Адиабатное течение газов в каналах

Рассмотрим случай, когда поток движется в канале переменного сечения без совершения технической работы. Если геометрическая высота центров сечений канала не изменяется, то выражение первого закона термодинамики потока принимает вид

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} J dp$$

или в дифференциальной форме

$$w dw = -J dp$$

Полученное соотношение показывает, что изменение скорости потока в канале всегда обратно по знаку изменению давления, т.е. если давление рабочего тела в канале уменьшается, то скорость его увеличивается, и наоборот.

Каналы переменного сечения, в которых происходит расширение рабочего тела (давление уменьшается) и скорость рабочего тела увеличивается, называются *соплами*.

Каналы, в которых происходит обратный процесс и за счет уменьшения кинетической энергии потока (уменьшения скорости) давление его повышается, называются *диффузорами*.

Основой для вывода общих закономерностей движения рабочего тела в соплах и диффузорах является уравнение неразрывности потока

$$G = rwf = \mathrm{const}$$

где G – массовый расход рабочего тела;
f – площадь произвольного сечения канала.

Изменение давления и скорости потока создается противоположным воздействием геометрической формы канала на поток (очевидно, что при G=const и увеличении ω нужно уменьшить f). Это положение носит название *закона геометрического обращения воздействия.*

Истечение газов через суживающиеся сопла

Начало отсчёта скорости в соплах (во входном сечении) принято ω=0. Уравнение первого закона термодинамики $q = i_2 - i_1 - \int_{p_1}^{p_2} J\,dp$ при адиабатном истечении рабочего тела через сопло:

$$l_k = \frac{w_0^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} J\,dp = i_1 - i_2$$

где ω_0 – теоретическая скорость, потока в выходном сечении сопла;

p_1 – начальное давление рабочего тела;

p_2 – давление среды, в которую, происходит истечение.

Исходя из равенства $w_0^2 / 2 = i_1 - i_2$, теоретическую скорость истечения рабочего тела через сопло в рассматриваемом случае можно определить:

$$w_0 = \sqrt{2\left(i_1 - i_2\right)}$$

Для идеальных газов формула теоретической скорости истечения получается след. образом:

$$h_0 = i_1 - i_2 = u_1 - u_2 + (p_1 J_1 - p_2 J_2),$$

а поскольку в адиабатном процессе $u_1 - u_2 = \dfrac{1}{k-1}(p_1 J_1 - p_2 J_2)$,

получаем $i_1 - i_2 = \dfrac{1}{k-1}(p_1 J_1 - p_2 J_2) + (p_1 J_1 - p_2 J_2) = \dfrac{k}{k-1}(p_1 J_1 - p_2 J_2)$.

Тогда $w_0 = \sqrt{2\dfrac{k}{k-1}(p_1 J_1 - p_2 J_2)} = \sqrt{2\dfrac{k}{k-1}\, p_1 J_1 (1 - \dfrac{p_2 J_2}{p_1 J_1})}$.

Основной характеристикой процесса истечения является отношение конечного давления к начальному $n = \dfrac{p_2}{p_1}$.

Выразим теоретическую скорость истечения ω_0 как функцию величины *v*:

$$\frac{J_2}{J_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/k} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/k} = n^{-1/k} \text{ и } \frac{p_2 J_2}{p_1 J_1} = n \cdot n^{-1/k} = n^{1-1/k} = n^{\frac{k-1}{k}}.$$

Тогда $w_0 = \sqrt{2\dfrac{k}{k-1} p_1 J_1 \left(1 - n^{\frac{k-1}{k}}\right)}$

Обозначив площадь выходного сечения канала через f_2, в соответствии с формулой неразрывности потока $G_2=\rho_2\omega_0 f_2$:

$$G_2 = f_2\sqrt{2\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{J_1}\frac{J_1^2}{J_2^2}\left(1-n^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

Преобразуя $\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}=n^{\frac{2}{k}}$ и $\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2\cdot\left(1-n^{\frac{k-1}{k}}\right)=n^{\frac{2}{k}}-n^{\frac{2}{k}+\frac{k-1}{k}}=n^{\frac{2}{k}}-n^{\frac{k+1}{k}}$,

имеем $$G_2 = f_2\sqrt{2\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{J_1}\left(n^{\frac{2}{k}}-n^{\frac{k+1}{k}}\right)}$$

Анализ данного выражения показывает, что при $n = p_2 / p_1 = 1$, т.е. когда $p_2 = p_1$, расход газа $G_2 = 0$, т.е. истечение газа не происходит. При уменьшении v расход газа возрастает, но при $v = 0$ он опять становится нулевым.

Из сказанного вытекает, что при некотором значении $1 > n > 0$ расход газа G_2 достигает максимума.

Чтобы найти значение v, соответствующее максимуму G_2, следует приравнять нулю первую производную функции $y = n^{\frac{2}{k}} - n^{\frac{k+1}{k}}$,

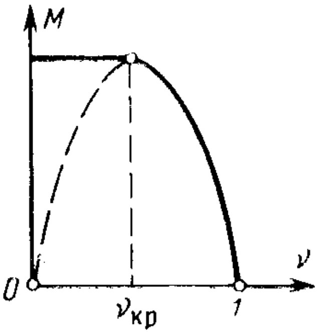
Т.е. $\dfrac{dy}{dn} = \dfrac{2}{k} n^{\frac{2}{k}-1} - \dfrac{k+1}{k} n^{\frac{k+1}{k}-1} = 0$

После преобразований получим $n = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$.

Значение *v*, при котором расход газа достигает максимума, называется критическим $v_{кр}$:

$$n_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Как и показатель адиабаты, величина $v_{кр}$ является физической константой газа.



В действительности после достижения максимума расход газа с уменьшением *v* не уменьшается, а остается постоянным.

При уменьшении давления газа за соплом p_2 (при неизменном давлении p_1) расход газа увеличивается, а затем, когда за соплом устанавливается критическое давление $p_{кр} = n_{кр} p_1$, увеличение расхода газа прекращается и, как бы ни уменьшалось давление p_2, в выходном сечении будет иметь место постоянное давление $p_{кр}$.

Расширение газа будет происходить уже вне сопла и потому не даст дополнительного возрастания скорости.

Значение критической скорости:

$$w_{кр} = \sqrt{2\frac{k}{k-1}p_1 J_1\left(1 - n_{кр}^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

Подставляя сюда $n_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ и выполнив преобразования, получим:

$$w_{кр} = \sqrt{2\frac{k}{k+1}p_1 J_1}$$

Найдем зависимость между величиной $\omega_{кр}$ и параметрами газа в выходном сечении $p_{кр}$ и $\upsilon_{кр}$.

$$\frac{J_1}{J_{кр}} = \left(\frac{p_{кр}}{p_1}\right)^{1/\kappa} = n_{кр}^{1/\kappa};$$

При адиабатном истечении $J_1 = J_{кр} n_{кр}^{1/\kappa} = J_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{1}{\kappa}} = J_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}};$

$$\frac{p_{кр}}{p_1} = n_{кр};\; p_1 = p_{кр} n_{кр}^{-1} = p_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Тогда $p_1 J_1 = p_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} J_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = p_{кр} J_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = p_{кр} J_{кр}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{-1}$

В итоге $w_{кр} = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1} p_{кр} J_{кр} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{-1}} = \sqrt{\kappa p_{кр} J_{кр}}$

Из физики известно, что скорость распространения звука в газовой среде выражается формулой $a = \sqrt{kpJ}$.

Т.о. критическая скорость истечения газа из сопла равна скорости распространения звуковой волны в этом газе при его параметрах $p_{кр}$ и $\upsilon_{кр}$.

В этом содержится физическое объяснение тому, что при снижении внешнего давления p_2 ниже $p_{кр}$, скорость истечения не изменяется, а остается равной $\omega_{кр}$.

Действительно, если $p_2 > p_{кр}$, то $\omega < \omega_{кр}$ или $\omega < a$ и всякое понижение давления p_2 передается вдоль сопла в направлении, обратном движению потока, со скоростью a-ω.

Если же p_2 снизится до $p_{кр}$, то дальнейшее понижение его уже не сможет распространяться вдоль сопла, поскольку скорость его распространения навстречу потоку снизится до нуля (a-$\omega_{кр}$= 0). Поэтому расход газа не изменится в выходном сечении, т.е. скорость истечения останется постоянной и равной $\omega_{кр}$.

Истечение газа через комбинированные сопла

Можно ли получить сверхкритическую скорость истечения газа?

По закону геометрического обращения воздействия после снижения давления до $p_{кр}$ и достижения скоростью значения $a=\omega_{кр}$ дальнейшее расширение газа и возрастание скорости его возможно лишь в том случае, *если проходное сечение сопла начнет увеличиваться*.

Это означает, что при $n < n_{кр}$ сопло должно быть комбинированным – сначала суживаться а затем расширяться (сопло Лаваля).

В минимальном сечении сопла Лаваля скорость движения газа равна местной скорости звука, а максимальный расход газа через такое сопло

$$G_{\max} = f_{\min} w_{кр} \frac{1}{J_{кр}} = f_{out} w_{out} \frac{1}{J_{out}}$$

где $J_{out} = J_1 \left(\dfrac{p_1}{p_{out}} \right)^{1/k}$ – удельный объём газа при внешнем давлении p_2.