

Материалы для организации самостоятельной работы студентов 4 курса ИСФ заочной формы обучения при изучении строительной механики

Модуль М-8. МЕТОД СИЛ

1. Методические указания

Структура изучаемого модуля включает следующие учебные элементы:

1. Расчет методом сил произвольной плоской статически неопределимой стержневой конструкции.
2. Поверки метода сил.
3. *Особенности расчета методом сил симметричных плоских статически неопределимых стержневых конструкций.*
4. *Матричная форма расчета методом сил плоских статически неопределимых стержневых конструкций.*
5. *Определение перемещений в плоских статически неопределимых стержневых конструкциях.*

Обязательными для изучения студентами заочного обучения являются первые два учебных элемента модуля.

Изучение модуля следует начинать с усвоения понятий основная система, основные неизвестные, канонические уравнения метода сил. Важно понимать, что основная система метода сил может быть получена не единственным образом. Поэтому образование основной системы и выбор ее варианта является важным этапом расчета, так как удачный вариант основной системы часто позволяет значительно облегчить весь расчет конструкции методом сил.

Выбирая ту или иную основную систему, необходимо провести ее анализ, не допуская мгновенно изменяемых систем. На схеме основной системы необходимо показывать основные неизвестные метода сил.

Написание канонических уравнений метода сил обычно не представляет труда, но здесь важно добиться полного понимания их физического смысла и смысла каждого члена уравнения.

Подсчет коэффициентов и свободных членов канонических уравнений производится по формуле Максвелла-Мора с использованием правила Верещагина, предусматривающей построение единичных и грузовых эпюр внутренних усилий в основной системе. Построение этих эпюр требует особого внимания, так как именно здесь чаще всего студентами делаются ошибки.

После подсчета коэффициентов и свободных членов уравнений необходимо произвести их проверку, используя для этого кинематические промежуточные проверки. Проверять следует и найденные в результате решения системы канонических уравнений основные неизвестные, используя для этого алгебраические промежуточные проверки.

Построение эпюр внутренних усилий производится сложением эпюр от действия основных неизвестных, получаемых умножением единичных эпюр на основные неизвестные, и грузовых эпюр. Правильность построения эпюр внутренних усилий осуществляется с помощью окончательных проверок метода сил – статических и кинематических.

При изучении учебных элементов модуля рекомендуется использование следующей литературы: [1, с.309 – 335]; [2, с.221 – 236]; [3, с.251 – 254, 293-304, 341-354]; [4, с.240-250].

2.Сводка формул модуля

1.Канонические уравнения метода сил при расчете на действие нагрузки

$$\delta_{11}X_1 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0,$$

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0.$$

2.Формула для определения коэффициентов канонических уравнений

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_l \frac{m_i m_j}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i n_j}{EA} ds + \sum_k k \int_l \frac{q_i q_j}{GA} ds$$

3. Формула для определения свободных членов канонических уравнений при расчете на действие нагрузки

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_l \frac{m_i M_P^0}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N_P^0}{EA} ds + \sum_k \int_l \frac{k q_i Q_P^0}{GA} ds$$

4. Формулы для определения внутренних усилий статически неопределимой стержневой конструкции при расчете на действие нагрузки

$$M = m_1 X_1 + \dots + m_n X_n + M_P^0,$$

$$Q = q_1 X_1 + \dots + q_n X_n + Q_P^0,$$

$$N = n_1 X_1 + \dots + n_n X_n + N_P^0.$$

3. Примеры расчета методом сил

Пример 1. Для рамы, показанной на рис.1, определить внутренние усилия, построить эпюры внутренних усилий и проверить их правильность

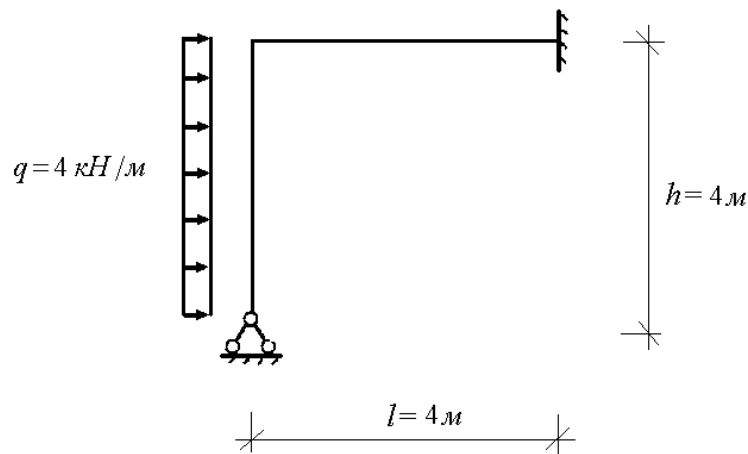


рис.1

Поперечные сечения всех элементов рамы имеют одинаковую изгибную жесткость EI_z .

Так как у рамы отсутствуют замкнутые контуры, то степень ее статической неопределимости определяется по формуле

$$\mathcal{L} = -W$$

и равняется

$$Л = -3 \cdot 1 + 5 = 2.$$

Для образования основной системы метода сил отбросим два опорных стержня на левой опоре. Выбранный вариант основной системы показан на рис.2

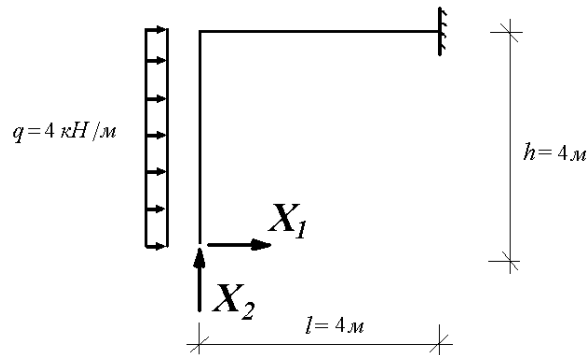


рис.2.

Канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом ее степени статической неопределимости, имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для определения коэффициентов и свободных членов образуем единичные и грузовое состояния и строим для них эпюры внутренних усилий как для статически определимых рам.

Первое единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис.3

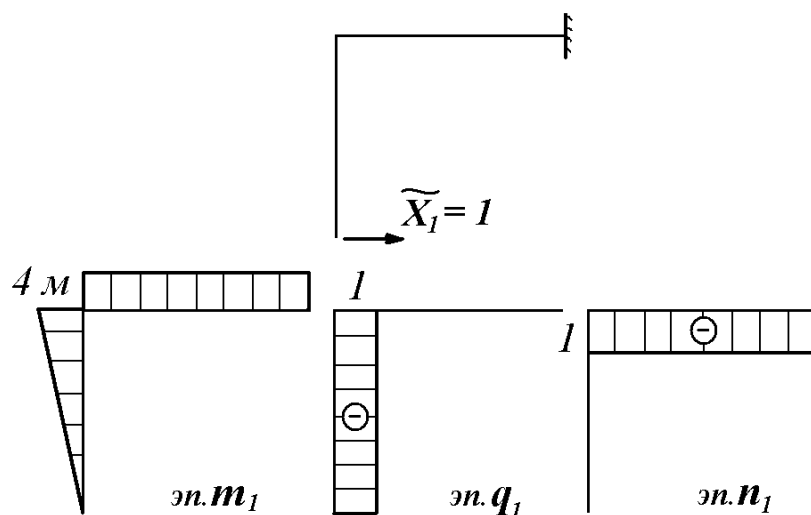


рис.3

Второе единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис.4

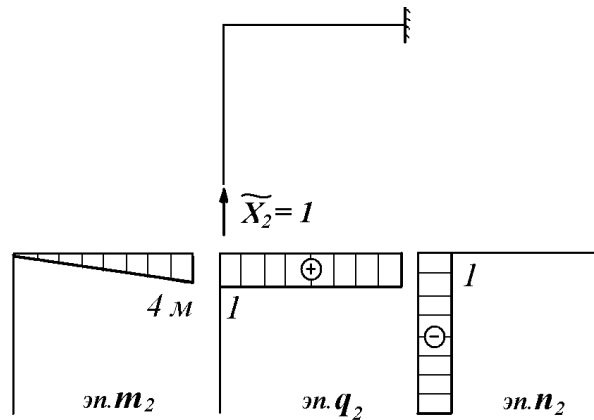


рис.4

Находим коэффициенты канонических уравнений по формуле Максвелла-Мора с использованием правила Верещагина

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int_l \frac{m_k^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{85,333}{EI_z},$$

$$\delta_{22} = \sum_{k=1}^2 \int_l \frac{m_k^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{21,333}{EI_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^2 \int_l \frac{m_1 m_2}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{32}{EI_z}.$$

Грузовое состояние основной системы и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис.5

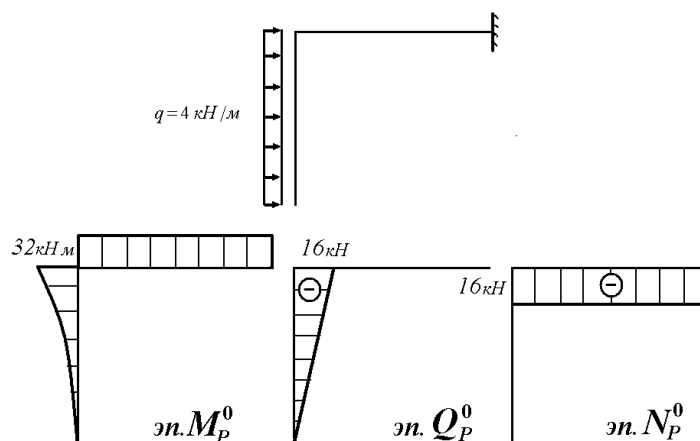


рис.5

Находим свободные члены канонических уравнений по формуле Максвелла-Мора с использованием правила Верещагина

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1}^2 \int_l \frac{m_k M_P^0}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 32 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{640}{EI_z},$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{k=1}^2 \int_l \frac{m_k M_P^0}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{256}{EI_z}.$$

Таким образом, канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом найденных значений коэффициентов и свободных членов, принимают вид

$$\begin{aligned} 85,333X_1 - 32X_2 + 640 &= 0, \\ -32X_1 + 21,333X_2 - 256 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему канонических уравнений, получим следующие значения основных неизвестных

$$X_1 = -6,857кН, \quad X_2 = 1,714кН.$$

Формулы для определения окончательных внутренних усилий рассчитываемой рамы принимают вид

$$\begin{aligned} M &= m_1 X_1 + m_2 X_2 + M_P^0, \\ Q &= q_1 X_1 + q_2 X_2 + Q_P^0, \\ N &= n_1 X_1 + n_2 X_2 + N_P^0. \end{aligned}$$

Построенные в соответствии с этими формулами эпюры окончательных внутренних усилий приведены на рис.6

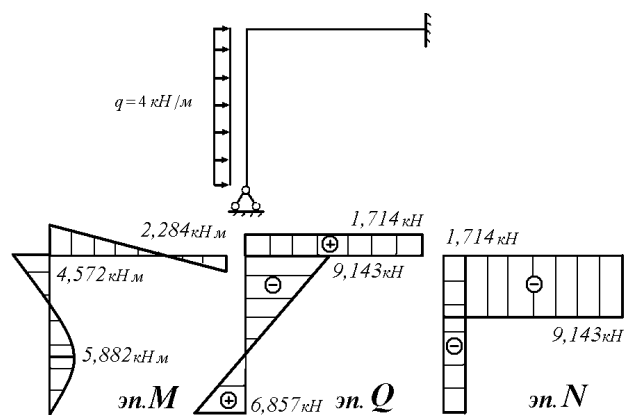


рис.6

Для проверки правильности найденных внутренних усилий сначала выполним статические проверки. С этой целью проверим равновесие узлов и стержней рамы согласно схемам, приведенным на рис.7

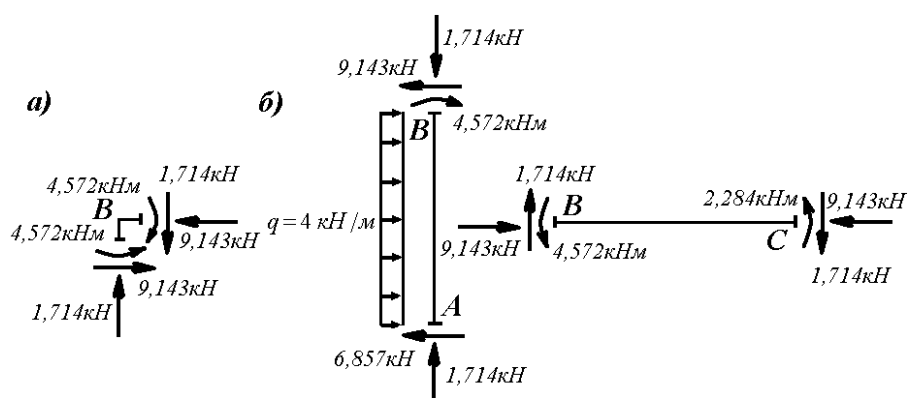


рис.7

и проверку равновесия рамы в целом согласно схеме, приведенной на рис.8

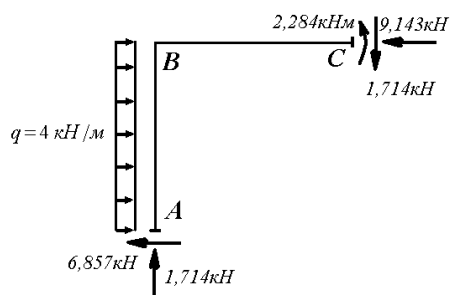


рис.8

Составляя уравнения равновесия для узла **B** (рис.7.а)

$$\begin{aligned}\sum M &= 0; 4,572 - 4,572 \equiv 0, \\ \sum y &= 0; 1,714 - 1,714 \equiv 0, \\ \sum x &= 0; 9,143 - 9,143 \equiv 0,\end{aligned}$$

для стержня **AB** (рис.7.б)

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4,572 - 9,143 \cdot 4 = 36,572 - 36,572 = 0, \\ \sum M_B &= 0; 6,857 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4,572 = 32 - 32 = 0,\end{aligned}$$

для стержня **BC** (рис.7.б)

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0; 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 4,572 = 6,856 - 6,856 = 0, \\ \sum M_C &= 0; 1,714 \cdot 4 - 4,572 - 2,284 = 6,856 - 6,856 = 0,\end{aligned}$$

и для рамы в целом (рис.8)

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; 4 \cdot 4 \cdot 2 + 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 9,143 \cdot 4 = 38,856 - 38,856 = 0, \\ \sum M_C &= 0; 6,857 \cdot 4 + 1,714 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2,284 = 34,284 - 34,284 = 0,\end{aligned}$$

можно увидеть, что все статические проверки для заданной рамы выполняются.

Кинематические проверки правильности найденных внутренних усилий для заданной рамы имеют вид

$$\sum_{k=1}^2 \int_s \frac{m_i M}{EI_z} ds = 0 \quad (i=1,2),$$

и для их осуществления необходимо последовательно перемножить эпюру окончательных изгибающих моментов с эпюрами изгибающих моментов единичных состояний.

В результате осуществления первой кинематической проверки получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^2 \int_s \frac{m_i M}{EI_z} ds &= \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot 4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 2,284 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI_z} (60,960 - 60,939) = \frac{0,021}{EI_z}.\end{aligned}$$

Невязка составляет

$$\frac{0,021 \cdot 100}{60,939} = 0,034\%,$$

что меньше допустимой погрешности в 5%.

В результате осуществления второй кинематической проверки получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_s \frac{m_l M}{EI_z} ds &= \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 4,572 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2,284 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \\ &= \frac{1}{EI_z} (-12,192 + 12,181) = -\frac{0,011}{EI_z}. \end{aligned}$$

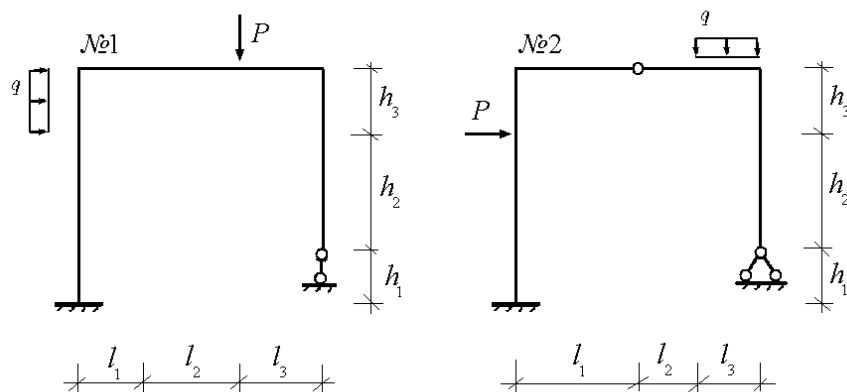
Невязка во втором случае составляет

$$\frac{0,011 \cdot 100}{12,181} = 0,09\%,$$

что также меньше допустимой погрешности в 5%.

Таким образом, выполненные статические и кинематические проверки показывают, что эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданной рамы построены правильно.

Задачи для самостоятельного решения. Для рам, показанных на рис. 9, найти внутренние усилия, построить эпюры этих усилий и проверить их правильность.



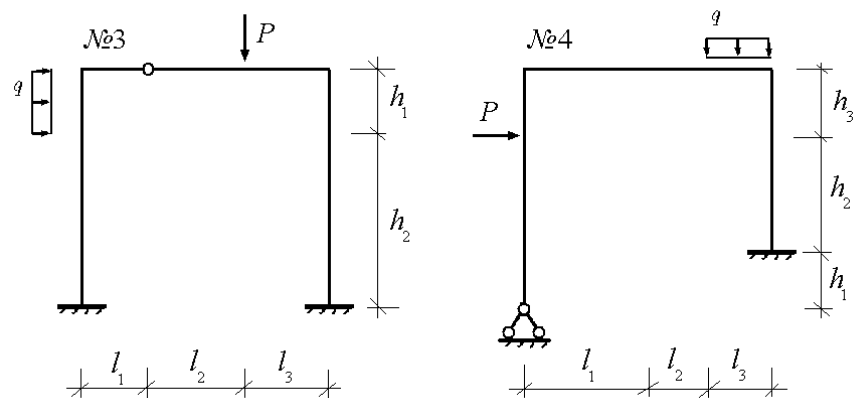


рис.9

Размеры рам и значения нагрузок приведены в табл.1. Поперечные сечения элементов всех рам имеют одинаковую изгибную жесткость EI_z .

Таблица 1

№ задачи	Нагрузки		Размеры рам в м					
	P в кН	q в кН/м	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2	h_3
1	14	18	2	3	7	1	2	1
2	16	20	4	6	4	1	2	2
3	18	28	5	8	3	2	4	-
4	20	24	9	3	6	2	3	2

4.Материалы для самоконтроля

Проверьте, как Вы знаете следующие понятия, определения, формулировки и формулы, связанные с вопросами к тестам 1-го уровня:

- основная система;
- канонические уравнения;
- формулы для вычисления коэффициентов канонических уравнений;
- формулы для вычисления свободных членов канонических уравнений;
- единичные состояния основной системы;
- грузовое состояние основной системы;
- формулы для определения окончательных внутренних усилий;

- промежуточные проверки метода сил;
- окончательные проверки метода сил.

Проверьте, как Вы умеете при расчете статически неопределимых стержневых систем методом сил:

- образовывать основную систему;
- составлять систему канонических уравнений;
- образовывать единичные состояния и строить единичные эпюры внутренних усилий;
- образовывать грузовое состояние и строить грузовые эпюры внутренних усилий;
- находить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений.
- строить эпюры внутренних усилий статически неопределимой стержневой конструкции при расчете на действие нагрузки

5.Рекомендуемая литература

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. М., Стройиздат, 1981.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. СПб: Изд. «Лань», 2010.
3. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. М., Стройиздат, 1960.
4. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. М., Стройиздат, 1986.

Материалы составлены доцентом кафедры механики Турищевым Л.С.

31.01.2014