

**Условия однозначности для процессов теплопроводности**

Дифференциальное уравнение теплопроводности описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Чтобы выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности называются *условиями однозначности или краевыми условиями*.

Условия однозначности включают в себя:

- геометрические условия (форма и размеры тела);
- физические условия (физические свойства среды и тела  $\lambda, c, \rho, q_b$ );
- временные (начальные) условия (распределение температур в теле в начальный момент времени);
- граничные условия (взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой):

а) *Граничные условия первого рода*. Задаётся распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени

$$t_c = f(x, y, z, t),$$

где  $t_c$  – температура на поверхности тела;  $x, y, z$  – координаты поверхности тела.

В частном случае, когда температура на поверхности является постоянной на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение упрощается:  $t_c = const$ .

б) *Граничные условия второго рода*. Задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени

$$q_n = f(x, y, z, t)$$

где  $q_n$  – плотность теплового потока на поверхности тела.

В простейшем случае  $q_n = q_o = const$ . Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

в) *Граничные условия третьего рода*. При этом задаются температура окружающей среды  $t_{ж}$  и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Рихмана: количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела  $t_c$  и окружающей среды  $t_{ж}$  ( $t_c > t_{ж}$ )

$$q = a \cdot (t_c - t_{жс})$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К), характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи, должно равняться теплоте, подводимой к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т.е.

$$a \cdot (t_c - t_{жс}) = -I \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$$

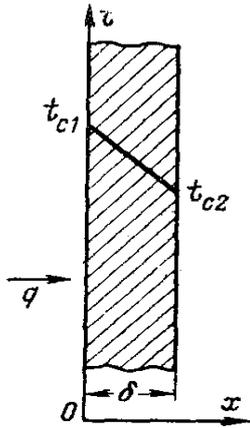
где  $n$  – нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при  $n=0$ ).

## **Стационарная теплопроводность в телах простейшей формы**

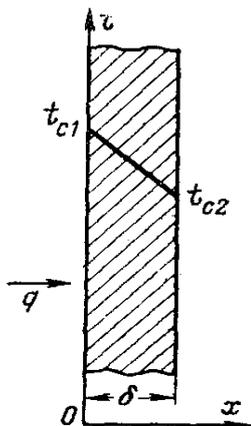
## Плоская стенка

При установившемся или стационарном тепловом режиме температура тела во времени остается постоянной, т.е.  $\frac{\partial t}{\partial t} = 0$ . Если внутренние источники теплоты отсутствуют ( $q_u = 0$ ), то уравнение Фурье имеет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

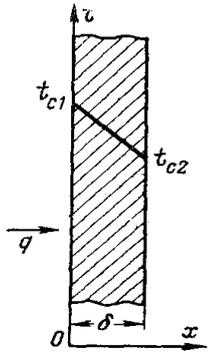


Рассмотрим изотропную стенку толщиной  $\delta$ , высота и ширина которой являются величинами бесконечно большими относительно толщины  $\delta$ , с постоянным коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ . На наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянными температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ .



При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось  $Ox$  направить, как показано на рисунке, то температура в направлении осей  $Oy$  и  $Oz$  будет оставаться постоянной

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$



Температура будет функцией только одной координаты  $x$  и уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая запишется

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

Зададим граничные условия в рассматриваемой задаче

при  $x = 0$   $t = t_{c1}$

при  $x = \delta$   $t = t_{c2}$

В результате решения поставленной задачи должно быть найдено распределение температуры в плоской стенке, т.е.  $t = f(x)$ , и получена формула для определения количества теплоты, проходящего в единицу времени через стенку.

Закон распределения температур по толщине стенки найдется в результате двойного интегрирования уравнения Фурье.

Первое интегрирование  $\frac{dt}{dx} = C_1$

Второе интегрирование  $t = C_1x + C_2$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий:

при  $x = 0$  и  $t = t_{c1}$   $C_2 = t_{c1}$

при  $x = \delta$  и  $t = t_{c2}$   $C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d}$

В итоге, закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{x}{d}$$

Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности стенки в единицу времени в направлении оси  $Ox$ , воспользуемся законом Фурье

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}, \text{ а } \frac{dt}{dx} = C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{d}$$

Следовательно  $q = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2})$

Из уравнения следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности  $\lambda$ , разности температур на наружных поверхностях стенки  $(t_{c1} - t_{c2})$  и обратно пропорционально толщине стенки  $\delta$ .

Отношение  $\delta/\lambda$ ,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$  называется тепловым или термическим сопротивлением стенки.

Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты  $Q_t$ , Дж, которое передаётся через поверхность стенки величиной  $F$  за промежуток времени  $\tau$

$$Q_t = q \cdot F \cdot t = \frac{l}{d} \cdot (t_{c1} - t_{c2}) \cdot F \cdot t$$

Рассмотрим теплопроводность многослойной плоской стенки, состоящей из  $n$  однородных слоев. Примем, что контакт между слоями совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях двух слоев одинакова.

При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же

При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоев и соответствующих коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений

$$q = \frac{l_1}{d_1} \cdot (t_{c1} - t_{c2});$$

$$q = \frac{l_2}{d_2} \cdot (t_{c2} - t_{c3});$$

.....

$$q = \frac{l_n}{d_n} \cdot (t_{cn} - t_{c(n+1)})$$

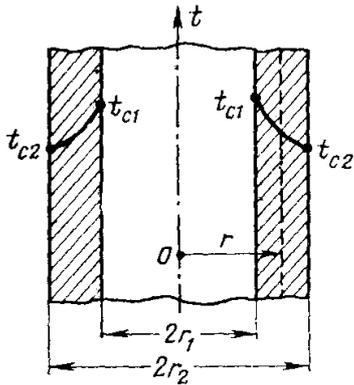
Выразив температурные напоры в каждом слое и сложив правые и левые части полученных уравнений, будем иметь

$$t_{c1} - t_{c(n+1)} = q \cdot \left( \frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \dots + \frac{d_n}{l_n} \right).$$

Отсюда 
$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\frac{d_1}{l_1} + \frac{d_2}{l_2} + \dots + \frac{d_n}{l_n}} = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_i}{l_i}}$$

Величина  $\sum_{i=1}^{i=n} d_i / l_i$ , равна сумме термических сопротивлений всех  $n$  слоев, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

## Цилиндрическая стенка



Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе с внутренним диаметром  $d_1=2r_1$  и наружным диаметром  $d_2=2r_2$ ).

На поверхностях стенки заданы постоянные температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ . В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda$  является постоянной величиной.

Необходимо найти распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

При этом ось Oz совмещена с осью трубы.

При заданных условиях температура изменяется только в радиальном направлении и температурное поле будет одномерным. Поэтому

$$\frac{\partial^2 t}{\partial j^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Уравнение Фурье примет вид

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0$$

Граничные условия

при  $r = r_1$   $t = t_{c1}$

при  $r = r_2$   $t = t_{c2}$

Введём новую переменную  $u = \frac{dt}{dr}$

тогда  $\frac{du}{dr} = \frac{d^2t}{dr^2}$

Подставляя в уравнение Фурье, получим

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot u = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

Интегрируя, получаем

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 \rightarrow u \cdot r = C_1 \rightarrow \frac{dt}{dr} \cdot r = C_1 \rightarrow dt = C_1 \frac{dr}{r}.$$

После интегрирования

$$t = C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad (*)$$

Подставляя граничные условия

$$t_{c1} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$

$$t_{c2} = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2$$

Решение уравнений дает

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Подставив значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (\*), получим

$$t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{или} \quad t = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \cdot \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$

Для нахождения количества теплоты,  $Q$ , проходящего через цилиндрическую поверхность величиной  $F$  в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье

$$Q = -l \frac{dt}{dr} \cdot F .$$

Учитывая, что  $F = 2\pi \cdot r \cdot l$  и

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} = -\frac{1}{r} (t_{c1} - t_{c2}) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

получаем

$$Q = \frac{2 \cdot p \cdot l \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}, \text{ Вт.}$$

Следовательно, количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Тепловой поток  $Q$  может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом расчетные формулы для плотности теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>, принимают вид

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot r_1 \cdot l} = q_1 = \frac{2 \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток через единицу внутренней поверхности);

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot r_2 \cdot l} = q_2 = \frac{2 \cdot l \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{d_2 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток через единицу наружной поверхности);

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{p \cdot (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2 \cdot l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

(тепловой поток, проходящий через единицу длины трубы, Вт/м).