x_5 \quad \bullet \quad -0,3x_1x_7 \\
& -3,4x_2 - 4x_2^2 \quad + 2x_2x_3 + 1x_2x_4 + 1,5x_2x_5 - 4x_2x_6 - 2x_2x_7 \\
& -6,4x_3 - 9x_3^2 \quad + 8x_3x_4 + 0,2x_3x_5 - 2x_3x_6 + 3x_3x_7 \\
& -4,5x_4 - 17,4x_4^2 \quad - 1x_4x_5 \quad \bullet \quad + 1x_4x_7 \\
& -0,3x_5 + 4,1x_5^2 \quad + 1,2x_5x_7 \\
& + 0,1x_6 + 9x_6^2 \quad + 11x_6x_7 \\
& -9x_7 + 15x_7^2
\end{aligned}$$

Модели $R_{\text{эцá}}^{\text{íò}}$, $R_{\text{сэ}}^{\text{íò}}$, $R_{\text{эцá}}^{\text{óí}}$ и $R_{\text{сэ}}^{\text{óí}}$ на 9 сутки.

$$\begin{aligned}
R_{\text{нэ}}^{\text{íò}} = & 148 + 2,3x_1 + 98x_1^2 + 11x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_1x_4 \quad \bullet \quad + 17x_1x_6 - 8x_1x_7 \\
& - 20x_2 - 112x_2^2 \quad + 5x_2x_3 + 24x_2x_4 + 21x_2x_5 - 19x_2x_6 - 6x_2x_7 \\
& + 4x_3 - 106x_3^2 \quad - 9x_3x_4 + 12x_3x_5 - 15x_3x_6 \\
& - 9x_4 - 116x_4^2 \quad + 5x_4x_5 - 10x_4x_6 - 8x_4x_7 \\
& - 4x_5 + 84x_5^2 \quad - 5x_5x_6 \\
& - 4x_6 + 69x_6^2 \quad + 40x_6x_7 \\
& - 104x_7 + 97x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{эцá}}^{\infty} = & 4,5 + 0,04x_1 + 0,91x_1^2 + 0,02x_1x_2 - 0,02x_1x_3 - 0,05x_1x_4 - 0,01x_1x_5 + 0,05x_1x_6 + 0,1x_1x_7 \\
& - 0,16x_2 - 0,9x_2^2 \quad + 0,12x_2x_3 + 0,04x_2x_4 + 0,03x_2x_5 - 0,1x_2x_6 - 0,1x_2x_7 \\
& - 0,11x_3 - 0,76x_3^2 \quad + 0,12x_3x_4 + 0,002x_3x_5 + 0,03x_3x_6 + 0,003x_3x_7 \\
& - 0,18x_4 - 0,69x_4^2 \quad + 0,04x_4x_5 + 0,05x_4x_6 - 0,2x_4x_7 \\
& - 0,05x_5 + 0,5x_5^2 \quad - 0,09x_5x_6 + 0,9x_5x_7 \\
& + 0,15x_6 + 0,41x_6^2 \quad + 0,4x_6x_7 \\
& - 0,63x_7 + 0,9x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{сг}}^{\text{f}} = & 30,5 - 0,3x_1 + 10,7x_1^2 + 3x_1x_2 - 0,4x_1x_3 + 0,7x_1x_4 - 2x_1x_5 - 0,4x_1x_6 - 1,1x_1x_7 \\
& - 2x_2 - 25x_2^2 \quad + 3,4x_2x_3 + 4x_2x_4 \quad \cdot \quad - 4x_2x_6 - 4x_2x_7 \\
& - 2x_3 - 13x_3^2 \quad \quad \quad - 2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 0,13x_3x_6 + 1x_3x_7 \\
& - 3,2x_4 - 17x_4^2 \quad \quad \quad - 2,3x_4x_5 + 2x_4x_6 - 4x_4x_7 \\
& - 0,4x_5 + 10,9x_5^2 \quad \quad \quad - 0,3x_5x_6 + 0,2x_5x_7 \\
& - 1x_6 + 16x_6^2 \quad \quad \quad + 8,5x_6x_7 \\
& - 14x_7 + 20,4x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{нс}}^{\text{of}} = & 126 - 5x_1 + 98x_1^2 + 11x_1x_2 - 5x_1x_3 - 12x_1x_4 + 10x_1x_5 + 25x_1x_6 - 4x_1x_7 \\
& - 24x_2 - 69x_2^2 \quad + 21x_2x_3 + 11x_2x_4 + 16x_2x_5 - 20x_2x_6 \quad \cdot \\
& + 9x_3 - 87x_3^2 \quad \quad \quad + 24x_3x_4 + 3x_3x_5 + 3x_3x_6 - 8x_3x_7 \\
& - 25x_4 - 62x_4^2 \quad \quad \quad + 11x_4x_5 + 8x_4x_6 - 3x_4x_7 \\
& - 15x_5 + 32x_5^2 \quad \quad \quad - 13x_5x_6 - 3x_5x_7 \\
& + 3x_6 + 30x_6^2 \quad \quad \quad + 47x_6x_7 \\
& - 95x_7 + 87x_7^2
\end{aligned}$$

Модели $R_{\text{сг}}^{\text{f}}$, $R_{\text{сг}}^{\text{f}}$, $R_{\text{сг}}^{\text{of}}$ и $R_{\text{сг}}^{\text{of}}$ на 28 сутки.

$$\begin{aligned}
R_{\text{нс}}^{\text{f}} = & 232 - 12x_1 + 79x_1^2 + 18x_1x_2 - 20x_1x_3 - 18x_1x_4 - 13x_1x_5 + 6x_1x_6 + 12x_1x_7 \\
& - 23x_2 - 16x_2^2 \quad + 16x_2x_3 + 8x_2x_4 + 6x_2x_5 - 26x_2x_6 - 20x_2x_7 \\
& + 35x_3 - 117x_3^2 \quad \quad \quad + 20x_3x_4 - 4x_3x_5 - 11x_3x_6 - 26x_3x_7 \\
& - 19x_4 - 182x_4^2 \quad \quad \quad - 8x_4x_5 + 11x_4x_6 - 14x_4x_7 \\
& - 1x_5 + 103x_5^2 \quad \quad \quad + 7x_5x_6 + 2x_5x_7 \\
& - 13x_6 + 144x_6^2 \quad \quad \quad + 49x_6x_7 \\
& - 125x_7 + 157x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{c}\ddot{\text{c}}\text{a}}^{\text{i}\ddot{\text{o}}} = & 44 - 4x_1 + 20x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 5x_1x_5 - 0,4x_1x_6 + 2x_1x_7 \\
& + 1x_2 - 32x_2^2 + 4x_2x_3 - 1x_2x_4 + 3x_2x_5 - 1x_2x_6 - 3x_2x_7 \\
& - 13x_3^2 + 2x_3x_4 - 4x_3x_5 - 3x_3x_6 - 1x_3x_7 \\
& - 2x_4 - 32x_4^2 + 0,13x_4x_5 + 0,4x_4x_6 - 4x_4x_7 \\
& - 2x_5 + 20x_5^2 + 2x_5x_6 + 2x_5x_7 \\
& - 1x_6 + 17x_6^2 + 7x_6x_7 \\
& - 13x_7 + 18x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{c}\ddot{\text{c}}\text{a}}^{\text{o}\ddot{\text{i}}} = & 33 - 3x_1 + 16x_1^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_5 + 1x_1x_6 \\
& - 3x_2 - 16x_2^2 + 3x_2x_3 + 1x_2x_4 + 1x_2x_5 + 1x_2x_7 \\
& + 1x_2 - 21x_3^2 + 9x_3x_4 - 2x_3x_6 + 1x_3x_7 \\
& - 4x_4 - 22x_4^2 - 1x_4x_5 - 2x_4x_6 - 2x_4x_7 \\
& - 2x_5 + 16x_5^2 + 1x_5x_7 \\
& - 1x_6 + 17x_6^2 + 12x_6x_7 \\
& - 10x_7 + 19x_7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{n}\ddot{\text{e}}\text{c}\ddot{\text{a}}}^{\text{o}\ddot{\text{i}}} = & 146 - 1x_1 + 85x_1^2 + 29x_1x_2 - 21x_1x_3 - 5x_1x_4 - 11x_1x_5 - 1x_1x_6 + 10x_1x_7 \\
& - 26x_2 - 50x_2^2 + 19x_2x_3 + 23x_2x_4 - 1x_2x_5 - 15x_2x_6 - 10x_2x_7 \\
& + 13x_3 - 122x_3^2 + 33x_3x_4 + 8x_3x_6 + 5x_3x_7 \\
& - 31x_4 - 88x_4^2 - 6x_4x_5 + 7x_4x_6 - 1x_4x_7 \\
& + 8x_5 + 63x_5^2 + 15x_5x_6 + 3x_5x_7 \\
& + 1x_6 + 25x_6^2 + 39x_6x_7 \\
& - 105x_7 + 144x_7^2
\end{aligned}$$

Модель предельного напряжения сдвига

$$\begin{aligned} \sigma = & 273 - 8x_1 - 86x_2^2 - 19x_1x_2 - 6x_1x_3 - 19x_1x_4 - 15x_1x_5 - 9x_1x_6 + 25x_1x_7 \\ & - 10x_2 + 90x_2^2 + 5x_2x_4 - 8x_2x_5 + 6x_2x_6 - 14x_2x_7 \\ & + 52x_3 + 43x_3^2 - 14x_3x_4 - 5x_3x_5 + 10x_3x_6 + 29x_3x_7 \\ & - 11x_4 + 54x_4^2 + 5x_4x_5 - 22x_4x_6 - 48x_4x_7 \\ & - 19x_5 - 46x_5^2 + 1x_5x_6 + 21x_5x_7 \\ & + 16x_6 - 43x_6^2 + 29x_6x_7 \\ & + 13x_7 - 42x_7^2 \end{aligned}$$

$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{нѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$	$R_{\text{ѐѐѐ}}^{\text{ѐ}}$
<i>H.T.</i>	9	28	3	9	28	3	9	28	3	9	28
146,4	382,8	407	388	445,5	482	51,3	65,2	65,1	72,0	74,8	84,9
4,33	74,4	149	98,1	99,6	167	1,2	21,2	41,0	28,23	39,17	42,2
3,3	80,02	132	68,1	115,14	132	3,85	19,85	10,0	23,6	28,0	28,8
13,3	57,5	70	32,8	46,66	60	7,83	16,23	25,7	15,45	18,0	21,6
10,3	84,5	134	49,1	114,83	128	2,1	21,73	35,6	20,23	31,0	37,9
8,46	58,0	113	49,8	90,0	141	5,63	16,66	31,3	20,1	28,0	36,8
1,3	33,0	45	22,6	38,83	62	1,1	11,47	17,3	15,13	15,13	21,7
2,6	307,6	337	111,33	241,3	327	0	46,85	48,6	23,86	33,53	37,4
251,6	287,0	435	341,6	302,9	450	54,7	68,1	66,4	78,7	70,6	67,5
140,9	351,2	454	236,2	306,6	332	34,8	52,3	57,6	35,9	48,8	49,0
189	243,0	307	240,0	208,9	292	36,1	55,1	58,3	46,1	43,8	59,7
200	328,9	382	348,8	315,6	456	43,4	51,5	38,2	70,8	63,83	73,9
182	105,0	342	352,0	395,9	370	44,6	48,7	49,3	67,2	67,33	58,9
103,6	252,0	208	149,6	90,33	174	28,0	29,6	44,7	23,2	30,0	36,6
63,2	301,5	539	175,6	343,8	359	17,9	59,8	72,4	34,8	45,9	63,8
155,2	283,3	353	145,2	234,0	269	34,4	58,6	59,8	37,5	46,2	52,3
193,2	280,0	398	198,4	272,6	274	37,3	51,2	64,3	57,8	67,3	60,3
40,24	100,0	156	76,64	144,79	178	19,1	28,4	36,3	31,9	34,7	45,0
10,0	27,13	22	14,5	41,0	40	8,8	10,66	12,3	10,56	16,36	18,3
98,4	32,13	571	230,4	356,6	391	16,4	36,2	76,0	46,0	45,6	94,3
165,2	322,0	530	180,8	289,3	362	34,8	55,5	58,2	31,5	61,6	62,8
64,4	259	386	100,48	306,6	349	17,1	41,5	43,2	19,7	44,1	44,6
29,8	68,3	169	38,32	76,66	181	11,8	27,7	35,3	11,1	31,3	37,1
136,8	261	358	172,8	253,6	231	35,4	56,8	64,0	40,1	52,2	55,2
84,0	252,2	319	132,8	256,5	245	24,2	46,4	56,0	38,7	52,6	41,2
18,2	68,0	61	44,32	25,66	51,0	1,0	9,0	20,6	16,3	15,5	19,3
120,8	196,0	356	196,3	190,7	379,0	35,4	45,2	58,9	57,0	49,26	55,9

63,3	94,7	179	106,0	109,33	171,0	24,9	30,93	35,0	33,5	35,2	37,8
110,4	230,0	252	196,8	296,1	275,0	40,3	57,4	53,0	69,0	61,9	71,1
116,0	247,6	299	144,8	219,8	231,0	18,1	40,05	60,4	32,25	39,3	45,8
38,0	15,0	49	49,16	31,83	71,0	5,03	3,7	13,6	20,4	10,3	14,0
34,33	46,0	150	30,3	48,0	37,0	17,03	15,73	32,4	12,46	16,96	12,8
13,36	22,7	31	7,13	39,0	28,0	7,36	9,63	10,5	4,73	12,8	20,1
106,5	227,6	334	90,6	144,0	201	31,96	40,63	62,1	33,23	34,03	47,3
123,1	213,24	364	105,3	160,0	173	38,83	46,36	60,7	35,73	41,5	48,9
71,5	137,8	264	88,66	119,66	186	24,83	37,13	50,1	39,6	42,0	42,0
111,0	243,0	279	98,1	153,05	178	36,33	47,1	61,3	32,33	37,5	45,3

<i>N</i>	<i>S</i>	<i>Песок</i>	<i>БП-20%</i>	<i>Кремнегель</i>	<i>СДБ-30%</i>	<i>Ц</i>	<i>П</i>	<i>В</i>
<i>стр.</i>	<i>см2/2</i>	<i>Vкер: Vкв</i>	<i>z</i>	<i>z</i>	<i>z</i>	<i>кг</i>	<i>кг</i>	
1	3000	0,25:0,75	—	—	—	6,000	6,818	1,2724
2	3000	0,75:0,25	0,081	0,162	0,081	2,70	6,136	1,2724
3	5000	0,25:0,75	0,081	0,162	0,018	2,70	9,12	1,3374
4	5000	0,75:0,25		0,162	0,018	2,70	6,00	1,2724
5	5000	0,75:0,25	0,081		0,018	2,70	6,00	1,2850
6	5000	0,75:0,25	0,081	0,162		2,70	6,00	1,2721
7	5000	0,75:0,25	0,081	0,162	0,018	2,70	6,00	1,0024
8	5000	0,75:0,25	0,180	0,360	0,040	6,00	4,44	2,828
9	5000	0,75:0,25				6,00	4,44	2,400
10	5000	0,25:0,75	0,180			6,00	6,74	2,256
11	5000	0,25:0,75		0,360		6,00	6,74	2,256
12	5000	0,25:0,75			0,040	6,00	6,74	2,372
13	5000	0,25:0,75				6,00	6,74	3,0
14	5000	0,25:0,75				2,70	6,74	1,09
15	3000	0,75:0,25	0,180			6,00	4,511	2,250
16	3000	0,75:0,25		0,360		6,00	4,511	2,400
17	3000	0,75:0,25			0,040	6,00	4,511	2,372
18	3000	0,75:0,25				6,00	4,511	3,0
19	3000	0,75:0,25				2,70	6,136	1,08
20	3000	0,75:0,25	0,180	0,360		6,00	6,818	2,256
21	3000	0,25:0,75	0,180		0,040	6,00	6,818	2,225
22	3000	0,25:0,75	0,180			6,00	6,818	2,856
23	3000	0,25:0,75	0,081			2,700	9,310	1,015
24	3000	0,25:0,75		0,360	0,040	6,00	6,818	2,372
25	3000	0,25:0,75		0,360		6,00	6,818	3,0
26	3000	0,25:0,75		0,162		2,70	9,310	1,08
27	3000	0,25:0,75			0,040	6,00	6,818	2,972
28	3000	0,25:0,75			0,018	2,70	9,310	1,067
29	3000	0,25:0,75			0,004	2,70	9,310	1,35
30	5000	0,5:0,5	0,060	0,120	0,013	4,00	7,4	1,744
31	4000	0,75:0,25	0,060	0,120	0,013	4,00	5,97	1,744
32	4000	0,5:0,5	0,120	0,120	0,013	4,00	7,54	1,696
33	4000	0,5:0,5	0,060	0,240	0,013	4,00	7,54	1,744
34	4000	0,5:0,5	0,060	0,120	0,008	4,00	7,54	1,735
35	4000	0,5:0,5	0,060	0,120	0,013	4,00	7,54	1,744
36	4000	0,5:0,5	0,040	0,081	0,009	2,70	7,71	1,184
37	4000	0,5:0,5	0,060	0,120	0,013	4,00	7,54	1,744

N	Результаты испытаний $R_{\text{нзе}}^{28}$						y	$(y_n - \bar{y}_n)^2$						S_u^2
	1	2	3	4	5	6		\bar{y}	1	2	3	4	5	
1	42 9	42 2	36 7	35 3	40 0	34 0	38 5	193 6	1369	324	102 4	225	202 5	1480,6
2	10 4	11 3	16 4	13 1	14 8	15 2	13 5	961	484	841	16	169	289	552
3	13 2	14 6	93	11 3	12 0	12 6	12 2	100	576	841	81	36	16	508,6
4	75	72	56	64	68	67	67	64	25	121	9	1	0	44
5	13 8	14 2	12 0	12 7	12 0	12 6	12 9	81	169	81	4	81	9	85
6	12 0	93	10 7	13 5	10 7	10 3	11 1	81	324	16	576	16	64	215,4
7	33	40	47	45	40	67	45	144	95	4	0	25	484	136,4
8	33 5	35 0	35 2	25 0	31 0	32 5	31 9	267	961	1089	476 1	81	16	7175
9	41 4	46 4	42 4	45 1	39 8	41 1	42 7	169	1369	9	576	841	256	644
10	40 3	40 0	53 6	48 5	39 5	39 5	43 5	102 4	1225	1020 1	250 0	160 0	160 0	3630
11	26 9	34 7	29 1	29 4	29 6	28 6	29 7	784	9	36	4	11	121	191
12	36 8	29 4	36 8	34 7	35 8	43 8	36 2	36	4624	36	225	16	576	1102,6
13	35 3	34 5	34 7	31 7	32 0	28 8	32 8	625	289	361	121	64	360 0	1012
14	21 6	19 9	18 9	20 0	21 9	18 8	20 2	196	9	169	4	289	196	172,6
15	54 4	54 1	53 1	52 5	54 4	50 0	53 1	169	100	0	36	169	961	287
16	36 4	32 2	32 0	30 8	32 5	39 9	33 9	625	289	361	961	196	360 0	1206,4
17	38 9	35 6	37 6	38 5	41 1	40 9	38 7	4	961	121	4	576	484	430
18	13 5	15 6	14 9	14 7	13 4	17 1	14 8	169	64	1	1	196	529	192
19	21	19	23	17	27	19	21	0	4	4	16	36	4	12,8
20	58 4	65 3	46 2	51 3	46 0	46 6	53 3	260 1	1440 0	5041	160 0	532 9	448 9	6692
21	52 8	47 2	60 0	50 1	49 1	45 5	50 8	400	1296	8464	16	289	280 9	2654,8
22	37	40	38	37	40	38	38	121	256	4	121	256	36	1588

	6	3	5	6	3	1	7							
23	15 9	19 1	17 7	17 1	16 4	19 1	17 5	256	256	4	16	121	16	133,8
24	35 0	34 2	29 1	38 2	32 1	35 0	33 9	121	9	2304	184 9	324	121	4728
25	28 5	31 4	31 5	29 1	31 7	32 8	30 8	529	36	49	289	81	400	276,8
26	52	61	67	45	56	60	57	25	16	100	144	1	9	55,8
27	33 4	32 5	36 1	37 6	30 8	35 1	34 2	64	289	361	115 6	115 6	81	621,4
28	16 6	15 3	16 3	17 9	17 8	19 3	17 2	36	361	81	49	36	441	200,8
29	20 0	22 7	24 0	24 7	26 7	25 3	23 9	152 1	144	1	64	784	196	542
30	29 1	27 9	32 2	31 6	27 3	27 1	29 0	81	121	4624	676	289	361	1230,4
31	39	40	56	60	40	39	45	36	25	121	225	25	36	93,6
32	16 6	15 9	13 2	14 6	93	12 6	13 7	841	484	25	81	193 6	121	697,6
33	33	25	27	29	27	33	29	16	16	4	0	4	16	10,4
34	28 4	25 6	35 6	38 9	31 1	24 7	30 7	529	2601	2401	672 4	16	360	3174,2
35	31 5	32 8	36 8	35 6	40 1	36 9	33 9	576	121	5041	289	102 4	900	1590,2
36	28 1	28 4	26 1	22 9	20 8	20 4	24 4	136 9	1600	289	225	129 6	160 0	1275,8
37	40 3	27 8	27 8	28 5	24 1	21 3	28 3	144 0	25	25	4	176 4	490 0	4223,6

Таким же образом была проведена оптимизация добавок, максимизирующих прочность на 3,9 суток при нормальном твердении и на 3,9,27 суток образцов, хранившихся в нормальных условиях, но подвергнувшихся тепловлажностной обработке.

Полученные модели, характеризующие влияние факторов в сложной системе на прочность представлены в приложениях,

На основании полученных значений прочности за счет введения химдобавок и повышения удельной поверхности цемента построены графики, характеризующие повышение прочности "тяжелых" и "легких" мелкозернистых бетонов.

Для определения влияния оптимальных концентраций добавок на прочность бетонов с различным количественным и качественным видом песка были построены геометрические образы моделей. Такие же графические образы моделей характеризующие параметры

удобоукладываемости влагоудерживающую способность смеси были построены с учетом влияния оптимальных концентраций добавок, максимизирующих прочность,

Совмещение диаграмм, построенных на каждой плоскости объемного пространства дает возможность оценить реологические свойства смеси и прогнозировать физико-технические параметры затвердевшего бетона в широком диапазоне варьирования видов заполнителя при введении оптимальной концентрации химдобавки, максимизирующей прочность. **ВЫВОДЫ.** Влияние многокомпонентных добавок, содержащих отходы промышленности на физико-технические параметры затвердевшего бетона.

Анализ полученных результатов показывает, что оптимальные концентрации добавки, содержащей суперпластификатор и отходы химического производства при введении в бетонную смесь позволяют повысить прочность бетонов. Так, на третьи сутки при нормальном твердении для бетонов на заполнителе, состоящем из 25% кварцевого и 75% керамзитового песков одной крупности прочность повышается на 40% для заполнителей, содержащих 25% керамзитового и 75% кварцевого песков прочность увеличивается на 15%. Рецепт добавки: БП-0,9% (от массы цемента), кремнесодержащего компонента-3%, СДБ-0,2%. Интенсификация набора прочности отмечена на девятые сутки Прочность при введении 1,6% БП увеличилась на 13,3 МПа для "легких" мелкозернистых бетонов и на 2,2 МПа, для бетонов на тяжелых заполнителях.

Максимальный прирост прочности можно на 28 сутки можно получить за счет введения в смесь добавки в следующем составе: БП-2,2%, КК-3%, СДБ-0,2%.

Изменение прочности менее существенно при Т.В.О. Прочность на третьи сутки после тепловлажностной обработки составляет в среднем 29 МПа для «легкого» бетона («эталонный» бетон – 23 МПа).

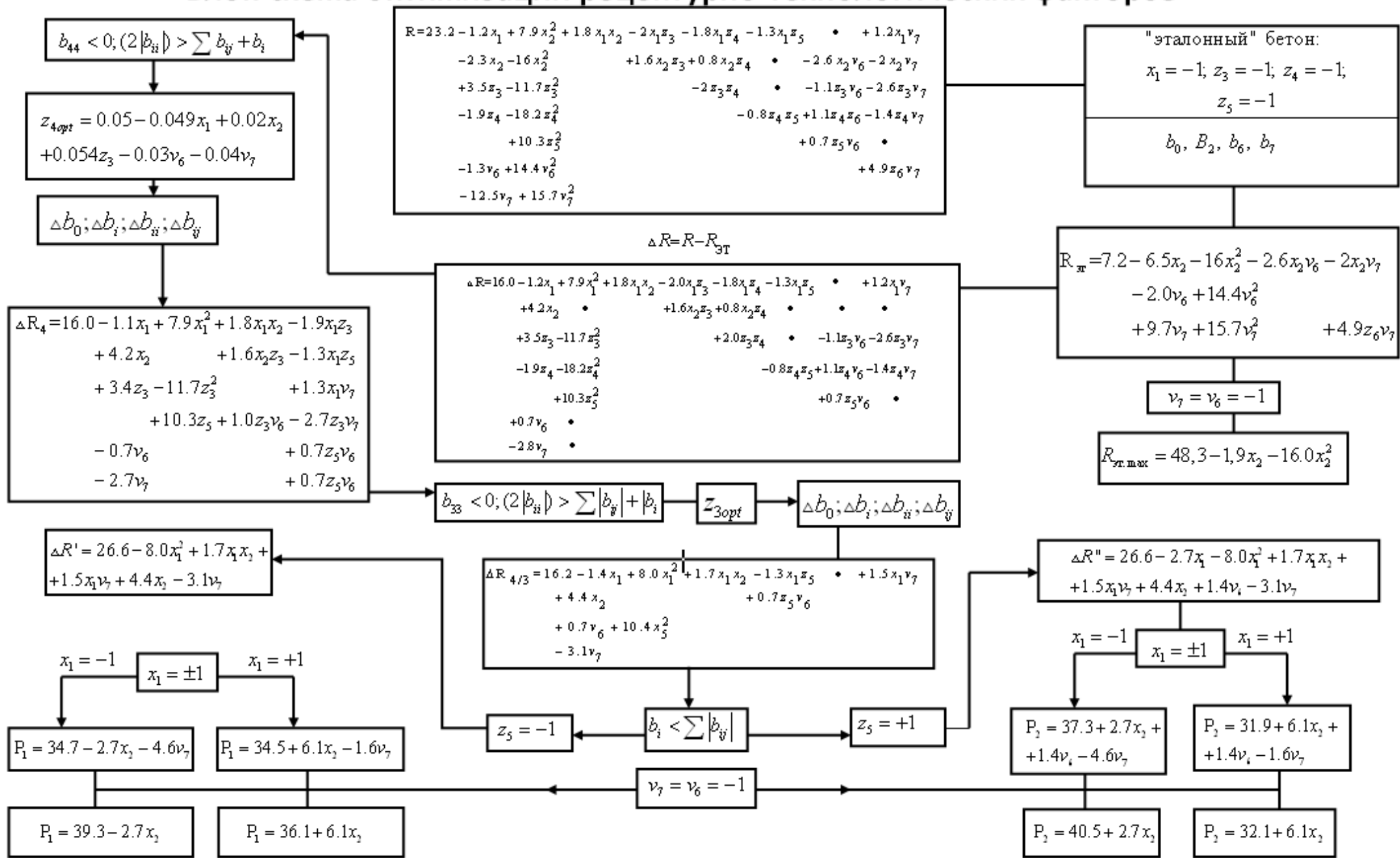
На 28 сутки влияние добавки почти не сказывается.

Можно сделать вывод : введение добавки , содержащей в качестве компонента – суперпластификатор и отходы промышленности ведет к росту прочности. При этом возможно снижение водоцементного отношения и экономия части цемента. Влияние добавки лучше отражается на бетоне, твердеющем в нормальных условиях, чем на бетоне, подвергнувшемся тепловлажностной обработке. Анализ коэффициентов моделей позволяет сделать вывод , что основным фактором, влияющим на прирост прочности является совместное действие суперпластификатора и тонкодисперсного кремнесодержащего

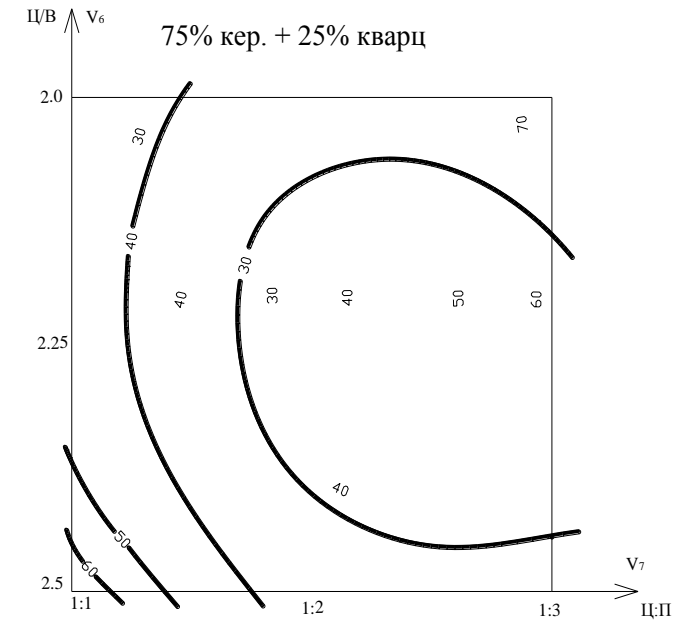
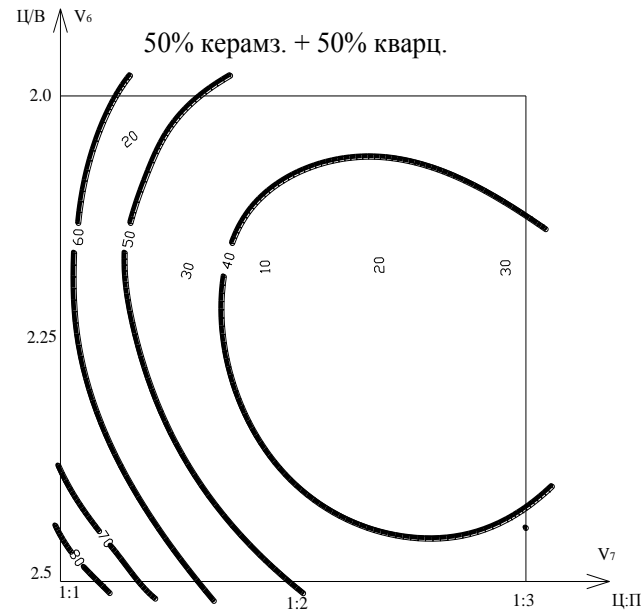
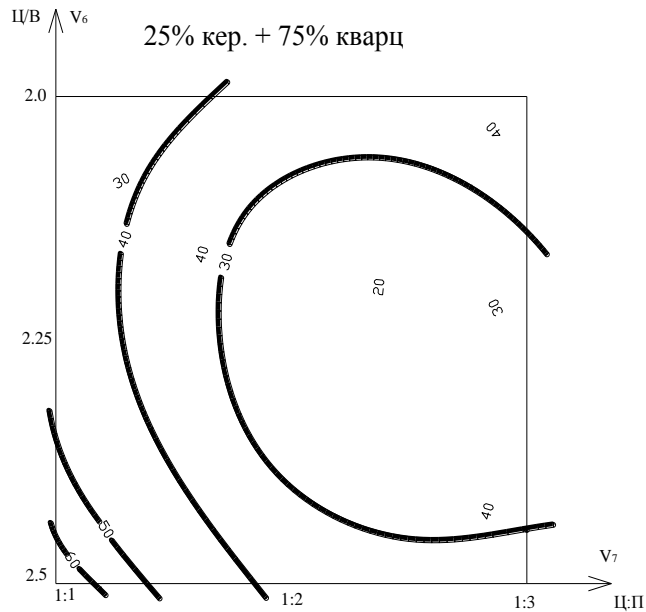
наполнителя. Объяснить это можно тем, что из-за адсорбции влаги на большой удельной поверхности заполнителя снижается общее количество химически несвязанной воды, что благоприятно сказывается на формировании структуры твердеющего бетона, уменьшает пористость.

ОБЩИЙ ВЫВОД ПО РАБОТЕ: Добавку содержащую суперпластификатор и отходы производства суперфосфата можно применять при изготовлении бетона. Она позволяет получать требуемые реологические характеристики бетонной смеси и физико-технические свойства затвердевшего бетона.

Блок-схема оптимизации рецептурно-технологических факторов



Регулировочные диаграммы для принятия технологического решения /при оптимальной концентрации компонентов добавки, обеспечивающей максимальную прочность/



■ Изолинии $R_{сж}^{28}$ бетона, твердевшего в нормальных условиях

■ Зоны подвижных смесей



■ Зоны жестких смесей



■

■ Изолинии параметра влагоудерживающей способности



■ Ц:П – объемные соотношения ,Заполнитель – кварцевый и керамзитовый пески /в объемных отношениях/

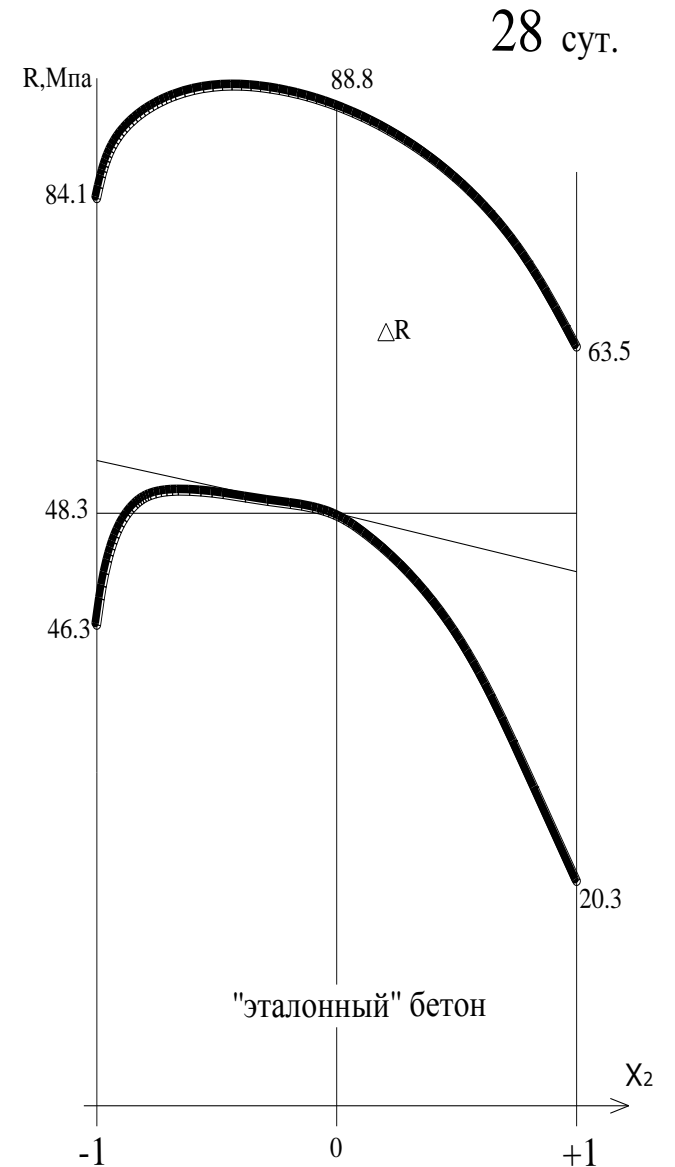
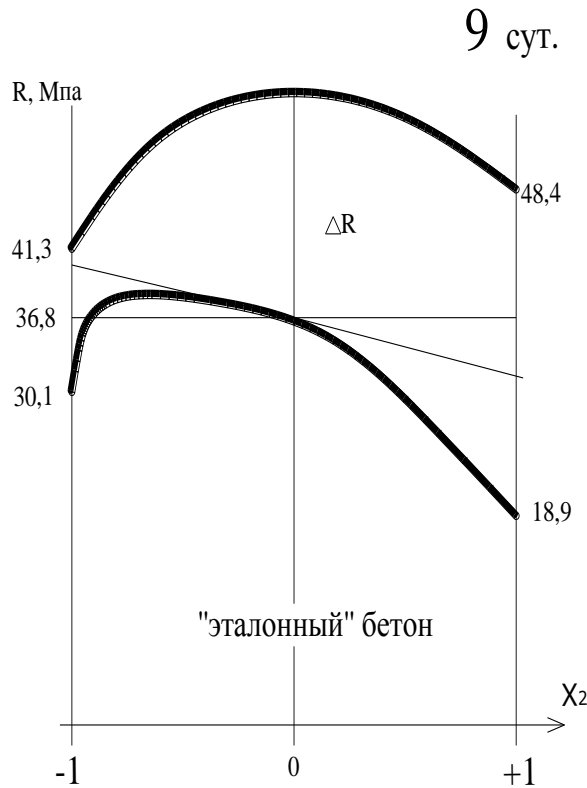
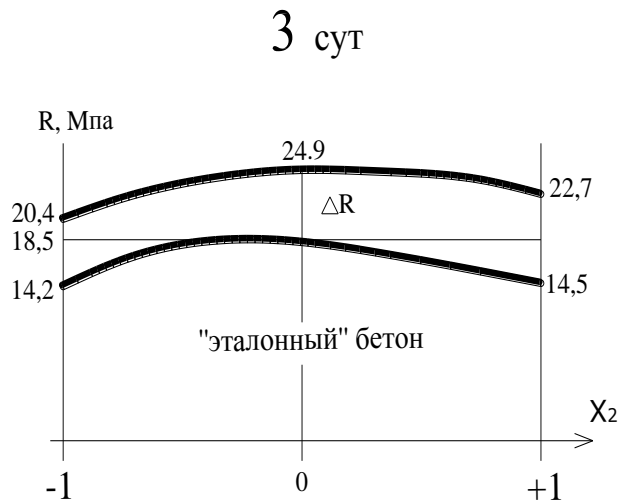
Влияние оптимальных составов добавки на изменение прочности $R_{сж}$

сут.	КОМПОН. ДОБАВКИ % ОТ МАССЫ ЦЕМЕНТА	БП	КК	ОДБ
3		0,9	3	0,2
9		1,6	3,5	-
7		2,2	3	0,2

*
Д
Л
Я

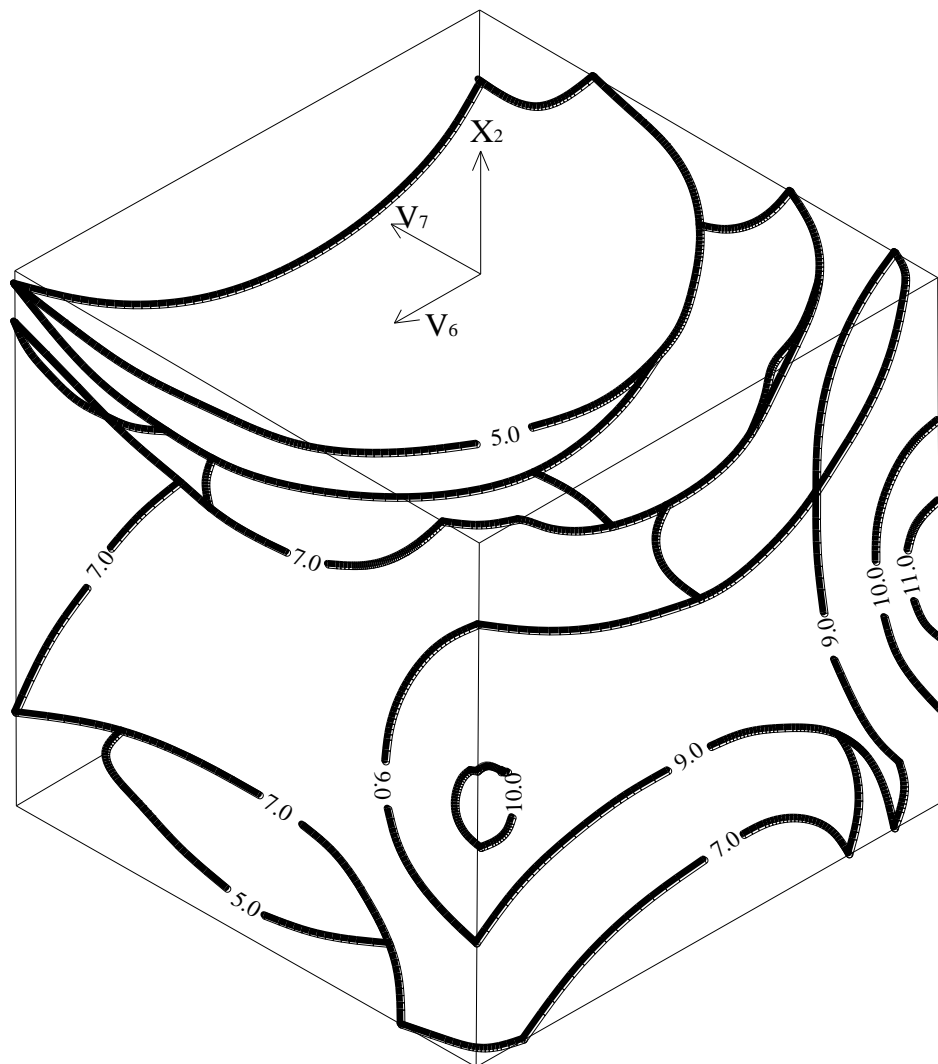
бетона с заполнителем, содержащем 25% кварцевого и 75% керамзитового песка /по объему/

«ЭТАЛОННЫЙ» бетон:
 $Z_3 = -1; Z_4 = -1; Z_5 = -1;$
 ТОНКОСТЬ ПОМОЛА ЦЕМЕНТА
 $3000 \text{ см}^2/\text{Г}$
 $/X_1 = -1/$

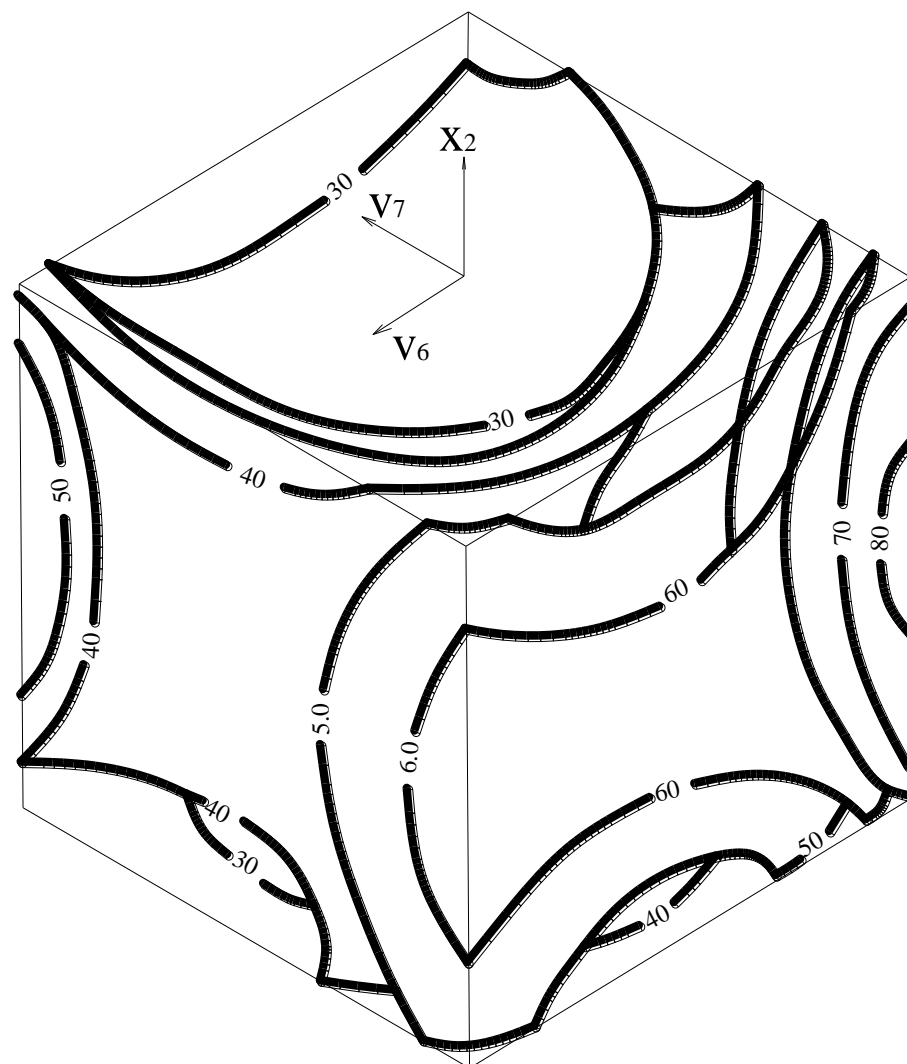


Графические образы моделей

Изоповерхности $R_{\text{сж}}^{28}$ /МПа/



Изоповерхности $R_{\text{сж}}^{28}$ /МПа/



Приложение Б

Таблица 1

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
0,00	0,00000	0,41	0,31819	0,82	58778
0,01	00798	42	32552	83	59346
02	01596	43	33280	84	59909
03	02393	44	34006	85	60468
04	03191	45	34729	86	61021
05	03888	46	35448	87	61570
06	04784	47	36164	88	62114
07	05581	48	36877	89	62653
08	06376	49	37587	90	0,63188
09	07171	0,50	0,38292	91	63718
0,10	07966	51	38995	92	64243
11	08759	52	39694	93	64763
12	09552	53	40389	94	65278
13	10343	54	41080	95	65789
14	11134	55	41768	96	66294
15	11924	56	42452	97	66795
16	12712	57	43132	98	67291
17	13499	58	43809	99	67783
18	14285	59	44481	1,00	0,68269
19	15069	0,60	0,45149	1,01	68750
0,20	0,15852	61	45814	02	69227
21	16633	62	46474	03	69699
22	17413	63	47131	04	70166
23	18191	64	47783	05	70628
24	18967	65	48431	06	71086
25	19741	66	49075	07	71538
26	20514	67	49714	08	71986
27	21284	68	50350	09	72429
28	22052	69	50981	1,10	0,72687
29	22818	0,70	0,51607	11	73300
0,30	0,23582	71	52230	12	73729
31	24344	72	52848	13	74152
32	25103	73	53461	14	74571
33	25860	74	54070	15	74986
34	26614	75	54675	16	75395
35	27366	76	55275	17	75800
36	28115	77	55870	18	76200
37	28862	78	56461	19	76595
38	29605	79	57047	1,20	0,76986
39	30346	0,80	0,57629	21	77372
0,40	0,31084	0,81	58206	22	77754
1,23	78230	1,67	90508	2,10	0,96427
24	78502	68	90704	11	96514

25	78870	69	90897	12	96599
26	79233	1,70	0,91087	13	96683
27	79592	71	91273	14	96765
29	80295	72	91457	15	96844
1,30	80640	73	91637	16	96923
31	80980	74	91814	17	96999
32	81316	75	91988	18	97074
33	81648	76	92159	19	97148
34	81975	77	92327	2,20	0,97219
35	82298	78	92492	21	97289
36	82617	79	92655	22	97358
37	82931	1,80	0,92814	23	97425
38	83241	81	92970	24	97491
39	83547	82	93124	25	97555
1,40	0,83849	83	93275	26	97618
41	84146	84	93428	27	97679
42	84439	85	93569	28	97739
43	84728	86	92711	29	97798
44	85013	87	93852	2,30	97855
45	85294	88	93989	31	97911
46	85571	89	94124	32	97966
47	85844	1,90	0,94257	33	98019
48	86113	91	94387	34	98078
49	86378	92	94514	35	98123
1,50	0,86639	93	94639	36	98172
51	86696	94	94762	37	98221
52	87149	95	94882	38	98269
53	87394	96	95000	39	98315
54	87644	97	95116	2,40	0,98360
55	87880	98	95230	41	98405
56	88124	99	95341	42	98448
57	88358	2,00	0,95450	43	98490
58	88589	01	95557	44	98532
59	88817	02	95622	45	198571
1,60	0,89040	03	95764	46	98611
61	89260	04	95865	47	98649
62	89477	05	95964	48	98686
63	89690	06	96060	49	98723
64	89899	07	96155	2,50	0,98758
65	90106	08	96247	51	98793
66	90309	09	96838	52	98826
y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
2,53	98859	2,81	99505	3,09	99800
54	9891	82	99520	3,10	99806
55	98923	83	99535	11	99806
56	98953	84	99549	12	99819

57	98983	85	99563	13	99825
58	99012	86	99576	14	9171
59	99040	87	99590	15	99837
2,60	0,99068	88	99602	16	99842
61	99095	89	99615	17	99848
62	99121	2,90	99627	18	99853
63	99146	91	99639	19	99858
64	99171	92	99650	3,20	99863
65	99195	93	99661	21	99867
66	99219	94	99672	22	99872
67	99241	95	99682	23	99876
68	99263	96	99692	24	99880
69	99285	97	99702	25	99885
2,70	99307	98	99712	26	99889
71	99327	99	99721	27	99892
72	99347	3,00	99730	28	99896
73	99367	01	99739	29	99900
74	99386	02	99747	3,30	99903
75	99404	03	99755	3,40	99933
76	99422	04	99763	3,50	99953
2,77	99439	05	99771	3,60	99968
78	99456	06	99779	3,70	99978
79	99473	07	99786	3,80	99986
2.80	99489	08	99793		

*При пользовании таблицей надо иметь в виду, что $\Phi(-y)=-\Phi(y)$

Таблица 2

α^*	c_v^*	α^*	c_v^*	α^*	c_v^*
0,67	1,5500	2,95	0,3690	5,15	0,2228
0,71	1,4300	3,00	0,3631	5,20	0,2207
0,77	1,3200	3,05	0,3682	5,25	0,2185
0,83	1,2100	3,10	0,3533	5,30	0,2175
0,91	1,1000	3,15	0,3474	5,35	0,2154
1,00	1,0000	3,20	0,3425	5,40	0,2132
1,05	0,9523	3,25	0,3386	5,45	0,2112
1,10	0,9101	3,30	0,3336	5,50	0,2101
1,15	0,8722	3,35	0,3297	5,55	0,2080
1,20	0,8366	3,40	0,3247	5,60	0,2069
1,25	0,8050	3,45	0,3207	5,65	0,2048
1,30	0,7755	3,50	0,3167	5,70	0,2027
1,35	0,7489	3,55	0,3128	5,75	0,2016
1,40	0,7235	3,60	0,3087	5,80	0,1999
1,45	0,7009	3,65	0,3047	5,85	0,1987
1,50	0,6794	3,70	0,3008	5,90	0,1966
1,55	0,6586	3,75	0,2977	5,95	0,1953
1,60	0,6401	3,80	0,2937	6,00	0,1941
1,65	0,6221	3,85	0,2907	6,05	0,1925

1,70	0,6052	3,90	0,2866	6,10	0,1909
1,75	0,5893	3,95	0,2836	6,15	0,1893
1,80	0,5752	4,00	0,2806	6,20	0,1875
1,85	0,5603	4,05	0,2775	6,25	0,1866
1,90	0,5471	4,10	0,2744	6,30	0,1850
1,95	0,5349	4,15	0,2714	6,35	0,1837
2,00	0,5227	4,20	0,2683	6,40	0,1823
2,05	0,5114	4,25	0,2658	6,45	0,1812
2,10	0,5001	4,30	0,2632	6,50	0,1801
2,15	4897	4,35	0,2601	6,55	0,1790
2,20	0,4803	4,40	0,2570	6,60	0,1780
2,25	0,4698	4,45	0,2550	6,65	0,1758
2,30	0,4613	4,50	0,2519	6,70	0,1747
2,35	0,4527	4,55	0,2496	6,75	0,1737
2,40	0,4441	4,60	0,2568	6,80	0,1728
2,45	0,4356	4,65	0,2447	6,85	0,1715
2,50	0,4279	4,70	0,2426	6,90	0,1703
2,55	0,4202	4,75	0,2405	6,95	0,1693
2,60	0,4135	4,80	0,2374	7,00	0,1692
2,65	0,4058	4,85	0,2353	7,05	0,1682
2,70	0,4009	4,90	0,2332	7,10	0,1671
2,75	0,3933	4,95	0,2311	7,15	0,1660
2,80	0,3865	5,00	0,2290	7,20	0,1649
2,85	0,3807	5,05	0,2270	7,25	0,1638
2,90	0,3748	5,10	0,2249	7,30	0,1627
α^*	c_v^*	α^*	c_v^*	α^*	c_v^*
7,35	0,1616	8,25	0,1405	9,15	0,1275
7,40	0,1605	8,30	0,1394	9,20	0,1270
7,45	0,1594	8,35	0,1384	9,25	0,1265
7,50	0,1583	8,40	0,1376	9,30	0,1260
7,55	0,1572	8,45	0,1368	9,35	0,1255
7,60	0,1561	8,50	0,1360	9,40	0,1250
7,65	0,1550	8,55	0,1350	9,45	0,1245
7,70	0,1539	8,60	0,1339	9,50	0,1241
7,75	0,1528	8,65	0,1332	9,55	0,1236
7,80	0,1517	8,70	0,1324	9,60	0,1231
7,85	0,1506	8,75	0,1316	9,65	0,1226
7,90	0,1487	8,80	0,1308	9,70	0,1221
7,95	0,1473	8,85	0,1305	9,75	0,1218
8,00	0,1461	8,90	0,1298	9,80	0,1214
8,05	0,1450	8,95	0,1294	9,85	0,1210
8,10	0,1439	9,00	0,1289	9,90	0,1206
8,15	0,1428	9,05	0,1284	9,95	0,1203
8,20	0,1417	9,10	0,1280	10,00	0,1201

k	λ				
	12	14	16	18	20
1	0,0001				
2	0,0004	0,0001			
3	0,0018	0,004	0,0001		
4	0,0053	0,0013	0,0003	0,0001	
5	0,0127	0,0037	0,001	0,0002	
6	0,0255	0,0087	0,0026	0,0007	0,0002
7	0,0437	0,0174	0,006	0,0019	0,0005
8	0,0655	0,0304	0,012	0,0042	0,0013
9	0,0874	0,0473	0,0213	0,0083	0,0029
10	0,1048	0,0663	0,0341	0,015	0,0059
11	0,1144	0,0844	0,0496	0,0245	0,0106
12	0,1144	0,0984	0,0661	0,0368	0,0176
13	0,1055	0,106	0,0814	0,0509	0,0271
14	0,0905	0,0106	0,093	0,0655	0,0387
15	0,0724	0,0989	0,0992	0,0786	0,0517
16	0,0543	0,0866	0,0992	0,0884	0,0645
17	0,0383	0,0713	0,0934	0,0936	0,076
18	0,0256	0,0554	0,083	0,0936	0,0844
19	0,0161	0,0409	0,0699	0,0887	0,0888
20	0,0097	0,0286	0,0559	0,0798	0,0888
21	0,0055	0,0191	0,0426	0,0684	0,0846
22	0,003	0,0121	0,031	0,0559	0,0769
23	0,0016	0,0074	0,0216	0,0438	0,0669
24	0,0008	0,0043	0,0144	0,0328	0,0557
25	0,0004	0,0024	0,0092	0,0237	0,0445
26	0,0002	0,0013	0,0057	0,0164	0,0343
27	0,0001	0,0007	0,0033	0,0109	0,0254
28		0,0003	0,0019	0,007	0,0181
29		0,0002	0,0011	0,0044	0,0125
30		0,0001	0,0006	0,0026	0,0084
31			0,0002	0,0015	0,0053
32			0,0001	0,0009	0,0034
33			0,0001	0,0005	0,002
34				0,0003	0,0013
35				0,0001	0,0007
36					0,0004
37					0,0002
38					0,0001

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛИКАТНОГО КИРПИЧА, ПОЛУЧАЕМОГО ИЗ ОТХОДОВ ЛИТЕЙНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

канд. техн. наук Д.Н. ШАБАНОВ, канд. техн. наук А.М. ИВАНЕНКО
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются процессы формирования структуры силикатного автоклавированного материала, получаемого с использованием отходов литейного производства. В качестве отходов используются отработанная формовочная смесь, гранулированный ваграночный шлак. Изучен фазовый состав образцов. Показана взаимосвязь между параметрами фаз и физико-механическими свойствами материала. Проанализировано влияние состава сырьевой смеси, параметров технологической обработки на изменение фазового состава полученных образцов. Сделан вывод о наиболее оптимальных параметрах состава сырьевой смеси при использовании отходов литейного производства исходя из процессов фазообразования. Фазовый состав изделий, получаемых с использованием природных материалов, не отличается от фазового состава образцов из отходов литейного производства. При этом использование ваграночного шлака позволяет уменьшить расход извести, а в отработанной формовочной смеси исключить применение природного песка.

Введение. В Республике Беларусь уделяется большое внимание строительству малоэтажных домов усадебного типа, при этом широко используются силикатные строительные материалы. К их основным достоинствам можно отнести архитектурную выразительность построенных зданий, возможность планировки, доступность сырья. Один из методов снижения стоимости производства силикатных материалов – использование в качестве сырья отходов промышленности.

Строительство и его материальная база – промышленность строительных материалов – являются наиболее материалоемкими отраслями, размещенными повсеместно, что ставит их в особое положение при решении вопросов комплексного использования сырья. При строительстве зданий и сооружений главным образом используются неорганические материалы, основные составляющие которых – силикаты и алюмосиликаты, т.е. преимущественно те соединения, из которых состоят попутные продукты и отходы промышленности. Рост отвалов заставляет искать новые пути использования отходов.

Анализ исследований свидетельствует о целесообразности разработки методов использования отходов в производстве с учетом их специфических свойств [1]. Наиболее широкомасштабной областью применения в строительной отрасли промышленных минеральных попутных отходов является производство вяжущих, пористых и плотных заполнителей для бетонов, керамических, автоклавных, стекольных строительных материалов и изделий. В настоящее время для производства автоклавных строительных материалов из плотного и ячеистого бетонов, силикатного кирпича используются: золы, доменные шлаки, вскрышные горные породы, отходы горных обогатительных комбинатов. При этом важно обладать знаниями о фазовых преобразованиях в процессе производства и их влиянии на свойства готовых материалов [2].

Основная часть. Проведенные ранее нами исследования показали, что, используя отработанную формовочную смесь и гранулированный ваграночный шлак, можно получать силикатный кирпич марок 125, 150, 175 при соответствии требованиям по морозостойкости, предъявляемым к рядовым стеновым изделиям [3; 4]. Долговечность любого материала зависит от фазового состава, пористой структуры, физико-механических свойств.

В данной работе проводились исследования фазового состава полученных материалов с целью выявления взаимосвязи между прочностными показателями изделий и их минералогическим составом, возможности прогнозирования свойств изделий, изучения процессов, происходящих при производстве изделий. В экспериментах использовали отработанные формовочные смеси литейного завода «Центролит» (Одесская область). Химический состав отработанной формовочной смеси представлен: SiO_2 (92,17 – 95,74 %); Al_2O_3 (3,69 – 5,18 %); Fe_2O_3 (1,0 – 5,37 %); CaO (0,84 – 1,4 %); MgO (0,20 – 1,50 %); органическими веществами (1,34 – 2,56 %). В качестве части вяжущего для производства силикатного кирпича использовался гранулированный ваграночный шлак, получаемый при варке чугуна. Химический состав ваграночного шлака: SiO_2 (48,10 %); Al_2O_3 (15,30 %); Fe_2O_3 (8,57 %); CaO (28,28 %); MgO (3,0 %); MnO (13,66 %); органические вещества (0,248 %). В исследованиях использовали известь Рыбницкого цементно-шиферного комбината. Известь отвечает требованиям, предъявляемым к сырью первого сорта.

Оценка влияния рецептурно-технологических факторов на свойства готового материала предусматривает учет расхода вяжущего, количество шлака, вводимое в состав вяжущего, водовяжущее отношение, давление формования сырца, время пребывания изделий в автоклаве, давление пара. Для изучения свойств материалов был реализован насыщенный 6-факторный эксперимент по плану Рехтшафнера. Факторы и уровни их варьирования представлены в таблице.