**Практическое занятие №**

ЗАКРЕПЛЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЗА ПОСТАВЩИКАМИ (ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

**Цель работы:** изучение методики решения транспортной задачи линейного программирования для определения оптимального плана перевозок.

**Краткие теоретические сведения**

Одной из важнейших задач планирования перевозок является закрепление потребителей однородных грузов за поставщиками, которая решается методами так называемой транспортной задачи линейного программирования.

В общем виде транспортная задача может быть сформулирована следующим образом.

В пунктах отправления имеется определенный груз, причем известно, сколько такого груза имеется в каждом из этих пунктов. Этот груз надо доставить в пункты потребления, причем известно, какое количество необходимо доставить в каждый пункт потребления. Известны также расстояния между всеми пунктами отправления и пунктами потребления. Необходимо определить такой план перевозок, который обеспечит минимум объема транспортной работы в тонно-километрах, что соответствует достижению наименьшего среднего расстояния перевозок.

Пример построения транспортной задачи приведен в таблице 1.

Таблица 1

**Постановка транспортной задачи**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  потребления | Пункты отправления | | | | Количество  потребного груза, т |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 8 | 12 | 15 | 23 | 40 |
| 2 | 7 | 10 | 14 | 11 | 40 |
| 3 | 10 | 11 | 19 | 14 | 80 |
| 4 | 16 | 14 | 16 | 18 | 40 |
| 5 | 17 | 20 | 19 | 20 | 10 |
| Наличие груза, т | 15 | 85 | 40 | 70 | 210 |

В верхних правых углах каждой клетки таблицы обычно указывается расстояние между соответствующим пунктом отправления и пунктом потребления.

Условия транспортной задачи можно выразить в математической форме, т. е. построить ее экономико-математическую модель.

Если обозначить количество груза, перевозимого в каждый пункт потребления из каждого пункта отправления, буквой *х* с двумя индексами, первый из которых показывает, куда везется груз, а второй – откуда везется груз (или наоборот), то в математической форме условия примера можно сформулировать следующим образом:

(1)

(2)

(3)

Полученные уравнения имеют линейную форму, т. е. содержат все неизвестные только в первой степени.

Уравнения в системе (1) показывают ограничения по количеству груза, доставляемого в пункты потребления. Например, первое уравнение говорит о том, что в первый пункт потребления можно доставить из всех пунктов отправления не больше и не меньше, чем 40 единиц груза. То же относится и к другим пунктам потребления.

Уравнения в системе (2) устанавливают ограничения по количеству груза, вывозимого из каждого пункта отправления. Так, первое уравнение в этой системе показывает, что из первого пункта отправления нужно вывезти 15 единиц груза.

Следует еще раз отметить, что неизвестные в этих системах *х11, х12* и т. д. могут принимать только положительные значения или быть равными нулю. Если же допустить возможность получения отрицательных значений неизвестных, то это бы противоречило экономическому смыслу задачи, так как отрицательное значение*х*означало бы, что груз перевозится не от отправителя к потребителю, а наоборот – от потребителя к отправителю.

Уравнение (3) показывает, что при решении данной задачи стремятся получить минимум транспортной работы в тонно-километрах, так как каждое произведение в нем – это произведение расстояния перевозок от данного отправителя к определенному поставщику на количество груза.

В системах (1) и (2) имеется 9 уравнений и 20 неизвестных. Следовательно, теоретически возможно огромное количество решений. Но необходимо получить только одно из них и такое, которое отвечало бы и условию (3), т. е. обеспечивало бы минимум транспортной работы в тонно-километрах. Методами элементарной алгебры нельзя решить такую задачу, а линейное программирование позволяет найти такие значения неизвестных, которые отвечают всем условиям данной задачи, выраженных системами (1), (2) и уравнением оптимизации (3).

Несмотря на то, что методы линейного программирования основаны на одном из разделов высшей математики – линейной алгебре, техника расчетов по этим методам несложна. Как только будет известен порядок вычислений или, вернее, система формальных правил, четко и однозначно определяющих процесс решения (такая система правил называется алгоритмом), для вычислений оказывается достаточным знания основных арифметических действий.

В настоящее время известно несколько методов (алгоритмов) решения, транспортной задачи линейного программирования.

Одна группа этих методов основана на принципе последовательного улучшения плана, когда выбранный определенным образом первоначальный план при помощи расчетов улучшается до тех пор, пока он не станет оптимальным. Другая группа основана на методе последовательного сокращения невязок. Одним из методов первой группы является метод потенциалов.

**Метод потенциалов** используется для решения транспортной задачи. Основой вычислительного процесса при улучшении опорного плана является определение критерия оптимальности *d*ij:

(4)

где *сij*- затраты (истинные тарифы), связанные с доставкой одной единицы груза из i-того пункта отправления в j-ый пункт назначения;

*сij\** - расчётные затраты (косвенные тарифы), связанные с доставкой одной единицы груза из i-того пункта отправления в j-ый пункт назначения, определяемые для тех клеток опорного плана, ресурсы в которые не распределены (для незаполненных клеток).

План транспортной задачи является оптимальным, если для всех свободных клеток таблицы перевозок значение критерия оптимальности dij<=0. Если для всех свободных клеток таблицы перевозок критерий оптимальности dij<0, то этот план перевозок является единственным. Если для некоторых свободных клеток таблицы перевозок критерий оптимальности dij=0, то этот оптимальный план перевозок не является единственным. Наконец, если имеются свободные клетки, для которых критерий оптимальности dij>0, то полученный план перевозок не является оптимальным.

Алгоритм метода потенциалов состоит в следующем: каждому поставщику Ai ставится в соответствие некоторое число *u*, которое называется потенциалом Ai-того поставщика; каждому потребителю Bj ставится в соответствие некоторое число *v*, которое называется потенциалом Bj-того потребителя. Для каждой заполненной клетки, т. е. для каждой базисной переменной строится соотношение:

Получаем систему с числом уравнений, равным количеству базисных переменных. Из этой системы определяем неизвестные потенциалы *ui* и *vj*, полагая ui=0. Для каждой незаполненной клетки, т. е. для каждой небазисной переменной, рассчитываются косвенные тарифы *cij\** по формуле:

Затем полученный план проверяют на оптимальность по критерию оптимальности *dij*. Если для каждой незаполненной клетки выполняется условие: dij<=cij\*<=0, то исходный план является оптимальным. Если некоторые dij>0, то необходимо перейти к новому плану путем перемещения перевозки в клетку, отвечающую условию max(dij). Если таких клеток несколько, то выбирают любую из них.

Для правильного перемещения перевозок, чтобы не нарушить ограничения задачи, строят так называемый цикл, т. е. замкнутый многоугольник, соединяющий выбранную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки.

Цикл строится следующим образом: вычёркиваются (мысленно) все строки и столбцы, содержащие ровно одну заполненную клетку, при этом считается, что выбранная клетка без поставки является заполненной; все оставшиеся после вычеркивания клетки составляют цикл и лежат в его углах, они соединяются ломаной линией.

В каждую клетку цикла, начиная с незаполненной, поочередно вписывают знаки “+” и “-“. В клетках с отрицательными знаками выбирается минимальная величина поставки, обозначаемая как *D*. В те вершины, которые имеют знак “+” прибавляется поставка *D*, а в вершинах со знаком “-“ поставки уменьшаются на величину *D*. При этом суммы поставок по строкам и столбцам не изменяются. В результате клетка, для которой строился цикл, станет занятой, а в одной из бывших занятых клеток окажется нулевая поставка и её надо объявить свободной. Общее количество заполненных клеток не изменится, следовательно, новый план перевозок является невырожденным.

Если в результате пересчета одновременно в нескольких ранее занятых клетках цикла поставки примут нулевые значения, то свободной объявляется лишь одна из них. Остальные считаются условно занятыми с нулевыми поставками.

Значения переменных, включенных в цикл, после пересчета переносятся в новую таблицу без изменений. Полученный новый план проверяется на оптимальность.

Такое улучшение плана можно проводить неоднократно до тех пор, пока все критерии для незаполненных клеток окажутся dij<=0. Затем вычисляется оптимальная стоимость перевозок.

Покажем решение задач этим методом на примере.

**Пример**. У поставщиков A1 , A2 , A3 , находится соответственно 70, 80, 110 единиц однотипной продукции, которая должна быть доставлена потребителям B1 , B2 , B3 , B4 в количестве 50, 70, 60, 80 единиц соответственно. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A1 к указанным потребителям равна 14, 16, 13, 7 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A2 к указанным потребителям равна 15, 11, 9, 8 ден.ед. Стоимость доставки единицы продукции от поставщика A3 к указанным потребителям равна 12, 17, 18, 16 ден.ед.

Требуется найти оптимальное решение доставки продукции от поставщиков к потребителям, минимизирующее стоимость доставки.

**Решение:**

Найдем начальное решение **методом северо-западного угла**. Если начальное решение окажется оптимальным, то задача решена. Если начальное решение окажется не оптимальным, используя **метод потенциалов**, будем последовательно получать решение за решением, причем каждое следующее, как минимум, не хуже предыдущего. И так, до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков равнялись суммарной потребности потребителей. Проверим это условие. В данном случае, потребность всех потребителей - 260 единиц продукции равна запасам всех поставщиков.

1. Согласно условию задачи составим таблицу 1 (тарифы cij располагаются в нижнем правом углу ячейки).

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

2. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A1 к потребителю B1 (ячейка A1B1).

Запасы поставщика A1 составляют 70 единиц продукции. Потребность потребителя B1 составляет 50 единиц продукции (см. таблицу 1).

От поставщика A1 к потребителю B1 будем доставлять min = { 70, 50 }=

= 50 единиц продукции.

Разместим в ячейку A1B1 значение равное 50.

Таким образом, полностью удовлетворяется потребность потребителя B1. Вычеркиваем первый столбец таблицы 1, т.е исключаем его из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

3. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A1 к потребителю B2 (ячейка A1B2).

Запасы поставщика A1 составляют 20 единиц продукции. Потребность потребителя B2 составляет 70 единиц продукции (см. таблицу 2).

От поставщика A1 к потребителю B2 будем доставлять min = { 20, 70 }=

= 20 единиц продукции.

Разместим в ячейку A1B2 значение равное 20.

Таким образом, полностью расходуются запасы поставщика A1. Вычеркиваем первую строку таблицы, т.е исключаем ее из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

4. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A2 к потребителю B2 (ячейка A2B2).

Запасы поставщика A2 составляют 80 единиц продукции. Потребность потребителя B2 составляет 50 единиц продукции (см. таблицу 3).

От поставщика A2 к потребителю B2 будем доставлять min = { 80, 50 }=

= 50 единиц продукции.

Разместим в ячейку A2B2 значение равное 50.

Таким образом, полностью удовлетворяется потребность потребителя B2. Вычеркиваем столбец 2 таблицы, т.е исключаем его из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

5. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A2 к потребителю B3 (ячейка A2B3).

Запасы поставщика A2 составляют 30 единиц продукции. Потребность потребителя B3 составляет 60 единиц продукции (см. таблицу 4).

От поставщика A2 к потребителю B3 будем доставлять min = { 30, 60 }=

= 30 единиц продукции.

Разместим в ячейку A2B3 значение равное 30.

Таким образом, полностью расходуются запасы поставщика A2. Вычеркиваем строку 2 таблицы, т.е исключаем ее из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

6. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A3 к потребителю B3 (ячейка A3B3).

Запасы поставщика A3 составляют 110 единиц продукции. Потребность потребителя B3 составляет 30 единиц продукции (см. таблицу 5).

От поставщика A3 к потребителю B3 будем доставлять min={ 110, 30 }=

= 30 единиц продукции.

Разместим в ячейку A3B3 значение равное 30.

Таким образом, полностью удовлетворяется потребность потребителя B3. Вычеркиваем столбец 3 таблицы, т.е исключаем его из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

7. Рассмотрим маршрут доставки от поставщика A3 к потребителю B4 (ячейка A3B4).

Запасы поставщика A3 составляют 80 единиц продукции. Потребность потребителя B4 составляет 80 единиц продукции (см. таблицу 6).

От поставщика A3 к потребителю B4 будем доставлять 80 единиц продукции.

Разместим в ячейку A3B4 значение равное 80.

Таким образом, полностью расходуются запасы поставщика A3. Вычеркиваем строку 3 таблицы, т.е исключаем ее из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 7

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Заполненные ячейки будем называть базисными, остальные - свободными.

Для решения задачи методом потенциалов, количество базисных ячеек (задействованных маршрутов) должно равняться m + n - 1, где m - количество строк в таблице, n - количество столбцов в таблице.

Количество базисных ячеек (задействованных маршрутов) равно 6, что и требовалось.

Таким образом, получили начальное решение, т.е израсходовали все запасы поставщиков и удовлетворили все потребности потребителей.

Общие затраты на доставку всей продукции, для начального решения, составляют **3660 ден. ед.**

Дальнейшие действия будут состоять из шагов, каждый из которых состоит в следующем:

- находим потенциалы поставщиков и потребителей для имеющегося решения;

- находим оценки свободных ячеек (если все оценки окажутся неотрицательными - задача решена);

- выбираем свободную ячейку (с отрицательной оценкой), выбор которой, позволяет максимально снизить общую стоимость доставки всей продукции на данном шаге решения;

- находим новое решение, как минимум, не хуже предыдущего;

- вычисляем общую стоимость доставки всей продукции для нового решения.

**Шаг 1**

Произведем оценку полученного решения

Каждому поставщику Ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика.

Каждому потребителю Bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя.

Для базисной ячейки (задействованного маршрута), сумма потенциалов поставщика и потребителя должна быть равна тарифу данного маршрута.

(ui + vj = cij, где cij - тариф клетки AiBj)

Поскольку, число базисных клеток - 6, а общее количество потенциалов равно 7, то для однозначного определения потенциалов, значение одного из них можно выбрать произвольно.

Примем v3 = 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| v3 + u2 = c23 | v3 + u2 = 9 | u2 = 9 - 0 = 9 |
| v3 + u3 = c33 | v3 + u3 = 18 | u3 = 18 - 0 = 18 |
| v4 + u3 = c34 | v4 + u3 = 16 | v4 = 16 - 18 = -2 |
| v2 + u2 = c22 | v2 + u2 = 11 | v2 = 11 - 9 = 2 |
| v2 + u1 = c12 | v2 + u1 = 16 | u1 = 16 - 2 = 14 |
| v1 + u1 = c11 | v1 + u1 = 14 | v1 = 14 - 14 = 0 |

Таблица 8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | u 1 = 14 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | u 2 = 9 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | u 3 = 18 |
| V i | v 1 = 0 | v 2 = 2 | v 3 = 0 | v 4 = -2 |  |

Найдем оценки свободных ячеек следующим образом (в таблице 9 они располагаются в нижнем левом углу ячейки):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 = c13 - ( u1 + v3 ) = 13 - ( 14 + 0 ) = -1 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif14 = c14 - ( u1 + v4 ) = 7 - ( 14 + ( -2 ) ) = -5 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif21 = c21 - ( u2 + v1 ) = 15 - ( 9 + 0 ) = 6 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 = c24 - ( u2 + v4 ) = 8 - ( 9 + ( -2 ) ) = 1 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif31 = c31 - ( u3 + v1 ) = 12 - ( 18 + 0 ) = -6 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif32 = c32 - ( u3 + v2 ) = 17 - ( 18 + 2 ) = -3 | |  |

Таблица 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -1 | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -5 | 7 | | u 1 = 14 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 6 | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 1 | 8 | | u 2 = 9 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -6 | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -3 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | u 3 = 18 |
| V i | v 1 = 0 | v 2 = 2 | v 3 = 0 | v 4 = -2 |  |

Среди оценок свободных ячеек есть отрицательные, следовательно решение не является оптимальным.

Из свободных ячеек (незадействованных маршрутов), имеющих отрицательные оценки, остановим свой выбор на ячейке A3B1 (Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif31 = - 6).

Построим цикл для выбранной ячейки A3B1.

Поставьте курсор мыши в выбранную свободную ячейку A3B1. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения курсора, соедините непрерывной линией базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A3B1. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной ячейки. Он единственный. Направление обхода не имеет значения.

Ячейки образующие цикл для свободной ячейки A3B1 :

A3B1 , A3B3 , A2B3 , A2B2 , A1B2 , A1B1

Пусть ячейка A3B1, для которой строили цикл, имеет порядковый номер один.

Таблица 10

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -6 | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Среди ячеек цикла A3B3 , A2B2 , A1B1 , номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением.

min = {30, 50, 50} = 30.

В данном случае, это ячейка A3B3.

Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых нечетные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A3 к потребителю B3, по которому доставляется меньше всего (30) единиц продукции. Данный маршрут мы исключим из схемы доставки продукции.

Таблица 11

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -6 | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 30. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 30.

Вводим новый маршрут доставки продукции от поставщика A3 к потребителю B1. По данному маршруту доставим 30 единиц продукции, по цене доставки 12 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 12\*30 ден. ед.

По маршруту от поставщика A3 к потребителю B3 полностью перестаем доставлять продукцию. Общие затраты уменьшатся на 18\*30 ден. ед.

От поставщика A2 к потребителю B3 дополнительно поставим 30 единиц продукции, по цене доставки 9 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 9\*30 ден. ед.

Сократим поставку от поставщика A2 к потребителю B2 на 30 единиц продукции, по цене доставки 11 за единицу продукции. Общие затраты уменьшатся на 11\*30 ден. ед.

От поставщика A1 к потребителю B2 дополнительно поставим 30 единиц продукции, по цене доставки 16 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 16\*30 ден. ед.

Сократим поставку от поставщика A1 к потребителю B1 на 30 единиц продукции, по цене доставки 14 за единицу продукции. Общие затраты уменьшатся на 14\*30 ден. ед.

Данные преобразования не изменят баланс между поставщиками и потребителями. Все поставщики израсходуют все свои запасы, а все потребители получат необходимое им количество продукции.

Таблица 12

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **50 - 30** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **20 + 30** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **50 - 30** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **30 + 30** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **+ 30** | | | -6 | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **30 - 30** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Общие расходы на доставку продукции от поставщиков к потребителям изменятся на:

Выражение, стоящее в скобках, равно оценке свободной ячейки (незадействованного маршрута), для которой строился цикл.

В тот момент, когда нашли ячейку с наименьшим значением (среди ячеек, номера которых четные в цикле), уже можно было сказать, что общие затраты изменятся на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif31 \* 30 = -6 \* 30 = -180 ден. ед.

Общие затраты на доставку всей продукции, для данного решения, составляют:

S0= 3660 + ( - 180 ) = **3480 ден. ед.**

Если оценки всех свободных ячеек (незадействованных маршрутов) неотрицательные, то снизить общую стоимость доставки всей продукции невозможно.

Воспользовавшись таблицей, в которой мы находили оценки свободных ячеек, можно убедиться, что в случае выбора:

- ячейки A1B3, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 \* 20 = - 1 \* 20 = - 20 ден. ед.

- ячейки A1B4, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif14 \* 20 = - 5 \* 20 = - 100 ден. ед.

- ячейки A3B2, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif32 \* 30 = - 3 \* 30 = - 90 ден. ед.

Ячейка A3B3 выйдет из базиса, не нужно доставлять продукцию от поставщика A3 к потребителю B3.

Ячейка A3B1 станет базисной, так как ввели новый маршрут доставки продукции от поставщика A3 к потребителю B1.

Таблица 13

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

**Шаг 2**

Произведем оценку полученного решения.

Каждому поставщику Ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика.

Каждому потребителю Bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя.

Примем v2 = 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| v2 + u1 = c12 | v2 + u1 = 16 | u1 = 16 - 0 = 16 |
| v2 + u2 = c22 | v2 + u2 = 11 | u2 = 11 - 0 = 11 |
| v3 + u2 = c23 | v3 + u2 = 9 | v3 = 9 - 11 = -2 |
| v1 + u1 = c11 | v1 + u1 = 14 | v1 = 14 - 16 = -2 |
| v1 + u3 = c31 | v1 + u3 = 12 | u3 = 12 - ( -2 ) = 14 |
| v4 + u3 = c34 | v4 + u3 = 16 | v4 = 16 - 14 = 2 |

Таблица 14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 7 | | u 1 = 16 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | u 2 = 11 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | u 3 = 14 |
| V i | v 1 = -2 | v 2 = 0 | v 3 = -2 | v 4 = 2 |  |

Найдем оценки свободных ячеек следующим образом (в таблице они располагаются в нижнем левом углу ячейки):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 = c13 - ( u1 + v3 ) = 13 - ( 16 + ( -2 ) ) = -1 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif14 = c14 - ( u1 + v4 ) = 7 - ( 16 + 2 ) = -11 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif21 = c21 - ( u2 + v1 ) = 15 - ( 11 + ( -2 ) ) = 6 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 = c24 - ( u2 + v4 ) = 8 - ( 11 + 2 ) = -5 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif32 = c32 - ( u3 + v2 ) = 17 - ( 14 + 0 ) = 3 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif33 = c33 - ( u3 + v3 ) = 18 - ( 14 + ( -2 ) ) = 6 | |  |

Таблица15

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -1 | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -11 | 7 | | u 1 = 16 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 6 | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -5 | 8 | | u 2 = 11 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 3 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 6 | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | u 3 = 14 |
| V i | v 1 = -2 | v 2 = 0 | v 3 = -2 | v 4 = 2 |  |

Среди оценок свободных ячеек есть отрицательные, следовательно решение не является оптимальным.

Из свободных ячеек (незадействованных маршрутов), имеющих отрицательные оценки, остановим свой выбор на ячейке A1B4 (Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif14 = - 11).

Построим цикл для выбранной ячейки A1B4:

Поставьте курсор мыши в выбранную свободную ячейку A1B4. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения курсора, соедините непрерывной линией базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A1B4. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной нами ячейки. Он единственный. Направление обхода не имеет значения.

Ячейки, образующие цикл для свободной ячейки A1B4:

A1B4 , A1B1 , A3B1 , A3B4.

Пусть ячейка A1B4, для которой строился цикл, имеет порядковый номер один.

Таблица 16

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -11 | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Среди ячеек цикла A1B1 , A3B4 , номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением.

min = { 20, 80 } = 20

В данном случае, это ячейка A1B1.

Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых нечетные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A1 к потребителю B1, по которому доставляется меньше всего (20) единиц продукции. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции.

Таблица 17

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -11 | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

От ячеек цикла с четными номерами отнимает 20. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 20.

Вводим новый маршрут доставки продукции от поставщика A1 к потребителю B4. По данному маршруту доставим 20 единиц продукции, по цене доставки 7 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 7\*20 ден. ед.

По маршруту от поставщика A1 к потребителю B1  полностью перестаем доставлять продукцию.

Общие затраты уменьшатся на 14\*20 ден. ед.

От поставщика A3 к потребителю B1 дополнительно поставим 20 единиц продукции, по цене доставки 12 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 12\*20 ден. ед.

Сократим поставку от поставщика A3 к потребителю B4 на 20 единиц продукции, по цене доставки 16 за единицу продукции. Общие затраты уменьшатся на 16\*20 ден. ед.

Данные преобразования не изменят баланс между поставщиками и потребителями. Все поставщики израсходуют все свои запасы, а все потребители получат необходимое им количество продукции.

Таблица 18

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **20 - 20** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **+ 20** | | | -11 | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **30 + 20** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **80 - 20** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Общие расходы на доставку продукции от поставщиков к потребителям изменятся на:

Выражение, стоящее в скобках, равно оценке свободной ячейки (незадействованного маршрута), для которой мы строили цикл.

Общие затраты на доставку всей продукции, для данного решения, составляют *S0* = 3480 + ( - 220 ) = **3260 ден. ед.**.

Если оценки всех свободных ячеек (незадействованных маршрутов) неотрицательные, то снизить общую стоимость доставки всей продукции невозможно.

Воспользовавшись таблицей, в которой находили оценки свободных ячеек, можно убедиться, что в случае выбора:

ячейки A1B3, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 \* 50 = -1 \* 50 = -50 ден. ед.

ячейки A2B4, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 \* 20 = -5 \* 20 = -100 ден. ед.

Ячейка A1B1 выйдет из базиса, прекратилась доставка продукции от поставщика A1 к потребителю B1.

Ячейка A1B4 станет базисной, введен новый маршрут доставки продукции от поставщика A1 к потребителю B4.

Таблица 19

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Шаг 3

Произведем оценку полученного решения

Каждому поставщику Ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика.

Каждому потребителю Bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя.

Примем v4 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| v4 + u1 = c14 | | v4 + u1 = 7 | | u1 = 7 - 0 = 7 | |
| v4 + u3 = c34 | | v4 + u3 = 16 | | u3 = 16 - 0 = 16 | |
| v2 + u1 = c12 | | v2 + u1 = 16 | | v2 = 16 - 7 = 9 | |
| v2 + u2 = c22 | | v2 + u2 = 11 | | u2 = 11 - 9 = 2 | |
| v3 + u2 = c23 | | v3 + u2 = 9 | | v3 = 9 - 2 = 7 | |
| v1 + u3 = c31 | v1 + u3 = 12 | | v1 = 12 - 16 = -4 | |

Таблица 20

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 7 | | u 1 = 7 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | u 2 = 2 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 16 | | u 3 = 16 |
| V i | v 1 = -4 | v 2 = 9 | v 3 = 7 | v 4 = 0 |  |

Найдем оценки свободных ячеек следующим образом (в таблице они располагаются в нижнем левом углу ячейки):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif11 = c11 - ( u1 + v1 ) = 14 - ( 7 + ( -4 ) ) = 11 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 = c13 - ( u1 + v3 ) = 13 - ( 7 + 7 ) = -1 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif21 = c21 - ( u2 + v1 ) = 15 - ( 2 + ( -4 ) ) = 17 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 = c24 - ( u2 + v4 ) = 8 - ( 2 + 0 ) = 6 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif32 = c32 - ( u3 + v2 ) = 17 - ( 16 + 9 ) = -8 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif33 = c33 - ( u3 + v3 ) = 18 - ( 16 + 7 ) = -5 | |  |

Таблица 21

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 11 | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -1 | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 7 | | u 1 = 7 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 17 | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 6 | 8 | | u 2 = 2 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -8 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -5 | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 16 | | u 3 = 16 |
| V i | v 1 = -4 | v 2 = 9 | v 3 = 7 | v 4 = 0 |  |

Среди оценок свободных ячеек есть отрицательные, следовательно решение не является оптимальным.

Из свободных ячеек (незадействованных маршрутов), имеющих отрицательные оценки, остановим свой выбор на ячейке A3B2 (Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif32 = - 8).

Ячейки образующие цикл для свободной ячейки A3B2 :

A3B2 , A3B4 , A1B4 , A1B2

Пусть ячейка A3B2 имеет порядковый номер один.

Таблица 22

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -8 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Среди ячеек цикла A3B4 , A1B2 , номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением.

min = { 60, 50 } = 50

В данном случае, это ячейка A1B2.

Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых нечетные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A1 к потребителю B2, по которому доставляется меньше всего (50) единиц продукции. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции.

Таблица 23

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -8 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 50. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 50.

Вводим новый маршрут доставки продукции от поставщика A3 к потребителю B2. По данному маршруту доставим 50 единиц продукции, по цене доставки 17 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 17\*50 ден. ед.

Сократим поставку от поставщика A3 к потребителю B4 на 50 единиц продукции, по цене доставки 16 за единицу продукции. Общие затраты уменьшатся на 16 \* 50 ден. ед.

От поставщика A1  к потребителю B4  дополнительно поставим 50 единиц продукции, по цене доставки 7 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 7 \* 50 ден. ед.

По маршруту от поставщика A1  к потребителю B2  полностью перестаем доставлять продукцию.

Общие затраты уменьшатся на 16 \* 50 ден. ед.

Данные преобразования не изменят баланс между поставщиками и потребителями. Все поставщики израсходуют все свои запасы, а все потребители получат необходимое им количество продукции.

Таблица 24

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **50 - 50** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **20 + 50** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **+ 50** | | | -8 | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **60 - 50** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Общие расходы на доставку продукции от поставщиков к потребителям изменятся на:

Выражение, стоящее в скобках, равно оценке свободной ячейки (незадействованного маршрута), для которой строился цикл.

Общие затраты на доставку всей продукции, для данного решения, составляют *S0* = 3260 + ( - 400 ) = **2860 ден. ед.**

В случае выбора:

- ячейки A1B3, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 \* 50 = -1 \* 50 = -50 ден. ед.

- ячейки A3B3, общая стоимость доставки всей продукции изменилась бы на Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif33 \* 50 = -5 \* 50 = -250 ден. ед.

Ячейка A1B2  выйдет из базиса, прекращена доставка продукции от поставщика A1  к потребителю B2.

Ячейка A3B2  станет базисной, введен новый маршрут доставки продукции от поставщика A3 к потребителю B2.

Таблица 25

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

**Шаг 4**

Проведем оценку полученного решения.

Каждому поставщику Ai  ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика.

Каждому потребителю Bj  ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя.

Примем u3 = 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| v1 + u3 = c31 | v1 + u3 = 12 | v1 = 12 - 0 = 12 |
| v2 + u3 = c32 | v2 + u3 = 17 | v2 = 17 - 0 = 17 |
| v4 + u3 = c34 | v4 + u3 = 16 | v4 = 16 - 0 = 16 |
| v4 + u1 = c14 | v4 + u1 = 7 | u1 = 7 - 16 = -9 |
| v2 + u2 = c22 | v2 + u2 = 11 | u2 = 11 - 17 = -6 |
| v3 + u2 = c23 | v3 + u2 = 9 | v3 = 9 - ( -6 ) = 15 |

Таблица 26

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | u 1 = -9 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 8 | | u 2 = -6 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 16 | | u 3 = 0 |
| V i | v 1 = 12 | v 2 = 17 | v 3 = 15 | v 4 = 16 |  |

Найдем оценки свободных ячеек следующим образом (в таблице они располагаются в нижнем левом углу ячейки):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif11 = c11 - ( u1 + v1 ) = 14 - ( -9 + 12 ) = 11 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif12 = c12 - ( u1 + v2 ) = 16 - ( -9 + 17 ) = 8 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 = c13 - ( u1 + v3 ) = 13 - ( -9 + 15 ) = 7 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif21 = c21 - ( u2 + v1 ) = 15 - ( -6 + 12 ) = 9 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 = c24 - ( u2 + v4 ) = 8 - ( -6 + 16 ) = -2 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif33 = c33 - ( u3 + v3 ) = 18 - ( 0 + 15 ) = 3 | |  |

Таблица 27

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 11 | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 8 | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 7 | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | u 1 = -9 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 9 | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -2 | 8 | | u 2 = -6 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 3 | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 16 | | u 3 = 0 |
| V i | v 1 = 12 | v 2 = 17 | v 3 = 15 | v 4 = 16 |  |

Оценка свободной ячейки A2B4 (незадействованного маршрута) отрицательная (Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif24 =-2), следовательно решение не является оптимальным.

Ячейки образующие цикл для свободной ячейки A2B4:

A2B4 , A2B2 , A3B2 , A3B4.

Пусть ячейка A2B4  имеет порядковый номер один.

Таблица 28

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -2 | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Среди ячеек цикла A2B2 , A3B4 , номера которых четные, найдем ячейку, обладающую найменьшим значением.

min = { 20, 10 } = 10

В данном случае, это ячейка A3B4.

Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых нечетные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A3 к потребителю B4, по которому доставляется меньше всего (10) единиц продукции . Данный маршрут мы исключим из схемы доставки продукции.

Таблица 29

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | -2 | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 10. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 10.

Вводим новый маршрут доставки продукции от поставщика A2  к потребителю B4. По данному маршруту доставим 10 единиц продукции, по цене доставки 8 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 8 \* 10 ден. ед.

Сократим поставку от поставщика A2 к потребителю B2 на 10 единиц продукции, по цене доставки 11 за единицу продукции. Общие затраты уменьшатся на 11 \* 10 ден. ед.

От поставщика A3  к потребителю B2  дополнительно поставим 10 единиц продукции, по цене доставки 17 за единицу продукции. Общие затраты увеличатся на 17 \* 10 ден. ед.

По маршруту от поставщика A3 к потребителю B4  полностью перестаем доставлять продукцию.

Общие затраты уменьшатся на 16 \* 10 ден. ед.

Данные преобразования не изменят баланс между поставщиками и потребителями. Все поставщики израсходуют все свои запасы, а все потребители получат необходимое им количество продукции.

Таблица 30

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **20 - 10** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **+ 10** | | | -2 | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **50 + 10** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **10 - 10** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

Общие расходы на доставку продукции от поставщиков к потребителям изменятся на:

Общие затраты на доставку всей продукции, для данного решения, составляют *S0* = 2860 + ( - 20 ) = **2840 ден. ед.**

Если оценки всех свободных ячеек (незадействованных маршрутов) неотрицательные, то снизить общую стоимость доставки всей продукции невозможно.

Ячейка A3B4 выйдет из базиса, прекратилась доставка продукции от поставщика A3 к потребителю B4.

Ячейка A2B4 станет базисной, введен новый маршрут доставки продукции от поставщика A2 к потребителю B4.

Таблица 31

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | 70 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 8 | | 80 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | 110 |
| Потребность | 50 | 70 | 60 | 80 |  |

**Шаг 5**

Каждому поставщику Ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика.

Каждому потребителю Bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя.

Примем u2 = 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| v2 + u2 = c22 | v2 + u2 = 11 | v2 = 11 - 0 = 11 |
| v3 + u2 = c23 | v3 + u2 = 9 | v3 = 9 - 0 = 9 |
| v4 + u2 = c24 | v4 + u2 = 8 | v4 = 8 - 0 = 8 |
| v2 + u3 = c32 | v2 + u3 = 17 | u3 = 17 - 11 = 6 |
| v4 + u1 = c14 | v4 + u1 = 7 | u1 = 7 - 8 = -1 |
| v1 + u3 = c31 | v1 + u3 = 12 | v1 = 12 - 6 = 6 |

Таблица 32

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | u 1 = -1 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 8 | | u 2 = 0 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | |  | 16 | | u 3 = 6 |
| V i | v 1 = 6 | v 2 = 11 | v 3 = 9 | v 4 = 8 |  |

Найдем оценки свободных ячеек следующим образом (в таблице они располагаются в нижнем левом углу ячейки):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif11 = c11 - ( u1 + v1 ) = 14 - ( -1 + 6 ) = 9 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif12 = c12 - ( u1 + v2 ) = 16 - ( -1 + 11 ) = 6 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif13 = c13 - ( u1 + v3 ) = 13 - ( -1 + 9 ) = 5 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif21 = c21 - ( u2 + v1 ) = 15 - ( 0 + 6 ) = 9 | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif33 = c33 - ( u3 + v3 ) = 18 - ( 6 + 9 ) = 3 | | | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_delta.gif34 = c34 - ( u3 + v4 ) = 16 - ( 6 + 8 ) = 2 | |  |

Таблица 33

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | U j |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 9 | 14 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 6 | 16 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 5 | 13 | | |  |  | | --- | --- | | **70** | | |  | 7 | | u 1 = -1 |
| A 2 | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 9 | 15 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 11 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 9 | | |  |  | | --- | --- | | **10** | | |  | 8 | | u 2 = 0 |
| A 3 | |  |  | | --- | --- | | **50** | | |  | 12 | | |  |  | | --- | --- | | **60** | | |  | 17 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 3 | 18 | | |  |  | | --- | --- | | **-** | | | 2 | 16 | | u 3 = 6 |
| V i | v 1 = 6 | v 2 = 11 | v 3 = 9 | v 4 = 8 |  |

Все оценки свободных ячеек положительные, следовательно, найдено оптимальное решение.

**Ответ**:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X опт = | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_matrix1.gif | 0 | 0 | 0 | 70 | Описание: http://www.reshmat.ru/images/znak_matrix2.gif |
| 0 | 10 | 60 | 10 |
| 50 | 60 | 0 | 0 |

Таким образом, общие затраты на доставку всей продукции, для оптимального решения, составляют **2840 ден. ед.**